

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В. А. Скляренко О. И. Трубина

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Практикум

Владимир 2009

УДК 514.14
ББК 22.151.31
С43

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного гуманитарного университета
В. В. Жиков

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
Н. И. Дубровин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Скляренко, В. А.

С43 **Аффинные пространства : практикум / В. А. Скляренко,
О. И. Трубина ; Владим. гос. ун-т. — Владимир : Изд-во Вла-
дим. гос. ун-та, 2009. — 108 с. — ISBN 978-5-89368-928-0**

Соответствует программе курса «Аналитическая геометрия» для математиче-
ских специальностей университета. Содержатся необходимые теоретические сведе-
ния и задачи для самостоятельного решения.

Может использоваться студентами физико-математических специальностей
первого курса дневной формы обучения.

Табл. 1. Ил. 8. Библиогр.: 7 назв.

УДК 514.14
ББК 22.151.31

ISBN 978-5-89368-928-0

© Владимирский государственный
университет, 2009

А вот и тропинка, она ведет прямо вверх. . .
нет, совсем не прямо. . .

Л. Кэррол «Алиса в Зазеркалье»

Предисловие

Практикум представляет собой сборник индивидуальных заданий по одному из разделов аналитической геометрии. Тематика предложенных задач касается основных понятий, связанных с n -мерными аффинными пространствами: аффинные системы координат, линейные геометрические образы, аффинные преобразования пространства, измерения в аффинных евклидовых пространствах.

Предложено тридцать однотипных вариантов по двадцать шесть задач в каждом. Типы заданий во многом определены сборником [7].

Все задания распределяются по трем разделам, каждый из которых имеет вводную часть. Эта часть практикума содержит примеры решений типовых задач и теоретический материал: определения основных понятий и формулировки используемых теорем. При этом предполагаются известными некоторые понятия линейной алгебры, в частности, понятие линейного пространства, а также методы решения и исследования систем линейных уравнений.

Доказательства приведенных утверждений и теорем к соответствующим разделам можно найти в классических учебниках: к первому разделу — в [1, гл. 3, 8, 14], [5, гл. 3], [6, лекции 5, 11]; ко второму разделу — в [5, гл. 8], [6, лекция 14]; к третьему — в [1, гл. 11], [6, лекция 27], а также в курсе лекций [4].

Включение теоретического материала в вводную часть позволяет проследить логический путь решения задачи.

Всестороннему изучению данной темы способствует решение задач, включенных в задачки [2], [7] и в учебное пособие [3], в котором приведены примеры решения некоторых типовых задач.

Пособие соответствует программе дисциплины «Аналитическая геометрия» для математических специальностей университета и предназначено прежде всего студентам этих специальностей.

Пособие может быть полезным и будущим инженерам для формирования и закрепления навыков работы с геометрическими объектами.

Считаем, что издание окажется полезным и в плане методического обеспечения курса аналитической геометрии.

1. Аффинные пространства

1.1. Определение n -мерного аффинного пространства.

Аффинная система координат

Пусть \mathcal{A} — некоторое множество, элементы которого будем называть *точками*, V — n -мерное линейное пространство над полем действительных чисел и $\varphi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ — отображение, которое каждой упорядоченной паре точек $M, N \in \mathcal{A}$ ставит в соответствие вектор $\vec{a} = \varphi(M, N) \in V$. Условимся обозначать $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}$.

Определение 1.1. Множество \mathcal{A} называется *n -мерным аффинным пространством*, если выполняются следующие условия:

1. Для любой точки $M \in \mathcal{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ найдется, причем только одна, точка $N \in \mathcal{A}$ такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.
2. Для любых трех точек $M, N, K \in \mathcal{A}$ справедливо равенство: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}$.

В этом случае V называют *линейным пространством, ассоциированным с аффинным пространством \mathcal{A}* .

В частности, прямая, плоскость и пространство, изучаемые в элементарной геометрии, являются аффинными пространствами размерности $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ соответственно.

Аффинная система координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ определяется в \mathcal{A} выбором точки $O \in \mathcal{A}$ и базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в ассоциированном линейном пространстве V . Точка O называется *началом координат*.

Аффинными координатами точки $M \in \mathcal{A}$ в заданной аффинной системе координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ называется упорядоченный набор (x^1, \dots, x^n) действительных чисел — координат вектора $\overrightarrow{OM} \in V$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Координаты точки M записывают в виде $M(x^1, \dots, x^n)$.

Точку $E(1, \dots, 1)$ называют *единичной точкой* данной системы координат.

Так, аффинная система координат на прямой — $O\vec{e}$, где $\vec{e} \neq 0$; аффинная система координат на плоскости — $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, где векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 не коллинеарны; аффинная система координат в трехмерном пространстве — $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — некопланарные векторы.

1.2. Плоскости в аффинном пространстве

Пусть L линейное подпространство размерности $k < n$ в линейном пространстве V , ассоциированном с \mathcal{A} , и M_0 — фиксированная точка в \mathcal{A} .

Определение 1.2. Совокупность точек $M \in \mathcal{A}$ таких, что вектор $\overrightarrow{M_0M} \in L$, называется k -мерной плоскостью \mathcal{P} , проходящей через точку M_0 в направлении подпространства L .

Так, нуль-мерная плоскость есть точка. Одномерные плоскости называются прямыми, плоскости размерности $n - 1$ — гиперплоскостями.

Условимся говорить, что векторы из направляющего подпространства L компланарны плоскости \mathcal{P} .

Заметим, что понятие плоскости удовлетворяет определению 1.1, где в качестве носителя взято \mathcal{P} , L — ассоциированное линейное пространство, а отображение $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow L$ является сужением φ на $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Поэтому плоскость $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ называют аффинным подпространством \mathcal{A} .

Если направляющее подпространство L плоскости задано как линейная оболочка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{c}$, то есть $L = \langle \vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{c} \rangle$, то плоскость будем записывать в виде $\mathcal{P} = M_0 + \langle \vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{c} \rangle$.

Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k$ — линейно независимая система векторов в L . Тогда совокупность всех точек $M \in \mathcal{P}$ описывается уравнением

$$\overrightarrow{M_0M} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k, \quad (1.1)$$

где t_1, \dots, t_k принимают все значения из множества \mathbb{R} действительных чисел.

Пусть в \mathcal{A} выбрана система координат с началом в точке O . Поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$, уравнение (1.1) равносильно уравнению

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k, \quad (1.2)$$

где $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ (рис. 1, $k = 2$). Равенство (1.2) называют векторным параметрическим уравнением k -мерной плоскости; числа t_1, \dots, t_k — параметрами.

где $t \in (-\infty, \infty)$.

b) Компланарные плоскости векторы $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1, -1, 1)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 0, 1, -1)$ линейно независимы, поэтому заданные точки однозначно определяют двумерную плоскость, проходящую через точку A в направлении подпространства $L = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x^1 = 1 - t_1 + t_2, \\ x^2 = 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 1 - t_1, \\ x^4 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^5 = t_1 - t_2, \end{cases}$$

где $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$. □

Ответ. a) $\ell: x^1 = 2t, x^2 = 1 + 3t, x^3 = 2 + 4t, x^4 = 3 + 5t$;
b) $\mathcal{P}: x^1 = 1 - t_1 + t_2, x^2 = 2t_1 - 2t_2, x^3 = 1 - t_1, x^4 = 2 - t_1 + t_2, x^5 = t_1 - t_2$.

Другой способ определить плоскость в n -мерном аффинном пространстве — задать её системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_i^j x^i = c^j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

При этом решения (x^1, \dots, x^n) системы (1.4) понимают как координаты точки аффинного пространства в фиксированной системе координат. Связь плоскостей с системами линейных уравнений устанавливает

Теорема 1.1. Пусть (1.4) есть совместная система ранга r . Тогда множество ее решений есть плоскость n -мерного пространства, имеющая размерность $k = n - r$. Обратно, всякая k -мерная плоскость в n -мерном аффинном пространстве есть множество всех решений некоторой системы линейных уравнений ранга $r = n - k$ вида (1.4).

Замечание 1.1. Если плоскость задана системой (1.4), то множество решений соответствующей однородной системы образует линейное пространство. Оно является направляющим подпространством

этой плоскости. Базис в направляющем подпространстве образуют векторы фундаментальной системы решений однородной системы.

Согласно теореме 1.1 гиперплоскость может быть задана одним линейным уравнением вида

$$A_1x^1 + \dots + A_nx^n + B = 0,$$

где $(A_1)^2 + \dots + (A_n)^2 \neq 0$, а прямая — системой из $(n - 1)$ -го уравнения:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{b^1} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{b^n}, \quad (b^1)^2 + \dots + (b^n)^2 \neq 0. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) называются *каноническими уравнениями* прямой. Они могут быть получены из параметрических уравнений (1.3), где $k = 1$, исключением параметра t и определяют прямую, проходящую через точку (x_0^1, \dots, x_0^n) в направлении вектора $\vec{b} = (b^1, \dots, b^n)$.

Так, канонические уравнения прямой из примера 1.1, а) имеют вид

$$\frac{x^1}{2} = \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{x^3 - 2}{4} = \frac{x^4 - 3}{5}.$$

Пример 1.2. Найти уравнение гиперплоскости \mathcal{P} , проходящей через точки $A(1, 0, 1, 0)$, $B(3, 1, 2, 3)$, $C(4, 0, 0, 1)$, $D(2, 2, 3, 1)$.

Решение. Векторы $\vec{AB} = (2, 1, 1, 3)$, $\vec{AC} = (3, 0, -1, 1)$ и $\vec{AD} = (1, 2, 2, 1)$ — линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

составленной из их координат, равен 3 (выделенный минор отличен от нуля). Следовательно, данные точки определяют плоскость размерности 3 в четырехмерном пространстве. Точка $M(x^1, \dots, x^n)$ принадлежит плоскости \mathcal{P} тогда и только тогда, когда вектор $\vec{AM} = (x^1 - 1, x^2, x^3 - 1, x^4)$ принадлежит её направляющему подпространству $L = \langle \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \rangle$, то есть

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1 - 1 & x^2 & x^3 - 1 & x^4 \end{pmatrix} = 3.$$

Последнее равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ x^1 - 1 & x^2 & x^3 - 1 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим искомое уравнение гиперплоскости

$$-5(x^1 - 1) + 13x^2 - 12(x^3 - 1) + 3x^4 = 0,$$

или

$$5x^1 - 13x^2 + 12x^3 - 3x^4 - 17 = 0. \quad \square$$

Ответ. $\mathcal{P}: 5x^1 - 13x^2 + 12x^3 - 3x^4 - 17 = 0.$

Пример 1.3. Найти систему линейно независимых уравнений, определяющую плоскость

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = t_1 - t_2, \\ x^2 = 2 + t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 3 - 2t_1 + t_2, \\ x^4 = -1 + 2t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

Решение. Плоскость \mathcal{P} проходит через точку $M_0(0, 2, 3, -1)$. Ее направляющее подпространство образовано двумя линейно независимыми векторами $\vec{b}_1 = (1, 1, -2, 2)$, $\vec{b}_2 = (-1, 2, 1, -3)$. Поэтому плоскость является двумерной в четырехмерном пространстве и согласно теореме 1.1 задается системой двух линейно независимых уравнений. Точка $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \overrightarrow{M_0M}$ линейно зависимы, то есть

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} & -2 & 2 \\ & 1 & -3 \\ x^1 & x^2 - 2 & x^3 - 3 & x^4 + 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Выделенный минор отличен от нуля. Приравняем к нулю окаймляющие его миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ x^1 & x^2 - 2 & x^3 - 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ x^1 & x^2 - 2 & x^4 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получим два линейно независимых уравнения, образующих искомую систему

$$\begin{cases} 5x^1 + x^2 + 3x^3 = 11, \\ 7x^1 - x^2 - 3x^4 = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ответ. $\mathcal{P}: \begin{cases} 5x^1 + x^2 + 3x^3 = 11, \\ 7x^1 - x^2 - 3x^4 = 1. \end{cases}$

Замечание 1.2. Понятно, что, выбрав изначально другой отличный от нуля минор, получим в качестве ответа другую систему, но равносильную (1.6).

Замечание 1.3. Геометрический смысл перехода от параметрических уравнений (1.3) к системе (1.4) состоит в том, что на плоскости выбираются k новых параметров — x^{i_1}, \dots, x^{i_k} из числа координат x^1, \dots, x^n её точек, а параметры t_1, \dots, t_k исключаются из системы.

Пример 1.4. Определить размерность плоскости \mathcal{P} , заданной системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 + 5x^3 + 4x^4 + 2x^5 = 1, \\ x^1 + x^2 - 2x^3 - 3x^4 + 5x^5 = 0, \\ 7x^1 - 8x^2 + 19x^3 + 18x^4 - 4x^5 = 3, \\ 5x^1 - 5x^2 + 12x^3 + 11x^4 - x^5 = 2. \end{cases}$$

Составить параметрические уравнения этой плоскости.

Решение. Чтобы ответить на первый вопрос задачи, достаточно найти ранг матрицы B коэффициентов системы и ранг ее расширенной матрицы \overline{B} . Если $\text{rang } B \neq \text{rang } \overline{B}$, то система несовместна и никакой плоскости не определяет. Если же $\text{rang } B = \text{rang } \overline{B} = r$, то согласно теореме 1.1 множество ее решений определяет плоскость размерности $k = 5 - r$ в пятимерном пространстве.

В данном случае $\text{rang } B = \text{rang } \overline{B} = 2$, и, следовательно, $k = 3$. Выберем в качестве базисного минора угловой верхний левый минор $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда неизвестные x^1, x^2 — базисные, а x^3, x^4, x^5 — свободные. Найдем общее решение равносильной системы из двух независимых уравнений

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 = -5x^3 - 4x^4 - 2x^5 + 1, \\ x^1 + x^2 = 2x^3 + 3x^4 - 5x^5. \end{cases}$$

Искомое решение имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 - \frac{12}{5}t_3, \\ x^2 = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}t_1 + \frac{13}{5}t_2 - \frac{13}{5}t_3, \\ x^3 = t_1, \\ x^4 = t_2, \\ x^5 = t_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

Равенства (1.7) есть параметрические уравнения плоскости \mathcal{P} . Заметим, что частное решение $\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0\right)$ задает набор координат точки $M_0 \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0\right) \in \mathcal{P}$, а фундаментальная система решений $\left(-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, 1, 0, 0\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{13}{5}, 0, 1, 0\right), \left(-\frac{12}{5}, -\frac{13}{5}, 0, 0, 1\right)$ соответствующей однородной системы образует базис в направляющем подпространстве плоскости \mathcal{P} . \square

Ответ. $\mathcal{P}: x^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 - \frac{12}{5}t_3, x^2 = -\frac{1}{5} + \frac{11}{5}t_1 + \frac{13}{5}t_2 - \frac{13}{5}t_3, x^3 = t_1, x^4 = t_2, x^5 = t_3.$

1.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть $\mathcal{P}_1 = M_1 + \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$ и $\mathcal{P}_2 = M_2 + \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \rangle$ — две плоскости в аффинном пространстве. Полагаем, что каждое из направляющих пространств $L_1 = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$ и $L_2 = \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \rangle$ задано линейно независимой системой векторов, и $k \leq m$.

Говорят, что плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 *пересекаются*, если они имеют хотя бы одну общую точку.

Замечание 1.4. Если $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2$ или $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, то плоскости $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ являются пересекающимися. При определении взаимного расположения плоскостей эти случаи следует выделить особо.

Критерий наличия общих точек двух плоскостей сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\overrightarrow{M_1M_2} \in L_1 + L_2.$$

Следует заметить, что пересечение плоскостей также является плоскостью. Справедлива теорема.

Теорема 1.3. *Если плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 пересекаются, то их пересечение есть плоскость с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$.*

Говорят, что плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 *параллельны*, если они не пересекаются и $L_1 \subset L_2$.

Плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 называют *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Про скрещивающиеся плоскости \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 говорят, что они *скрещиваются по подпространству $L_1 \cap L_2$* .

Вопрос о взаимном расположении плоскостей \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 может быть решен на основании значений рангов двух систем векторов:

$$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} \quad \text{и} \quad \{\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}.$$

Напомним, что *рангом системы векторов* называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы.

Пусть

$$\begin{aligned} \text{rang}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} &= r, \\ \text{rang}\{\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} &= R. \end{aligned}$$

Тогда сформулированное в теореме 1.2 условие $\overrightarrow{M_1M_2} \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, необходимое и достаточное для пересечения плоскостей, равносильно условию $R = r$. В этом случае размерность плоскости $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ равна $k + m - r$. В частности, при $r = k + m$ пересечением плоскостей является точка. Если $R = r$ и к тому же $r = m$, то есть $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$, то $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Совпадению плоскостей отвечает случай $R = r = m = k$.

Если $R \neq r$, то есть $R = r + 1$, то плоскости либо скрещиваются, либо параллельны. При условии $R \neq r$ параллельность плоскостей имеет место тогда и только тогда, когда r принимает свое минимальное значение: $r = m$.

Подытожим сказанное таблицей

$R = r$			$R = r + 1$	
$r > m$	$r = m > k$	$r = m = k$	$r > m$	$r = m \geq k$
\mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — пересекаются по плоскости размерности $m + k - r$	$\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2$	\mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 скрещиваются по подпространству $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ размерности $m + k - r$	$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

Пример 1.5. Определить взаимное расположение прямой ℓ и плоскости \mathcal{P} . В случае пересечения найти их общую точку.

a) $\ell: x^1 = -5 - 5t, x^2 = -3 - 2t, x^3 = 4 + 2t, x^4 = -5 - 4t;$

$\mathcal{P}: \begin{cases} 2x^1 - 11x^2 - 6x^3 + 1 = 0, \\ 2x^1 + 7x^2 - 6x^4 + 1 = 0; \end{cases}$

b) $\ell: \frac{x^1 + 1}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 - 3}{2} = \frac{x^4 - 3}{2},$

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x^1 = -1 + 3t_1 - 4t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^3 = t_1, \\ x^4 = t_2. \end{cases}$$

Решение. а) Прямая проходит через точку $M_1(-5, -3, 4, -5)$ в направлении вектора $\vec{a} = (-5, -2, 2, -4)$.

Решая, например методом Гаусса, систему уравнений, задающих плоскость, получим

$$\begin{cases} x^1 = 7t_1 + 11t_2 - \frac{1}{2}, \\ x^2 = -2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 6t_1, \\ x^4 = 6t_2, \end{cases}$$

откуда следует, что плоскость двумерна, $m = 2$, проходит через точку M_2 с координатами $(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ — частное решение неоднородной системы, а базис направляющего пространства образован векторами $\vec{b}_1 = (7, -2, 6, 0)$ и $\vec{b}_2 = (11, 2, 0, 6)$ — фундаментальной системой решений соответствующей однородной системы уравнений.

Определим ранги систем векторов:

$$r = \text{rang}\{\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \text{rang} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2,$$

$$R = \text{rang}\{\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \text{rang} \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -3 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 6 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2.$$

Так как $R = r = m > k = 1$, то $\ell \subset \mathcal{P}$.

б) Поскольку $\ell = M_1 + \langle \vec{a} \rangle$, где $M_1(-1, 3, 3, 3)$, $\vec{a} = (1, 1, 2, 2) \neq 0$, то есть $k = 1$. Плоскость $\mathcal{P} = M_2 + \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$, где $M_2(-1, 2, 0, 0)$, $\vec{b}_1 = (3, -1, 1, 0)$, $\vec{b}_2 = (-4, 1, 0, 1)$, причем $m = \text{rang}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = 2$. Найдем $\overrightarrow{M_2M_1} = (0, 1, 3, 3)$,

$$r = \text{rang}\{\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$R = \text{rang}\{\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Поскольку $R = r > m$, плоскость и прямая пересекаются. Для нахождения общей точки представим уравнения прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x^1 = -1 + \tau, \\ x^2 = 3 + \tau, \\ x^3 = 3 + 2\tau, \\ x^4 = 3 + 2\tau. \end{cases} \quad (1.8)$$

Из уравнений плоскости \mathcal{P} исключим параметры t_1, t_2 :

$$\begin{cases} x^1 = -1 + 3x^3 - 4x^4, \\ x^2 = 2 - x^3 + x^4. \end{cases} \quad (1.9)$$

Подставляя равенства (1.8) в (1.9), получим систему

$$\begin{cases} -1 + \tau = -1 + 3(3 + 2\tau) - 4(3 + 2\tau), \\ 3 + \tau = 2 - (3 + 2\tau) + (3 + 2\tau), \end{cases}$$

откуда $\tau = -1$, то есть $M(-2, 2, 1, 1)$ — общая точка прямой и плоскости. \square

Ответ. а) прямая лежит в плоскости;
 б) прямая и плоскость пересекаются в точке $M(-2, 2, 1, 1)$.

Пример 1.6. Определить взаимное расположение плоскостей:

- а) $\mathcal{P}_1 = (0, 0, 0, 0) + \langle (1, 1, -1, -1), (0, 2, 3, 1) \rangle$,
 $\mathcal{P}_2 = (1, 3, 2, 0) + \langle (0, 0, 1, 1), (3, -1, 1, 1) \rangle$;
 б) $\mathcal{P}_1 = (1, 0, -1, 0, 0) + \langle (-1, 2, 1, 5, -1), (3, 1, -1, 0, 4) \rangle$,
 $\mathcal{P}_2 = (0, 3, 1, 1, 7) + \langle (5, 4, -1, 5, 7), (0, 1, 0, 2, 1) \rangle$.

Решение. а) По условию задачи $A(0, 0, 0, 0)$, $B(1, 3, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2, 0)$, а направляющие подпространства плоскостей \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 образованы векторами $\vec{u} = (1, 1, -1, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, 3, 1)$ и векторами $\vec{p} = (0, 0, 1, 1)$, $\vec{q} = (3, -1, 1, 1)$ соответственно. При этом $k = \text{rang}\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2$, $m = \text{rang}\{\vec{p}, \vec{q}\} = 2$, то есть плоскости двумерны.

$$r = \text{rang}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

$$R = \text{rang}\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Так как $R = r$, то плоскости пересекаются по подпространству размерности $k + m - r = 0$, то есть по точке.

б) Заметим, что векторы $\vec{u} = (-1, 2, 1, 5, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -1, 0, 4)$ линейно независимы, так же, как и векторы $\vec{p} = (5, 4, -1, 5, 7)$, $\vec{q} = (0, 1, 0, 2, 1)$. То есть \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — двумерные плоскости в пятимерном пространстве ($k = m = 2$). $A(1, 0, -1, 0, 0) \in \mathcal{P}_1$, $B(0, 3, 1, 1, 7) \in \mathcal{P}_2$ и $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 2, 1, 7)$.

Определим ранги систем векторов:

$$r = \text{rang}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$R = \text{rang}\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{q}\} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$.

Поскольку C — невырожденная квадратная матрица, то

$$X' = C^{-1}(X - X_0), \quad (1.12)$$

как это следует из формулы (1.11).

Заметим, что координаты вектора $\vec{v} \in V$ при изменении системы координат преобразуются по закону

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix},$$

где $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \dots + v^n \vec{e}_n = v'^1 \vec{e}'_1 + v'^2 \vec{e}'_2 + \dots + v'^n \vec{e}'_n$.

Систему координат $O \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ будем называть «старой» или «исходной», а систему $O' \vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$ — «новой» координатной системой. Координаты точки (вектора) относительно систем координат $O \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ и $O' \vec{e}'_1 \dots \vec{e}'_n$ — соответственно «старыми» и «новыми» координатами этой точки (вектора).

Пример 1.7. Написать формулы перехода к новой системе координат на прямой, если за её начало принята точка $O'(5)$, а за базисный вектор — вектор $\vec{O'A}$, где $A(3)$. Координаты точек указаны в старой системе координат.

Решение. Пусть $O \vec{e}$ — исходная система координат. Тогда $\vec{OO}' = 5 \vec{e}$, $\vec{e}' = \vec{O'A} = -2 \vec{e}$ и согласно (1.10) $x = -2x' + 5$. \square

Ответ. $x = -2x' + 5$.

Пример 1.8. Пусть точки A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма, E — точка пересечения его диагоналей. Найти формулы перехода от системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ к системе $O'\vec{e}'_1\vec{e}'_2$, если O — точка E , а базисные векторы $\vec{e}_1 = \vec{CE}$, $\vec{e}_2 = \vec{BA}$. За начало новой системы координат принята вершина A параллелограмма, за базис — векторы $\vec{e}'_1 = \vec{AD}$, $\vec{e}'_2 = \vec{DB}$.

Решение. Найдем координаты векторов \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 в старом базисе:
 $\vec{e}'_1 = \vec{AD} = \vec{CD} - \vec{CA} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{DB} = 2\vec{DE} = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ (рис. 2). Тогда матрица C перехода к новому базису имеет вид $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Координаты точки A относительно исходной системы координат — это координаты ее радиус-вектора $\vec{EA} = \vec{e}_1$, то есть $A(1, 0)$. Согласно (1.10) формулы преобразования координат имеют вид

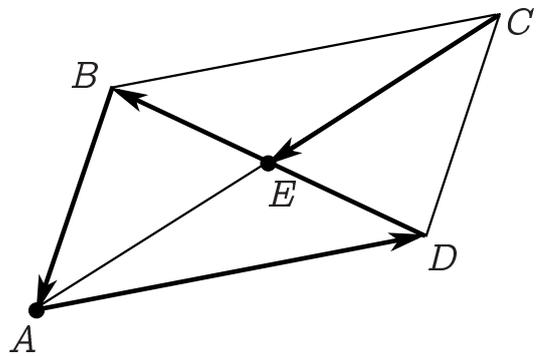


Рис. 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} x &= -2x' + 2y' + 1, \\ y &= x' - 2y'. \end{aligned}$$

□

Ответ. Старые координаты точки выражаются через новые по формулам $x = -2x' + 2y' + 1$, $y = x' - 2y'$.

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат, а сами базисные векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — единичными векторами этих осей. Как правило, координатные прямые на плоскости обозначают Ox и Oy , в трехмерном пространстве — Ox, Oy, Oz . Соответственно этому для системы координат на плоскости используют обозначение Oxy , в трехмерном пространстве — $Oxyz$.

Пример 1.9. На плоскости заданы две системы координат: старая Oxy и новая $O'x'y'$, связанные соотношениями

$$\begin{aligned}x &= 3x' + 2y' - 4, \\y &= 2x' + 2y' + 2.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Найти:

- i. Координаты точки O' и единичных векторов \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе Oxy ;
- ii. Координаты точки O и единичных векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 осей Ox и Oy в системе $O'x'y'$;
- iii. Координаты единичной точки E' в системе Oxy ;
- iv. Координаты единичной точки E в системе $O'x'y'$;
- v. Уравнения координатных осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе Oxy ;
- vi. Уравнения координатных осей Ox и Oy в системе $O'x'y'$;
- vii. Уравнение прямой $\ell_1: 2x - y + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'$;
- viii. Уравнение прямой $\ell_2: x' - 5y' - 5 = 0$ в системе координат Oxy .

Решение.

- i. Обратимся к формулам (1.10) — (1.11), связывающим координаты точки в двух системах координат: столбцы матрицы C образованы координатами векторов нового базиса относительно исходной системы координат, X_0 — матрица-столбец координат вектора $\overrightarrow{OO'}$ — радиус-вектора точки O' , также в исходной системе координат. По условию задачи $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Следовательно, векторы \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в системе Oxy координаты: $\vec{e}'_1 = (3, 2)$, $\vec{e}'_2 = (2, 2)$, а точка $O'(-4, 2)$.
- ii. Из равенств (1.13) найдем формулы, выражающие координаты (x', y') через координаты (x, y) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x + 4 \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 6, \\y' &= -x + \frac{3}{2}y - 7.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Полученные равенства — формулы перехода от системы координат $O'x'y'$, которую можно рассматривать как старую, к новой системе Oxy . Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют заключить, что в системе $O'x'y'$ точка O имеет координаты $(6, -7)$, а векторы $\vec{e}'_1 = (1, -1)$, $\vec{e}'_2 = (-1, 3/2)$.

- iii. Точка E' в системе координат $O'x'y'$ имеет координаты $(1, 1)$. Полагая в формулах (1.13) $x' = 1, y' = 1$, найдем координаты этой точки в исходной системе координат: $x = 1, y = 6$.
- iv. В системе координат Oxy единичная точка E определяется условиями: $x = 1, y = 1$. Тогда из равенств (1.14) найдем: $x' = 6, y' = -13/2$.
- v. Координатная ось $O'x'$ в системе $O'x'y'$ имеет уравнение $y' = 0$. Полагая во втором из равенств (1.14) $y' = 0$, получим искомого уравнение координатной оси $O'x'$ в системе координат Oxy : $2x - 3y + 14 = 0$.

Заметим, что это уравнение можно получить как уравнение прямой, проходящей через точку $O'(-4, 2)$ в направлении вектора $\vec{e}'_1 = (3, 2)$: $\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{2}$.

Аналогично получим уравнение оси $O'y'$ в системе Oxy , полагая в первом из равенств (1.14) $x' = 0$: $x - y + 6 = 0$.

- vi. Уравнения координатных осей Ox и Oy в системе $O'x'y'$ найдем из формул (1.13), полагая последовательно $y = 0$ и $x = 0$. Получим, что $Ox : x' + y' + 1 = 0$ и $Oy : 3x' + 2y' - 4 = 0$.
- vii. Прямая ℓ_1 в системе координат Oxy определяется уравнением $2x - y + 1 = 0$. Воспользуемся формулами (1.13): подставим в уравнение прямой вместо x, y их выражение через новые координаты: $2(3x' + 2y' - 4) - (2x' + 2y' + 2) + 1 = 0$, получим $\ell_1 : 4x' + 2y' - 9 = 0$.
- viii. Уравнение ℓ_2 в системе координат Oxy найдем, заменяя переменные x', y' в уравнении этой прямой их выражением (1.14)

через старые координаты: $(x - y + 6) - 5 \left(-x + \frac{3}{2}y - 7 \right) - 5 = 0$,
то есть $\ell_2: 12x - 17y + 72 = 0$. \square

Ответ. i. $O'(-4, 2)$, $\vec{e}'_1 = (3, 2)$, $\vec{e}'_2 = (2, 2)$; ii. $O(6, -7)$, $\vec{e}_1 = (1, -1)$, $\vec{e}_2 = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$; iii. $E'(1, 6)$; iv. $E\left(6, -\frac{13}{2}\right)$; v. $O'x': 2x - 3y + 14 = 0$, $O'y': x - y + 6 = 0$; vi. $Ox: x' + y' + 1 = 0$, $Oy: 3x' + 2y' - 4 = 0$; vii. $\ell_1: 4x' + 2y' - 9 = 0$; viii. $\ell_2: 12x - 17y + 72 = 0$.

Пример 1.10. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые координатные оси $O'x'$ и $O'y'$ соответственно прямые $\ell_1: 3x + y - 20 = 0$ и $\ell_2: 2x + 5y - 35 = 0$, а за единичную точку новой системы координат — точку $E'(5, 3)$.

Решение. Положим

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_1, \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_2.\end{aligned}$$

Координатная $O'x'$ ось в новой системе координат определяется условием $y' = 0$, то есть $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ — уравнение прямой ℓ_1 . Если уравнения $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ и $3x + y - 20 = 0$ определяют одну и ту же прямую, то $\frac{a_{21}}{3} = \frac{a_{22}}{1} = \frac{a_2}{-20} = \lambda$. Следовательно, $a_{21} = 3\lambda$, $a_{22} = \lambda$, $a_2 = -20\lambda$. Тогда $y' = \lambda(3x + y - 20)$. Значение λ найдем из условия, что $y' = 1$ при $x = 5$, $y = 3$: $\lambda = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $y' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10$.

Аналогично рассуждая, получим, что уравнение $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$ есть уравнение прямой ℓ_2 , то есть $a_{11} = 2\mu$, $a_{12} = 5\mu$, $a_1 = -35\mu$. Значит, $x' = \mu(2x + 5y - 35)$, причем $x' = 1$, если $x = 5$, $y = 3$, откуда заключаем: $\mu = -\frac{1}{10}$. Искомые формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}, \\y' &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10.\end{aligned} \quad \square$$

Ответ. $x' = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$, $y' = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 10$.

Пример 1.11. В пространстве имеются две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, связанные соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= -2x' + 4y' - z' - 3, \\y &= x' - 2y' + z' + 2, \\z &= -x' + y' - z' - 1.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Найти:

- i. Координаты начала системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- ii. Канонические уравнения осей координат системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- iii. Канонические уравнения осей координат системы $Oxyz$ в системе $O'x'y'z'$;
- iv. Уравнения координатных плоскостей системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- v. Уравнение плоскости $\mathcal{P}: 4x + 3y - 5z - 2 = 0$ в системе $O'x'y'z'$;
- vi. Канонические уравнения прямой $\ell: \frac{x-5}{1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-9}{8}$ в системе $O'x'y'z'$.

Решение.

- i. Начало O' новой системы координат в системе $O'x'y'z'$ имеет координаты $x' = 0, y' = 0, z' = 0$. Тогда из формул (1.15) замены координат находим координаты точки O' в системе $Oxyz$: $O'(-3, 2, -1)$.
- ii. Столбцы матрицы

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

в формулах замены координат образованы координатами векторов $\vec{e}'_1 = (-2, 1, -1)$, $\vec{e}'_2 = (4, -2, 1)$, $\vec{e}'_3 = (-1, 1, -1)$ в системе координат $Oxyz$. Поскольку координатные прямые $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ проходят через точку $O'(-3, 2, -1)$ в направлении векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно, то их канонические уравнения в старой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} O'x' &: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \\ O'y' &: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}, \\ O'z' &: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}. \end{aligned}$$

iii. Преобразование координат, обратное преобразованию (1.15), имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

то из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} x' &= -x - 3y - 2z + 1, \\ y' &= -y - z + 1, \\ z' &= x + 2y - 1. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Следовательно, в системе координат $O'x'y'z'$ точка O и направляющие векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ координатных осей имеют координаты:

$$O(1, 1, -1), \quad \vec{e}_1 = (-1, 0, 1), \quad \vec{e}_2 = (-3, -1, 2), \quad \vec{e}_3 = (-2, -1, 0).$$

Отсюда заключаем:

$$\begin{aligned} Ox &: \frac{x'-1}{-1} = \frac{y'-1}{0} = \frac{z'+1}{1}, \\ Oy &: \frac{x'-1}{-3} = \frac{y'-1}{-1} = \frac{z'+1}{2}, \\ Oz &: \frac{x'-1}{-2} = \frac{y'-1}{-1} = \frac{z'+1}{0}. \end{aligned}$$

iv. Координатные плоскости $O'x'y'$, $O'x'z'$, $O'y'z'$ в системе координат $O'x'y'z'$ имеют уравнения $z' = 0$, $y' = 0$, $x' = 0$ соответственно. С учетом этих равенств из формул (1.16) получим

$$\begin{aligned} O'x'y': & \quad x + 2y - 1 = 0, \\ O'x'z': & \quad y + z - 1 = 0, \\ O'y'z': & \quad x + 3y + 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

- v. Уравнение плоскости \mathcal{P} в системе $O'x'y'z'$ найдем, заменив в уравнении $4x + 3y - 5z - 2 = 0$ старые координаты их выражениями (1.15) через новые координаты x', y', z' :

$$4(-2x' + 4y' - z' - 3) + 3(x' - 2y' + z' + 2) - 5(-x' + y' - z' - 1) - 2 = 0.$$

В результате преобразования последнего уравнения получим $5y' + 4z' - 3 = 0$.

- vi. Прямая ℓ проходит через точку $M(5, 8, 9)$ в направлении вектора $\vec{a} = (1, 1, 8)$. Здесь координаты и вектора, и точки указаны в системе $Oxyz$. Найдем, используя (1.16), координаты точки M в новой системе координат $O'x'y'z'$: $M(-46, -16, 20)$. Координаты вектора $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$ в системе $O'x'y'z'$ определим с помощью матрицы C^{-1} :

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой ℓ в системе координат $O'x'y'z'$ имеет вид

$$\frac{x' + 46}{-20} = \frac{y' + 16}{-9} = \frac{z' - 20}{3}. \quad \square$$

Ответ. i. $O'(-3, 2, -1)$; ii. $O'x': \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $O'y': \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $O'z': \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$; iii. $Ox: \frac{x'-1}{-1} = \frac{y'-1}{0} = \frac{z'+1}{1}$, $Oy: \frac{x'-1}{-3} = \frac{y'-1}{-1} = \frac{z'+1}{2}$, $Oz: \frac{x'-1}{-2} = \frac{y'-1}{-1} = \frac{z'+1}{0}$; iv. $O'x'y': x + 2y - 1 = 0$, $O'x'z': y + z - 1 = 0$, $O'y'z': x + 3y + 2z - 1 = 0$; v. $\mathcal{P}: 5y' + 4z' - 3 = 0$; vi. $\ell: \frac{x' + 46}{-20} = \frac{y' + 16}{-9} = \frac{z' - 20}{3}$.

Пример 1.12. За начало новой системы координат $O'x'y'z'w'$ принята точка $O'(2, 1, -2, -2)$, а за единичные векторы ее осей $\vec{e}'_1 = (-4, -3, -7, 9)$, $\vec{e}'_2 = (-3, -2, -5, 7)$, $\vec{e}'_3 = (10, 8, 17, -23)$ и $\vec{e}'_4 = (-1, -1, -2, 1)$. Координаты заданы в старой системе координат. Найти выражение новых координат x', y', z', w' через старые x, y, z, w .

Решение. Матрица C перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к новому базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 8 & -1 \\ -7 & -5 & 17 & -2 \\ 9 & 7 & -23 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица–столбец X_0 координат вектора $\overrightarrow{OO'}$: $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тогда зависимость новых координат от старых задается равенством (1.12), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z + 2 \\ w + 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 & 1 \\ -9 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

найдем, что

$$\begin{aligned} x' &= 10x + y - 5z + w - 29, \\ y' &= -9x + 2y + 3z - w + 20, \\ z' &= x + y - z - 5, \\ w' &= -4x + z - w + 8. \end{aligned}$$

1.5. Задачи

Задача 1.1. Составить параметрические уравнения:

- a) прямой, проходящей через точки A и B ;
- b) плоскости, проходящей через точки A , B и C .
- a) $A(9, 1, 7, -4)$, $B(1, 8, 2, 4)$;
b) $A(0, 9, -9, -3, 3)$, $B(-1, 4, -6, -7, -9)$, $C(-6, -8, 1, 3, -7)$.
 - a) $A(2, 0, -8, 0)$, $B(-5, -3, -2, 6)$;
b) $A(5, -10, 0, 0, -7)$, $B(-5, -8, 5, 4, 5)$, $C(-2, -9, -5, 10, 2)$.
 - a) $A(-10, -4, 0, 3)$, $B(-7, 1, 8, -1)$;
b) $A(-5, 1, 10, 5, 4)$, $B(4, -3, 4, 2, -6)$, $C(4, 1, -9, 3, 4)$.
 - a) $A(0, -1, -4, -2)$, $B(6, -6, -8, 5)$;
b) $A(-8, 0, -8, -3, 6)$, $B(1, -5, -6, 0, 2)$, $C(3, 2, -10, -7, 0)$.
 - a) $A(-10, -2, 5, -2)$, $B(8, -10, 7, -2)$;
b) $A(-1, 3, -7, 0, -6)$, $B(-1, 3, 7, -3, 4)$, $C(0, -6, -7, -9, 5)$.
 - a) $A(-10, -3, 3, -5)$, $B(1, -5, -1, 1)$;
b) $A(0, 6, 5, 6, 1)$, $B(4, -8, -3, 7, -4)$, $C(3, 9, 1, -5, -3)$.
 - a) $A(-1, 8, 9, -9)$, $B(-4, 5, 1, 6)$;
b) $A(6, 6, -9, 9, 3)$, $B(5, 10, -8, 0, -6)$, $C(-6, 2, 0, 9, -8)$.
 - a) $A(-10, -8, -4, -8)$, $B(-4, -2, 9, 0)$;
b) $A(7, -9, 6, -8, 8)$, $B(-10, 7, -8, 0, 6)$, $C(-3, -5, -10, 9, -8)$.
 - a) $A(6, 4, -1, -3)$, $B(-2, 7, 2, 7)$;
b) $A(-2, 0, -2, 6, 1)$, $B(-3, 0, -3, -10, -1)$, $C(8, -3, -7, -7, 2)$.
 - a) $A(5, -3, -3, -10)$, $B(-9, -5, -5, -10)$;
b) $A(0, 10, 7, -10, -4)$, $B(-1, 2, 10, -7, -7)$, $C(3, 3, 8, 6, 9)$.
 - a) $A(-4, 5, 0, -3)$, $B(3, 8, -9, -3)$;
b) $A(-7, 7, 5, -2, 10)$, $B(8, 0, 1, 9, 1)$, $C(-1, -4, 4, -4, 9)$.
 - a) $A(-3, 3, 10, -3)$, $B(-7, -1, 6, -4)$;
b) $A(-8, 0, 8, 2, 1)$, $B(1, -6, 1, -2, 2)$, $C(9, -2, 0, 5, 3)$.
 - a) $A(-5, 7, 6, 8)$, $B(4, 2, -8, -7)$;
b) $A(-1, 5, 9, 1, -3)$, $B(10, -1, 2, -2, 0)$, $C(0, 8, -4, 10, 10)$.
 - a) $A(-7, -10, -8, 6)$, $B(-7, 0, -1, 1)$;
b) $A(6, 3, 2, 3, -6)$, $B(-9, -4, -7, 2, -4)$, $C(-3, 1, 3, 5, 5)$.

15. a) $A(-6, -4, -9, -5)$, $B(5, -4, 2, 10)$;
b) $A(0, 3, -1, 4, -6)$, $B(-8, 7, 5, 6, -8)$, $C(-1, 3, -4, 0, -9)$.
16. a) $A(-1, -6, 9, -5)$, $B(10, 9, -9, 0)$;
b) $A(10, 9, 4, -2, 5)$, $B(10, 4, 2, -8, 2)$, $C(3, 2, -6, -7, 8)$.
17. a) $A(-6, 6, 5, -2)$, $B(-3, -7, -3, -7)$;
b) $A(-4, -7, -3, 1, 7)$, $B(7, 8, 3, -8, -6)$, $C(4, 4, -1, 7, 2)$.
18. a) $A(-1, 9, -8, 1)$, $B(-5, -5, 3, 8)$;
b) $A(-9, 6, 9, 2, -5)$, $B(4, -3, -5, 5, 2)$, $C(6, 3, -1, -4, 4)$.
19. a) $A(-1, 7, 0, -8)$, $B(4, 9, 6, -10)$;
b) $A(-8, -10, 3, -6, -4)$, $B(6, -2, 8, 5, 1)$, $C(-9, -6, -4, -8, 3)$.
20. a) $A(8, 4, 8, 0)$, $B(7, 10, 6, -2)$;
b) $A(3, -2, 1, -1, -8)$, $B(2, 1, -3, -5, 5)$, $C(10, 5, -9, 0, 8)$.
21. a) $A(-9, 6, -9, -4)$, $B(5, 7, -2, 4)$;
b) $A(2, 5, 3, 7, 7)$, $B(-7, 1, -7, 0, 2)$, $C(-1, -5, -3, 10, 5)$.
22. a) $A(10, -7, 8, 9)$, $B(-10, 10, 7, -4)$;
b) $A(-7, 1, 5, 7, 4)$, $B(8, 8, -7, -6, 5)$, $C(0, -2, 6, -10, -9)$.
23. a) $A(-9, -7, 0, -4)$, $B(8, 10, 4, 9)$;
b) $A(7, 8, 0, -3, -1)$, $B(-1, 2, -9, 7, -6)$, $C(-10, -4, -3, 8, 0)$.
24. a) $A(-7, -6, -10, 1)$, $B(2, 3, 7, 3)$;
b) $A(-6, 8, 2, -3, 2)$, $B(-10, -2, 9, 5, 5)$, $C(10, 9, 4, 0, 6)$.
25. a) $A(-7, -8, -1, 8)$, $B(-2, -9, 5, 10)$;
b) $A(0, -8, 2, 10, 0)$, $B(6, 8, 3, -9, -2)$, $C(8, 4, -1, -10, 1)$.
26. a) $A(8, 0, 2, -5)$, $B(7, -2, -4, 9)$;
b) $A(-2, 3, 1, 0, -2)$, $B(0, -8, 3, -3, -9)$, $C(-8, 8, 4, -9, 7)$.
27. a) $A(6, 6, 4, 10)$, $B(5, -7, -10, -1)$;
b) $A(-8, 0, 7, -1, 9)$, $B(6, 4, 9, -9, 6)$, $C(10, -2, 2, 8, -4)$.
28. a) $A(-9, 3, 3, 6)$, $B(-6, -10, 2, -4)$;
b) $A(0, -5, 4, -10, -5)$, $B(6, -4, 10, -1, -5)$, $C(6, 2, -8, 8, -4)$.
29. a) $A(-4, -1, -8, -3)$, $B(8, 1, 10, -6)$;
b) $A(7, -5, 6, 3, -5)$, $B(2, -8, -10, -6, 9)$, $C(-4, -5, -4, 3, 4)$.
30. a) $A(-7, -5, -10, 9)$, $B(6, 2, 3, 1)$;
b) $A(-9, -1, 6, -8, -7)$, $B(2, 8, 6, -1, 4)$, $C(0, 8, -6, -1, -3)$.

Задача 1.2. Найти уравнение гиперплоскости, проходящей через точки A , B , C и D .

1. $A(-1, 2, 3, -1)$, $B(3, 2, 2, 0)$,
 $C(1, 0, 3, -1)$, $D(1, 2, -3, 3)$.
2. $A(-3, -1, -2, 1)$, $B(-3, -1, 2, -3)$,
 $C(-2, 3, 3, 3)$, $D(1, -1, -2, -1)$.
3. $A(-3, -3, 0, 1)$, $B(0, -2, -1, 0)$,
 $C(-1, -2, -1, 1)$, $D(0, -3, 1, -2)$.
4. $A(-2, -1, -2, 3)$, $B(-1, 3, -3, -1)$,
 $C(2, -1, -3, 1)$, $D(-3, 2, -2, -1)$.
5. $A(1, -1, -3, -3)$, $B(3, -2, 2, 2)$,
 $C(-3, 1, -3, 1)$, $D(3, -2, 1, -1)$.
6. $A(-2, 2, 0, 3)$, $B(3, -3, 1, 2)$,
 $C(-3, 3, 1, -2)$, $D(-2, 2, -3, 1)$.
7. $A(2, -1, -1, 3)$, $B(3, -1, 2, -2)$,
 $C(-1, -1, -1, 0)$, $D(1, 3, 1, -2)$.
8. $A(-1, 1, -2, -1)$, $B(-1, 1, 1, -1)$,
 $C(0, -1, 1, -1)$, $D(3, 1, 1, -2)$.
9. $A(2, 0, 0, 3)$, $B(2, -1, -1, -3)$,
 $C(1, 0, 1, 3)$, $D(0, 3, -1, 1)$.
10. $A(-2, 1, -3, 3)$, $B(1, -1, 1, 1)$,
 $C(1, -2, 1, 2)$, $D(0, 3, -3, 2)$.
11. $A(-1, -3, 2, -3)$, $B(-3, 2, -2, 0)$,
 $C(3, -3, -2, -3)$, $D(3, -2, -2, -2)$.
12. $A(1, 3, 2, 2)$, $B(-1, 0, 0, 2)$,
 $C(-3, -1, 2, 2)$, $D(-3, -1, 2, 1)$.
13. $A(3, 1, -1, -2)$, $B(2, -2, 2, 3)$,
 $C(0, -3, 1, 2)$, $D(2, -3, -3, 2)$.
14. $A(2, 1, -2, -2)$, $B(1, 2, -3, 1)$,
 $C(2, 2, -1, -3)$, $D(2, 0, -1, -3)$.
15. $A(3, 1, -3, -2)$, $B(-2, 1, 1, -1)$,
 $C(3, 3, -1, -3)$, $D(-1, 2, 0, -3)$.

16. $A(2, -3, -2, -1), B(-2, 2, -3, 1),$
 $C(1, -2, -3, -2), D(0, 0, 2, 3).$
17. $A(-1, 2, 3, -1), B(-1, 0, -3, 2),$
 $C(-3, 1, -2, 1), D(-3, 2, 0, 0).$
18. $A(-1, 0, 1, -2), B(3, 0, 0, -2),$
 $C(0, -1, 3, 2), D(2, 0, 1, 1).$
19. $A(1, -2, 2, 1), B(-1, 2, 1, 0),$
 $C(3, -2, 0, -2), D(-3, -2, -3, -1).$
20. $A(-1, -2, 0, 2), B(0, -2, -3, 2),$
 $C(0, -3, 2, -3), D(-1, -1, 1, 2).$
21. $A(1, -1, 1, -1), B(1, 3, -2, 0),$
 $C(-2, 2, 2, 1), D(-3, -1, 3, 1).$
22. $A(-2, -1, 2, 1), B(2, 0, 2, 3),$
 $C(3, 1, -1, -3), D(3, 0, 3, 1).$
23. $A(3, 1, 1, 2), B(1, 1, -2, 2),$
 $C(-1, -1, 1, 1), D(0, 0, 2, 0).$
24. $A(0, -1, 0, -1), B(3, -3, 0, -3),$
 $C(-3, -2, 1, -1), D(3, 0, 1, -2).$
25. $A(1, -3, 2, 1), B(2, -1, 2, 1),$
 $C(-1, -1, -1, 3), D(2, 1, 0, -3).$
26. $A(-2, 1, 1, -3), B(1, -1, -1, -3),$
 $C(-2, 0, 1, -2), D(-2, 3, -1, 1).$
27. $A(0, 2, -1, 1), B(1, 3, -3, 1),$
 $C(0, 3, 2, -1), D(0, -2, -1, 0).$
28. $A(3, -2, 0, -3), B(1, 3, 3, -2),$
 $C(-2, -3, 2, 3), D(0, 1, 2, -1).$
29. $A(-1, 1, 3, 3), B(3, 3, -3, 3),$
 $C(3, -1, 3, -2), D(0, 2, -3, 3).$
30. $A(1, 3, 0, 0), B(-3, -1, 0, 2),$
 $C(1, -1, -2, 3), D(3, -2, -3, 2).$

Задача 1.3. Найти систему линейных уравнений, задающую плоскость \mathcal{P} .

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = -1 + t_1, \\ x^2 = t_1 + t_2, \\ x^3 = -t_1 - 2t_2, \\ x^4 = -3 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^5 = -2 - 2t_1 - t_2. \end{cases} \\ 2. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 2 + 3t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x^2 = -2 - 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = -2 - 2t_2 + t_3, \\ x^4 = 2 + 3t_1 + 2t_2 + 3t_3, \\ x^5 = 2t_1 - t_2. \end{cases} \\ 3. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = -1 - 2t_1 + t_2, \\ x^2 = -3 + t_1 - t_2, \\ x^3 = 2, \\ x^4 = -1 + 3t_1 - t_2, \\ x^5 = 3 + 2t_1. \end{cases} \\ 4. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 3t_2 + 2t_3, \\ x^2 = 1 - t_1 - t_2 + 2t_3, \\ x^3 = 2 - 2t_1 - t_2, \\ x^4 = 2 + 3t_1 - t_2 - t_3, \\ x^5 = -2 + 2t_1 - t_2. \end{cases} \\ 5. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = -1 - 3t_1 - 2t_2, \\ x^2 = -2 - 2t_1, \\ x^3 = -3 + 2t_1 + 2t_2, \\ x^4 = 2 + 2t_1 + t_2, \\ x^5 = 1 + t_1 + 2t_2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -3 - t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x^2 = 2t_2 + t_3, \\ x^3 = -2t_1 + t_2 - 2t_3, \\ x^4 = 3 + 3t_1 - t_2 + t_3, \\ x^5 = -2t_1 + 2t_2 - 2t_3. \end{cases}$$

$$7. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 + 2t_2, \\ x^2 = 2t_1, \\ x^3 = t_1 - 2t_2, \\ x^4 = -2 + 3t_1 - t_2, \\ x^5 = 3 - 3t_2. \end{cases}$$

$$8. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 3 + 2t_1 + 3t_2 - 2t_3, \\ x^2 = -3 + t_1 + t_2 - t_3, \\ x^3 = -2 + t_2 - 2t_3, \\ x^4 = 1 - t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x^5 = 3 - t_1 + t_2 - t_3. \end{cases}$$

$$9. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^2 = -2 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^3 = 2 - 3t_1 - 2t_2, \\ x^4 = -3 - t_1 - 3t_2, \\ x^5 = -1 - 2t_1. \end{cases}$$

$$10. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + 3t_1 - 3t_3, \\ x^2 = 2 - 2t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x^3 = -3 + t_2 + 2t_3, \\ x^4 = 2 - 2t_1 + 2t_2 + 3t_3, \\ x^5 = 1 - 3t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

$$11. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 + 2t_1 + 2t_2, \\ x^2 = 1 - 3t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 1 + t_2, \\ x^4 = 1 + 3t_1 - 2t_2, \\ x^5 = -1 + t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
12. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = -3t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^2 = 3 + t_1 - 3t_2 - t_3, \\ x^3 = -2t_1 + t_2 - t_3, \\ x^4 = -2 - t_2 - 3t_3, \\ x^5 = 2 + 3t_1 + t_3. \end{cases} \\
13. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = -2 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 3 - 2t_2 - t_3, \\ x^3 = 2t_1 + 3t_2 - t_3, \\ x^4 = 3 + 2t_1 + 2t_2 - t_3, \\ x^5 = -2 - t_2 + t_3. \end{cases} \\
14. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 3 - 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + 3t_2, \\ x^3 = -1 + 2t_1, \\ x^4 = -1 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^5 = 2t_1 - t_2. \end{cases} \\
15. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 2t_2 + t_3, \\ x^2 = -2 + 3t_1 - 3t_3, \\ x^3 = 2 + 2t_1 - 3t_2 + 3t_3, \\ x^4 = -1 - 3t_1 + 3t_2, \\ x^5 = -3t_1 - 3t_2. \end{cases} \\
16. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 2 + 3t_1 + t_2, \\ x^2 = -t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 2 - t_1 - 2t_2, \\ x^4 = 3 - 3t_1 - 3t_2, \\ x^5 = -3 + 3t_1 + 2t_2. \end{cases} \\
17. \mathcal{P} : & \begin{cases} x^1 = 2t_1 + 2t_3, \\ x^2 = -t_1 + t_2 - 2t_3, \\ x^3 = 2 - t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x^4 = 1 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^5 = -1 - t_1 + 3t_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$18. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -2 + 2t_1 + 2t_2, \\ x^2 = 1 + 2t_1, \\ x^3 = 3 - t_1, \\ x^4 = -2t_1 - t_2, \\ x^5 = -1 + 2t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$19. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 - 2t_1 + 2t_2 + 3t_3, \\ x^2 = 3 - 3t_1 - 3t_2, \\ x^3 = -2 - t_1 - t_2 + 2t_3, \\ x^4 = -2 + 2t_1 + t_2 - t_3, \\ x^5 = 1 + 3t_1 - 3t_2 + t_3. \end{cases}$$

$$20. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -2 + 3t_1 + t_2, \\ x^2 = -3 - 2t_1 + t_2, \\ x^3 = 2 + 2t_1 + 3t_2, \\ x^4 = 1 + t_1 - t_2, \\ x^5 = 1 - t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

$$21. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + 3t_2, \\ x^2 = -1 + t_1 + t_2, \\ x^3 = -3 + t_1 - 3t_2 + 2t_3, \\ x^4 = -2 + 2t_1 - 2t_2 - t_3, \\ x^5 = 1 + 3t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

$$22. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 - 3t_1 + t_2 + 2t_3, \\ x^2 = 2 + 2t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x^3 = 3 - 2t_1 + 3t_2 - 3t_3, \\ x^4 = t_1 + 2t_2 - 2t_3, \\ x^5 = -2 - t_1 + t_2 + t_3. \end{cases}$$

$$23. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + t_2, \\ x^2 = -2 - t_1 - t_2, \\ x^3 = 2 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^4 = 2 - t_1, \\ x^5 = t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

$$24. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = t_1 + 3t_2 + t_3, \\ x^2 = -1 - 3t_2 + 3t_3, \\ x^3 = 1 + 2t_1 + 3t_2 - 2t_3, \\ x^4 = -1 - t_1 + 2t_2 - 3t_3, \\ x^5 = -1 + 3t_1 + t_2. \end{cases}$$

$$25. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^2 = -2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -3 + 3t_1 - 2t_2, \\ x^4 = 1 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^5 = -1 - 3t_1. \end{cases}$$

$$26. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 - 3t_1 - 3t_3, \\ x^2 = -2 - t_1 - t_2 - t_3, \\ x^3 = -3 - t_2 + t_3, \\ x^4 = -1 - 2t_2 + t_3, \\ x^5 = 3 - 3t_1 - t_2 + 3t_3. \end{cases}$$

$$27. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 3 + 2t_1 + t_2, \\ x^3 = 1 + t_2, \\ x^4 = -1 + 2t_1, \\ x^5 = -1 - 2t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

$$28. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 + 3t_1 - 2t_2 - 2t_3, \\ x^2 = -1 + 2t_1 - t_2 + 2t_3, \\ x^3 = -t_2 + 2t_3, \\ x^4 = -3 - 3t_1 - 3t_2 - t_3, \\ x^5 = -3 + 2t_2 + t_3. \end{cases}$$

$$29. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -2 - 3t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x^3 = -3 + 2t_1 - t_2, \\ x^4 = 2 + 2t_2, \\ x^5 = 1 - t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$30. \mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 - t_1 + t_2 - t_3, \\ x^2 = 3 - 2t_1 - 2t_2 - t_3, \\ x^3 = -2t_1 - 2t_3, \\ x^4 = 2 - t_1 - 3t_2 - 3t_3, \\ x^5 = 1 + 2t_1 - t_2 + t_3. \end{cases}$$

Задача 1.4. Определить размерность плоскости, заданной системой линейных уравнений. Составить параметрические уравнения этой плоскости.

$$1. \begin{cases} -9x^1 - 2x^2 - 5x^3 - 7x^4 + 3x^5 = -5, \\ 4x^2 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5 = -10, \\ -4x^1 + 8x^2 + 9x^3 - 8x^4 - 12x^5 = 9, \\ -7x^1 + 2x^2 + 9x^3 - 17x^4 - 3x^5 = 9. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x^1 - 6x^2 - 3x^3 - 10x^4 + 4x^5 = -4, \\ -8x^1 - 9x^2 + 15x^3 + 14x^4 - 8x^5 = 4, \\ -5x^1 - 4x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 8x^5 = -3, \\ 20x^1 + 15x^2 - 4x^3 - x^4 + 4x^5 = -1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -10x^1 + 3x^2 - 3x^3 + 8x^4 - 4x^5 = -12, \\ -11x^1 + 4x^2 - 3x^3 + 15x^4 + 5x^5 = 0, \\ 5x^1 - 13x^2 + 8x^3 - 3x^4 + 19x^5 = 12, \\ x^2 - x^3 - 4x^4 - 8x^5 = -9. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -6x^1 + 6x^3 - 15x^4 - 9x^5 = 15, \\ -2x^1 - 8x^2 + 10x^3 - 3x^4 - x^5 = 7, \\ -6x^1 + 6x^3 - 15x^4 - 9x^5 = 15, \\ -3x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 7x^4 - 4x^5 = 8. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4x^1 - 4x^2 + 4x^3 - 7x^4 - x^5 = -3, \\ 2x^1 - 12x^2 + 8x^3 - 14x^4 = -7, \\ -x^1 + 9x^2 - 10x^3 + 13x^4 = 5, \\ -5x^1 + x^2 + 10x^3 - 4x^4 + x^5 = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 10x^1 + 22x^2 + 16x^3 + 4x^4 - x^5 = -4, \\ -3x^1 - x^2 + 2x^3 - 15x^4 + 11x^5 = -9, \\ 8x^1 + 16x^3 + 4x^4 - 6x^5 = -4, \\ x^1 + 3x^2 - 6x^3 - 11x^4 + 7x^5 = -13. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 8x^1 - 6x^2 - 4x^3 - 4x^5 = -3, \\ -5x^1 + 3x^2 + 14x^3 - 10x^4 + 3x^5 = 1, \\ -19x^1 - 21x^2 + 2x^3 + 7x^4 = -1, \\ 20x^1 + 18x^2 - 4x^3 - 8x^4 = -1. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 21x^1 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^4 = -12, \\ -27x^1 - x^2 + 5x^3 - 9x^4 + 2x^5 = 11, \\ -9x^1 + 8x^2 - 3x^3 - 4x^4 - 4x^5 = -1, \\ -6x^1 - x^2 - 4x^3 + 5x^4 + 10x^5 = -6. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -2x^1 + 6x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 9x^5 = 1, \\ -9x^1 - 10x^2 - 6x^3 - x^4 - 8x^5 = -1, \\ -3x^1 + 12x^3 + 18x^4 - 9x^5 = 6, \\ -4x^1 - 4x^2 + 7x^3 + 14x^4 - 11x^5 = 4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -12x^1 - 2x^2 + 7x^3 - 5x^4 - 16x^5 = 6, \\ -11x^1 + 4x^2 + 13x^3 - 2x^4 - 5x^5 = 3, \\ 11x^1 - x^2 - 14x^3 + 11x^4 + 19x^5 = -10, \\ -6x^1 - 6x^2 - x^3 + 3x^4 - 8x^5 = -1. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 15x^1 + 6x^2 - x^3 - 5x^4 + 5x^5 = -3, \\ 15x^1 + 4x^2 + x^3 = -2, \\ 3x^1 + 4x^2 - 3x^3 - 8x^4 + 8x^5 = -2, \\ -2x^2 + 2x^3 + 5x^4 - 5x^5 = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -6x^1 - 18x^2 + 6x^3 + 12x^4 + 9x^5 = 11, \\ 15x^1 + 8x^2 + 4x^3 - 2x^4 - 17x^5 = -6, \\ 5x^1 - 8x^2 + 12x^3 + 10x^4 - 3x^5 = 6, \\ 9x^1 + 5x^2 + 13x^3 + 4x^4 - 8x^5 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} -15x^1 + 15x^2 - 10x^3 + 9x^4 - 7x^5 = -6, \\ 5x^1 + 10x^2 - 4x^3 + 13x^4 - 12x^5 = 6, \\ -9x^1 + 7x^2 - 4x^3 + 23x^4 - x^5 = 0, \\ -4x^1 + 9x^2 - 5x^3 + 2x^4 + 4x^5 = 12. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -x^1 - 5x^2 + 15x^3 + 3x^4 - 9x^5 = 16, \\ -3x^1 + 2x^2 + 11x^3 + 12x^4 - 16x^5 = 6, \\ -3x^1 - 6x^2 + 10x^3 - 6x^5 = 14, \\ -8x^1 - 7x^3 + 4x^4 - 8x^5 = -2. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x^1 + 12x^2 + 5x^3 + 4x^4 + 12x^5 = 6, \\ -4x^1 + 12x^2 - x^3 - 4x^4 + 12x^5 = -6, \\ 6x^1 - 3x^2 + 4x^3 + 6x^4 - 3x^5 = 9, \\ 8x^1 + 6x^3 + 8x^4 = 12. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 6x^2 - 2x^3 - 8x^4 - 4x^5 = 6, \\ 3x^1 + 4x^2 - x^3 - 6x^4 - 4x^5 = 5, \\ 15x^1 - 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 - 4x^5 = 1, \\ 9x^1 - 3x^2 + 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -13x^1 - 5x^2 + 2x^3 + x^4 + 16x^5 = 7, \\ -9x^1 + 8x^2 - 19x^3 - 11x^4 + 6x^5 = -8, \\ -4x^1 - 12x^2 + 5x^3 + 11x^4 + 6x^5 = 7, \\ -5x^1 + 17x^2 + 11x^3 + 2x^4 + 7x^5 = -3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -7x^1 + 9x^2 + 5x^3 + 2x^4 - 19x^5 = 6, \\ x^1 - 4x^2 - 7x^3 + 22x^4 - 5x^5 = -5, \\ -7x^1 - 17x^2 - 15x^3 + 18x^4 + 9x^5 = -12, \\ 6x^1 + 11x^2 + 11x^3 - 20x^4 = 8. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -7x^1 + 3x^2 - 5x^3 - 4x^4 + 7x^5 = -1, \\ -4x^1 - 9x^2 - 5x^3 + 2x^4 + 4x^5 = 3, \\ 13x^1 + 3x^2 + 11x^3 + 4x^4 - 13x^5 = -1, \\ -10x^1 - 8x^3 - 4x^4 + 10x^5 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 11x^1 + 8x^2 + 15x^3 + 8x^4 - 8x^5 = -4, \\ -x^1 + 8x^2 + 3x^3 - 8x^4 + 8x^5 = -4, \\ 13x^1 + 9x^2 + 18x^3 + 7x^4 - 8x^5 = -7, \\ 4x^1 - 7x^2 + 3x^3 - 3x^4 - 2x^5 = -9. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x^1 + 9x^2 - 12x^3 + 2x^4 + 4x^5 = -6, \\ 6x^1 - 6x^2 + 4x^3 + 13x^4 + x^5 = -11, \\ 2x^1 - 6x^2 + 8x^3 + 3x^4 - 5x^5 = -1, \\ 4x^1 + 3x^2 - 9x^3 + 11x^4 + 10x^5 = -12. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 6x^1 - 14x^2 - 9x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 6, \\ 12x^1 + x^2 - 7x^3 - 9x^4 + 4x^5 = 0, \\ 17x^1 - 12x^2 - 17x^3 + 4x^4 + 11x^5 = 7, \\ 9x^1 + 2x^2 - 4x^3 - 6x^4 + 3x^5 = -5. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -11x^1 + 2x^2 + 12x^3 - 7x^4 - 13x^5 = 7, \\ 5x^1 + 3x^2 + 5x^3 - 12x^4 - 7x^5 = 8, \\ -5x^2 - 13x^3 + 19x^4 + 16x^5 = -14, \\ -8x^1 + 6x^4 + 2x^5 = -3. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} -8x^1 - 7x^2 - 16x^4 - 5x^5 = -6, \\ -10x^1 - 12x^2 - 2x^3 - 18x^4 + 3x^5 = 6, \\ 4x^1 + 6x^2 + 8x^3 - 3x^5 = 12, \\ -7x^1 - 5x^2 + 3x^3 - 17x^4 - 7x^5 = -3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 7x^1 + 6x^2 - 3x^3 - 6x^4 + x^5 = 1, \\ 5x^1 - 2x^2 - 5x^3 + 2x^4 + 3x^5 = 3, \\ 2x^1 + 8x^2 + 2x^3 - 8x^4 - 2x^5 = -2, \\ 7x^1 - 5x^2 - 8x^3 + 5x^4 + 5x^5 = 5. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} -12x^1 + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 = 0, \\ 3x^1 - 2x^2 - 12x^3 + 13x^4 + 15x^5 = -10, \\ 8x^1 - 3x^2 - 11x^3 + 9x^4 + 12x^5 = -8, \\ -4x^1 + 2x^2 + 10x^3 - 10x^4 - 12x^5 = 8. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 7x^2 + 3x^3 - 3x^4 + 4x^5 = -1, \\ -4x^1 - 9x^2 - 9x^3 + 5x^4 - 4x^5 = 7, \\ 3x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 2x^5 = -4, \\ -3x^1 - 12x^2 - 9x^3 + 6x^4 - 6x^5 = 6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} -9x^1 - 2x^2 + 7x^3 - 2x^4 - 4x^5 = -3, \\ 12x^1 - 6x^2 - 12x^3 + 2x^4 + 7x^5 = 8, \\ -11x^1 + 8x^2 + 11x^3 + 4x^4 - 6x^5 = -9, \\ 3x^1 - 8x^2 - 5x^3 + 3x^5 = 5. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -4x^1 - 2x^2 + 2x^4 - 6x^5 = 4, \\ 5x^1 - 2x^2 - 6x^3 - 4x^4 + 3x^5 = 1, \\ -4x^1 + x^2 + 4x^3 + 3x^4 - 3x^5 = 0, \\ -5x^1 - x^2 + 2x^3 + 3x^4 - 6x^5 = 3. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} -x^1 + x^2 + x^3 - 3x^4 - 6x^5 = -9, \\ -3x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 9x^4 - 3x^5 = 3, \\ 2x^1 + 3x^2 - 2x^3 + 6x^4 - 3x^5 = -12, \\ 5x^1 + 3x^2 - 5x^3 + 15x^4 + 6x^5 = -3. \end{cases}$$

Задача 1.5. Определить взаимное расположение прямой ℓ и плоскости \mathcal{P} . В случае их пересечения найти общую точку.

$$1. \text{ a) } \ell : x^1 = -2 - t, \quad x^2 = -2 + 4t, \quad x^3 = -1 + 2t, \quad x^4 = 4 - 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 2x^1 + 6x^2 - 11x^3 + 5 = 0, \\ -2x^1 - 6x^2 - 11x^4 + 28 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \ell : \frac{x^1 + 3}{-2} = \frac{x^2 + 1}{-2} = \frac{x^3 + 5}{-3} = \frac{x^4 - 4}{2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -3 + 2t_2, \\ x^2 = -3 + t_1 + 3t_2, \\ x^3 = -1 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = 2 + t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$2. \text{ a) } \ell : x^1 = -7, \quad x^2 = 3 + t, \quad x^3 = 1 + 2t, \quad x^4 = 4 - 4t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 3x^1 + 6x^2 - 3x^3 + 6 = 0, \\ -11x^1 - 12x^2 - 3x^4 - 29 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 1}{2} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 3}{-3} = \frac{x^4}{3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -3 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 4 + t_1 - 3t_2, \\ x^3 = 1 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -5 + 2t_2. \end{cases}$$

$$3. a) \ell : x^1 = 3 - t, x^2 = -10, x^3 = -4 + t, x^4 = -6 - 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 2x^3 - 3 = 0, \\ -4x^1 + 5x^2 + 2x^4 + 11 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 2}{3} = \frac{x^2 - 1}{0} = \frac{x^3 + 3}{3} = \frac{x^4 - 2}{-1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 6 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x^3 = -3t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -4 - 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

$$4. a) \ell : x^1 = 3t, x^2 = 1 + 2t, x^3 = 1 + 4t, x^4 = 3 + 3t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^1 + 5x^2 - x^3 - 3 = 0, \\ x^1 - x^4 + 3 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 3}{1} = \frac{x^2 + 3}{-2} = \frac{x^3 - 2}{1} = \frac{x^4 - 3}{1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + t_1, \\ x^2 = 1 + 2t_2, \\ x^3 = -3 + t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -1 + t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$5. a) \ell : x^1 = -6 - t, x^2 = -5 + t, x^3 = 1 - 5t, x^4 = 10;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 2x^1 + 12x^2 + 2x^3 - 10 = 0, \\ 2x^4 + 6 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 3}{3} = \frac{x^2 + 6}{-3} = \frac{x^3 + 2}{-2} = \frac{x^4 - 1}{1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -2 - 2t_1, \\ x^2 = -7 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 2 - 2t_2, \\ x^4 = 1 + 2t_1 + t_2. \end{cases}$$

6. a) $\ell : x^1 = -3 + 2t, x^2 = -1 + 2t, x^3 = -2, x^4 = 3t;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ -x^1 - 2x^2 + 2x^4 - 5 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 - 4}{-3} = \frac{x^2 - 3}{-1} = \frac{x^3 + 6}{3} = \frac{x^4}{0};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -3 - t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 7 + 3t_1 - 2t_2, \\ x^3 = -1 + 3t_1 + t_2, \\ x^4 = 2t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

7. a) $\ell : x^1 = 4 + 3t, x^2 = -7 - 4t, x^3 = 0, x^4 = 2 + 2t;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 4x^1 + 3x^2 + x^3 + 5 = 0, \\ -6x^1 - 4x^2 + x^4 - 6 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 + 3}{1} = \frac{x^2 + 1}{1} = \frac{x^3 + 5}{3} = \frac{x^4 - 2}{0};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -6 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 1 + 2t_1 + 3t_2, \\ x^3 = -7 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

8. a) $\ell : x^1 = -5 - 3t, x^2 = 2 - 4t, x^3 = 5 + 3t, x^4 = 0;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -9x^1 - 9x^3 = 0, \\ -9x^4 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 - 2}{0} = \frac{x^2 + 3}{1} = \frac{x^3 - 3}{-1} = \frac{x^4 + 2}{3};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 - t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 2 + t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 3 - 2t_1 + 3t_2, \\ x^4 = -t_1. \end{cases}$$

$$9. a) \ell : x^1 = 1 - t, x^2 = -3 + 2t, x^3 = 5 + t, x^4 = 3 + 4t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -6x^1 - 4x^2 + 2x^3 - 16 = 0, \\ -4x^1 - 6x^2 + 2x^4 - 20 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 2}{0} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3}{1} = \frac{x^4 - 2}{0};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 5 + t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 1 - t_1 - t_2, \\ x^3 = -4 - 3t_1, \\ x^4 = 4 + 3t_1 + t_2. \end{cases}$$

$$10. a) \ell : x^1 = 1 - t, x^2 = 1 - 3t, x^3 = 1 - 2t, x^4 = 5 - 6t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^1 - 4x^2 + 7x^3 - 1 = 0, \\ 3x^1 - 15x^2 + 7x^4 - 23 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1}{-2} = \frac{x^2 + 5}{-2} = \frac{x^3 - 2}{-1} = \frac{x^4 + 2}{0};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + t_1, \\ x^2 = -4 + 2t_1 + t_2, \\ x^3 = 3 + 2t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -1 - 3t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$11. a) \ell : x^1 = -5 + 5t, x^2 = 5 + 3t, x^3 = -6 + 2t, x^4 = 1 - 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 5x^1 - 11x^2 + 4x^3 - 22 = 0, \\ -5x^1 + 11x^2 + 4x^4 + 22 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 4}{3} = \frac{x^2 - 1}{0} = \frac{x^3 + 2}{0} = \frac{x^4 - 3}{-1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -3 + 2t_1, \\ x^2 = 2 - 2t_1 - t_2, \\ x^3 = -3 - t_2, \\ x^4 = 2 + 3t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

$$12. a) \ell : x^1 = 4 - t, x^2 = 2 - 2t, x^3 = -2 + 3t, x^4 = t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 4x^1 - 8x^2 - 4x^3 - 8 = 0, \\ 6x^1 - 5x^2 - 4x^4 - 14 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 6}{3} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^3 - 1}{-2} = \frac{x^4 - 1}{-3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 - t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 6 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -2 - 2t_1 - 3t_2, \\ x^4 = -1 - 2t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$13. a) \ell : x^1 = -1 - 2t, x^2 = -1 - 4t, x^3 = -2 + t, x^4 = -4 + 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -3x^1 - x^2 - 10x^3 - 24 = 0, \\ 6x^1 - 8x^2 - 10x^4 - 42 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 2}{3} = \frac{x^2 - 2}{0} = \frac{x^3}{-2} = \frac{x^4 - 3}{2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 + 3t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 1 - t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 1 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$14. a) \ell : x^1 = 5 + t, x^2 = -10 + 3t, x^3 = t, x^4 = -t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^1 + 2x^3 - 12 = 0, \\ 5x^1 - x^2 + 2x^4 + 18 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 3}{3} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 - 5}{-3} = \frac{x^4 + 2}{1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 3t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = -3 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -3 + 2t_1. \end{cases}$$

$$15. a) \ell : x^1 = 1 - t, x^2 = -1 + 2t, x^3 = 1 + t, x^4 = -1 - t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^1 - 3x^2 + 4x^3 - 5 = 0, \\ -6x^1 - x^2 + 4x^4 + 9 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 3}{-2} = \frac{x^2 - 1}{-1} = \frac{x^3 - 2}{-1} = \frac{x^4 - 1}{2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^2 = -2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 1 + 2t_1 - 2t_2, \\ x^4 = 6 + 3t_2. \end{cases}$$

16. a) $\ell : x^1 = -8 - t, x^2 = -1 - t, x^3 = 3 - 2t, x^4 = -5 - 5t;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 3x^1 + 3x^2 - 3x^3 - 12 = 0, \\ 8x^1 + 7x^2 - 3x^4 - 11 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 - 4}{-1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3 - 1}{-1} = \frac{x^4}{-1};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 4 - 2t_1 - t_2, \\ x^2 = 5 - 2t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -6 + 3t_1 - 3t_2, \\ x^4 = 3 - 3t_1 + t_2. \end{cases}$$

17. a) $\ell : x^1 = 2t, x^2 = -3 - t, x^3 = -5t, x^4 = 2 + t;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -12x^1 + x^2 - 5x^3 + 3 = 0, \\ 3x^1 + x^2 - 5x^4 + 13 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 + 3}{0} = \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{x^3 - 2}{-1} = \frac{x^4 + 2}{1};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -7 - t_1 - 3t_2, \\ x^2 = -2 - 2t_1 - 2t_2, \\ x^3 = 2 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = -7 - 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

18. a) $\ell : x^1 = 6, x^2 = 5 + 2t, x^3 = 6 - 2t, x^4 = 1;$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -6x^1 + 4x^2 + 4x^3 + 22 = 0, \\ -4x^1 + 4x^4 + 8 = 0; \end{cases}$$

b) $\ell : \frac{x^1 - 5}{2} = \frac{x^2 + 2}{-1} = \frac{x^3 - 1}{3} = \frac{x^4 - 1}{-2};$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 3t_1, \\ x^2 = 1 - 2t_1, \\ x^3 = 1 + 3t_2, \\ x^4 = -1 + 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$19. a) \ell : x^1 = 2 + t, x^2 = -2 - 6t, x^3 = -2 - t, x^4 = 4;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -15x^1 - 3x^2 + 3x^3 + 30 = 0, \\ 12x^1 + 2x^2 + 3x^4 - 32 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2 + 4}{-3} = \frac{x^3 + 2}{-1} = \frac{x^4 - 4}{3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 + t_1 - t_2, \\ x^2 = -2 + t_1, \\ x^3 = -2 + t_1, \\ x^4 = 2 - t_1. \end{cases}$$

$$20. a) \ell : x^1 = -8 + 4t, x^2 = -5t, x^3 = 6 - 2t, x^4 = -3 + 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 11x^1 + 6x^2 + 7x^3 + 40 = 0, \\ 9x^1 + 10x^2 + 7x^4 + 41 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 1}{-3} = \frac{x^2 - 1}{-2} = \frac{x^3 + 2}{1} = \frac{x^4}{0};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 5 - t_1 + 2t_2, \\ x^2 = 1 + 2t_1, \\ x^3 = -3, \\ x^4 = 0. \end{cases}$$

$$21. a) \ell : x^1 = -3 + 3t, x^2 = -3 - t, x^3 = -3 + 2t, x^4 = -7;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 6x^1 - 9x^3 - 9 = 0, \\ 2x^1 + 6x^2 - 9x^4 - 39 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 5}{-2} = \frac{x^2}{-3} = \frac{x^3 + 1}{-1} = \frac{x^4 - 3}{-3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 + 3t_1 - t_2, \\ x^2 = 1 - 3t_1 - t_2, \\ x^3 = -3t_1 + t_2, \\ x^4 = 1 - 2t_1 + t_2. \end{cases}$$

$$22. a) \ell : x^1 = 2 + 3t, x^2 = 3 + 3t, x^3 = 1 + 2t, x^4 = -1 - t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -2x^2 + 3x^3 + 3 = 0, \\ 6x^1 - 5x^2 + 3x^4 + 6 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^3 - 1}{3} = \frac{x^4 - 6}{3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 8 - 3t_1 - 3t_2, \\ x^2 = -4 + 2t_1 - t_2, \\ x^3 = -5 + 2t_1 + t_2, \\ x^4 = 6 - t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$23. a) \ell : x^1 = -4 + t, x^2 = 5 + 4t, x^3 = -3t, x^4 = -3 + 5t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -6x^1 + 3x^2 + 2x^3 - 23 = 0, \\ -2x^1 - 2x^2 + 2x^4 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 5}{-3} = \frac{x^2 + 1}{0} = \frac{x^3}{-2} = \frac{x^4 + 3}{3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 - 2t_1 - t_2, \\ x^2 = -5 - 3t_1 - t_2, \\ x^3 = -1 + t_1, \\ x^4 = 1 + t_1. \end{cases}$$

$$24. a) \ell : x^1 = -4 + 5t, x^2 = 1 + 2t, x^3 = -4 + t, x^4 = 4 - 3t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -3x^2 + 6x^3 + 27 = 0, \\ 6x^1 - 6x^2 + 6x^4 + 6 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 - 1}{0} = \frac{x^4 - 2}{-3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 3 - 3t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 3 + t_2, \\ x^3 = 2 - t_1, \\ x^4 = -t_1. \end{cases}$$

$$25. a) \ell : x^1 = -3 + 4t, x^2 = 8, x^3 = -1 - t, x^4 = -1 + t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 3x^1 + 7x^2 + 12x^3 - 35 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 + 12x^4 + 27 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3}{-1} = \frac{x^4 + 5}{-3};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 + t_1, \\ x^2 = 2 - 3t_1 - t_2, \\ x^3 = 1 - t_1 - t_2, \\ x^4 = 3 - 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } \ell : x^1 = -7 + 2t, x^2 = -4 - t, x^3 = -2 + t, x^4 = 1 + t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 + 7x^2 + 5x^3 - 17 = 0, \\ -4x^1 - 3x^2 + 5x^4 + 13 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \ell : \frac{x^1 + 1}{-3} = \frac{x^2 + 2}{1} = \frac{x^3 + 4}{-2} = \frac{x^4 + 2}{-2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 - 2t_1 + 3t_2, \\ x^2 = -6 + t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -1 - 3t_1 + 2t_2, \\ x^4 = 3t_1 - 3t_2. \end{cases}$$

$$27. \text{ a) } \ell : x^1 = 2 + 3t, x^2 = -9, x^3 = 1 + 3t, x^4 = -5 + 2t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 9x^1 + 3x^2 - 9x^3 + 18 = 0, \\ 6x^1 + 9x^2 - 9x^4 + 24 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \ell : \frac{x^1 + 3}{-3} = \frac{x^2 + 2}{1} = \frac{x^3 - 5}{3} = \frac{x^4 - 1}{-2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = -1 + t_1 - 2t_2, \\ x^2 = 2 + 2t_1 + 3t_2, \\ x^3 = 3 + t_1, \\ x^4 = 3 + t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$28. \text{ a) } \ell : x^1 = 3t, x^2 = 3 + t, x^3 = -1 - 5t, x^4 = 4;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -8x^1 + 9x^2 - 3x^3 - 8 = 0, \\ 3x^1 - 9x^2 - 3x^4 + 24 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \ell : \frac{x^1 - 3}{-2} = \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{x^3 + 2}{1} = \frac{x^4 + 2}{0};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 7 - 3t_1 + 3t_2, \\ x^2 = 6 - t_1 + 2t_2, \\ x^3 = -2t_1 - t_2, \\ x^4 = -6 + 2t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

$$29. a) \ell : x^1 = -6 - 6t, x^2 = 2 + 4t, x^3 = -2 - 4t, x^4 = -2 - t;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} -6x^2 - 6x^3 = 0, \\ -x^1 - 3x^2 - 6x^4 - 12 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 + 2}{3} = \frac{x^2 + 2}{1} = \frac{x^3}{-3} = \frac{x^4 + 3}{2};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 2 + t_1, \\ x^2 = -2 + 2t_1 - 3t_2, \\ x^3 = 1 + t_1 + 3t_2, \\ x^4 = -1 + t_1 - t_2. \end{cases}$$

$$30. a) \ell : x^1 = 8 - 3t, x^2 = 3 + 3t, x^3 = -8 + 3t, x^4 = -6;$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 9x^1 + 9x^3 + 9 = 0, \\ -6x^1 - 6x^2 + 9x^4 - 18 = 0; \end{cases}$$

$$b) \ell : \frac{x^1 - 3}{0} = \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{x^3 - 4}{-2} = \frac{x^4 - 4}{-1};$$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x^1 = 1 - 2t_1, \\ x^2 = 2 - 2t_1 - t_2, \\ x^3 = -3 - 2t_1 + 3t_2, \\ x^4 = 4 + t_1. \end{cases}$$

Задача 1.6. Определить взаимное расположение плоскостей $\mathcal{P}_1 = A + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ и $\mathcal{P}_2 = B + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$.

1. $A(0, 2, 2, 0, -2)$, $\vec{u} = (-1, 3, 4, 5, -4)$, $\vec{v} = (-2, 5, -5, 5, -1)$;
 $B(0, -1, 1, -2, 0)$, $\vec{p} = (5, -4, -3, -4, -3)$, $\vec{q} = (5, -3, 1, 5, -2)$.
2. $A(2, 2, -1, 2)$, $\vec{u} = (1, -1, -4, 8)$, $\vec{v} = (5, 3, 4, -8)$;
 $B(-1, -1, 1, 1)$, $\vec{p} = (19, -16, -9, 12)$, $\vec{q} = (-5, 20, 7, -8)$.
3. $A(-1, 2, 0, -2)$, $\vec{u} = (3, 0, -3, -3)$, $\vec{v} = (-1, 4, -5, -1)$;
 $B(-1, -2, -1, 1)$, $\vec{p} = (10, -10, 4, 2)$, $\vec{q} = (18, -14, 0, 10)$.
4. $A(-2, 0, -2, 1, 0)$, $\vec{u} = (-5, -1, -2, -4, -5)$, $\vec{v} = (5, 1, 1, -3, 2)$;
 $B(-2, 0, 1, -2, 0)$, $\vec{p} = (-1, -4, 1, 4, 5)$, $\vec{q} = (1, 1, 1, -2, 1)$.
5. $A(-2, 2, -1, -2, 0)$, $\vec{u} = (2, 2, 4, 3, -4)$, $\vec{v} = (-6, -6, 10, 2, -10)$;
 $B(-2, 0, 2, 1, 0)$, $\vec{p} = (5, 9, 10, 7, 8)$, $\vec{q} = (7, 3, -10, -1, -8)$.

6. $A(3, -5, 4, 2, -3)$, $\vec{u} = (1, -2, 2, 0, 0)$, $\vec{v} = (-1, 3, -2, 0, 1)$;
 $B(1, 0, 0, 2, -2)$, $\vec{p} = (3, 2, -1, -5, 8)$, $\vec{q} = (3, 2, -1, -5, 8)$.
7. $A(1, 0, 0, 1)$, $\vec{u} = (3, -1, -1, 2)$, $\vec{v} = (5, -2, -2, 2)$;
 $B(9, -33, -28, -25)$, $\vec{p} = (5, -20, -17, -16)$, $\vec{q} = (5, -14, -12, -10)$.
8. $A(0, -2, 0, 2, -1)$, $\vec{u} = (-2, -6, 0, -8, -8)$, $\vec{v} = (-1, 4, 0, 10, 10)$;
 $B(0, -2, -1, -2, 2)$, $\vec{p} = (-6, 0, 5, -9, -9)$, $\vec{q} = (22, -8, -15, 3, 3)$.
9. $A(1, 0, -1, -1)$, $\vec{u} = (-5, 4, -5, 1)$, $\vec{v} = (-4, -1, -4, -2)$;
 $B(-2, 0, -2, 2)$, $\vec{p} = (1, 4, 1, 3)$, $\vec{q} = (0, 3, 0, 2)$.
10. $A(3, 7, -5, 0, 9)$, $\vec{u} = (1, 3, -5, -1, 4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1, -1, -3)$;
 $B(4, 10, -2, 7, 9)$, $\vec{p} = (-1, -3, 1, -4, -4)$, $\vec{q} = (2, 5, -2, 3, 3)$.
11. $A(2, 2, 1, 0, 1)$, $\vec{u} = (-4, 0, -5, 1, -2)$, $\vec{v} = (-5, 0, -1, -4, 1)$;
 $B(-2, 2, -1, 1, 1)$, $\vec{p} = (4, -8, -7, -10, -3)$, $\vec{q} = (18, -24, -15, -30, -7)$.
12. $A(-1, -7, 5, 5)$, $\vec{u} = (-2, 2, 2, -8)$, $\vec{v} = (5, 4, -5, 2)$;
 $B(-6, -19, -10, 19)$, $\vec{p} = (16, 26, 14, -20)$, $\vec{q} = (8, 8, 2, 0)$.
13. $A(4, 7, -12, 3, 7)$, $\vec{u} = (4, 1, -5, -1, 3)$, $\vec{v} = (-1, -4, 5, -4, -5)$;
 $B(2, 8, -2, 1, -5)$, $\vec{p} = (1, -2, -1, 3, -1)$, $\vec{q} = (-4, -4, 1, -4, 5)$.
14. $A(2, -2, -2, -2)$, $\vec{u} = (0, 0, -10, -7)$, $\vec{v} = (0, 0, -4, -3)$;
 $B(-1, 1, -2, -2)$, $\vec{p} = (-4, 12, -20, -5)$, $\vec{q} = (-6, 18, -29, -8)$.
15. $A(-1, -2, -2, 0, -1)$, $\vec{u} = (-7, 6, 7, -2, 1)$, $\vec{v} = (3, 6, -3, 3, 6)$;
 $B(-1, 1, 0, 1, 0)$, $\vec{p} = (-4, -4, 4, -3, -5)$, $\vec{q} = (3, -2, -3, 1, 0)$.
16. $A(-1, -3, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, -5, 6, 5)$, $\vec{v} = (5, -1, -2, 1)$;
 $B(3, -5, 0, 2)$, $\vec{p} = (-6, 6, -4, -6)$, $\vec{q} = (-1, -1, 2, 1)$.
17. $A(-1, -4, 0, 2)$, $\vec{u} = (0, -4, 4, 2)$, $\vec{v} = (0, -2, 4, 0)$;
 $B(-10, -8, -2, -3)$, $\vec{p} = (-27, -16, -10, -9)$, $\vec{q} = (-18, -10, -8, -6)$.
18. $A(2, 1, 1, 3)$, $\vec{u} = (0, 9, -3, -9)$, $\vec{v} = (2, -5, 5, 7)$;
 $B(-2, -1, -5, 1)$, $\vec{p} = (1, 8, -1, -7)$, $\vec{q} = (0, -9, 3, 9)$.
19. $A(0, -1, 0, -2, -2)$, $\vec{u} = (-1, -2, 0, -2, -3)$, $\vec{v} = (-9, -6, 0, 6, -3)$;
 $B(2, 1, 0, -2, 0)$, $\vec{p} = (0, -1, 0, -2, -2)$, $\vec{q} = (-3, 0, 0, 6, 3)$.
20. $A(1, 1, 1, -2)$, $\vec{u} = (2, 2, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 8, 0, -8)$;
 $B(1, -1, -1, 0)$, $\vec{p} = (1, -2, 0, 2)$, $\vec{q} = (-1, 0, 0, 0)$.
21. $A(-3, 0, 2, -2, -4)$, $\vec{u} = (8, 2, 0, 8, 4)$, $\vec{v} = (-6, 0, 0, -6, -4)$;
 $B(-1, -4, 2, 0, 0)$, $\vec{p} = (-7, 2, 0, -7, -6)$, $\vec{q} = (0, 6, 0, 0, -4)$.

22. $A(8, -2, 1, 2)$, $\vec{u} = (3, 2, 3, -1)$, $\vec{v} = (5, -3, -1, 1)$;
 $B(-7, -7, 0, -1)$, $\vec{p} = (2, 3, -3, -1)$, $\vec{q} = (5, 3, 2, 4)$.
23. $A(-6, -1, 7, 6)$, $\vec{u} = (-4, 1, 3, 4)$, $\vec{v} = (-4, -3, 3, 4)$;
 $B(7, -8, -7, 3)$, $\vec{p} = (1, -5, -3, 4)$, $\vec{q} = (-4, 4, 5, -1)$.
24. $A(10, 8, -9, -7, -5)$, $\vec{u} = (5, 2, -2, -1, -5)$, $\vec{v} = (-5, -5, 5, 4, -1)$;
 $B(0, 0, 4, 1, 5)$, $\vec{p} = (3, -2, -5, 2, -2)$, $\vec{q} = (-3, 3, -1, -5, -4)$.
25. $A(2, 0, -4, -9)$, $\vec{u} = (-2, -3, -5, -4)$, $\vec{v} = (-5, -5, -2, 4)$;
 $B(-8, -8, 0, -1)$, $\vec{p} = (3, 3, -5, 5)$, $\vec{q} = (-4, -3, -4, 5)$.
26. $A(0, 1, 2, 2, -1)$, $\vec{u} = (0, 2, 2, -4, 3)$, $\vec{v} = (8, -10, 6, -4, 1)$;
 $B(-1, -1, -2, 1, 2)$, $\vec{p} = (-1, -2, -4, 7, -5)$, $\vec{q} = (-4, 2, -6, 8, -5)$.
27. $A(6, -2, 0, -5, 2)$, $\vec{u} = (-2, -7, 3, 2, -4)$, $\vec{v} = (-2, -4, 2, 2, -3)$;
 $B(2, 2, 0, -1, 0)$, $\vec{p} = (12, -3, -3, -12, 9)$, $\vec{q} = (8, 1, -3, -8, 7)$.
28. $A(0, -2, -2, -1)$, $\vec{u} = (-8, 0, 4, 2)$, $\vec{v} = (6, 1, -2, -1)$;
 $B(-2, 2, -2, 2)$, $\vec{p} = (10, 1, -4, -2)$, $\vec{q} = (8, -2, -6, -3)$.
29. $A(-2, 1, 4, 0, -1)$, $\vec{u} = (-4, 6, -5, -5, 0)$, $\vec{v} = (-8, 6, -1, -7, 0)$;
 $B(12, -15, -4, 16, 5)$, $\vec{p} = (-25, 30, 7, -29, -9)$, $\vec{q} = (-15, 14, 3, -15, -3)$.
30. $A(-1, -2, -1, -1, 1)$, $\vec{u} = (4, 0, -4, 0, -2)$, $\vec{v} = (6, -1, -6, 0, -3)$;
 $B(0, 2, -1, -1, -1)$, $\vec{p} = (4, 0, -4, 0, -2)$, $\vec{q} = (4, -4, -4, 0, -2)$.

Задача 1.7. Написать формулы перехода к новой системе координат на прямой, если за ее начало принята точка O' , а за базисный вектор — вектор $\vec{O'A}$. Координаты точек указаны в старой системе координат.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. $O'(-4)$, $A(-2)$. | 9. $O'(-10)$, $A(-8)$. | 17. $O'(10)$, $A(13)$. |
| 2. $O'(-9)$, $A(-7)$. | 10. $O'(10)$, $A(8)$. | 18. $O'(-3)$, $A(-6)$. |
| 3. $O'(7)$, $A(6)$. | 11. $O'(-8)$, $A(-10)$. | 19. $O'(1)$, $A(3)$. |
| 4. $O'(-1)$, $A(-4)$. | 12. $O'(5)$, $A(6)$. | 20. $O'(-7)$, $A(-10)$. |
| 5. $O'(9)$, $A(12)$. | 13. $O'(-1)$, $A(-3)$. | 21. $O'(2)$, $A(0)$. |
| 6. $O'(10)$, $A(12)$. | 14. $O'(-6)$, $A(-3)$. | 22. $O'(8)$, $A(7)$. |
| 7. $O'(5)$, $A(8)$. | 15. $O'(-7)$, $A(-9)$. | 23. $O'(-6)$, $A(-7)$. |
| 8. $O'(-8)$, $A(-9)$. | 16. $O'(6)$, $A(5)$. | 24. $O'(7)$, $A(10)$. |

25. $O'(5), A(7)$. 27. $O'(6), A(4)$. 29. $O'(-8), A(-5)$.
 26. $O'(6), A(8)$. 28. $O'(1), A(4)$. 30. $O'(7), A(9)$.

Задача 1.8. Пусть точки A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма, E — точка пересечения его диагоналей. Найдите формулы перехода от старой системы координат $O \vec{e}_1 \vec{e}_2$ к новой $O' \vec{e}'_1 \vec{e}'_2$.

1. $O = E, \vec{e}_1 = \overrightarrow{CE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{EB}; O' = C, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{CB}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{AB}$.
2. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{EA}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{AD}$.
3. $O = E, \vec{e}_1 = \overrightarrow{CA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BE}; O' = C, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{DA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{CD}$.
4. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DB}$.
5. $O = D, \vec{e}_1 = \overrightarrow{CA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}; O' = B, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{EB}$.
6. $O = E, \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CB}; O' = B, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{CA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{EB}$.
7. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{EB}; O' = B, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DA}$.
8. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD}; O' = D, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{EA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DB}$.
9. $O = E, \vec{e}_1 = \overrightarrow{EA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD}; O' = D, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{AD}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{BE}$.
10. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{EC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}; O' = D, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DB}$.
11. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{EB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CD}; O' = E, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{CA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DA}$.
12. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{ED}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{AE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{AD}$.
13. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CB}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BD}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{EC}$.
14. $O = A, \vec{e}_1 = \overrightarrow{BE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}; O' = E, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{AE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DC}$.
15. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{DA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BA}; O' = E, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{DB}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{CE}$.
16. $O = E, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}; O' = C, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{CE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{DE}$.
17. $O = D, \vec{e}_1 = \overrightarrow{DC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{CA}; O' = B, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BC}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{BD}$.
18. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{CE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{BE}$.
19. $O = D, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AD}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}; O' = A, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{BD}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{EC}$.
20. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{AE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}; O' = E, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{DE}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{CB}$.
21. $O = C, \vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{DE}; O' = B, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{DA}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{EA}$.
22. $O = B, \vec{e}_1 = \overrightarrow{CE}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}; O' = D, \vec{e}'_1 = \overrightarrow{ED}, \vec{e}'_2 = \overrightarrow{BA}$.

23. $O = B$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{EA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AB}$; $O' = A$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{BD}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{DA}$.
 24. $O = D$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$; $O' = A$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{EC}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{DB}$.
 25. $O = C$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{EB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{EA}$; $O' = E$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{BC}$.
 26. $O = A$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DE}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$; $O' = D$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{DC}$.
 27. $O = C$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}$; $O' = D$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{AE}$.
 28. $O = C$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DE}$; $O' = A$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{AE}$.
 29. $O = B$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DE}$; $O' = E$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{BC}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{AB}$.
 30. $O = E$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BE}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$; $O' = B$, $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{CA}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{CB}$.

Задача 1.9. На плоскости заданы две системы координат: старая Oxy и новая $O'x'y'$, связанные указанными соотношениями, и две прямые ℓ_1 и ℓ_2 , заданные своими уравнениями в старой и новой системах координат соответственно. Найти:

- i. Координаты точки O' и единичных векторов \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе Oxy ;
- ii. Координаты точки O и единичных векторов \vec{e}_1 , \vec{e}_2 осей Ox и Oy в системе $O'x'y'$;
- iii. Координаты единичной точки E' в системе Oxy ;
- iv. Координаты единичной точки E в системе $O'x'y'$;
- v. Уравнения координатных осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе Oxy ;
- vi. Уравнения координатных осей Ox и Oy в системе $O'x'y'$;
- vii. Уравнения прямой ℓ_1 в системе $O'x'y'$;
- viii. Уравнения прямой ℓ_2 в системе Oxy .

1. $x = 5x' + 4y' + 5$, $y = 2x' - 5y' - 2$;
 $\ell_1: x - 2y + 2 = 0$; $\ell_2: 5x' - 2y' - 3 = 0$.
2. $x = 5x' - 2y' + 2$, $y = 4x' + 4y' - 1$;
 $\ell_1: x - 2y + 1 = 0$; $\ell_2: 5x' - 5y' - 1 = 0$.
3. $x = 4x' - 3y' - 3$, $y = 4x' - 2y' - 3$;
 $\ell_1: 2x + y + 1 = 0$; $\ell_2: 5x' - 4y' - 3 = 0$.

4. $x = 4x' - 4y' + 1, y = 3x' - 2y' + 1;$
 $l_1: x + y + 1 = 0; \quad l_2: 5x' - 3y' + 3 = 0.$
5. $x = 5x' + 5y' + 2, y = 3x' - 2y' - 3;$
 $l_1: 4x - 5y + 4 = 0; \quad l_2: 5x' - 5y' - 3 = 0.$
6. $x = 3x' + 4y' + 4, y = 5x' - 3y' - 4;$
 $l_1: 4x + 4y + 3 = 0; \quad l_2: x' + 5y' - 1 = 0.$
7. $x = 3x' + 2y' + 5, y = 2x' + 4y' - 2;$
 $l_1: x + y + 2 = 0; \quad l_2: 2x' + 3y' - 2 = 0.$
8. $x = 2x' - 4y' - 4, y = 5x' - 4y' - 4;$
 $l_1: 3x + 4y - 1 = 0; \quad l_2: 5x' + 2y' + 3 = 0.$
9. $x = 3x' + 3y' + 3, y = 2x' - 5y' + 3;$
 $l_1: x + 5y - 3 = 0; \quad l_2: 2x' + 5y' - 4 = 0.$
10. $x = 3x' - 3y' - 2, y = 3x' + 3y' + 5;$
 $l_1: 4x + 3y + 2 = 0; \quad l_2: 3x' - 4y' - 5 = 0.$
11. $x = x' - 2y' + 4, y = 3x' + 4y' - 5;$
 $l_1: x - 2y - 1 = 0; \quad l_2: 5x' - 4y' + 2 = 0.$
12. $x = 2x' - 5y' + 4, y = 4x' - 3y' + 2;$
 $l_1: 5x + 5y - 1 = 0; \quad l_2: 3x' - 2y' + 1 = 0.$
13. $x = 3x' + y' - 2, y = x' - 2y' + 3);$
 $l_1: x + y + 2 = 0; \quad l_2: 4x' - y' + 1 = 0.$
14. $x = 5x' + y' + 5, y = 5x' + 4y' - 2;$
 $l_1: 3x - 5y + 2 = 0; \quad l_2: 5x' - y' - 4 = 0.$
15. $x = 4x' - 4y' + 5, y = 2x' + y' + 5;$
 $l_1: 5x + 2y + 2 = 0; \quad l_2: 4x' - 5y' + 1 = 0.$
16. $x = 5x' - 4y' - 5, y = 3x' - y' - 4;$
 $l_1: 5x - y + 3 = 0; \quad l_2: 2x' - 2y' - 1 = 0.$
17. $x = 3x' + 4y' - 5, y = x' - 4y' - 4;$
 $l_1: x - y + 3 = 0; \quad l_2: 5x' - 4y' + 2 = 0.$
18. $x = 5x' - 2y' + 4, y = x' + 4y' + 1;$
 $l_1: 4x + 5y - 3 = 0; \quad l_2: 3x' + 3y' - 1 = 0.$
19. $x = 3x' + 2y' + 3, y = 2x' - 2y' + 3;$
 $l_1: x - y + 4 = 0; \quad l_2: 3x' - y' + 3 = 0.$

20. $x = 5x' + 2y' - 4$, $y = 5x' - 5y' + 3$;
 $l_1: 5x - 3y - 2 = 0$; $l_2: 5x' - y' - 5 = 0$.
21. $x = x' + y' + 2$, $y = 4x' + 3y' - 4$;
 $l_1: 4x + 5y - 5 = 0$; $l_2: 5x' + y' + 5 = 0$.
22. $x = 4x' + y' + 4$, $y = 2x' - 3y' - 4$;
 $l_1: 5x - 5y + 4 = 0$; $l_2: 2x' + y' + 4 = 0$.
23. $x = 2x' - 5y' + 5$, $y = 5x' - 4y' - 2$;
 $l_1: 4x - 5y + 4 = 0$; $l_2: 3x' - 5y' + 3 = 0$.
24. $x = x' + 3y' + 3$, $y = 4x' - 5y' - 1$;
 $l_1: 3x + y - 5 = 0$; $l_2: 2x' + y' - 2 = 0$.
25. $x = x' - 4y' + 2$, $y = 4x' - 4y' + 4$;
 $l_1: 3x - 2y - 2 = 0$; $l_2: 3x' - 3y' - 3 = 0$.
26. $x = 3x' - 4y' - 5$, $y = 2x' + 5y' - 4$;
 $l_1: 5x + 3y - 5 = 0$; $l_2: 4x' - y' + 3 = 0$.
27. $x = 2x' + 3y' - 4$, $y = 5x' + y' - 4$;
 $l_1: 5x - 3y + 3 = 0$; $l_2: 4x' - 2y' - 1 = 0$.
28. $x = 3x' + 2y' - 3$, $y = 3x' + 5y' + 3$;
 $l_1: 2x + y - 4 = 0$; $l_2: 3x' + 3y' + 5 = 0$.
29. $x = 2x' + 5y' + 3$, $y = 2x' - 5y' + 1$;
 $l_1: 3x - y - 5 = 0$; $l_2: 2x' - 3y' + 1 = 0$.
30. $x = 2x' - 2y' - 5$, $y = 4x' + 5y' - 5$;
 $l_1: 2x + 3y + 3 = 0$; $l_2: 4x' - y' + 4 = 0$.

Задача 1.10. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые координатные оси Ox' и Oy' соответственно прямые l_1 и l_2 , а за за единичную точку новой системы координат — точку E' .

- $l_1: x - 4y - 17 = 0$, $l_2: 3x + 2y - 9 = 0$; $E'(-4, 5)$.
- $l_1: 2x + 3y + 16 = 0$, $l_2: 3x - 5y - 14 = 0$; $E'(-3, 1)$.
- $l_1: x - y + 5 = 0$, $l_2: 2x - 5y + 16 = 0$; $E'(1, 1)$.
- $l_1: x - 4y + 3 = 0$, $l_2: 4x + y - 5 = 0$; $E'(4, 5)$.
- $l_1: x - 2y + 7 = 0$, $l_2: 2x - y + 5 = 0$; $E'(3, -4)$.

6. $l_1: 4x - 3y - 26 = 0$, $l_2: x + 3y + 1 = 0$; $E'(4, -5)$.
7. $l_1: 4x - y - 17 = 0$, $l_2: 5x - 2y - 19 = 0$; $E'(4, 5)$.
8. $l_1: x - y = 0$, $l_2: 5x + y + 18 = 0$; $E'(-5, -2)$.
9. $l_1: x + 3y - 2 = 0$, $l_2: 5x - 2y + 24 = 0$; $E'(2, -4)$.
10. $l_1: x + y + 9 = 0$, $l_2: 4x - 3y + 1 = 0$; $E'(2, -1)$.
11. $l_1: 2x - y + 11 = 0$, $l_2: x - 3y + 13 = 0$; $E'(2, 4)$.
12. $l_1: 2x + y + 8 = 0$, $l_2: 4x - y + 22 = 0$; $E'(-2, -5)$.
13. $l_1: 5x - 2y + 10 = 0$, $l_2: 2x - 3y - 7 = 0$; $E'(-4, -1)$.
14. $l_1: 2x - 5y + 14 = 0$, $l_2: 2x - y - 2 = 0$; $E'(-4, 5)$.
15. $l_1: x + y - 3 = 0$, $l_2: 3x + 5y - 17 = 0$; $E'(5, 1)$.
16. $l_1: 2x - 5y + 31 = 0$, $l_2: 4x + 5y - 13 = 0$; $E'(5, 4)$.
17. $l_1: x + 3y + 9 = 0$, $l_2: x + 5y + 17 = 0$; $E'(-1, 3)$.
18. $l_1: 2x + 5y - 15 = 0$, $l_2: x + 3y - 10 = 0$; $E'(-2, 2)$.
19. $l_1: x - y + 1 = 0$, $l_2: x + 2y - 14 = 0$; $E'(3, -2)$.
20. $l_1: 3x + 4y - 15 = 0$, $l_2: 3x + 2y - 9 = 0$; $E'(-1, -4)$.
21. $l_1: 5x + y + 8 = 0$, $l_2: x - y - 2 = 0$; $E'(3, -5)$.
22. $l_1: 5x - 4y + 32 = 0$, $l_2: 3x + y + 9 = 0$; $E'(-2, -4)$.
23. $l_1: x + 2y - 7 = 0$, $l_2: x - y - 1 = 0$; $E'(-1, 5)$.
24. $l_1: 2x + 3y - 11 = 0$, $l_2: 2x + 5y - 17 = 0$; $E'(2, -5)$.
25. $l_1: 3x - 5y - 8 = 0$, $l_2: x + 4y + 3 = 0$; $E'(-1, -2)$.
26. $l_1: x - y + 3 = 0$, $l_2: 3x + y - 11 = 0$; $E'(-4, -4)$.
27. $l_1: 2x + 3y + 14 = 0$, $l_2: 3x - 4y - 13 = 0$; $E'(-4, -3)$.
28. $l_1: x + 3y - 17 = 0$, $l_2: x + 2y - 12 = 0$; $E'(-1, 5)$.
29. $l_1: 3x - 5y - 11 = 0$, $l_2: x - 4y - 13 = 0$; $E'(5, -4)$.
30. $l_1: x - y - 3 = 0$, $l_2: 3x - y + 1 = 0$; $E'(-3, -5)$.

Задача 1.11. В пространстве заданы две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, связанные заданными соотношениями. Найти:

- i. Координаты начала системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- ii. Канонические уравнения осей координат системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- iii. Канонические уравнения осей координат системы $Oxyz$ в системе $O'x'y'z'$;
- iv. Уравнения координатных плоскостей системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$;
- v. Уравнение плоскости \mathcal{P} в системе $O'x'y'z'$;
- vi. Канонические уравнения прямой ℓ в системе $O'x'y'z'$.

$$1. \begin{cases} x = 5x' - y' - 3z' + 1, \\ y = x' - y' - 2z' + 1, \\ z = 3x' - 2y' - 4z' - 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 1 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+10}{4} = \frac{y+10}{-10} = \frac{-6+z}{4}.$$

$$5. \begin{cases} x = -4x' + 2y' - z', \\ y = 5x' - 5y' + 6z', \\ z = -x' + 2y' - 3z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 4x - 2y - 4z + 5 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-9}{5} = \frac{y+7}{8} = \frac{z-10}{6}.$$

$$2. \begin{cases} x = -2x' - 6y' - 9z' - 3, \\ y = 2x' + 5y' + 8z' + 2, \\ z = -3x' - 9y' - 14z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x - 2y - z - 1 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+9}{0} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z-10}{2}.$$

$$6. \begin{cases} x = 5x' - 6y' + 14z' + 3, \\ y = -4x' + 5y' - 12z', \\ z = -3x' + 3y' - 7z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x - 4y + 5z - 2 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-5}{-3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-7}{8}.$$

$$3. \begin{cases} x = -x' - y' - 2z' - 2, \\ y = -x' - 2y' - 2z', \\ z = x' + y' + 3z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x - 4y - z + 1 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-2}{-9} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-8}{6}.$$

$$7. \begin{cases} x = -3x' + 7y' + 2z' - 1, \\ y = -3x' + 9y' + z' - 1, \\ z = x' - 2y' - z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 3x + 4y - 4z - 2 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+2}{-5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+6}{2}.$$

$$4. \begin{cases} x = 2x' - 3y' + z' + 2, \\ y = -5x' + 8y' - 2z' - 1, \\ z = x' - 2y' + z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 3x - 3y - 2z - 4 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+10}{-8} = \frac{y+10}{9} = \frac{z+3}{-6}.$$

$$8. \begin{cases} x = 5x' + 10y' + 4z' + 2, \\ y = -3x' - 5y' - 2z' + 3, \\ z = x' + 3y' + z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 5x - 2y - 4z + 3 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+3}{-3} = \frac{y-10}{4} = \frac{z+3}{1}.$$

9.
$$\begin{cases} x = 4x' + 8y' - 11z' + 2, \\ y = -2x' - 3y' + 4z' + 2, \\ z = -x' - 2y' + 3z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 5x + y + 5z - 3 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+5}{2} = \frac{y+7}{-8} = \frac{z+9}{0}.$$
10.
$$\begin{cases} x = 5x' - y' - 6z' + 1, \\ y = 3x' - y' - 3z' - 2, \\ z = -4x' + y' + 5z' + 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 3x + 2y - 5z + 4 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{7} = \frac{z-7}{5}.$$
11.
$$\begin{cases} x = -2x' - y' - 4z' - 1, \\ y = x' + y' + 2z' - 1, \\ z = -3x' - y' - 7z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 2x - 5y - 3z + 4 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-2}{-6} = \frac{y-8}{4} = \frac{z+6}{3}.$$
12.
$$\begin{cases} x = 2x' + y' - 3z' + 3, \\ y = x' + y' - z', \\ z = 3x' + 2y' - 3z' - 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 5x + 4y - 3z - 5 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-4}{-4} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+3}{-7}.$$
13.
$$\begin{cases} x = 2x' + y' - z' - 3, \\ y = x' + y' + z' + 1, \\ z = 3x' + 2y' + z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 2x - 2y - z - 3 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-10} = \frac{z+7}{2}.$$
14.
$$\begin{cases} x = -5x' - 2y' + z' + 2, \\ y = -3x' - y' + z' + 1, \\ z = -6x' - 2y' + z' - 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x + 4y + 4z - 2 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-10}{-10} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{-7}.$$
15.
$$\begin{cases} x = -12x' - 9y' + 8z' + 3, \\ y = x' + y' - 2z' - 2, \\ z = 4x' + 3y' - 3z' - 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x + 2y + z + 3 = 0,$$

$$\ell : \frac{x}{-10} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+6}{-2}.$$
16.
$$\begin{cases} x = 5x' - 2y' + 6z' + 2, \\ y = 3x' - y' + 4z' + 2, \\ z = 8x' - 3y' + 9z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 4x - 2y + 4z + 5 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+2}{5} = \frac{y+8}{-6} = \frac{z+1}{4}.$$
17.
$$\begin{cases} x = -2x' + 3y' - z' - 1, \\ y = -x' - y' + z' + 1, \\ z = -x' + 6y' - 3z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : x + 2y + 4z - 4 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+7}{8} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z-10}{-4}.$$
18.
$$\begin{cases} x = x' - y' + z', \\ y = -2x' + y' + z' + 3, \\ z = 2x' - y' - 2z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 5x + 5y - z + 3 = 0,$$

$$\ell : \frac{x+5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{-10}.$$
19.
$$\begin{cases} x = x' + 11y' + 3z', \\ y = -x' - 12y' - 3z' + 3, \\ z = -x' - 18y' - 4z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 5x + y - z - 1 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-7}{9} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+2}{10}.$$
20.
$$\begin{cases} x = -x' - 2y' - 2z' + 3, \\ y = 3x' + 5y' + 3z' + 1, \\ z = 4x' + 6y' + 3z' - 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : 2x + 4y - 2z - 1 = 0,$$

$$\ell : \frac{x-8}{0} = \frac{y-4}{-9} = \frac{z-8}{2}.$$

$$21. \begin{cases} x = 3x' - y' + 3z' - 3, \\ y = -5x' + 2y' - 6z' + 1, \\ z = -x' + y' - 2z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 3x + 2y - 3z - 2 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+2}{5} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{-7}.$$

$$22. \begin{cases} x = 4x' + 5y' - 4z' - 2, \\ y = 16x' + 20y' - 17z' - 3, \\ z = 23x' + 29y' - 25z' - 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 3x - 5y - 5z - 5 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+4}{4} = \frac{y-5}{-8} = \frac{z+1}{1}.$$

$$23. \begin{cases} x = -2x' + y' - 2z' + 1, \\ y = -2x' + 2y' - 3z', \\ z = 5x' - 4y' + 6z' - 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: x + y - z - 2 = 0,$$

$$\ell: \frac{x-6}{-7} = \frac{y-10}{7} = \frac{z-8}{2}.$$

$$24. \begin{cases} x = -x' - 3y' - 6z' - 1, \\ y = 3x' + 7y' + 15z' - 3, \\ z = 3x' + 6y' + 13z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 5x - y + 4z + 2 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+6}{-9} = \frac{y-7}{7} = \frac{z-7}{2}.$$

$$25. \begin{cases} x = -x' - y' + z' - 2, \\ y = x' + 2y' - z' + 1, \\ z = x' + y' - 2z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 3x + 5y + 3z - 1 = 0,$$

$$\ell: \frac{x}{7} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-7}{-4}.$$

$$26. \begin{cases} x = -12x' - 6y' - 5z' - 3, \\ y = 10x' + 5y' + 4z', \\ z = -9x' - 5y' - 6z', \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 5x + 2y - z + 3 = 0,$$

$$\ell: \frac{x-9}{1} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{2}.$$

$$27. \begin{cases} x = 5x' - 3y' - 5z', \\ y = 13x' - 10y' - 15z' - 3, \\ z = -5x' + 4y' + 6z' - 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 3x - 3y + z - 4 = 0,$$

$$\ell: \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{5}.$$

$$28. \begin{cases} x = -4x' + 2y' + z' + 1, \\ y = -5x' + 2y' + 2z' - 2, \\ z = 6x' - 3y' - 2z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 5x + 2y + z - 5 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+7}{5} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-9}{8}.$$

$$29. \begin{cases} x = 14x' - 5y' - 3z' - 2, \\ y = -8x' + 3y' + 2z' + 1, \\ z = -7x' + 2y' + z' - 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 2x - 3y + 4z + 3 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+6}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-10}{-2}.$$

$$30. \begin{cases} x = -5x' - 3y' - 4z' + 3, \\ y = 23x' + 10y' + 23z' - 2, \\ z = 6x' + y' + 8z' + 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{P}: 4x - 4y + 4z + 4 = 0,$$

$$\ell: \frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z-8}{7}.$$

Задача 1.12. За начало новой системы координат $O'x'y'z'w'$ принята точка O' , а за единичные векторы ее осей — \vec{e}'_1 , \vec{e}'_2 , \vec{e}'_3 и \vec{e}'_4 . Координаты заданы в старой системе координат. Найти выражение новых координат x', y', z', w' через старые x, y, z, w .

$$1. O'(2, -1, 3, -3), \vec{e}'_1 = (-7, -9, 2, -8), \vec{e}'_2 = (-7, -14, -1, -10),$$

- $$\vec{e}'_3 = (2, 7, 2, 4), \vec{e}'_4 = (2, 5, 1, 3).$$
2. $O'(-3, -2, 1, 3), \vec{e}'_1 = (4, -4, -3, -9), \vec{e}'_2 = (-4, 3, 2, 8),$
 $\vec{e}'_3 = (-2, 3, 2, 5), \vec{e}'_4 = (-3, 4, 2, 7).$
 3. $O'(3, 0, 2, 0), \vec{e}'_1 = (3, -1, 1, -3), \vec{e}'_2 = (-6, 1, -6, 11),$
 $\vec{e}'_3 = (-8, 3, -7, 15), \vec{e}'_4 = (3, -1, 3, -6).$
 4. $O'(0, -3, -3, -3), \vec{e}'_1 = (-8, -1, 9, 4), \vec{e}'_2 = (-7, 2, 7, 4),$
 $\vec{e}'_3 = (-16, -1, 18, 8), \vec{e}'_4 = (-9, 3, 9, 5).$
 5. $O'(3, -3, 0, 2), \vec{e}'_1 = (-5, -3, 2, 8), \vec{e}'_2 = (1, 1, -2, -5),$
 $\vec{e}'_3 = (-1, -1, 1, 3), \vec{e}'_4 = (12, 7, -5, -20).$
 6. $O'(-1, 2, -2, -3), \vec{e}'_1 = (-3, 2, -2, -5), \vec{e}'_2 = (-3, -5, -3, -2),$
 $\vec{e}'_3 = (-3, -1, -3, -5), \vec{e}'_4 = (2, 1, 2, 3).$
 7. $O'(2, -2, 0, 2), \vec{e}'_1 = (-5, 3, 4, -2), \vec{e}'_2 = (-2, 1, 2, -1),$
 $\vec{e}'_3 = (2, -2, -2, 1), \vec{e}'_4 = (5, -3, -5, 3).$
 8. $O'(0, 0, -1, -1), \vec{e}'_1 = (-2, -4, 5, 19), \vec{e}'_2 = (2, 4, -4, -15),$
 $\vec{e}'_3 = (-1, -6, 4, 17), \vec{e}'_4 = (-1, -1, 3, 11).$
 9. $O'(-2, -2, 2, 0), \vec{e}'_1 = (14, -14, -23, 4), \vec{e}'_2 = (-39, 37, 60, -13),$
 $\vec{e}'_3 = (25, -24, -39, 8), \vec{e}'_4 = (15, -14, -23, 5).$
 10. $O'(1, 2, 0, -3), \vec{e}'_1 = (3, -1, 4, 2), \vec{e}'_2 = (-1, 1, 1, -1),$
 $\vec{e}'_3 = (5, -3, 3, 4), \vec{e}'_4 = (-3, 2, -1, -3).$
 11. $O'(1, -2, -3, -1), \vec{e}'_1 = (-4, -7, -1, -5), \vec{e}'_2 = (-4, -7, -1, -4),$
 $\vec{e}'_3 = (-11, -19, -2, -12), \vec{e}'_4 = (14, 24, 1, 17).$
 12. $O'(1, -3, -3, 2), \vec{e}'_1 = (3, -5, 9, -3), \vec{e}'_2 = (-1, 2, -3, 1),$
 $\vec{e}'_3 = (4, -8, 13, -7), \vec{e}'_4 = (3, -7, 10, -7).$
 13. $O'(-1, 3, -3, -3), \vec{e}'_1 = (-2, 3, 3, -1), \vec{e}'_2 = (-6, 5, 6, -4),$
 $\vec{e}'_3 = (5, -4, -4, 3), \vec{e}'_4 = (3, -2, -2, 2).$
 14. $O'(1, 2, 2, -2), \vec{e}'_1 = (-10, -5, -5, 8), \vec{e}'_2 = (-46, -21, -18, 30),$
 $\vec{e}'_3 = (-32, -15, -13, 21), \vec{e}'_4 = (19, 9, 8, -13).$
 15. $O'(-3, -2, 0, -1), \vec{e}'_1 = (5, -3, -2, 12), \vec{e}'_2 = (-1, 1, 1, -3),$
 $\vec{e}'_3 = (2, -1, -1, 4), \vec{e}'_4 = (-1, -1, 1, 2).$
 16. $O'(-3, -1, 2, -3), \vec{e}'_1 = (5, 8, 6, -4), \vec{e}'_2 = (2, 5, 3, -2),$
 $\vec{e}'_3 = (-6, -11, -8, 5), \vec{e}'_4 = (3, 6, 4, -3).$

17. $O'(-2, 2, 0, 1)$, $\vec{e}'_1 = (-12, -8, -3, -19)$, $\vec{e}'_2 = (-3, -2, -1, -5)$,
 $\vec{e}'_3 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{e}'_4 = (-14, -9, -4, -22)$.
18. $O'(-2, 0, -3, 2)$, $\vec{e}'_1 = (3, -1, 3, 3)$, $\vec{e}'_2 = (-8, 3, -4, -7)$,
 $\vec{e}'_3 = (-11, 4, -5, -9)$, $\vec{e}'_4 = (21, -8, 10, 18)$.
19. $O'(2, 3, 0, 3)$, $\vec{e}'_1 = (3, -17, -12, -11)$, $\vec{e}'_2 = (1, -3, -2, -2)$,
 $\vec{e}'_3 = (12, -46, -31, -28)$, $\vec{e}'_4 = (-8, 31, 21, 19)$.
20. $O'(-3, 1, -2, 1)$, $\vec{e}'_1 = (-17, 38, 19, -25)$, $\vec{e}'_2 = (-6, 14, 7, -9)$,
 $\vec{e}'_3 = (-3, 7, 4, -5)$, $\vec{e}'_4 = (-6, 13, 7, -9)$.
21. $O'(2, 0, -1, 2)$, $\vec{e}'_1 = (-1, 2, -2, -2)$, $\vec{e}'_2 = (1, -2, 4, 3)$,
 $\vec{e}'_3 = (2, -3, 3, 2)$, $\vec{e}'_4 = (-2, 1, 2, 3)$.
22. $O'(-2, 2, 0, -2)$, $\vec{e}'_1 = (5, 11, 7, 8)$, $\vec{e}'_2 = (-5, -9, -6, -7)$,
 $\vec{e}'_3 = (3, 9, 5, 7)$, $\vec{e}'_4 = (2, 3, 2, 3)$.
23. $O'(-1, 2, 2, -2)$, $\vec{e}'_1 = (-8, 10, 6, 15)$, $\vec{e}'_2 = (-7, 9, 6, 13)$,
 $\vec{e}'_3 = (-5, 6, 4, 9)$, $\vec{e}'_4 = (2, -5, -3, -6)$.
24. $O'(-3, -2, -3, 2)$, $\vec{e}'_1 = (-6, -2, 4, 3)$, $\vec{e}'_2 = (2, 1, -1, -1)$,
 $\vec{e}'_3 = (-6, -1, 4, 1)$, $\vec{e}'_4 = (-7, -1, 5, 2)$.
25. $O'(1, 1, 1, -3)$, $\vec{e}'_1 = (14, -15, 7, -8)$, $\vec{e}'_2 = (7, -5, 1, -3)$,
 $\vec{e}'_3 = (-6, 6, -2, 3)$, $\vec{e}'_4 = (-8, 10, -5, 5)$.
26. $O'(-1, 1, 0, 2)$, $\vec{e}'_1 = (-13, 2, -8, 15)$, $\vec{e}'_2 = (-4, -1, -2, 5)$,
 $\vec{e}'_3 = (7, -4, 5, -7)$, $\vec{e}'_4 = (8, -2, 5, -9)$.
27. $O'(3, -3, -3, 0)$, $\vec{e}'_1 = (12, 3, 5, -3)$, $\vec{e}'_2 = (9, 2, 9, -1)$,
 $\vec{e}'_3 = (-11, -3, -12, 1)$, $\vec{e}'_4 = (7, 2, 2, -2)$.
28. $O'(-3, 1, 1, -2)$, $\vec{e}'_1 = (-4, 9, -6, 16)$, $\vec{e}'_2 = (1, -3, 2, -5)$,
 $\vec{e}'_3 = (1, -3, 3, -6)$, $\vec{e}'_4 = (2, -4, 2, -7)$.
29. $O'(-2, 3, -3, 2)$, $\vec{e}'_1 = (-5, 17, -4, 9)$, $\vec{e}'_2 = (2, -7, 1, -4)$,
 $\vec{e}'_3 = (-6, 22, -3, 13)$, $\vec{e}'_4 = (-4, 14, -4, 7)$.
30. $O'(3, 0, 2, -2)$, $\vec{e}'_1 = (2, -6, -4, 3)$, $\vec{e}'_2 = (1, -8, -6, 4)$,
 $\vec{e}'_3 = (-3, 17, 12, -8)$, $\vec{e}'_4 = (-1, 5, 3, -2)$.

2. Евклидовы пространства

2.1. Скалярное произведение. Матрица Грама. Ортогонализация

Определение 2.1. Говорят, что в линейном пространстве E задано *скалярное произведение*, если для любой пары векторов $\vec{a}, \vec{b} \in E$ определено число $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$ так, что при всех $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены условия:

1. $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$, причем $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$;
2. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
3. $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}) + \beta(\vec{b}, \vec{c})$.

Определение 2.2. Линейное пространство E , в котором задано скалярное произведение, называют *евклидовым линейным пространством*.

С помощью скалярного произведения в линейном евклидовом пространстве вводятся *норма* вектора и *угол* между векторами по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad (2.1)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2.2)$$

Определение 2.3. *Матрицей Грама* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ n -мерного евклидова пространства $E, k \leq n$, называется матрица

$$G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_1, \vec{a}_k) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_2, \vec{a}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{a}_k, \vec{a}_1) & (\vec{a}_k, \vec{a}_2) & \cdots & (\vec{a}_k, \vec{a}_k) \end{pmatrix}.$$

Матрицу Грама векторов базиса $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ пространства E называют *матрицей метрических коэффициентов*, поскольку она позволяет находить скалярные произведения векторов, если известны их координаты в этом базисе:

$$\vec{a} = \sum_{s=1}^n a^s \vec{f}_s, \quad \vec{b} = \sum_{s=1}^n b^s \vec{f}_s \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i,j=1}^n (\vec{f}_i, \vec{f}_j) a^i b^j. \quad (2.3)$$

Заметим, что определитель матрицы Грама неотрицателен, причем равенство $\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k) = 0$ равносильно линейной зависимости системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$.

Набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$ называется *ортонормированным*, если $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 1$ при $i = j$. Матрица Грама ортонормированного набора векторов единична.

Если базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ пространства \mathbf{E} ортонормирован, то формулы (2.3) вычисления скалярных произведений упрощаются:

$$\vec{a} = \sum_{s=1}^n a^s \vec{f}_s, \quad \vec{b} = \sum_{s=1}^n b^s \vec{f}_s \implies (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{s=1}^n a^s b^s. \quad (2.4)$$

Пример 2.1. Найти матрицу Грама системы векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

a) $\vec{a} = (3, -2), \vec{b} = (-1, 1);$

b) $\vec{a} = (0, 2, 1, 0, 1), \vec{b} = (1, 0, 0, 2, 1), \vec{c} = (1, 2, 3, 0, 0).$

Решение. a) По формулам (2.4) находим

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 13, (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = -5, (\vec{b}, \vec{b}) = 2; G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Аналогично предыдущему,

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}) = 1, (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 7, (\vec{b}, \vec{b}) = 6,$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{b}) = 1, (\vec{c}, \vec{c}) = 14; G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 14 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ответ. a) $\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$

На основании нижеследующей теоремы можно утверждать, что в линейном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Теорема 2.1. Пусть $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_k$ — линейно независимая система векторов в евклидовом пространстве E . Тогда в E существует система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$, удовлетворяющая условиям:

1. Система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ ортогональна и нормирована;
2. Для каждого значения $i = 1, \dots, k$ линейные оболочки векторов $\langle \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_i \rangle$ и $\langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i \rangle$ совпадают.

Заметим, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ при этом определены с точностью до знака.

Векторы \vec{e}_i строятся последовательно:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{g}_1|} \vec{g}_1; \quad (2.5)$$

если векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}$ уже построены, то

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{h}_i}{|\vec{h}_i|}, \quad \text{где} \quad \vec{h}_i = \vec{g}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{g}_i, \vec{e}_j) \vec{e}_j. \quad (2.6)$$

Процедура, описанная формулами (2.5) — (2.6), называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта*.

Пример 2.2. Применяя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, найти ортонормированный базис подпространства $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, где векторы заданы своими координатами в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^4 : $\vec{u} = (3, -2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -3, 3)$, $\vec{w} = (2, 3, -1, -2)$.

Решение. Находим последовательно

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right), \\ \vec{h}_2 &= \vec{v} - (\vec{v}, \vec{e}_1) \vec{e}_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, \frac{12}{5} \right), \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{|\vec{h}_2|} \vec{h}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{3}{\sqrt{85}}, -\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}} \right), \\ \vec{h}_3 &= \vec{w} - (\vec{w}, \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\vec{w}, \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \left(\frac{37}{17}, \frac{148}{51}, -\frac{58}{51}, -\frac{95}{51} \right), \end{aligned}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{|\vec{h}_3|} \vec{h}_3 = \left(\frac{37\sqrt{46614}}{15538}, \frac{74\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{29\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{95\sqrt{46614}}{46614} \right). \quad \square$$

Ответ. $\vec{e}_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right), \vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{85}}, \frac{3}{\sqrt{85}}, -\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}} \right),$
 $\vec{e}_3 = \left(\frac{37\sqrt{46614}}{15538}, \frac{74\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{29\sqrt{46614}}{23307}, -\frac{95\sqrt{46614}}{46614} \right).$

Далее, если не сказано обратное, будем считать, что базис линейного евклидова пространства E ортонормирован.

2.2. Евклидовы аффинные пространства.

Метрические характеристики геометрических объектов

Определение 2.4. Аффинное пространство \mathcal{A} называется *евклидовым аффинным*, или *евклидовым точечным*, пространством, если ассоциированное с ним линейное пространство E евклидово.

Систему координат $O\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ в евклидовом аффинном пространстве называют *прямоугольной*, если базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в ассоциированном линейном пространстве ортонормирован.

Скалярное произведение позволяет ввести в аффинном пространстве понятия расстояния, угла, площади и объема, свойства которых аналогичны их свойствам, известным из элементарной геометрии.

Расстояние $|MN|$ между точками $M, N \in \mathcal{A}$ и *косинус угла* $\angle ACB$, $A, B, C \in \mathcal{A}$ определяются формулами:

$$|MN| = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN})}, \quad (2.7)$$

$$\cos \angle ACB = \frac{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}. \quad (2.8)$$

Пример 2.3. Найти длину стороны AB и $\cos \angle ACB$ треугольника $\triangle ABC$, $A(2, -1), B(5, 3), C(1, -3)$, если известна матрица метрических коэффициентов базиса $G = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим $\overrightarrow{AB} = (3, 4), \overrightarrow{CA} = (1, 2), \overrightarrow{CB} = (4, 6)$. Так как система координат в пространстве не является прямоугольной, то для вычисления скалярных произведений векторов используем (2.3). Расстояния и углы находим по формулам (2.7) и (2.8):

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2} = \sqrt{101};$$

аналогично

$$|CA| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{17}, \quad |CB| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2},$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = 58;$$

$$\cos \angle ACB = \frac{58}{\sqrt{17} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{29\sqrt{34}}{170}. \quad \square$$

Ответ. $|AB| = \sqrt{101}; \cos \angle ACB = \frac{29\sqrt{34}}{170}.$

Напомним, что k -мерным *параллелепипедом*, $k \leq n$, с вершиной в точке $A_0 \in \mathcal{A}$, построенным на линейно независимых векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$, называют множество

$$\Pi = \{M \in \mathcal{A} : \overrightarrow{A_0M} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_k \vec{a}_k, (t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k\}.$$

Вершинами параллелепипеда Π называют точки $A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ такие, что $\overrightarrow{A_0 A_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} = \varepsilon_1 \vec{a}_1 + \dots + \varepsilon_k \vec{a}_k$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 ; $A_0 = A_{0 \dots 0}$. Параллелепипед Π является выпуклой оболочкой своих вершин.

Симплексом размерности $k \leq n$ с вершиной в точке $A_0 \in \mathcal{A}$, построенным на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbf{E}$, где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ — линейно независимы, называют множество

$$\Sigma = \{M : \overrightarrow{A_0M} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_k \vec{a}_k, (t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k, t_1 + \dots + t_k \leq 1\}.$$

Вершинами симплекса Σ называют точки A_i такие, что $\overrightarrow{A_0 A_i} = \vec{a}_i$, $i = 1, \dots, k$, и саму точку A_0 . Симплекс также является выпуклой оболочкой своих вершин.

При $k = 2$ параллелепипед естественно называть *параллелограммом*, а симплекс — *треугольником*.

Объемы (в двумерном случае *площади*) k -мерных параллелепипеда и симплекса вычисляются по формулам:

$$|\Pi| = \sqrt{\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)}, \quad (2.9)$$

$$|\Sigma| = \frac{1}{k!} \sqrt{\det G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)}. \quad (2.10)$$

Пример 2.4. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(-1, 3, 0, -6, 2)$, $B(3, 5, 1, -4, 5)$, $C(1, 4, 1, 1, 3)$ и координаты основания высоты, опущенной из точки B на сторону AC .

Решение. Находим векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и их матрицу Грама:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2, 1, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1, 7, 1); \quad G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix} 34 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}.$$

Площадь треугольника можно вычислить по формуле (2.10):

$$|\triangle ABC| = \frac{1}{2} \sqrt{\det G(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = 2\sqrt{70}.$$

Пусть точка H — основание высоты. Тогда $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}$. Но $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Из уравнения $(\overrightarrow{AC}, \lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$ находим $\lambda = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$, и, следовательно, $H\left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. \square

Ответ. $|\triangle ABC| = 2\sqrt{70}$; $H\left(0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Пусть плоскости $\mathcal{P}_1 = M_1 + \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$ и $\mathcal{P}_2 = M_2 + \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \rangle$ скрещиваются или параллельны. Обозначим через $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$ какой-либо базис пространства $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \rangle$. Расстояние между \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 можно найти как высоту параллелепипеда размерности $R = r + 1$ с вершиной в точке M_1 , построенного на векторах $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$, основание которого — параллелепипед размерности r с вершиной в точке M_1 , построенный на векторах $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r$:

$$d = \sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)}{\det G(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)}}. \quad (2.11)$$

Если система координат в аффинном пространстве \mathcal{A} прямоугольная, то расстояние от точки $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n)$ до гиперплоскости $\mathcal{P}: A_1 x^1 + \dots + A_n x^n + B = 0$ проще найти по формуле

$$d = \frac{|A_1 x_0^1 + \dots + A_n x_0^n + B|}{\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}}. \quad (2.12)$$

Пример 2.5. Найти расстояние от точки $M(-14, -6, -2, 2)$:

a) до гиперплоскости $\mathcal{P}_1: x^1 - 6x^2 - 2x^3 - 5x^4 + 17 = 0$;

b) до плоскости $\mathcal{P}_2 = A + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, где $A(-1, 2, 2, 3)$, $\vec{v}_1 = (-12, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, -1, 1)$.

Решение. a) Воспользуемся формулой (2.12):

$$d_1 = \frac{|-14 + 36 + 4 - 10 + 17|}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$

b) Заметим, что векторы \vec{v}_1 , \vec{v}_2 и $\overrightarrow{AM} = (-13, -8, -4, -1)$ линейно независимы. В соответствии с формулой (2.11) расстояние от точки M до плоскости \mathcal{P}_2 может быть найдено так:

$$G(\overrightarrow{AM}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 250 & 147 & 3 \\ 147 & 146 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 146 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det G(\overrightarrow{AM}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 29100, \quad \det G(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 291,$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{\det G(\overrightarrow{AM}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\det G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}} = 10. \quad \square$$

Ответ. a) $\frac{\sqrt{66}}{2}$; b) 10.

Пример 2.6. Найти расстояние между прямой ℓ , проходящей через точки $A(4, -1, -10, -5)$ и $B(22, -9, -2, -13)$, и плоскостью, проходящей через точку $M(0, -2, 2, -1)$ параллельно подпространству $L = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, где $\vec{v}_1 = (1, -4, -4, -4)$, $\vec{v}_2 = (1, -4, 4, 4)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB} = (18, -8, 8, -8)$, поэтому в качестве направляющего вектора ℓ можно взять вектор $\vec{u} = (9, -4, 4, -4)$. Вектор $\overrightarrow{MA} = (4, 1, -12, -4)$. Используя формулу (2.11), последовательно находим

$$G(\overrightarrow{MA}, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 177 & 0 & 64 & -64 \\ 0 & 129 & 25 & 25 \\ 64 & 25 & 49 & -15 \\ -64 & 25 & -15 & 49 \end{pmatrix},$$

$$G(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 129 & 25 & 25 \\ 25 & 49 & -15 \\ 25 & -15 & 49 \end{pmatrix};$$

$$d = \sqrt{\frac{\det(G(\vec{MA}, \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2))}{\det(G(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2))}} = 7. \quad \square$$

Ответ. 7.

Пример 2.7. В четырехмерном пространстве заданы точки $O(12, 11, 9, 6)$, $A(2, 0, 6, 0)$, $B(6, -2, 4, 4)$, $C(1, 3, 9, -1)$ и $D(9, -1, 13, -1)$. Найти:

- i. Объем трехмерного симплекса $ABCD$;
- ii. Угол наклона ребра AD симплекса $ABCD$ к плоскости основания ABC ;
- iii. Объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$;
- iv. Объем четырехмерного симплекса $OABCD$.

Решение.

i. Находим векторы

$$\vec{AB} = (4, -2, -2, 4),$$

$$\vec{AC} = (-1, 3, 3, -1),$$

$$\vec{AD} = (7, -1, 7, -1).$$

Объем симплекса $ABCD$

(рис. 3) равен $V =$

$$= \frac{1}{3!} \sqrt{\det(G(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}))} = \frac{80}{3}.$$

ii. Площадь основания симплекса $ABCD$ — треугольника $\triangle ABC$ — находим как

$$S = \frac{1}{2!} \sqrt{\det(G(\vec{AB}, \vec{AC}))} = 10.$$

Если DH — высота симплекса $ABCD$,

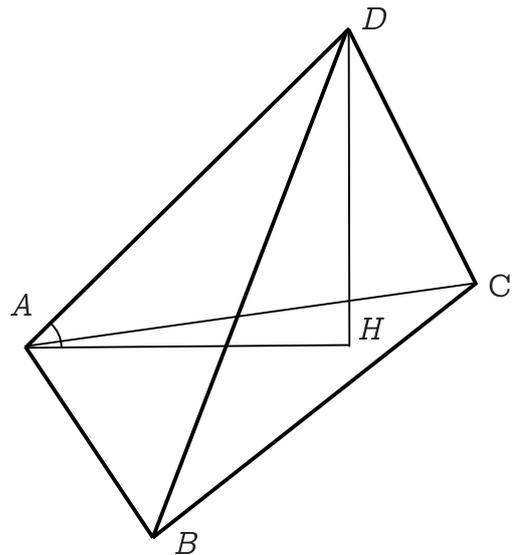


Рис. 3

опущенная на основание ABC , то $|DH| = \frac{3V}{S} = 8$, а синус угла $\angle DAN$ можно найти как отношение

$$\frac{|DH|}{|AD|} = \frac{8}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{5}.$$

iii. Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} , находим по формуле (2.9):

$$\sqrt{\det G(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD})} = 960.$$

iv. Четырехмерный объем симплекса $OABCD$ в $4! = 24$ раза меньше объема соответствующего параллелепипеда: $\frac{960}{24} = 40$. \square

Ответ. i. $\frac{80}{3}$; ii. $\arcsin \frac{4}{5}$; iii. 960; iv. 40.

2.3. Задачи

Задача 2.1. Найти матрицу Грама системы векторов

a) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$,

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^5$,

заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

1. a) $\vec{a} = (-2, -1)$, $\vec{b} = (1, 0)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, -1, -1, 0)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1, 0, -2)$.
2. a) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, -2, -1, 1, 2)$.
3. a) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (2, -1)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0, -2, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, -1, 2, -2)$.
4. a) $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{b} = (0, -3)$;
b) $\vec{a} = (2, 1, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, -1, 1, 0)$.
5. a) $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{b} = (1, 0)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1, 0, -2)$, $\vec{c} = (1, 1, 1, 1, -2)$.
6. a) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (2, -2)$;
b) $\vec{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, -1, 1, 1)$.

7. a) $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (2, 2)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1, 1, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, -1, 1, -2)$.
8. a) $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, 1)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 2, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 2, 1, 2)$, $\vec{c} = (-1, -2, 1, 1, 0)$.
9. a) $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (-2, -2, 2, -2, 0)$, $\vec{c} = (2, -2, -2, 0, -1)$.
10. a) $\vec{a} = (-3, -3)$, $\vec{b} = (3, 1)$;
b) $\vec{a} = (2, 1, 1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 0, 0, -1)$, $\vec{c} = (-2, 1, 2, 2, 1)$.
11. a) $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (0, 3)$;
b) $\vec{a} = (2, 1, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, -2, -1, 2, 0)$.
12. a) $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -1)$;
b) $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1, -1, -1, -1)$, $\vec{c} = (2, -1, -2, 0, -2)$.
13. a) $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2)$;
b) $\vec{a} = (1, 1, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, -1, -1, 0)$, $\vec{c} = (2, 2, 0, -2, 1)$.
14. a) $\vec{a} = (0, 2)$, $\vec{b} = (1, -3)$;
b) $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2, 2, 2)$, $\vec{c} = (1, 1, 1, 2, 2)$.
15. a) $\vec{a} = (0, -1)$, $\vec{b} = (-3, 2)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 1, -2, 0, 0)$.
16. a) $\vec{a} = (0, -2)$, $\vec{b} = (3, -2)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 1, 1)$, $\vec{c} = (-2, -2, 0, 1, -2)$.
17. a) $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2)$;
b) $\vec{a} = (2, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, -2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-2, 0, 1, 0, 2)$.
18. a) $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (3, 0)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1, -1, -2)$, $\vec{c} = (-2, -2, 0, 0, 0)$.
19. a) $\vec{a} = (3, 3)$, $\vec{b} = (-2, 0)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, -2, -2, 1, 2)$, $\vec{c} = (0, 2, 0, -1, -2)$.
20. a) $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (3, 0)$;
b) $\vec{a} = (1, 1, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, 1, -2, -1)$, $\vec{c} = (2, -2, -1, -1, 2)$.
21. a) $\vec{a} = (-2, -2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$;
b) $\vec{a} = (1, 2, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 0, 2, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -1, -2, 0)$.

22. a) $\vec{a} = (0, 3)$, $\vec{b} = (-2, -2)$;
 b) $\vec{a} = (2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 2, -1, 2, 0)$, $\vec{c} = (-1, 2, 1, 2, 0)$.
23. a) $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 3)$;
 b) $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, -2, 0, -2, -1)$, $\vec{c} = (2, -2, -1, 0, 1)$.
24. a) $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (1, 1)$;
 b) $\vec{a} = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 0, -1, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, -2, -1, 2, -2)$.
25. a) $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (3, 0)$;
 b) $\vec{a} = (1, 2, 1, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, -1, 0, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, 0, -1, 0)$.
26. a) $\vec{a} = (-1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1)$;
 b) $\vec{a} = (1, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -2, 0, 0, -2)$, $\vec{c} = (2, -2, -2, 1, 1)$.
27. a) $\vec{a} = (2, 2)$, $\vec{b} = (0, 2)$;
 b) $\vec{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1, -2, -2, -2)$, $\vec{c} = (-1, -2, -2, 0, -2)$.
28. a) $\vec{a} = (0, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1)$;
 b) $\vec{a} = (2, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, -1, 0, -1)$, $\vec{c} = (1, -2, -1, 1, -2)$.
29. a) $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$;
 b) $\vec{a} = (2, 2, 1, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -2, -2, -2, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, -2, -1, -1)$.
30. a) $\vec{a} = (-2, 0)$, $\vec{b} = (-1, -1)$;
 b) $\vec{a} = (1, 1, 1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -2, 0, 2)$, $\vec{c} = (1, 0, -2, -1, -1)$.

Задача 2.2. Применяя процесс ортогонализации, найти ортонормированный базис подпространства $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

1. $\vec{u} = (2, 2, -2, 0)$, $\vec{v} = (-2, 2, 0, -1)$, $\vec{w} = (1, -2, 0, 1)$.
2. $\vec{u} = (-2, 2, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 0, -2)$, $\vec{w} = (0, -1, -1, -1)$.
3. $\vec{u} = (-3, 0, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -3, 1, -3)$, $\vec{w} = (0, 0, -3, 1)$.
4. $\vec{u} = (0, 1, -3, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 3, 1)$, $\vec{w} = (3, -3, -1, 1)$.
5. $\vec{u} = (0, -3, 3, 0)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0, -1)$, $\vec{w} = (0, -2, 3, 3)$.
6. $\vec{u} = (-2, -1, 0, -1)$, $\vec{v} = (-2, -1, 1, -3)$, $\vec{w} = (3, -3, -1, -3)$.
7. $\vec{u} = (-3, 0, -1, -3)$, $\vec{v} = (-2, -1, 1, 0)$, $\vec{w} = (-2, 3, 3, 1)$.
8. $\vec{u} = (-2, -2, -1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -2, -2, -2)$, $\vec{w} = (2, 0, -2, -2)$.
9. $\vec{u} = (3, 0, -1, -3)$, $\vec{v} = (1, 3, 1, -2)$, $\vec{w} = (-3, -1, 1, 0)$.

10. $\vec{u} = (-3, 2, -3, -3)$, $\vec{v} = (-3, -2, -3, -1)$, $\vec{w} = (3, 0, -3, 3)$.
11. $\vec{u} = (-3, 0, -3, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 0, -2)$, $\vec{w} = (-1, -3, -3, -2)$.
12. $\vec{u} = (2, 3, -1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, 2, 3)$, $\vec{w} = (1, 2, 3, 2)$.
13. $\vec{u} = (2, 0, 1, 3)$, $\vec{v} = (0, 3, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, -1, -3, 3)$.
14. $\vec{u} = (-3, 2, 0, -3)$, $\vec{v} = (-2, -1, 0, 0)$, $\vec{w} = (2, -2, 1, 1)$.
15. $\vec{u} = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{v} = (-2, -1, -3, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, -3, 1)$.
16. $\vec{u} = (0, -3, -3, 1)$, $\vec{v} = (3, 2, -1, -3)$, $\vec{w} = (-1, 0, -2, -1)$.
17. $\vec{u} = (2, 3, 1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 3, -1, 1)$, $\vec{w} = (-2, 3, -2, 1)$.
18. $\vec{u} = (-1, 2, 2, -3)$, $\vec{v} = (-3, 3, -2, -1)$, $\vec{w} = (-1, 2, 0, 3)$.
19. $\vec{u} = (-2, -3, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, -2, -1)$, $\vec{w} = (-3, 1, -1, -2)$.
20. $\vec{u} = (-1, -3, -2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, -1, -1)$, $\vec{w} = (0, -2, -2, 3)$.
21. $\vec{u} = (-3, -1, -3, -1)$, $\vec{v} = (-1, -3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, -2, 0)$.
22. $\vec{u} = (-1, 2, -2, -2)$, $\vec{v} = (-3, -2, -1, 1)$, $\vec{w} = (-1, 3, -1, 2)$.
23. $\vec{u} = (3, -3, -3, 2)$, $\vec{v} = (-2, 3, 2, 0)$, $\vec{w} = (-1, 0, -2, -1)$.
24. $\vec{u} = (-3, 2, -1, -2)$, $\vec{v} = (-1, -2, -1, -2)$, $\vec{w} = (-1, -2, 3, -3)$.
25. $\vec{u} = (-3, 1, 3, -1)$, $\vec{v} = (3, 0, -2, 2)$, $\vec{w} = (0, -3, -1, -2)$.
26. $\vec{u} = (-2, 3, 0, 3)$, $\vec{v} = (0, 2, -2, 1)$, $\vec{w} = (-3, 3, -3, 3)$.
27. $\vec{u} = (-3, -1, 3, 2)$, $\vec{v} = (1, -3, -2, -3)$, $\vec{w} = (1, -3, 2, 1)$.
28. $\vec{u} = (-3, -2, -2, 3)$, $\vec{v} = (1, 1, 2, 3)$, $\vec{w} = (3, -1, 0, -3)$.
29. $\vec{u} = (1, 3, -2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2, 2)$, $\vec{w} = (-3, -2, -3, -1)$.
30. $\vec{u} = (-1, -1, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, -2, -1, 3)$.

Задача 2.3. Найти длину стороны AB и $\cos \angle ACB$ треугольника $\triangle ABC$, если известна матрица метрических коэффициентов базиса G .

1. $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-1, -14)$, $B(5, 5)$, $C(8, -4)$.
2. $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A(7, 3)$, $B(10, 1)$, $C(6, 9)$.

3. $G = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-11, -10)$, $B(-13, -3)$, $C(-8, -6)$.
4. $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A(-7, -1)$, $B(-17, -6)$, $C(-9, 1)$.
5. $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(7, -15)$, $B(9, -6)$, $C(-1, -8)$.
6. $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(-9, -1)$, $B(-2, -9)$, $C(-3, -5)$.
7. $G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(5, -13)$, $B(3, -3)$, $C(-4, -5)$.
8. $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $A(5, -9)$, $B(-4, -9)$, $C(3, -8)$.
9. $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A(2, 6)$, $B(-5, 10)$, $C(-2, 8)$.
10. $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-9, 6)$, $B(0, 14)$, $C(-8, 7)$.
11. $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-18, 7)$, $B(1, 3)$, $C(-8, 6)$.
12. $G = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $A(-1, -10)$, $B(6, -10)$, $C(3, -2)$.
13. $G = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $A(7, -9)$, $B(10, -10)$, $C(2, -5)$.
14. $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $A(1, 6)$, $B(11, -8)$, $C(3, -4)$.
15. $G = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $A(5, -15)$, $B(4, -4)$, $C(8, -5)$.
16. $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A(-10, 3)$, $B(-12, -4)$, $C(-4, 6)$.
17. $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $A(6, -10)$, $B(-6, -9)$, $C(-4, -4)$.

$$18. G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A(9, 17), B(10, 16), C(6, 9).$$

$$19. G = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad A(1, 15), B(0, 8), C(-5, 10).$$

$$20. G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A(-4, -10), B(-1, -14), C(-8, -6).$$

$$21. G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(-5, 1), B(-6, -4), C(-9, 6).$$

$$22. G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A(5, 18), B(-4, 2), C(3, 9).$$

$$23. G = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(-3, 1), B(-2, 9), C(5, 10).$$

$$24. G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(3, 2), B(-14, 3), C(-6, -5).$$

$$25. G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A(-2, 9), B(10, 11), C(6, 6).$$

$$26. G = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(1, 7), B(-8, -3), C(-6, 3).$$

$$27. G = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A(-1, -16), B(-2, -8), C(-8, -6).$$

$$28. G = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad A(9, 8), B(7, 3), C(3, 6).$$

$$29. G = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad A(4, -11), B(2, 3), C(7, -1).$$

$$30. G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A(6, -3), B(10, -11), C(5, -4).$$

Задача 2.4. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$ с вершинами A, B, C и координаты точки H — основания высоты, опущенной из точки B на сторону AC .

1. $A(0, 1, -5, -2, 4)$, $B(4, 2, -1, 1, 5)$, $C(5, 4, -4, 2, 7)$.
2. $A(-1, -2, -7, -9, 6)$, $B(1, 1, -5, -7, 7)$, $C(4, 3, -5, -4, 8)$.
3. $A(-7, 1, -7, 0, 2)$, $B(-5, 5, -2, 3, 6)$, $C(-3, 4, -3, 2, 5)$.
4. $A(-2, 8, -7, 9, 6)$, $B(2, 11, -2, 10, 11)$, $C(-1, 13, -3, 12, 11)$.
5. $A(2, -2, -2, -4, 8)$, $B(7, 3, 2, -1, 12)$, $C(3, 3, 0, 0, 12)$.
6. $A(5, 7, 4, 8, 8)$, $B(6, 11, 9, 11, 11)$, $C(6, 8, 5, 10, 10)$.
7. $A(-7, 0, -4, 8, 10)$, $B(-6, 4, 1, 10, 13)$, $C(-5, 2, 0, 11, 12)$.
8. $A(-1, 2, -9, 7, -6)$, $B(0, 6, -6, 10, -1)$, $C(4, 3, -7, 11, -5)$.
9. $A(-10, 4, -1, 9, -10)$, $B(-9, 5, 0, 12, -9)$, $C(-7, 8, 0, 10, -6)$.
10. $A(-10, 1, -1, -9, 3)$, $B(-5, 3, 2, -6, 7)$, $C(-5, 5, 2, -4, 4)$.
11. $A(1, -4, -9, 3, -5)$, $B(4, -2, -5, 7, 0)$, $C(2, 0, -4, 5, 0)$.
12. $A(8, 2, -3, 2, -10)$, $B(9, 6, 2, 7, -6)$, $C(11, 3, 1, 3, -7)$.
13. $A(-1, 8, -2, -9, 5)$, $B(4, 11, 0, -6, 10)$, $C(4, 11, -1, -6, 7)$.
14. $A(-2, 8, 4, -1, -10)$, $B(-1, 12, 9, 3, -8)$, $C(1, 12, 7, 1, -7)$.
15. $A(-6, -7, 6, 10, -1)$, $B(-3, -5, 9, 11, 2)$, $C(-3, -6, 11, 11, 1)$.
16. $A(-8, 2, 1, -8, -10)$, $B(-5, 4, 3, -5, -7)$, $C(-6, 7, 3, -5, -9)$.
17. $A(-4, 9, -2, 3, 1)$, $B(-1, 10, 1, 6, 3)$, $C(-2, 12, 1, 5, 3)$.
18. $A(6, 6, 4, 10, 5)$, $B(10, 7, 6, 13, 8)$, $C(8, 8, 8, 11, 9)$.
19. $A(-9, 6, 10, -2, 2)$, $B(-6, 7, 11, 0, 3)$, $C(-4, 7, 15, 0, 7)$.
20. $A(0, -5, 4, -10, -5)$, $B(1, 0, 6, -8, -4)$, $C(5, -2, 7, -7, -3)$.
21. $A(-8, -3, 8, 1, 10)$, $B(-3, -1, 10, 3, 11)$, $C(-4, 2, 11, 2, 13)$.
22. $A(-6, 9, -4, -5, -4)$, $B(-5, 11, -2, -3, 0)$, $C(-2, 10, 0, -4, 1)$.
23. $A(3, 1, -9, -1, 6)$, $B(6, 4, -5, 4, 9)$, $C(4, 6, -7, 0, 9)$.
24. $A(8, -6, -1, -3, 4)$, $B(12, -5, 1, 2, 7)$, $C(10, -4, 2, -2, 6)$.
25. $A(3, 8, -6, 1, 10)$, $B(8, 12, -3, 6, 12)$, $C(4, 11, -4, 6, 11)$.
26. $A(8, -2, -6, -1, 4)$, $B(11, -1, -3, 4, 6)$, $C(12, 2, -4, 0, 5)$.
27. $A(-2, 4, 2, -8, -9)$, $B(0, 9, 5, -7, -7)$, $C(-1, 6, 6, -3, -4)$.
28. $A(-8, -6, 0, -8, -6)$, $B(-4, -5, 5, -4, -2)$, $C(-5, -4, 4, -5, -2)$.

29. $A(-4, -7, 9, 1, -3)$, $B(-3, -4, 14, 6, 1)$, $C(1, -3, 10, 6, -1)$.

30. $A(-4, -8, -10, 8, 2)$, $B(0, -5, -5, 10, 5)$, $C(-1, -3, -5, 11, 6)$.

Задача 2.5. Найти расстояние от точки M :

a) до гиперплоскости \mathcal{P}_1 ;

b) до плоскости \mathcal{P}_2 , проходящей через точку A в направлении подпространства $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

1. $M(-7, -4, -3, -7)$, $\mathcal{P}_1: 5x^1 - 11x^2 - 5x^3 + 5x^4 - 17 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(2, 2, -3, 0)$, $\vec{v}_1 = (-2, 0, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (-6, -5, 0, 5)$.

2. $M(13, -1, -5, -1)$, $\mathcal{P}_1: 9x^1 + 4x^2 - 8x^3 - 8x^4 - 146 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-3, 0, 1, -3)$, $\vec{v}_1 = (3, 4, 0, 4)$, $\vec{v}_2 = (-9, 4, -4, 0)$.

3. $M(-3, -1, -2, -3)$, $\mathcal{P}_1: 8x^1 + 8x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 29 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-2, -2, 2, 0)$, $\vec{v}_1 = (-6, 0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-6, -1, 1, 0)$.

4. $M(10, -5, 1, 12)$, $\mathcal{P}_1: 5x^1 - 5x^2 - 11x^3 + 5x^4 - 96 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-3, -3, 2, 3)$, $\vec{v}_1 = (0, 7, 0, 7)$, $\vec{v}_2 = (-6, 7, -7, 0)$.

5. $M(3, 0, -11, 12)$, $\mathcal{P}_1: 6x^1 + 9x^2 + 4x^3 + 6x^4 - 33 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-2, 0, 0, 2)$, $\vec{v}_1 = (16, 5, 5, 0)$, $\vec{v}_2 = (16, 0, 5, -5)$.

6. $M(-2, 10, -13, -20)$, $\mathcal{P}_1: x^1 + 7x^2 + 5x^3 - 5x^4 - 83 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-3, -2, -1, -1)$, $\vec{v}_1 = (4, 0, 9, 9)$, $\vec{v}_2 = (4, -9, 0, 9)$.

7. $M(-4, 8, 5, -14)$, $\mathcal{P}_1: 8x^1 + 10x^2 - 10x^3 - 5x^4 - 51 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(1, 3, -3, 1)$, $\vec{v}_1 = (18, 5, 5, 0)$, $\vec{v}_2 = (18, 0, 5, -5)$.

8. $M(8, 18, 7, 9)$, $\mathcal{P}_1: 6x^1 - 8x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 11 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(1, 2, -3, 2)$, $\vec{v}_1 = (-12, 11, 0, 11)$, $\vec{v}_2 = (-8, 0, -11, 11)$.

9. $M(36, 4, 3, -1)$, $\mathcal{P}_1: 7x^1 - 2x^2 + 8x^3 + 2x^4 - 255 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(2, 3, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (-15, 4, 4, 0)$, $\vec{v}_2 = (-15, 4, 0, -4)$.

10. $M(0, -6, 12, 9)$, $\mathcal{P}_1: 4x^1 + 2x^2 - 5x^3 - 2x^4 + 76 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(3, 3, 2, 3)$, $\vec{v}_1 = (-4, 0, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-3, -4, 0, 4)$.

11. $M(26, 5, -7, 5)$, $\mathcal{P}_1: 7x^1 + x^2 - 5x^3 + 5x^4 - 237 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(2, 1, -2, 3)$, $\vec{v}_1 = (-3, 0, 6, 6)$, $\vec{v}_2 = (15, -6, 6, 0)$.

12. $M(21, -4, -6, -10)$, $\mathcal{P}_1: 4x^1 + 10x^2 - 2x^3 + 7x^4 - 12 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(-2, 0, 1, -3)$, $\vec{v}_1 = (14, 3, 0, 3)$, $\vec{v}_2 = (-6, 3, -3, 0)$.

13. $M(-14, 7, -6, -9)$, $\mathcal{P}_1 : 11x^1 - x^2 + 11x^3 + 9x^4 + 272 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-1, -3, -3, -3)$, $\vec{v}_1 = (-2, 2, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (-9, 0, -2, 2)$.
14. $M(-2, 5, -6, 12)$, $\mathcal{P}_1 : 7x^1 - 8x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 20 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-3, 3, 0, 3)$, $\vec{v}_1 = (8, 4, 4, 0)$, $\vec{v}_2 = (11, 0, 4, -4)$.
15. $M(0, -13, -3, -8)$, $\mathcal{P}_1 : 4x^1 - 8x^2 - 8x^3 + 9x^4 - 26 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(3, -1, 3, -3)$, $\vec{v}_1 = (-4, 0, 7, 7)$, $\vec{v}_2 = (0, -7, 0, 7)$.
16. $M(-15, -10, -1, 13)$, $\mathcal{P}_1 : x^1 - 9x^2 - 3x^3 + 3x^4 - 107 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-2, 2, 2, -3)$, $\vec{v}_1 = (9, 8, 8, 0)$, $\vec{v}_2 = (-4, 8, 0, -8)$.
17. $M(5, -16, -8, 9)$, $\mathcal{P}_1 : x^1 - x^2 - 7x^3 - 7x^4 - 4 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-2, 3, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (-4, 7, 7, 0)$, $\vec{v}_2 = (-10, 7, 0, -7)$.
18. $M(10, 11, -7, 3)$, $\mathcal{P}_1 : 3x^1 - 3x^2 + x^3 + 9x^4 - 7 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(1, 3, -2, 3)$, $\vec{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (8, 0, 1, -1)$.
19. $M(31, 3, 1, 1)$, $\mathcal{P}_1 : 10x^1 + 5x^2 - 10x^3 + 8x^4 - 306 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(0, 3, 2, -1)$, $\vec{v}_1 = (12, 11, 11, 0)$, $\vec{v}_2 = (-8, 0, 11, -11)$.
20. $M(-12, -1, 4, 14)$, $\mathcal{P}_1 : 7x^1 - 2x^2 + 10x^3 + 4x^4 - 1 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-1, 3, -3, -1)$, $\vec{v}_1 = (-8, 11, 11, 0)$, $\vec{v}_2 = (-8, 11, 0, -11)$.
21. $M(16, 1, 6, -3)$, $\mathcal{P}_1 : 3x^1 + x^2 + 9x^3 + 3x^4 - 84 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-3, 3, -2, -2)$, $\vec{v}_1 = (6, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (12, 0, -1, 1)$.
22. $M(10, -20, -20, 8)$, $\mathcal{P}_1 : 3x^1 - x^2 - 3x^3 + 9x^4 - 162 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(2, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_1 = (-3, 10, 0, 10)$, $\vec{v}_2 = (15, 0, -10, 10)$.
23. $M(11, 7, 3, -10)$, $\mathcal{P}_1 : 9x^1 - 3x^2 - x^3 + 3x^4 - 35 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(0, 0, -3, 0)$, $\vec{v}_1 = (12, 0, 8, 8)$, $\vec{v}_2 = (9, -8, 0, 8)$.
24. $M(-5, -6, 13, 5)$, $\mathcal{P}_1 : 8x^1 + 4x^2 + 9x^3 - 8x^4 + 17 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(2, 3, -1, -1)$, $\vec{v}_1 = (-4, 9, 9, 0)$, $\vec{v}_2 = (-6, 9, 0, -9)$.
25. $M(-20, 10, -5, -10)$, $\mathcal{P}_1 : 4x^1 + 6x^2 - 6x^3 + 9x^4 + 67 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(1, 2, -3, -1)$, $\vec{v}_1 = (8, 0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (14, -1, 0, 1)$.
26. $M(11, 13, -6, 18)$, $\mathcal{P}_1 : 8x^1 - 3x^2 + 2x^3 + 2x^4 - 64 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(-1, -1, -1, 2)$, $\vec{v}_1 = (3, 6, 6, 0)$, $\vec{v}_2 = (-15, 0, 6, -6)$.
27. $M(6, 10, 13, 5)$, $\mathcal{P}_1 : 11x^1 - 9x^2 - x^3 - 11x^4 + 74 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(2, -2, -3, 0)$, $\vec{v}_1 = (13, 0, 8, 8)$, $\vec{v}_2 = (1, -8, 0, 8)$.
28. $M(18, -6, 8, 9)$, $\mathcal{P}_1 : 4x^1 + 6x^2 - 9x^3 + 6x^4 - 5 = 0$;
 $\mathcal{P}_2 : A(1, 2, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (9, 0, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = (10, -2, 0, 2)$.

29. $M(4, 11, 3, -9)$, $\mathcal{P}_1: 4x^1 - x^2 + 10x^3 - 2x^4 - 42 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(1, -3, 2, 1)$, $\vec{v}_1 = (0, 4, 0, 4)$, $\vec{v}_2 = (-7, 0, -4, 4)$.
30. $M(21, 1, 3, -2)$, $\mathcal{P}_1: 6x^1 - 5x^2 + 4x^3 + 2x^4 - 120 = 0$;
 $\mathcal{P}_2: A(3, 3, 3, -3)$, $\vec{v}_1 = (-7, 0, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = (-9, -2, 0, 2)$.

Задача 2.6. Найти расстояние между прямой ℓ , проходящей через точки A и B , и плоскостью \mathcal{P} , проходящей через точку M параллельно подпространству $\mathbf{L} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

1. $A(-15, -2, -2, 13)$, $B(-22, -4, 0, 11)$;
 $M(-1, 0, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (-3, -2, -2, -2)$, $\vec{v}_2 = (-13, 2, 2, -2)$.
2. $A(11, -13, 4, -5)$, $B(17, -9, 0, -9)$;
 $M(-1, -3, 0, -1)$, $\vec{v}_1 = (7, 2, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, -2, -2, 2)$.
3. $A(-16, -1, 1, -2)$, $B(-6, 7, -7, 6)$;
 $M(-2, -3, -1, 1)$, $\vec{v}_1 = (9, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (1, -4, -4, 4)$.
4. $A(3, -7, 1, -6)$, $B(5, -3, -3, -10)$;
 $M(-3, -3, 3, -1)$, $\vec{v}_1 = (-7, -2, -2, -2)$, $\vec{v}_2 = (11, 2, -2, 2)$.
5. $A(-5, -8, 24, -9)$, $B(-3, -24, 8, 7)$;
 $M(-3, 2, 3, -3)$, $\vec{v}_1 = (11, 8, 8, 8)$, $\vec{v}_2 = (-21, -8, 8, -8)$.
6. $A(-12, 29, 17, 16)$, $B(-9, 34, 12, 11)$;
 $M(2, 1, -1, 0)$, $\vec{v}_1 = (-21, 5, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (3, -5, 5, -5)$.
7. $A(-10, -6, -4, -3)$, $B(-14, -5, -3, -4)$;
 $M(-1, -2, -2, 1)$, $\vec{v}_1 = (-12, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (4, -1, 1, -1)$.
8. $A(-8, 8, 6, -4)$, $B(-19, 14, 0, 2)$;
 $M(2, -2, 2, 1)$, $\vec{v}_1 = (3, -6, -6, -6)$, $\vec{v}_2 = (1, -6, 6, 6)$.
9. $A(-7, 7, -5, 4)$, $B(8, 11, -9, 8)$;
 $M(1, -3, 2, -2)$, $\vec{v}_1 = (-1, -4, -4, -4)$, $\vec{v}_2 = (5, 4, 4, -4)$.
10. $A(10, 2, -5, 5)$, $B(9, 1, -4, 6)$;
 $M(-3, 3, -2, 2)$, $\vec{v}_1 = (3, -1, -1, -1)$, $\vec{v}_2 = (-9, 1, -1, 1)$.
11. $A(6, 3, 9, -19)$, $B(-8, 11, 1, -27)$;
 $M(2, 3, 0, -3)$, $\vec{v}_1 = (-9, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-9, -4, 4, -4)$.
12. $A(13, 9, 15, -33)$, $B(20, 19, 5, -23)$;
 $M(3, -3, -1, -3)$, $\vec{v}_1 = (-9, 10, 10, 10)$, $\vec{v}_2 = (19, -10, -10, 10)$.

13. $A(59, 7, -3, 1)$, $B(62, -4, 8, 12)$;
 $M(-3, 3, -1, 1)$, $\vec{v}_1 = (-21, -11, -11, -11)$, $\vec{v}_2 = (19, 11, -11, 11)$.
14. $A(32, 12, 1, -3)$, $B(39, 9, 4, 0)$;
 $M(2, 0, 3, -3)$, $\vec{v}_1 = (11, -3, -3, -3)$, $\vec{v}_2 = (-13, 3, -3, 3)$.
15. $A(12, 22, -1, -25)$, $B(10, 12, 9, -35)$;
 $M(2, 2, -1, -3)$, $\vec{v}_1 = (-11, -5, -5, -5)$, $\vec{v}_2 = (-11, 5, 5, -5)$.
16. $A(-3, 3, 10, -5)$, $B(5, 13, 0, -15)$;
 $M(-2, -1, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (4, 5, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (0, -5, 5, -5)$.
17. $A(-9, -2, -18, -13)$, $B(-39, 0, -20, -15)$;
 $M = (1, -2, -2, 1)$, $\vec{v}_1 = (-13, -1, -1, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1, -1)$.
18. $A(16, 1, -14, -9)$, $B(26, -13, 0, 5)$;
 $M(0, 3, 0, 3)$, $\vec{v}_1 = (-7, -7, -7, -7)$, $\vec{v}_2 = (9, 7, 7, -7)$.
19. $A(-22, -10, -5, 1)$, $B(-22, -5, -10, 6)$;
 $M(-1, -2, -1, -3)$, $\vec{v}_1 = (12, 5, 5, 5)$, $\vec{v}_2 = (-4, -5, -5, 5)$.
20. $A(-11, -6, -6, -7)$, $B(-29, 2, 2, -15)$;
 $M(-1, 3, -2, -3)$, $\vec{v}_1 = (-1, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-7, -4, 4, -4)$.
21. $A(-6, 7, -21, 35)$, $B(-56, 23, -37, 51)$;
 $M(-2, -3, -1, -1)$, $\vec{v}_1 = (-5, 8, 8, 8)$, $\vec{v}_2 = (-15, -8, -8, 8)$.
22. $A(5, 9, -9, 36)$, $B(12, 2, -2, 43)$;
 $M(-1, -3, 1, 0)$, $\vec{v}_1 = (5, 7, 7, 7)$, $\vec{v}_2 = (-15, -7, 7, -7)$.
23. $A(21, -4, -4, 4)$, $B(17, -7, -1, 7)$;
 $M(-2, 0, -2, 2)$, $\vec{v}_1 = (8, -3, -3, -3)$, $\vec{v}_2 = (-12, 3, -3, 3)$.
24. $A(24, 4, -1, 7)$, $B(7, 0, 3, 11)$;
 $M(0, 1, -3, -3)$, $\vec{v}_1 = (-23, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (3, -4, 4, -4)$.
25. $A(4, -9, 9, 1)$, $B(24, -8, 8, 2)$;
 $M(-1, -1, -1, 3)$, $\vec{v}_1 = (4, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, -1, -1, 1)$.
26. $A(-1, 7, -8, 15)$, $B(-39, 15, -16, 23)$;
 $M(3, 3, 3, 3)$, $\vec{v}_1 = (-3, -4, -4, -4)$, $\vec{v}_2 = (11, 4, 4, -4)$.
27. $A(1, -6, 0, -7)$, $B(4, -5, -1, -8)$;
 $M(0, -3, 3, -2)$, $\vec{v}_1 = (-9, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (7, -1, 1, -1)$.
28. $A(-23, -9, -15, 19)$, $B(-13, -15, -9, 25)$;
 $M(1, 1, -3, 1)$, $\vec{v}_1 = (-5, 3, 3, 3)$, $\vec{v}_2 = (-13, -3, 3, -3)$.

29. $A(-21, 2, 1, -5)$, $B(-30, -5, 8, -12)$;
 $M(0, 1, 2, 2)$, $\vec{v}_1 = (-7, -7, -7, -7)$, $\vec{v}_2 = (-7, 7, 7, -7)$.
30. $A(2, -8, -3, 9)$, $B(0, 0, -11, 17)$;
 $M(2, -2, 2, -1)$, $\vec{v}_1 = (9, 4, 4, 4)$, $\vec{v}_2 = (-13, -4, -4, 4)$.

Задача 2.7. В четырехмерном пространстве заданы точки O , A , B , C и D . Найти:

- i. Объем трехмерного симплекса $ABCD$;
- ii. Угол наклона ребра AD симплекса $ABCD$ к плоскости основания ABC ;
- iii. Объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} ;
- iv. Объем четырехмерного симплекса $OABCD$.

1. $O(6, 11, 8, 12)$, $A(2, -2, -4, -4)$, $B(4, -2, -4, -2)$,
 $C(3, 3, 1, -3)$, $D(9, -3, 3, -5)$.
2. $O(10, 6, 8, 7)$, $A(-2, 2, 2, 6)$, $B(4, 2, 2, 12)$,
 $C(0, 6, 6, 8)$, $D(5, 3, 9, 7)$.
3. $O(7, 12, 11, 9)$, $A(-4, 4, 4, 4)$, $B(0, 2, 2, 8)$,
 $C(-5, 7, 7, 3)$, $D(3, 5, 11, 5)$.
4. $O(9, 7, 12, 6)$, $A(0, -2, 6, 0)$, $B(3, -3, 5, 3)$,
 $C(-1, 1, 9, -1)$, $D(7, -3, 13, -1)$.
5. $O(12, 12, 11, 11)$, $A(-5, 3, -1, -1)$, $B(-3, 3, -1, 1)$,
 $C(-6, 6, 2, -2)$, $D(2, 4, 6, 0)$.
6. $O(9, 8, 12, 6)$, $A(-2, -4, -2, 0)$, $B(3, -5, -3, 5)$,
 $C(-4, 0, 2, -2)$, $D(5, -5, 5, -1)$.
7. $O(9, 6, 11, 12)$, $A(-2, -4, 0, 2)$, $B(1, -5, -1, 5)$,
 $C(-2, -2, 2, 2)$, $D(5, -3, 7, 3)$.
8. $O(12, 7, 9, 11)$, $A(-3, 3, -3, -5)$, $B(1, 5, -1, -1)$,
 $C(-5, 7, 1, -7)$, $D(4, 2, 4, -6)$.
9. $O(8, 10, 8, 11)$, $A(-3, 3, -1, 1)$, $B(2, 2, -2, 6)$,
 $C(-5, 7, 3, -1)$, $D(4, 2, 6, 0)$.

10. $O(11, 12, 11, 8)$, $A(3, -3, 1, 3)$, $B(7, -3, 1, 7)$,
 $C(4, 0, 4, 4)$, $D(10, -2, 8, 4)$.
11. $O(8, 12, 8, 10)$, $A(-1, 3, -1, -5)$, $B(3, 5, 1, -1)$,
 $C(1, 7, 3, -3)$, $D(6, 4, 6, -4)$.
12. $O(6, 8, 10, 11)$, $A(2, 2, -6, 2)$, $B(4, 2, -6, 4)$,
 $C(0, 6, -2, 0)$, $D(9, 1, 1, 1)$.
13. $O(6, 8, 9, 9)$, $A(-4, -2, 2, 0)$, $B(1, -1, 3, 5)$,
 $C(-6, 2, 6, -2)$, $D(3, -1, 9, 1)$.
14. $O(8, 11, 10, 12)$, $A(1, -1, 1, -5)$, $B(6, 0, 2, 0)$,
 $C(2, 4, 6, -4)$, $D(8, 0, 8, -4)$.
15. $O(12, 9, 9, 11)$, $A(0, 0, 2, 2)$, $B(5, -1, 1, 7)$,
 $C(-1, 5, 7, 1)$, $D(7, -1, 9, 1)$.
16. $O(7, 12, 6, 12)$, $A(-5, -1, 1, -3)$, $B(-3, -1, 1, -1)$,
 $C(-6, 4, 6, -4)$, $D(2, 0, 8, -2)$.
17. $O(9, 8, 9, 11)$, $A(-1, -7, 1, -1)$, $B(3, -7, 1, 3)$,
 $C(0, -2, 6, 0)$, $D(6, -6, 8, 0)$.
18. $O(7, 12, 11, 10)$, $A(0, 4, 2, 2)$, $B(3, 3, 1, 5)$,
 $C(-1, 7, 5, 1)$, $D(7, 3, 9, 1)$.
19. $O(6, 8, 11, 9)$, $A(0, -2, 0, 2)$, $B(3, -1, 1, 5)$,
 $C(-1, 3, 5, 1)$, $D(7, -3, 7, 1)$.
20. $O(8, 8, 7, 10)$, $A(-2, -2, -4, 0)$, $B(1, -1, -3, 3)$,
 $C(-2, 0, -2, 0)$, $D(5, -3, 3, -1)$.
21. $O(9, 11, 10, 10)$, $A(3, 3, -1, -1)$, $B(8, 2, -2, 4)$,
 $C(2, 8, 4, -2)$, $D(10, 2, 6, -2)$.
22. $O(8, 8, 7, 8)$, $A(1, 3, -3, 3)$, $B(4, 4, -2, 6)$,
 $C(2, 6, 0, 4)$, $D(8, 2, 4, 2)$.
23. $O(6, 10, 8, 6)$, $A(3, 3, 1, -3)$, $B(8, 4, 2, 2)$,
 $C(5, 7, 5, -1)$, $D(10, 2, 8, -4)$.
24. $O(7, 8, 12, 11)$, $A(5, 3, -3, 3)$, $B(9, 3, -3, 7)$,
 $C(3, 7, 1, 1)$, $D(12, 2, 4, 2)$.
25. $O(11, 7, 7, 9)$, $A(4, 0, -2, 2)$, $B(8, 2, 0, 6)$,
 $C(4, 4, 2, 2)$, $D(11, 1, 5, 3)$.

26. $O(8, 9, 7, 8)$, $A(0, 0, 8, 0)$, $B(4, -2, 6, 4)$,
 $C(-2, 4, 12, -2)$, $D(7, 1, 15, 1)$.
27. $O(9, 8, 12, 10)$, $A(5, -3, -1, -1)$, $B(7, -3, -1, 1)$,
 $C(3, 1, 3, -3)$, $D(12, -4, 6, -2)$.
28. $O(9, 6, 10, 7)$, $A(-2, 0, 0, -2)$, $B(4, 0, 0, 4)$,
 $C(-2, 6, 6, -2)$, $D(5, -1, 7, -3)$.
29. $O(6, 9, 10, 8)$, $A(-1, -1, 1, -3)$, $B(3, 1, 3, 1)$,
 $C(-1, 1, 3, -3)$, $D(6, 0, 8, -2)$.
30. $O(8, 10, 12, 6)$, $A(-1, -1, 1, -3)$, $B(2, -2, 0, 0)$,
 $C(0, 4, 6, -2)$, $D(6, -2, 8, -4)$.

3. Аффинные преобразования

3.1. Определение и основные свойства аффинных преобразований

Пусть в аффинном пространстве \mathcal{A} фиксирована система координат $Ox^1 \dots x^n$. Отображение $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, заданное формулами:

$$\begin{aligned} x'^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n + b^1, \\ x'^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n + b^2, \\ &\dots\dots\dots \\ x'^n &= a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_n^n x^n + b^n, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $A = (a_j^i)_{i,j=1,\dots,n}$ — невырожденная матрица ($\det A \neq 0$), называется *аффинным преобразованием* пространства \mathcal{A} . Отображение (3.1) каждой точке $M(x^1, \dots, x^n)$ пространства \mathcal{A} ставит в соответствие точку $M'(x'^1, \dots, x'^n)$, также принадлежащую \mathcal{A} . При этом образом начала координат, точки $O(0, \dots, 0)$, является точка $O'(b^1, \dots, b^n)$.

Замечание 3.1. В любой другой аффинной системе координат формулы, определяющие отображение F , имеют аналогичный вид.

Аффинное преобразование точечного пространства \mathcal{A} порождает линейное преобразование векторов в ассоциированном линейном пространстве V , а именно: каждому вектору $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)$ ставится в соответствие вектор $\vec{v}' = (v'^1, \dots, v'^n)$, координаты которого определяются матрицей A преобразования (3.1):

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Пусть при преобразовании (3.2) векторы базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ переходят соответственно в векторы $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$. Поскольку вектор базиса $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, то по формулам (3.2) найдем $\vec{e}'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$, $i = 1, \dots, n$, то есть столбцы матрицы A аффинного преобразования образованы координатами образов базисных векторов.

Так как $\det A \neq 0$, то векторы $\vec{e}'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ — линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Таким образом, матрица A — матрица перехода к базису $\vec{e}'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$. Если $\det A > 0$, то есть базисы *одноименны*, то аффинное преобразование *сохраняет ориентацию пространства*; такое преобразование называют *собственным*. Если $\det A < 0$, то аффинное преобразование называют *несобственным*.

Сформулируем некоторые свойства аффинных преобразований.

1. Аффинное преобразование взаимно однозначно. Преобразование, обратное к аффинному, также является аффинным.
2. Композиция аффинных преобразований — аффинное преобразование.
3. При аффинном преобразовании сохраняется линейная зависимость (линейная независимость) векторов. В частности, образы коллинеарных векторов коллинеарны, при этом отношение коллинеарности сохраняется.
4. Образом любой k -мерной плоскости при аффинном преобразовании является плоскость той же размерности k . В частности, образом прямой является прямая.

Плоскость размерности $k \geq 1$, образом которой является сама эта плоскость, называют *инвариантной* для данного аффинного преобразования.

5. Если в n -мерном аффинном пространстве введена евклидова структура, то геометрический смысл имеет и $|\det A|$, а именно:

при аффинном преобразовании объем V параллелепипеда, построенного на произвольных векторах $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, связан с объемом V' параллелепипеда, построенного на их образах, равенством $V' = |\det A| \cdot V$. Число $|\det A|$ называют *коэффициентом искажения объема (площади)*.

Пример 3.1. Найти инвариантные прямые аффинного преобразования

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 10y + 1, \\ y' &= -3x - 7y + 1 \end{aligned}$$

и определить коэффициент k искажения площади.

Решение. Пусть $\ell: Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ — инвариантная прямая. Точка $M(x, y) \in \ell$ тогда и только тогда, когда ее образ $M'(x', y') \in \ell$, то есть $A(4x + 10y + 1) + B(-3x - 7y + 1) + C = 0$.

Следовательно, последнее уравнение также является уравнением прямой ℓ . Приведем его к виду

$$(4A - 3B)x + (10A - 7B)y + A + B + C = 0.$$

Два уравнения задают одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны: $\frac{4A - 3B}{A} = \frac{10A - 7B}{B} = \frac{A + B + C}{C} = \lambda$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (4 - \lambda)A - 3B = 0, \\ 10A - (7 + \lambda)B = 0, \\ A + B + (1 - \lambda)C = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Первые два уравнения системы относительно неизвестных A и B имеют ненулевое решение лишь при условии

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 10 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $\lambda = -1$ или $\lambda = -2$. При $\lambda = -1$ получим, решая систему (3.3), $A = \frac{3}{5}B$, $C = -\frac{4}{5}B$, где B — свободное неизвестное. Полагая $B = 5$, найдем уравнение инвариантной прямой $\ell_1: 3x + 5y - 4 = 0$.

Аналогично для $\lambda = -2$ получим множество решений вида $B = 2A$, $C = -A$, где A — любое действительное число. Пусть $A = 1$, тогда $\ell_2: x + 2y - 1 = 0$ — еще одна инвариантная прямая данного аффинного преобразования.

Коэффициент искажения площади равен определителю матрицы преобразования

$$\kappa = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = 2. \quad \square$$

Ответ. $\ell_1: 3x + 5y - 4 = 0$; $\ell_2: x + 2y - 1 = 0$; $\kappa = 2$.

3.2. Примеры аффинных преобразований. Движения

Ограничимся случаем евклидовых аффинных пространств малой размерности: прямой, плоскости и трехмерного пространства.

Гомотетией с центром в точке C и коэффициентом $k > 0$ называется преобразование, которое каждой точке $M \in \mathcal{A}$ ставит в соответствие точку $M' \in \mathcal{A}$ такую, что $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. В системе координат с началом в точке C гомотетия трехмерного пространства определяется формулами

$$\begin{aligned} x' &= kx, \\ y' &= ky, \\ z' &= kz. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Найти образ точки $M(5, -8, 7)$ при гомотетии с центром в точке $C(-9, 2, -5)$ и коэффициентом $k = \frac{4}{3}$.

Решение. Пусть O — начало координат. Найдем координаты точки $M'(x', y', z')$ как координаты ее радиус-вектора (рис. 4):

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{OC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CM}.$$

Так как координаты векторов $\overrightarrow{OC} = (-9, 2, -5)$, $\overrightarrow{CM} = (14, -10, 12)$, то $\overrightarrow{OM'} = \left(\frac{29}{3}, -\frac{34}{3}, 11\right)$. \square

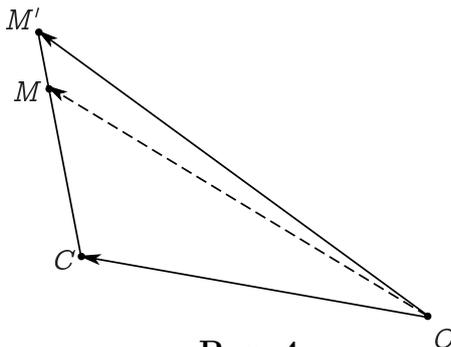


Рис. 4

Ответ. $M' \left(\frac{29}{3}, -\frac{34}{3}, 11 \right)$.

Сжатие с коэффициентом $k > 0$ евклидова трехмерного пространства E к плоскости \mathcal{P} — это преобразование, которое каждую точку $M \in E$ отображает в такую его точку M' , что если C — ортогональная проекция M на плоскость \mathcal{P} , то $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$. Точки самой этой плоскости, очевидно, остаются неподвижными. При $k > 1$ это преобразование называют также растяжением. В системе координат с осями Ox и Oy , расположенными в этой плоскости, и осью Oz , ей перпендикулярной, формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y, \\z' &= kz.\end{aligned}$$

Пример 3.3. Найти аффинное преобразование пространства, являющееся сжатием к плоскости $\mathcal{P}: x - 3y - z - 3 = 0$ с коэффициентом $k = \frac{1}{4}$. Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — произвольная фиксированная точка пространства. Найдем координаты ее образа $M'(x', y', z')$ при заданном аффинном преобразовании (рис. 5). Для этого определим сначала координаты точки C — ортогональной проекции точки M на плоскость \mathcal{P} . Точка C есть точка пересечения плоскости с перпендикулярной ей прямой ℓ , проходящей через M . Так как

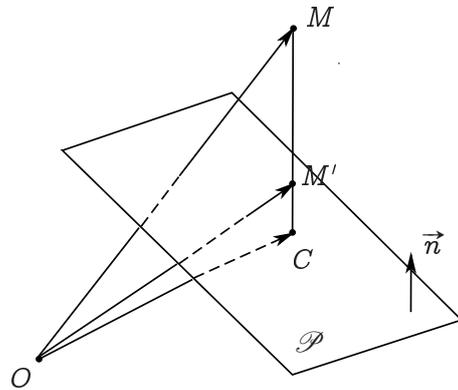


Рис. 5

$$\ell: \begin{cases} x = \bar{x} + t, \\ y = \bar{y} - 3t, \\ z = \bar{z} - t, \\ t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

то точке C отвечает значение параметра $t = t_0$, удовлетворяющее уравнению $(\bar{x} + t) - 3(\bar{y} - 3t) - (\bar{z} - t) - 3 = 0$. Отсюда находим $t_0 = \frac{1}{11}(-\bar{x} + 3\bar{y} + \bar{z} + 3)$, и, следовательно, $C(\bar{x} + t_0, \bar{y} - 3t_0, \bar{z} - t_0)$.

Тогда $\overrightarrow{MC} = (t_0, -3t_0, -t_0)$, $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$, а $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} =$
 $= \left(\bar{x} + \frac{3}{4}t_0, \bar{y} - \frac{9}{4}t_0, \bar{z} - \frac{3}{4}t_0\right)$.

Подставляя в последнее равенство значение t_0 , найдем координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM'}$:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{44}(41\bar{x} + 9\bar{y} + 3\bar{z} + 9), \\y' &= \frac{1}{44}(9\bar{x} + 17\bar{y} - 9\bar{z} - 27), \\z' &= \frac{1}{44}(3\bar{x} - 9\bar{y} + 41\bar{z} - 9).\end{aligned}$$

Поскольку здесь $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — произвольная точка пространства, то полученные равенства и есть искомые формулы аффинного преобразования в заданной системе координат. \square

Ответ. $x' = \frac{1}{44}(41x + 9y + 3z + 9)$, $y' = \frac{1}{44}(9x + 17y - 9z - 27)$, $z' =$
 $= \frac{1}{44}(3x - 9y + 41z - 9)$.

Движение — аффинное преобразование евклидова аффинного пространства, сохраняющее расстояние между точками, то есть такое преобразование, что для любых точек M_1, M_2 и их образов M'_1, M'_2 выполняется равенство $|M_1M_2| = |M'_1M'_2|$.

Порожденное движением линейное отображение ассоциированного линейного пространства оставляет неизменными длины векторов. В случае одномерного векторного пространства таким свойством обладают лишь отображения вида $\vec{v}' = \vec{v}$ или $\vec{v}' = -\vec{v}$.

Теорема 3.1. *Аффинное преобразование прямой $x' = ax + b$ является движением тогда и только тогда, когда $|a| = 1$.*

Пример 3.4. Найти движение прямой, переводящее точку $M(3)$ в точку $M'(4)$, если это движение является: а) собственным, б) несобственным.

Решение. а) Согласно теореме 3.1 любое собственное движение прямой задается формулой $x' = x + b$. Так как $x = 3, x' = 4$, то $b = 1$.

б) Согласно теореме 3.1 любое несобственное движение прямой задается формулой $x' = -x + b$. Так как $x = 3, x' = 4$, то $b = 7$. \square

Ответ. а) $x' = x + 1$, б) $x' = -x + 7$.

Аналогично движениям прямой движения евклидовых пространств размерности $n \geq 2$ выделяются из класса всех аффинных преобразований специальным видом матрицы A , а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Аффинное преобразование (3.1) тогда и только тогда является движением, когда в прямоугольной системе координат его матрица A ортогональна.*

Рассмотрим некоторые примеры движений плоскости.

Параллельный перенос (сдвиг) точек плоскости на постоянный вектор $\vec{b} = (b^1, b^2)$:

$$\begin{aligned}x' &= x + b^1, \\y' &= y + b^2.\end{aligned}$$

Вращение (поворот) плоскости на угол α вокруг неподвижной точки (центра вращения). В прямоугольной системе координат с началом в центре вращения формулы этого преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Симметрия (отражение) плоскости в прямой — преобразование, которое каждой точке M плоскости ставит в соответствие точку M' такую, что $\vec{CM'} = -\vec{CM}$, где C — ортогональная проекция точки M на эту прямую, называемую *осью симметрии*. Если система координат выбрана так, что ось Ox совпадает с осью симметрии, а ось Oy ей перпендикулярна, то это преобразование задается формулами

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

Пример 3.5. Найти аффинное преобразование, являющееся симметрией плоскости в прямой $\ell: 4x - 2y + 5 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Найдем точку $M'(x', y')$, симметричную точке M относительно прямой ℓ . Для этого составим систему уравнений относительно неизвестных x' и y' . Так как вектор $\overrightarrow{MM'} = (x' - x, y' - y)$ коллинеарен вектору $\vec{n} = (2, -1)$ нормали к прямой, то

$$\frac{x' - x}{2} = \frac{y' - y}{-1}. \quad (3.4)$$

Кроме того, середина отрезка MM' , точка $C\left(\frac{x' + x}{2}, \frac{y' + y}{2}\right)$, принадлежит оси симметрии, то есть

$$4 \cdot \frac{x' + x}{2} - 2 \cdot \frac{y' + y}{2} + 5 = 0. \quad (3.5)$$

Преобразовав уравнения (3.4) и (3.5), запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x' + 2y' = x + 2y, \\ 2x' - y' = -2x + y - 5. \end{cases}$$

Решение системы и есть искомые формулы симметрии. □

Ответ. $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1$.

Замечание 3.2. Другой способ решения задачи 3.5 основан на переходе к новой аффинной системе координат $O'uv$, «канонической» для данной задачи. В качестве векторов нового базиса возьмем, например, $\vec{e}_1 = (1, 2)$ — вектор, коллинеарный оси симметрии, и $\vec{e}_2 = (2, -1)$ — вектор, ей перпендикулярный. Начало координат перенесем в любую точку оси симметрии, например, положим $O' \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Формулы, выражающие старые координаты через новые, имеют вид (1.10):

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 2u - v + \frac{5}{2}, \end{cases} \quad (3.6)$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - 1, \\ v &= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В выбранной системе координат преобразование симметрии записывается, как указывалось выше,

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= -v, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где (u', v') — координаты образа точки (x, y) в новой системе координат. Из равенств (3.6) — (3.7) следует, что

$$\begin{aligned} x' &= u' + 2v' = u - 2v = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2, \\ y' &= 2u' - v' + \frac{5}{2} = 2u + v + \frac{5}{2} = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1. \end{aligned} \quad \square$$

Преобразование симметрии меняет ориентацию плоскости, то есть является примером несобственного движения. Параллельный перенос и вращение сохраняют ориентацию плоскости, то есть являются собственными аффинными преобразованиями (собственными движениями).

Перечисленными примерами исчерпываются все движения евклидовой плоскости, более точно, справедлива теорема.

Теорема 3.3. 1. *Всякое собственное движение плоскости есть или параллельный перенос на некоторый вектор, или поворот на угол α вокруг некоторой неподвижной точки.*

2. *Всякое несобственное движение плоскости есть композиция отражения плоскости в некоторой прямой и сдвига на вектор, коллинеарный этой прямой (скользящая симметрия).*

В частном случае вектор сдвига скользящей симметрии может быть равен нулю.

Пример 3.6. Определить, является ли движение плоскости собственным или несобственным. В случае собственного движения найти неподвижную точку O' и угол поворота α ; в случае несобственного движения найти ось симметрии и вектор сдвига вдоль оси симметрии. Система координат прямоугольная.

$$a) \quad \begin{aligned} x' &= -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5}, \\ y' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{28}{5}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$b) \quad \begin{aligned} x' &= -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y - \frac{30}{29}, \\ y' &= \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{70}{29}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение. а) Так как определитель матрицы преобразования отрицателен, то движение несобственное и согласно теореме является скользящей симметрией. Ось симметрии ℓ — инвариантная прямая этого преобразования. Пусть ее уравнение имеет вид $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Рассуждая, как и при решении задачи 3.1, заключаем, что уравнение

$$A \left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{16}{5} \right) + B \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{28}{5} \right) + C = 0$$

или, что то же самое,

$$(-4A - 3B)x + (-3A + 4B)y + 16A - 28B + 5C = 0$$

также определяет прямую ℓ . Тогда

$$\frac{-4A - 3B}{A} = \frac{-3A + 4B}{B} = \frac{16A - 28B + 5C}{C} = \lambda.$$

Последние равенства представляют собой систему уравнений относительно неизвестных A, B, C, λ :

$$\begin{cases} (-4 - \lambda)A - 3B = 0, \\ -3A + (4 - \lambda)B = 0, \\ 16A - 28B + (5 - \lambda)C = 0. \end{cases}$$

Первые два уравнения системы имеют решение A, B, λ такое, что $A^2 + B^2 \neq 0$, лишь при условии

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть, если $\lambda = \pm 5$.

При $\lambda = 5$, решая систему, получим, что $A = B = 0$, C — любое действительное число. При $\lambda = -5$ найдем $A = 3B$, $C = -2B$, где

B — свободное неизвестное. Полагая $B = 1$, найдем уравнение оси симметрии $\ell: 3x + y - 2 = 0$.

Чтобы найти вектор сдвига вдоль оси ℓ , достаточно заметить, что все точки оси симметрии в результате движения смещаются на один и тот же вектор \vec{a} . То есть $\vec{a} = \overline{MM'}$, где M — любая точка на ℓ , а M' — ее образ. Взяв, например, $M(0, 2) \in \ell$, по формулам (3.9) найдем координаты точки M' : $x' = 2, y' = -4$. Тогда $\vec{a} = \overline{MM'} = (2, -6)$.

b) Так как определитель матрицы преобразования положителен, то движение собственное и согласно теореме представляет собой поворот вокруг некоторой точки (очевидно, что преобразование не является параллельным переносом, так как в этом случае матрица преобразования была бы единичная). Неподвижную точку $O'(x, y)$, то есть такую, что $x' = x, y' = y$, найдем как решение системы уравнений

$$\begin{cases} x = -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y - \frac{30}{29}, \\ y = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{70}{29}. \end{cases}$$

Получим $x = -1, y = 1$. Перенесем начало координат в точку $O'(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} x &= u - 1, \\ y &= v + 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Такая замена координат не меняет матрицы аффинного преобразования (3.10), но изменяет столбец свободных членов, обращая его в нулевой, так как начало новой системы координат — неподвижная точка этого преобразования. В системе координат $O'uv$ данное преобразование запишется в виде

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{21}{29}u - \frac{20}{29}v, \\ v' &= \frac{20}{29}u - \frac{21}{29}v. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Впрочем, те же формулы можно получить из (3.10), заменяя старые координаты (x, y) их выражениями (3.11) через новые координаты (u, v) :

$$\begin{aligned}u' - 1 &= -\frac{21}{29}(u - 1) - \frac{20}{29}(v + 1) - \frac{30}{29}, \\v' + 1 &= \frac{20}{29}(u - 1) - \frac{21}{29}(v + 1) + \frac{70}{29}.\end{aligned}$$

Поскольку система координат $O'uv$ прямоугольная, поворот плоскости на угол α вокруг начала координат определяется формулами

$$\begin{aligned}u' &= u \cos \alpha - v \sin \alpha, \\v' &= u \sin \alpha + v \cos \alpha.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Из (3.12) — (3.13) заключаем, что $\cos \alpha = -\frac{21}{29}$, $\sin \alpha = \frac{20}{29}$, то есть $\alpha = \pi - \arctg \frac{20}{21}$. \square

Ответ. а) $\ell: 3x + y - 2 = 0$, $\vec{a} = (2, -6)$; б) $O'(-1, 1)$, $\alpha = \pi - \arctg \frac{20}{21}$.

Аффинное преобразование евклидова аффинного пространства называется *преобразованием подобия*, если существует действительное число $k > 0$ такое, что для любых двух точек M_1, M_2 и их образов M'_1, M'_2 выполняется равенство $|M'_1M'_2| = k|M_1M_2|$. Число k называется *коэффициентом подобия*. Гомотетия с коэффициентом k является также и преобразованием подобия с тем же коэффициентом.

Теорема 3.4. *Всякое преобразование подобия с коэффициентом k есть композиция движения, собственного или несобственного, и гомотетии с тем же коэффициентом и произвольным центром.*

Пример 3.7. Доказать, что отображение

$$F: \begin{aligned}x' &= -12x + 5y - 1, \\y' &= 5x + 12y + 1\end{aligned}$$

является преобразованием подобия. Разложить его в композицию $F = \psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta$, где

η — тождественное, если преобразование собственное, и симметрия относительно оси Ox , если преобразование несобственное,

θ — параллельный перенос на вектор $\vec{v} = (a, b)$,

Φ — поворот вокруг начала координат на угол φ ,

ψ — гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом k .

Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две произвольные точки плоскости. Расстояние между их образами M'_1 и M'_2 при отображении F найдем как длину вектора

$$\overrightarrow{M'_1 M'_2} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1) \\ 5(x_2 - x_1) + 12(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |M'_1 M'_2|^2 &= (-12(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1))^2 + (5(x_2 - x_1) + \\ &+ 12(y_2 - y_1))^2 = 169((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) = 169|M_1 M_2|^2. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что данное преобразование есть подобие с коэффициентом $k = 13$. Кроме того,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} < 0,$$

то есть преобразование несобственное.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Найдем ее образ при композиции указанных преобразований:

$$\begin{array}{ll} \eta: & x_1 = x, & \theta: & x_2 = x_1 + a, \\ & y_1 = -y, & & y_2 = y_1 + b, \\ \Phi: & x_3 = x_2 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi, & \psi: & x' = 13x_3, \\ & y_3 = x_2 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi, & & y' = 13y_3. \end{array}$$

Тогда

$$\psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta: \quad \begin{aligned} x' &= 13(x + a) \cos \varphi - 13(-y + b) \sin \varphi, \\ y' &= 13(x + a) \sin \varphi + 13(-y + b) \cos \varphi \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$F: \begin{cases} x' = 13x \cos \varphi + 13y \sin \varphi + (13a \cos \varphi - 13b \sin \varphi), \\ y' = 13x \sin \varphi - 13y \cos \varphi + (13a \sin \varphi + 13b \cos \varphi). \end{cases}$$

Сравнивая формулы преобразования F с данными в условии задачи, получаем:

$$13 \cos \varphi = -12, \quad 13 \sin \varphi = 5, \quad \text{то есть} \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \quad (3.14)$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} 13a \cos \varphi - 13b \sin \varphi = -1, \\ 13a \sin \varphi + 13b \cos \varphi = 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Равенства (3.15) представляют собой систему линейных уравнений относительно координат вектора параллельного переноса. С учетом (3.14) ее можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{169} \\ -\frac{7}{169} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ответ: $F = \psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta$, где

$$\begin{aligned} \eta: \quad & \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases} & \theta: \quad & \begin{cases} x' = x + \frac{17}{169}, \\ y' = y - \frac{7}{169}, \end{cases} \\ \Phi: \quad & \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases} & \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}, & \psi: \quad \begin{cases} x' = 13x, \\ y' = 13y. \end{cases} \end{aligned}$$

3.3. Задачи

Задача 3.1. Найти инвариантные прямые аффинного преобразования. Определить коэффициент искажения площади.

1. $x' = 28x - 75y - 2, y' = 10x - 27y + 3.$
2. $x' = -21x + 60y + 2, y' = -8x + 23y + 3.$
3. $x' = 22x + 40y - 2, y' = -12x - 22y + 2.$
4. $x' = 22x - 60y, y' = 8x - 22y - 1.$
5. $x' = 17x + 10y + 2, y' = -30x - 18y + 3.$
6. $x' = -15x - 8y - 2, y' = 24x + 13y + 3.$
7. $x' = 8x + 5y + 3, y' = -6x - 3y - 2.$
8. $x' = -17x - 10y - 2, y' = 30x + 18y + 3.$
9. $x' = 15x + 6y + 3, y' = -36x - 15y - 1.$
10. $x' = x + 2y - 1, y' = -6x - 6y - 3.$
11. $x' = 8x + 5y, y' = -6x - 3y.$
12. $x' = -21x - 20y - 2, y' = 24x + 23y - 3.$
13. $x' = -8x + 15y + 3, y' = -2x + 3y + 3.$
14. $x' = 4x + 10y + 1, y' = -3x - 7y.$
15. $x' = 17x + 30y - 1, y' = -9x - 16y - 1.$
16. $x' = -21x + 60y + 1, y' = -8x + 23y - 1.$
17. $x' = -6x - 2y - 3, y' = 6x + y + 1.$
18. $x' = 18x + 10y, y' = -30x - 17y.$
19. $x' = 23x - 60y - 2, y' = 8x - 21y + 3.$
20. $x' = 17x + 30y - 2, y' = -9x - 16y + 3.$
21. $x' = -14x - 8y - 3, y' = 24x + 14y + 3.$
22. $x' = -17x - 10y - 3, y' = 30x + 18y + 1.$
23. $x' = 17x - 45y - 1, y' = 6x - 16y - 3.$
24. $x' = 33x - 90y - 1, y' = 12x - 33y.$
25. $x' = 3x + 10y + 3, y' = -3x - 8y - 2.$

26. $x' = -3x - 10y + 1$, $y' = 3x + 8y - 1$.
27. $x' = -10x - 6y + 1$, $y' = 18x + 11y + 3$.
28. $x' = 12x + 5y + 1$, $y' = -30x - 13y$.
29. $x' = -33x - 60y + 3$, $y' = 18x + 33y + 3$.
30. $x' = 15x + 8y + 2$, $y' = -13y - 24x - 3$.

Задача 3.2. Найти образ точки M при гомотетии с центром в точке C и коэффициентом k .

1. $M(-8, 2, -8)$, $C(8, -4, -2)$, $k = 2/3$.
2. $M(1, -10, 6)$, $C(8, -7, -1)$, $k = 1/2$.
3. $M(7, 3, 10)$, $C(8, 5, -10)$, $k = 7/6$.
4. $M(-5, 0, -4)$, $C(-6, -9, -3)$, $k = 5/3$.
5. $M(-1, -4, 6)$, $C(-5, -9, 1)$, $k = 1/2$.
6. $M(-10, 8, -10)$, $C(9, 7, 5)$, $k = 7/6$.
7. $M(7, 3, 6)$, $C(-8, 8, -1)$, $k = 5/3$.
8. $M(7, -1, -9)$, $C(-7, 5, -10)$, $k = 1/2$.
9. $M(10, -7, 9)$, $C(-4, -8, 8)$, $k = 2/3$.
10. $M(-5, -3, -7)$, $C(5, 7, 10)$, $k = 5/6$.
11. $M(3, -3, 8)$, $C(-5, 8, -4)$, $k = 2/3$.
12. $M(-3, 6, 0)$, $C(9, -5, 0)$, $k = 5/6$.
13. $M(6, -10, 7)$, $C(-1, -10, 3)$, $k = 1/3$.
14. $M(0, -8, -8)$, $C(-5, 0, -3)$, $k = 2/3$.
15. $M(2, 4, -10)$, $C(8, 7, -2)$, $k = 5/3$.
16. $M(-4, 10, 8)$, $C(4, 0, 5)$, $k = 1/3$.
17. $M(9, -3, 5)$, $C(3, -1, -4)$, $k = 1/6$.
18. $M(-2, 3, 3)$, $C(-5, -5, -2)$, $k = 4/3$.
19. $M(5, -5, 5)$, $C(-9, -1, 2)$, $k = 1/2$.
20. $M(-2, -10, -8)$, $C(-10, 3, 9)$, $k = 1/3$.

21. $M(-1, 0, -4), C(-8, -9, -2), k = 1/6$.
22. $M(-1, 1, 6), C(-10, -8, 0), k = 2/3$.
23. $M(2, 3, 8), C(6, 6, 6), k = 1/3$.
24. $M(-3, -6, -5), C(7, 6, -7), k = 3/2$.
25. $M(-7, 2, 0), C(8, -4, -2), k = 2/3$.
26. $M(-3, 9, -4), C(-7, -10, 1), k = 2/3$.
27. $M(4, 2, 1), C(-3, 3, -3), k = 4/3$.
28. $M(7, -5, -5), C(-3, 6, 0), k = 1/6$.

Задача 3.3. Найти аффинное преобразование пространства, являющееся сжатием к плоскости \mathcal{P} с коэффициентом k . Система координат прямоугольная.

1. $\mathcal{P} : 3x - 4y - z + 3 = 0, k = 4$.
2. $\mathcal{P} : 5x + 5y - 2z - 4 = 0, k = 3$.
3. $\mathcal{P} : x - 2y + 4z + 5 = 0, k = 5$.
4. $\mathcal{P} : 4x - y - z + 5 = 0, k = 5$.
5. $\mathcal{P} : 3x - 3y + 2z - 5 = 0, k = 3$.
6. $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 3 = 0, k = 2$.
7. $\mathcal{P} : 2x + 5y + 5z + 2 = 0, k = 3$.
8. $\mathcal{P} : 3x - 4y - z - 5 = 0, k = 2$.
9. $\mathcal{P} : x - 5y - z - 5 = 0, k = 5$.
10. $\mathcal{P} : 5x + y - 4z + 4 = 0, k = 4$.
11. $\mathcal{P} : 3x + 5y - 2z + 2 = 0, k = 5$.
12. $\mathcal{P} : 4x - 4y + 2z - 3 = 0, k = 4$.
13. $\mathcal{P} : 3x + 3y + 2z - 1 = 0, k = 4$.
14. $\mathcal{P} : 5x - 2y - z - 3 = 0, k = 2$.
15. $\mathcal{P} : 2x + 3y + 4z + 3 = 0, k = 2$.
16. $\mathcal{P} : x + 5y + z - 2 = 0, k = 5$.
17. $\mathcal{P} : x + 5y + 2z + 5 = 0, k = 2$.

18. $\mathcal{P} : 2x - 3y - 4z - 1 = 0, k = 3.$
19. $\mathcal{P} : 3x + 4y + 5z + 3 = 0, k = 4.$
20. $\mathcal{P} : 3x + 3y - 2z - 2 = 0, k = 5.$
21. $\mathcal{P} : 4x - y + z + 4 = 0, k = 2.$
22. $\mathcal{P} : 3x - 4y + 5z + 5 = 0, k = 2.$
23. $\mathcal{P} : 4x - 3y + 5z - 3 = 0, k = 3.$
24. $\mathcal{P} : 2x - 4y + z + 5 = 0, k = 4.$
25. $\mathcal{P} : 4x - 4y - z + 5 = 0, k = 3.$
26. $\mathcal{P} : x + 3y + 3z - 4 = 0, k = 2.$
27. $\mathcal{P} : 4x - y + 3z - 2 = 0, k = 2.$
28. $\mathcal{P} : x - 5y + 5z + 2 = 0, k = 5.$
29. $\mathcal{P} : 2x + 4y + 4z - 5 = 0, k = 2.$
30. $\mathcal{P} : 4x + 5y + 3z + 4 = 0, k = 3.$

Задача 3.4. Найти движение прямой, переводящее точку M в точку M' , если это движение является: *a)* собственным, *b)* несобственным.

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1. $M(2), M'(-3).$ | 13. $M(3), M'(-2).$ |
| 2. $M(-5), M'(2).$ | 14. $M(-4), M'(1).$ |
| 3. $M(-1), M'(-3).$ | 15. $M(-3), M'(-1).$ |
| 4. $M(-5), M'(3).$ | 16. $M(-4), M'(2).$ |
| 5. $M(-2), M'(-1).$ | 17. $M(4), M'(3).$ |
| 6. $M(-5), M'(-1).$ | 18. $M(-2), M'(-3).$ |
| 7. $M(-5), M'(-2).$ | 19. $M(-2), M'(-4).$ |
| 8. $M(5), M'(3).$ | 20. $M(-2), M'(4).$ |
| 9. $M(-5), M'(1).$ | 21. $M(4), M'(2).$ |
| 10. $M(5), M'(-3).$ | 22. $M(2), M'(-1).$ |
| 11. $M(-3), M'(1).$ | 23. $M(-1), M'(-4).$ |
| 12. $M(1), M'(-3).$ | 24. $M(4), M'(-1).$ |

25. $M(-1), M'(4)$.

28. $M(1), M'(-2)$.

26. $M(1), M'(3)$.

29. $M(4), M'(-2)$.

27. $M(-2), M'(1)$.

30. $M(3), M'(-1)$.

Задача 3.5. Найти аффинное преобразование, являющееся симметрией плоскости в прямой ℓ . Система координат прямоугольная.

1. $\ell: x + 5y + 1 = 0$.

16. $\ell: 4x + 5y + 1 = 0$.

2. $\ell: 5x + 4y + 2 = 0$.

17. $\ell: 2x - 5y - 4 = 0$.

3. $\ell: x - 3y + 5 = 0$.

18. $\ell: 3x + 5y - 5 = 0$.

4. $\ell: 2x + 4y - 5 = 0$.

19. $\ell: 3x - 2y + 4 = 0$.

5. $\ell: x - 2y + 1 = 0$.

20. $\ell: 4x + y - 2 = 0$.

6. $\ell: 3x - 4y - 2 = 0$.

21. $\ell: 3x - 2y - 5 = 0$.

7. $\ell: x + 2y - 1 = 0$.

22. $\ell: 5x - 3y - 4 = 0$.

8. $\ell: 5x + 3y - 1 = 0$.

23. $\ell: 4x + 3y - 5 = 0$.

9. $\ell: 4x - 5y + 4 = 0$.

24. $\ell: 4x - 5y + 1 = 0$.

10. $\ell: 2x - y + 5 = 0$.

25. $\ell: 4x + y - 1 = 0$.

11. $\ell: x - 5y + 3 = 0$.

26. $\ell: x + 2y + 3 = 0$.

12. $\ell: x - 4y - 2 = 0$.

27. $\ell: 5x + 4y + 5 = 0$.

13. $\ell: 4x - 3y + 3 = 0$.

28. $\ell: 2x + 4y + 2 = 0$.

14. $\ell: 3x - y + 3 = 0$.

29. $\ell: 5x - y + 5 = 0$.

15. $\ell: x + 5y - 5 = 0$.

30. $\ell: x + 3y - 2 = 0$.

Задача 3.6. Определить, является ли движение плоскости $(x, y) \mapsto (x', y')$ собственным или несобственным. Если преобразование собственное, то найти неподвижную точку и угол поворота, если несобственное, то найти инвариантную прямую и вектор сдвига.

1. а) $x' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{24}{17}, y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{40}{17}$;

б) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{16}{5}, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5}$.

2. а) $x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{9}{25}, y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{37}{25}$;

б) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 6, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2$.

3. a) $x' = \frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y + \frac{94}{17}$, $y' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{36}{17}$;
 b) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{56}{5}$.
4. a) $x' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{83}{25}$, $y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{94}{25}$;
 b) $x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{66}{13}$, $y' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{96}{13}$.
5. a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{22}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}$;
 b) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{35}{17}$, $y' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y + \frac{55}{17}$.
6. a) $x' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{99}{25}$, $y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{82}{25}$;
 b) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{16}{5}$.
7. a) $x' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 4$, $y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 4$;
 b) $x' = \frac{9}{41}x - \frac{40}{41}y + \frac{402}{41}$, $y' = -\frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{338}{41}$.
8. a) $x' = \frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{3}{17}$, $y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{39}{17}$;
 b) $x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{58}{13}$, $y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{74}{13}$.
9. a) $x' = \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y + \frac{162}{25}$, $y' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{66}{25}$;
 b) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{117}{17}$, $y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{161}{17}$.
10. a) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 4$;
 b) $x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}$, $y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{12}{5}$.
11. a) $x' = \frac{9}{41}x - \frac{40}{41}y - \frac{426}{41}$, $y' = -\frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y + \frac{308}{41}$;
 b) $x' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{8}{13}$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{14}{13}$.
12. a) $x' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{12}{13}$, $y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{70}{13}$;
 b) $x' = \frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{14}{17}$, $y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{46}{17}$.
13. a) $x' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + 1$, $y' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 1$;
 b) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 4$.
14. a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$;
 b) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{21}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 8/5$.
15. a) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{138}{25}$, $y' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{84}{25}$;
 b) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{22}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{14}{5}$.
16. a) $x' = \frac{20}{29}x + \frac{21}{29}y + 3$, $y' = -\frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y - 3$;
 b) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 6$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2$.

17. a) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1$, $y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1$;
 b) $x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 5$, $y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5$.
18. a) $x' = \frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y + \frac{165}{29}$, $y' = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{8}{29}$;
 b) $x' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{24}{13}$, $y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{16}{13}$.
19. a) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{212}{25}$, $y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y - \frac{134}{25}$;
 b) $x' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{16}{17}$, $y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{38}{17}$.
20. a) $x' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{3}{25}$, $y' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{29}{25}$;
 b) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{14}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{22}{5}$.
21. a) $x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{218}{25}$, $y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{126}{25}$;
 b) $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{32}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}$.
22. a) $x' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 8$, $y' = -\frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y$;
 b) $x' = -\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - \frac{57}{17}$, $y' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{58}{17}$.
23. a) $x' = -\frac{20}{29}x + \frac{21}{29}y - \frac{7}{29}$, $y' = -\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y + \frac{287}{29}$;
 b) $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{76}{13}$, $y' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{62}{13}$.
24. a) $x' = \frac{9}{41}x + \frac{40}{41}y - \frac{173}{41}$, $y' = \frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{204}{41}$;
 b) $x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{27}{5}$, $y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{21}{5}$.
25. a) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{30}{13}$, $y' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{110}{13}$;
 b) $x' = -\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{117}{17}$, $y' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{161}{17}$.
26. a) $x' = -\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{168}{25}$, $y' = -\frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - \frac{224}{25}$;
 b) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 6$, $y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$.
27. a) $x' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{7}{13}$, $y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{69}{13}$;
 b) $x' = -\frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y + \frac{170}{29}$, $y' = -\frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{300}{29}$.
28. a) $x' = \frac{21}{29}x + \frac{20}{29}y - \frac{270}{29}$, $y' = \frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y - \frac{166}{29}$;
 b) $x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{24}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{32}{5}$.
29. a) $x' = -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{48}{13}$, $y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{6}{13}$;
 b) $x' = -\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{66}{17}$, $y' = \frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{76}{17}$.
30. a) $x' = -\frac{20}{29}x - \frac{21}{29}y + \frac{231}{29}$, $y' = \frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y + \frac{133}{29}$;
 b) $x' = \frac{9}{41}x + \frac{40}{41}y - \frac{442}{41}$, $y' = \frac{40}{41}x - \frac{9}{41}y - \frac{288}{41}$.

Задача 3.7. Доказать, что данное отображение является преобразованием подобия. Разложить его в композицию $\psi \circ \Phi \circ \theta \circ \eta$, где

- η — тождественное: $(x, y) \mapsto (x, y)$, если исходное собственное и симметрия относительно оси Ox : $(x, y) \mapsto (x, -y)$, если несобственное,
- θ — параллельный перенос на вектор $\vec{v} = (a, b)$:
 $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$,
- Φ — поворот на угол φ : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
- ψ — гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом k : $(x, y) \mapsto (kx, ky)$.

Система координат прямоугольная.

1. $x' = 7x + 24y, y' = -24x + 7y - 2$.
2. $x' = 5x - 12y, y' = 12x + 5y + 3$.
3. $x' = 20x - 21y - 1, y' = 21x + 20y - 3$.
4. $x' = 21x - 20y - 1, y' = 20x + 21y + 2$.
5. $x' = -20x - 21y - 3, y' = -21x + 20y - 1$.
6. $x' = 8x + 15y - 2, y' = 15x - 8y - 3$.
7. $x' = 12x + 5y - 2, y' = 5x - 12y - 2$.
8. $x' = -12x + 5y - 3, y' = -5x - 12y - 3$.
9. $x' = -3x - 4y - 3, y' = 4x - 3y - 2$.
10. $x' = 8x + 15y + 1, y' = -15x + 8y + 2$.
11. $x' = 4x + 3y + 1, y' = 3x - 4y - 1$.
12. $x' = 20x + 21y - 3, y' = -21x + 20y - 3$.
13. $x' = -24x - 7y - 1, y' = -7x + 24y + 3$.
14. $x' = 24x + 7y - 2, y' = 7x - 24y - 3$.
15. $x' = -8x - 15y - 1, y' = -15x + 8y - 3$.
16. $x' = 5x - 12y + 3, y' = -12x - 5y - 3$.
17. $x' = -5x + 12y, y' = 12x + 5y + 1$.

18. $x' = -7x - 24y + 2$, $y' = 24x - 7y + 3$.
19. $x' = 21x + 20y - 1$, $y' = 20x - 21y + 3$.
20. $x' = -15x - 8y - 2$, $y' = 8x - 15y + 1$.
21. $x' = 21x + 20y - 1$, $y' = -20x + 21y + 3$.
22. $x' = 24x + 7y - 2$, $y' = -7x + 24y$.
23. $x' = -15x + 8y + 1$, $y' = 8x + 15y + 2$.
24. $x' = -4x - 3y + 3$, $y' = 3x - 4y$.
25. $x' = -4x + 3y + 3$, $y' = 3x + 4y$.
26. $x' = 4x - 3y + 3$, $y' = 3x + 4y$.
27. $x' = 3x - 4y - 1$, $y' = 4x + 3y - 2$.
28. $x' = 7x + 24y + 3$, $y' = 24x - 7y - 3$.
29. $x' = 12x - 5y$, $y' = -5x - 12y + 1$.
30. $x' = -15x - 8y - 1$, $y' = -8x + 15y - 2$.

Заключение, которое читать необязательно

Как представить многомерные геометрические объекты, например, простейший из них — евклидов четырехмерный куб? На помощь здесь приходит аналогия. Подобно тому, как квадрат является результатом параллельного переноса отрезка вдоль перпендикулярного ему направления на расстояние, равное длине этого отрезка (рис. 6), а куб — результатом параллельного переноса квадрата вдоль направления, перпендикулярного его плоскости (рис. 7), так и куб в четырехмерном евклидовом пространстве получается параллельным переносом трехмерного куба в направлении, перпендикулярном трехмерному пространству (рис. 8).

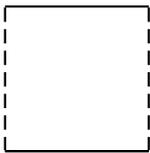


Рис. 6

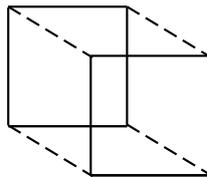


Рис. 7

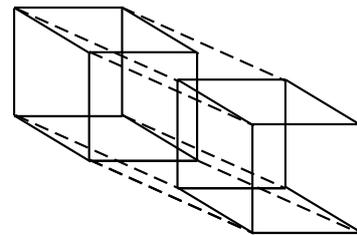


Рис. 8

Пытаясь расширить границы трехмерного мировосприятия, мы сталкиваемся с трудностями того же рода, что и обитатели фантастических двумерных миров Флатландии и Сферландии, пытающиеся постичь третье измерение. Речь о забавных героях замечательных книг: «Флатландия» Э. Эббота и «Сферландия» Д. Бюргера, которые советуем прочесть всем интересующимся геометрией и просто любителям гимнастики ума.

Позвольте здесь поставить Точку, впрочем, также являющуюся пространством размерности ноль:

«Взгляните на несчастное создание, которое находится перед вами. Эта Точка — существо, подобное нам, но обреченное на вечное пребывание в пучине Нулевой Размерности. Для нее в ней самой заключен свой мир, своя Вселенная... Она сама воплощает для себя Единичное и Общее, будучи в действительности Ничем. Извлеките же отсюда урок: ... стремиться к возвышенной цели лучше, чем слепо и бессильно погрязнуть в невежестве».

Э. Эббот «Флатландия»

Список рекомендуемой литературы

1. Александров, П.С. *Лекции по аналитической геометрии* / П.С. Александров. — М. : Наука, 1968. — 912 с.
2. Бахвалов, С.В. *Сборник задач по аналитической геометрии* / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — Изд. 3-е, стер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1964. — 440 с.
3. Бортаковский, А.С. *Аналитическая геометрия в примерах и задачах : учеб. пособие для техн. вузов и ун-тов* / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — М. : Высш. шк., 2005. — 496 с. — ISBN 5-06-004761-X.
4. Дубровин, Н.И. *Аффинные и евклидовы пространства : учеб. пособие* / Н.И. Дубровин ; Владим. гос. ун-т. — Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. — 47 с. — ISBN 5-89368-675-6.
5. Ефимов, Н.В. *Линейная алгебра и многомерная геометрия* / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. — М. : Наука, 1970. — 528 с.
6. Постников, М.М. *Лекции по геометрии. Семестр 1. Аналитическая геометрия* / М.М. Постников. — М. : Наука, 1979. — 336 с.
7. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре* / под ред. Ю.М. Смирнова. — М. : Лотос, 2005. — 376 с. — ISBN 5-94010-375-8.

Оглавление

Предисловие	3
1. Аффинные пространства	4
1.1. Определение n -мерного аффинного пространства. Аффинная система координат	4
1.2. Плоскости в аффинном пространстве	5
1.3. Взаимное расположение плоскостей	12
1.4. Аффинные замены координат	17
1.5. Задачи	27
2. Евклидовы пространства	62
2.1. Скалярное произведение. Матрица Грама. Ортогонализация	62
2.2. Евклидовы аффинные пространства. Метрические характеристики геометрических объектов	65
2.3. Задачи	70
3. Аффинные преобразования	83
3.1. Определение и основные свойства аффинных преобразований	83
3.2. Примеры аффинных преобразований. Движения	86
3.3. Задачи	97
Заключение, которое читать необязательно	106
Список рекомендуемой литературы	107

Учебное издание

СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич
ТРУБИНА Ольга Ильинична

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Практикум

Подписано в печать 16.02.09.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6.28. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.