Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. П. БАДАЛЯН

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2024

УДК 621.31
ББК 31.27
Б15

Рецензенты:
Кандидат технических наук, доцент
зав. кафедрой электротехники
Ковровской государственной технологической академии
имени В. А. Дегтярева
Е. А. Чащин

Доктор технических наук
профессор кафедры электроники, приборостроения и биотехнических систем Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. П. Крылов

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Бадалян, Н. П.
Б15 Решение систем уравнений установившегося режима электроэнергетической системы : учеб. пособие / Н. П. Бадалян ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 196 с. – ISBN 978-5-9984-1869-3.

Изложены принципы и методы, а также приведены примеры расчета установившегося режима электроэнергетической системы. При построении системы соответствующих нелинейных алгебраических уравнений одновременно используются частные и взаимно комплексные проводимости и сопротивления.

Предназначено для студентов направления подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 8. Табл. 5. Библиогр.: 27 назв.

УДК 621.31
ББК 31.27

ISBN 978-5-9984-1869-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие направлено на закрепление у студентов знаний, полученных из теоретического курса. Кроме того, решение практических задач помогает лучше понять и представить физические процессы, происходящие в электроэнергетической системе и электрических сетях при передаче и распределении электроэнергии.

В современной прикладной науке проблема расчета установившегося режима большой электроэнергетической системы была и остается в центре внимания исследователей. Это связано с тем, что с расчета установившегося режима электроэнергетической системы начинается множество исследований, таких как:

– оптимизация режима по активным параметрам;

– оптимизация развития структуры с учетом электрических станций;

– установление уровня напряжения узлов и их регулирование с целью обеспечения необходимого качества электроэнергии;

– расчет предельных режимов для определения устойчивости системы;

– установление точных численных потерь активных мощностей в электрических сетях.

Особенность решения проблемы установившегося режима большой электроэнергетической системы заключается в обеспечении инженерной наглядности для восприятия физических процессов, происходящих как в данном объединении, так и в его отдельных звеньях (подсистемах).

Из этого следует, что решение проблем большой электроэнергетической системы связано не только с совершенствованием электронных вычислительных машин.

Расчет установившегося режима большой электроэнергетической системы методом декомпозиции-диакоптики дает возможность с точки зрения инженерной наглядности проводить необходимые качественные и количественные исследования.

При решении поставленной проблемы использованы теории представления большой электроэнергетической системы в виде совокупности радиально связанных подсистем, теории построения нелинейных математических моделей и современные методы их реализации, а также методы разложения нелинейных векторных функций в ряд Тейлора и теория матриц.

В пособии приведены типичные задачи, возникающие при расчетах, анализе работы и проектировании сетей электрических систем. В первую очередь это представление в схемах замещения элементов электрических сетей с определением их параметров. Особое внимание уделено методам расчета установившихся нормальных режимов на примерах разомкнутых и простых замкнутых сетей.

Глава 1. КРАТКИЙ АНАЛИЗ ПО РАСЧЕТУ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследования показывают, что в основу расчета при составлении алгебраических уравнений установившегося режима электроэнергетической системы (ЭЭС) положены построения соответствующих математических моделей, которые можно классифицировать следующим образом:

– математические модели Y – когда при построении системы соответствующих нелинейных алгебраических уравнений используются собственные и взаимные комплексные проводимости [1 – 27];

– математические модели Z – когда при построении системы соответствующих нелинейных алгебраических уравнений используются собственные и взаимные комплексные сопротивления [1 – 14];

– математические модели Y-Z – когда при построении системы соответствующих нелинейных алгебраических уравнений одновременно используются частные и взаимно комплексные проводимости и сопротивления [1 – 27].

Построенные математические модели реализуются разными методами, основанными на аналитическом принципе представления нелинейных функций в ряде Тейлора.

В настоящее время мы остановимся на особенностях реализации и использования отдельных математических моделей установившегося режима ЭЭС.

1.1. Выбор зависимых и независимых режимных параметров

В основе исследований установившегося режима большой ЭЭС лежит построение соответствующих диакоптических математических моделей, которые представляются в виде совокупности радиально связанных подсистем.

Для построения соответствующей математической модели необходимо выбрать состав независимых и зависимых параметров как для ЭЭС, так и для подсистем. Понятие независимых и зависимых параметров одинаково как для отдельных подсистем, так и для ЭЭС.

Каждый узел ЭЭС характеризуется комплексной мощностью и комплексным напряжением. Если их представить в виде реальных переменных, получим четыре режимных параметра: активные, реактивные мощности, модуль напряжений и аргумент.

Из четырех отмеченных режимных параметров в качестве исходной информации задают два, а другие два решают как результат реализации соответствующей математической модели.

В зависимости от того, какие два из четырех узловых режимных параметров заданы в качестве исходной информации, узлы классифицируют следующим образом:

– узел типа U-Ψ – когда заданы модуль комплексного напряжения и аргумент и необходимо определить активные (P) и реактивные (Q) мощности. Узел такого типа бывает обычно станционным, и его принимают как базисный по напряжению и балансирующий по мощности. Заданные параметры U-Ψ_u называют *независимыми,* а параметры P-Q, которые нужно определить, называют *зависимыми режимными*;

– узел типа P-Q – когда заданы активные и реактивные мощности и необходимо определить модуль (U) комплексного напряжения и аргумент (Ψ_u). Узел такого типа может быть как станционным, так и нагрузочным. Предложенные параметры P-Q называют *независимыми,* а параметры U-Ψ_u, которые нужно определить, называют *зависимыми режимными параметрами*;

– узел типа P-U – когда заданы активная мощность и модуль комплексных напряжений и необходимо определить реактивную мощность (Q) и аргумент комплексных напряжений (Ψ_u). Предложенные параметры P-U называют *независимыми,* а параметры Q-Ψ_u, которые нужно определить, называют *зависимыми режимными*.

Делая выбор независимых и зависимых параметров, необходимо построить соответствующую диакоптическую математическую модель, которая представляет собой комплекс систем нелинейных алгебраических уравнений ЭЭС.

1.2. *Y* – математические модели установившегося режима электроэнергетической системы

Поскольку *Y*-матрицу ЭЭС строят непосредственно с электрической схемы, то на первоначальном этапе составления уравнений широко использовали *Y* – математические модели [1 – 10].

Если исследуемая ЭЭС имеет *N* независимых узлов, тогда соответствующую систему уравнений записывают в следующем виде:

$$\dot{I}_k = \sum_{m=1}^{N} Y_{km}\dot{E}_m = \sum_{m=1}^{N}\left(G_{km} + jB_{km}\right)\left(e_m + jf_m\right).$$

Составляющие комплексных токов определяются

$$a_k = \sum_{m=1}^{N}\left(G_{km}e_m - B_{km}f_m\right),$$

$$b_k = \sum_{m=1}^{N}\left(G_{km}f_m + B_{km}e_m\right),$$

где

$$G_{km} = \mathrm{Re}\left(Y_{km}\right),$$

$$B_{km} = Jm\left(Y_{km}\right),$$

$$e_m = \mathrm{Re}\left(\dot{E}_m\right),$$

$$f_m = Jm\left(\dot{E}_m\right).$$

В качестве *Y* – математической модели используют выражения активных и реактивных мощностей

$$P_k = a_k e_k + b_k f_k,$$

$$Q_k = a_k f_k - b_k e_k,$$

где

$$a_k = R_e\left(\dot{I}_k\right),$$

$$b_k = J_m\left(\dot{I}_k\right).$$

Затем строят системы уравнений на основании приращения реактивных мощностей и исследуют их в форме системы нелинейных алгебраических уравнений, решая с применением компонентов комплексных напряжений.

В учебнике представлена примитивная, но содержательная схема замещения состоящая из шести узлов, которая имеет следующий вид (рис. 1).

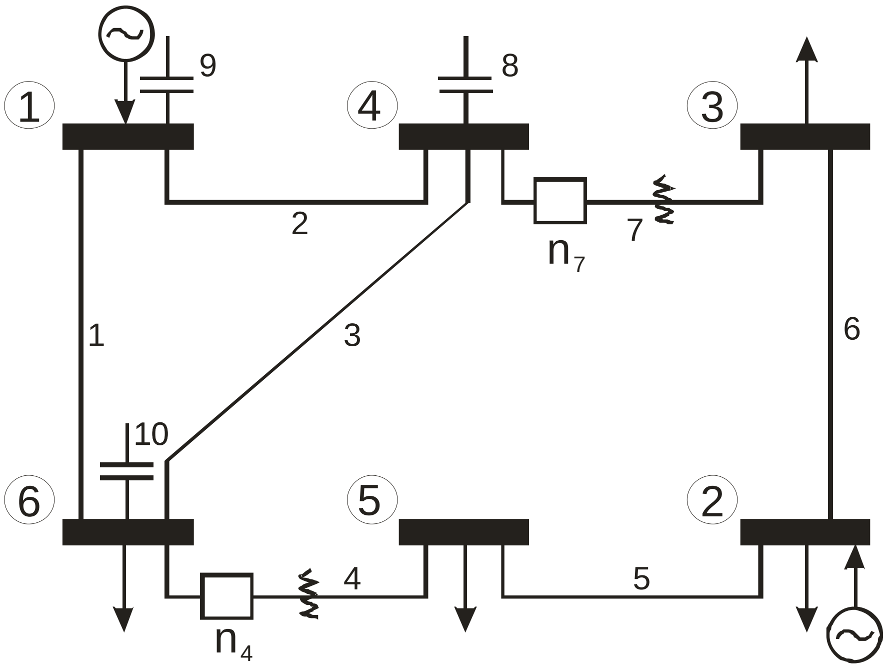


Рис. 1. Схема замещения ЭЭС, состоящая из шести узлов

Как видим, полученная схема имеет подразделения, которые свойственны сложным ЭЭС.

В работе данную схему изучают наиболее подробным образом и реализуют соответствующую численную математическую модель с применением метода Ньютона – Рафсона.

Темпы роста активных и реактивных мощностей узлов (см. рис. 1) приводят в следующем виде:

$$\Delta P_k = \sum_{m=1}^{N} H_{km}\Delta\delta_m + \sum_{m=1}^{N} N_{km}\Delta E_m,$$

$$\Delta Q_k = \sum_{m=1}^{N} J_{km}\Delta\delta_m + \sum_{m=1}^{N} L_{km}\Delta E_m.$$

Для схемы, приведенной на рис. 1, систему матричных уравнений записывают следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta P_5 \\ \hdashline \Delta Q_3 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cc} H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & N_{23} & N_{25} \\ H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & N_{33} & N_{35} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & N_{43} & N_{45} \\ H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & N_{53} & N_{55} \\ \hdashline J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & L_{33} & L_{35} \\ J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & L_{53} & L_{55} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta\delta_5 \\ \hdashline \Delta E_3 \\ \Delta E_5 \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Из полученных матричных уравнений (1.1) следует, что узлы 2 и 4 типа *P*-*E*, а 3 и 5 – нагрузочные, для которых задаются активные и реактивные мощности. Если приведем следующие обозначения:

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta P_5 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} \\ H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} \\ H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\delta = \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta\delta_5 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{23} & N_{25} \\ N_{33} & N_{35} \\ N_{43} & N_{45} \\ N_{53} & N_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta Q_3 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{33} & L_{35} \\ L_{53} & L_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Delta E = \begin{bmatrix} \Delta E_3 \\ \Delta E_5 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} \\ J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} \end{bmatrix},$$

тогда матричное уравнение (1.1) будет представлено в следующем компактном виде:

$$\left[\begin{array}{c} \Delta P \\ \hdashline \Delta Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} H & N \\ \hdashline J & L \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta\delta \\ \hdashline \Delta E \end{array}\right]. \tag{1.2}$$

Если обращать четырехблочную квадратную и неособенную матрицу, то получим

$$\left[\begin{array}{c} \Delta\delta \\ \hdashline \Delta E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} H & N \\ \hdashline J & L \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \Delta\delta \\ \hdashline \Delta E \end{array}\right].$$

Блоки квадратной неособенной матрицы представляют в следующей аналитической форме:

– при $m = k$

$$H_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} = Q_k - B_{kk} E_k^2,$$

$$N_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial E_k} = \frac{P_k}{E_k} + G_{kk} E_k,$$

$$J_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = P_k - G_{kk} E_k^2,$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial E_k} = \frac{Q_k}{E_k} - B_{kk} E_k;$$

– при $m \neq k$

$$H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_m} = a_m f_k - b_m e_k ,$$

$$N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial E_m} = \frac{1}{E_m}\left(a_m e_k + b_m f_k\right),$$

$$J_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_m} = -\left(a_m e_k + b_m f_k\right),$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial E_m} = \frac{1}{E_m}\left(a_m f_k - b_m e_k\right).$$

Обобщая полученные результаты, можем сделать следующие выводы:

– поперечные сопротивления учтены в собственных проводимостях;

– полученные математические модели реализованы по методу Ньютона – Рафсона;

– обращение квадратной матрицы приведено к решению системы нелинейных математических уравнений и реализовано по методу Гауса;

– во время построения соответствующих уравнений учтен коэффициент трансформации трансформатора;

В этом случае основные сложности возникают при обращении неособенной квадратной матрицы Якоба.

Если учесть то обстоятельство, что при реализации Y – математической модели возникает серьезная трудность для матрицы Якоба, то уравнение матрицы (1.2) для какой-нибудь итерации k можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \hdashline \Delta Q^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^k & \vdots & N^k \\ \hdashline J^k & \vdots & L^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Theta^{k+1} \\ \hdashline \Delta V^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Выражение полученной матрицы будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \hdashline \Delta Q^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^k & \vdots & 0 \\ \hdashline 0 & \vdots & L^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Theta^{k+1} \\ \hdashline \Delta V^{k+1} \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Выражение (1.3) в некотором роде проясняет проблему матрицы, а именно мы без больших трудностей можем записать следующие простые выражения:

$$\Delta P^k = H^k \Delta\Theta^{k+1},$$

$$\Delta Q^k = L^k \Delta V^{k+1}.$$

Ясно, что обращение обычных квадратных матриц H^k и L^k не представляет вычислительной сложности

$$\Delta\Theta^{k+1} = \left(H^k\right)^{-1} \Delta P^k,$$

$$\Delta V^{k+1} = \left(L^k\right)^{-1} \Delta Q^k.$$

Несмотря на то что вопрос обращения матрицы некоторым образом проясняется, общее время обращения особенно не уменьшается.

На рис. 2 представлена простейшая, но имеющая разные сложности электрическая схема, которая состоит из шести узлов, из которых узлы 1 и 6 являются станционными, а узлы 2, 3, 4 и 5 – нагрузочными. На схемах условно выставлены трансформаторы в виде витков.

Здесь проблема установившегося режима электрической системы решается методом Ньютона – Рафсона, когда в схеме функционируют трансформаторы с комплексными коэффицентами трансформации.

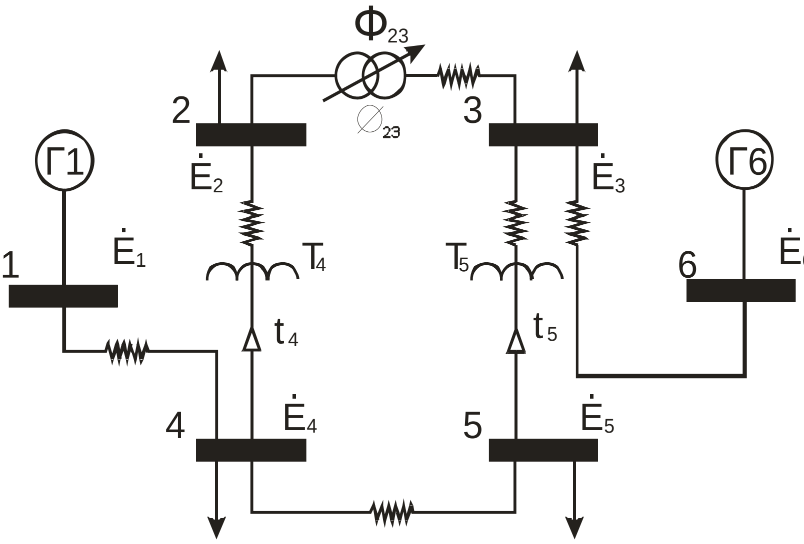


Рис. 2. Простейшая схема замещения ЭЭС

Для этой схемы строят соответствующие математические модели для разных случаев.

Если предположить, что в схеме не работают трансформаторы, то линейное уравнение, исходящее из метода Ньютона – Рафсона в виде матрицы, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta P_5 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & & & & & H_{14} & N_{14} & & \\ & H_{22} & N_{22} & H_{23} & N_{23} & H_{24} & N_{24} & & \\ & J_{22} & L_{22} & J_{23} & L_{23} & J_{24} & L_{24} & & \\ & H_{32} & N_{32} & H_{33} & N_{33} & & & H_{35} & N_{35} \\ & J_{32} & L_{32} & J_{33} & L_{33} & & & J_{35} & L_{35} \\ H_{41} & H_{42} & N_{42} & & & H_{44} & N_{44} & H_{45} & N_{45} \\ J_{41} & J_{42} & L_{42} & & & J_{44} & L_{44} & J_{45} & L_{45} \\ & & & H_{35} & N_{35} & H_{45} & N_{45} & H_{55} & N_{55} \\ & & & J_{35} & L_{35} & J_{45} & L_{45} & J_{55} & L_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta E_2/E_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta E_3/E_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta E_4/E_4 \\ \Delta\delta_5 \\ \Delta E_5/E_5 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где

$$H_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial \delta_m},$$

$$N_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial E_m} E_m,$$

$$J_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \delta_m},$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial E_m} E_m.$$

Матричные элементы Якоба (1.4) в матричном выражении определяются следующим образом:

$P_к$ и $Q_к$ узловых мощностей

$$P_k + jQ_k = \dot{E}_k \sum_{m=1}^{N} \hat{E}_m \hat{Y}_{km}.$$

Элементы матрицы Якоба определяются:

– при разных индексах, когда $k \neq m$

$$H_{km} = L_{km} = a_m f_k - b_m e_k,$$

$$N_{km} = -J_{km} = a_m e_k + b_m f_k.$$

– при равных индексах, когда $k = m$

$$H_{kk} = -Q_k - B_{kk} E_k^2,$$

$$L_{kk} = Q_k - B_{kk} E_k^2,$$

$$N_{kk} = P_k + G_{kk} E_k^2,$$

$$J_{kk} = P_k - G_{kk} E_k^2,$$

где

$$e_m = R_e\left(\dot{E}_m\right),$$

$$f_m = J_m\left(\dot{E}_m\right),$$

$$a_m = R_e\left(\dot{I}_m\right),$$

$$b_m = J_m\left(\dot{I}_m\right),$$

$$G_{km} = R_e\left(Y_{km}\right),$$

$$B_{km} = J_m\left(Y_{km}\right).$$

Полученная математическая модель (1.4), которая строится в том случае, если не работают трансформаторы, дает возможность строить математические модели и в том случае, когда трансформаторы работают.

Ниже изложены две формы для формулирования матрицы Якоба

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \hline \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \hline \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \hline \Delta P_4 \\ \Delta Q_4 \\ \hline \Delta P_5 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc} H_{11} & & & & & H_{14} & 0 & & \\ \hline & H_{22} & N_{22} & H_{23} & N_{23} & H_{24} & N_{24} & & \\ & J_{22} & L_{22} & J_{23} & L_{23} & J_{24} & L_{24} & & \\ \hline & H_{32} & N_{32} & H_{33} & N_{33} & & & H_{35} & N_{35} \\ & J_{32} & L_{32} & J_{33} & L_{33} & & & J_{35} & L_{35} \\ \hline H_{41} & H_{42} & N_{42} & & & H_{44} & N_{44} & H_{45} & 0 \\ J_{41} & J_{42} & L_{42} & & & J_{44} & L_{44} & J_{45} & 0 \\ \hline & & & H_{35} & N_{35} & H_{45} & 0 & H_{55} & N_{55} \\ & & & J_{35} & L_{35} & J_{45} & 0 & J_{55} & L_{55} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \hline \Delta\delta_2 \\ \Delta E_2/E_2 \\ \hline \Delta\delta_3 \\ \Delta E_3/E_3 \\ \hline \Delta\delta_4 \\ \Delta t_4/t_4 \\ \hline \Delta\delta_5 \\ \Delta t_5/t_5 \end{bmatrix},$$

где

$$C_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial t_m} t_m, \qquad (1.5)$$

$$D_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial t_m} t_m. \qquad (1.6)$$

Схема трансформатора имеет следующий вид (рис. 3).

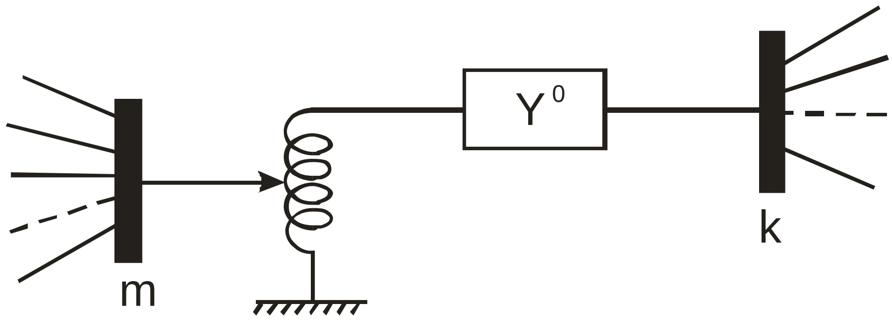


Рис. 3. Представление схемы трансформатора

Выражения мощностей для узлов k и m решаются

$$\left(P_k + jQ_k\right) = E_m^2 \hat{Y}_{kk} + \dot{E}_k \hat{E}_m t_m Y_{km}^0 + \dot{E}_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{N} \hat{E}_i \hat{Y}_{ki}\,, \qquad (1.7)$$

$$\left(P_m + jQ_m\right) = E_m^2 \left(t_m^2 \hat{Y}^0 + \hat{Y}_{mm}\right) + \dot{E}_m \hat{E}_k t_m Y_{km}^0 + \dot{E}_m \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{N} \hat{E}_i \hat{Y}_{ki}\,. \qquad (1.8)$$

Если дифференцировать выражения (1.7) и (1.8) согласно (1.5) и (1.6), получим:

– при $k \neq m$

$$a_m^0 + jb_m^0 = \left(e_m + jf_m\right)\left(G_{km}^0 + jB_{km}^0\right),$$

$$C_{km} = \left(a_m^0 e_k + b_m^0 f_k\right) t_m = N_{km},$$

$$D_{km} = \left(a_m^0 f_k - b_m^0 e_k\right) t_m = L_{km},$$

а диагональные элементы определяются

$$C_{mm} = -2G_{km}^{0}E_m^2 t_m^2 + \left(a_k^0 e_m + b_k^0 f_m\right) t_m ,$$

$$D_{mm} = -2B_{km}^{0}E_m^2 t_m^2 + \left(a_k^0 f_m - b_k^0 e_m\right) t_m .$$

В общем случае рекуррентное выражение Ньютона – Рафсона имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta P_5 \\ \Delta Q_5 \\ \Delta P_{23} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c} H_{11} & & & & & H_{14} & 0 & & & \\ \hline & H_{22} & N_{22} & H_{23} & N_{23} & H_{24} & N_{24} & & & E_{2,2} \\ & J_{22} & L_{22} & J_{23} & L_{23} & J_{24} & L_{24} & & & F_{2,2} \\ \hline & H_{32} & N_{32} & H_{33} & N_{33} & & & H_{35} & N_{35} & E_{3,22} \\ & J_{32} & L_{32} & J_{33} & L_{33} & & & J_{35} & L_{35} & F_{3,22} \\ \hline H_{41} & H_{42} & N_{42} & & & H_{44} & N_{44} & H_{45} & 0 & \\ J_{41} & J_{42} & L_{42} & & & J_{44} & L_{44} & J_{45} & 0 & \\ \hline & & & H_{35} & N_{35} & H_{45} & 0 & H_{55} & N_{55} & \\ & & & J_{35} & L_{35} & J_{45} & 0 & J_{55} & L_{55} & \\ \hline & H'_{23,2} & N'_{23,2} & & & & & & & E_{23,23} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_1 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta E_2/E_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta E_3/E_3 \\ \Delta\delta_4 \\ \Delta t_4/t_4 \\ \Delta\delta_5 \\ \Delta t_5/t_5 \\ \Delta\Phi_{23} \end{bmatrix},$$

где

$$E_{k,km} = \frac{\partial P_k}{\partial \Phi_{km}},$$

$$F_{k,km} = \frac{\partial Q_k}{\partial \Phi_{km}}.$$

1.3. *Z* – математические модели установившегося режима электроэнергетической системы

Параллельно с использованием *Y* – математических моделей установившегося режима ЭЭС использовались также *Z* – математические модели [1 – 10].

Сложность использования математических *Z* – моделей связана в основном с обращением матрицы *Y*, что требует большого объема вычислительных работ.

Однако разработано множество методов, которые можно с большим успехом использовать для построения Z-матриц.

В основе этих методов лежит использование особенностей схем ЭЭС, при которых упрощается построение матрицы Z. Для построения Z-матрицы электрическую схему сначала представляют в виде графы, потом в виде дерева. Затем постепенно объединяют удаленные ветви и, когда восстанавливается начальная графа, строят матрицу Z.

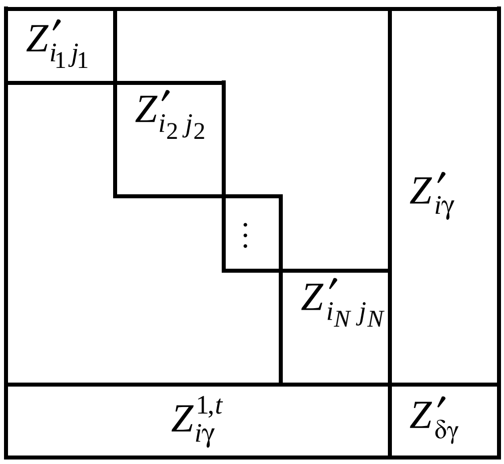
Важнейшая задача – вопрос коррекции матрицы Z, когда происходят структурные изменения первоначальной схемы.

Согласно поставленной задаче новую матрицу $Z^{\text{н}}$ строят с помощью уже известной матрицы $Z^{\text{с}}$, когда возникает соответствующая дополнительная Z-матрица

$$Z^{\text{н}} = Z^{\text{с}} + \Delta Z, \tag{1.9}$$

где элементы дополнительной матрицы ΔZ определяются с помощью элементов $Z^{\text{с}}$ и подключенных или отключенных комплексных сопротивлений.

По вышеизученным методам можно создать матрицу Z, имея небольшое количество узлов. Поэтому для построения матрицы Z ЭЭС используют методы декомпозиции или диакоптики, сущность которых состоит в следующем: первоначальная схема ЭЭС превращается в радиально связанные подсистемы, которые связаны друг с другом одной электрической линией и имеют связь с единственным базисным узлом. При построении подматриц Z для отдельных подсхем или подсистем первые представляют в виде единой квазидиаметральной матрицы, как это показано ниже



Дополнительные $Z'_{i\gamma}$, $Z^{1,t}_{i\gamma}$ – прямоугольные матрицы строят с помощью подматриц $Z'_{i_1 j_1}$, $Z'_{i_2 j_2} \ldots Z'_{i_N j_N}$, а $Z'_{\delta\gamma}$-матрицу – с помощью дополнительных матриц. Дополнительная $Z'_{\delta\gamma}$-подматрица является квадратной, и ее порядок определяется количеством удаленных линий электропередач, вследствие чего первоначальная схема превращается в радиально связанные подсистемы.

После построения расчетной матрицы (1.9) искомые матрицы Z определяют на основании следующего выражения:

$$Z = Z_{ij} = Z'_{ij} + Z'_{i\gamma} + Z'_{\delta\gamma} Z'^{t}_{i\gamma}.$$

Фактически решен также вопрос построения и коррекции матрицы Z для любых сложностей ЭЭС.

Составленные нелинейные алгебраические уравнения типа Z решают по простейшему итерационному методу и в качестве основного расчетного выражения выбирают

$$\dot{U}_i = U_{\text{Б}} + \sum_{j=1}^{M} Z_{ij} \frac{P_j - jQ_j}{\hat{U}_j}.$$

В основном математическую модель Z приводят в следующем виде:

$$\dot{E}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{1S}\dot{I}_S + \cdots + Z_{1n}\dot{I}_n + \cdots +,$$

$$\dot{E}_S = Z_{S1}\dot{I}_1 + Z_{S2}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{SS}\dot{I}_S + \cdots + Z_{Sn}\dot{I}_n + \cdots +,$$

$$\dot{E}_n = Z_{n1}\dot{I}_1 + Z_{n2}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{nS}\dot{I}_S + \cdots + Z_{nn}\dot{I}_n + \cdots +,$$

где $\dot{E}_1$ – величина комплексных напряжений первого узла, являющегося базисным.

Электрический ток станционного узла $\dot{I}_{Gm}$ определяют по следующей формуле:

$$\dot{I}_{Gm} = \frac{P_{Gm} - jQ_{Gm}}{\hat{E}_{Gm}}.$$

Если к тому же узлу подключены как станция, так и нагрузка, то соответствующий ток будет определен на основании следующего выражения:

$$\dot{I}_n = \dot{I}_{Gn} + \dot{I}_{En},$$

$$\dot{I}_n = \frac{P_{Gn} - jQ_{Gn}}{\hat{E}_{Gn}} - \left(\frac{P_{Hn} - jQ_{Hn}}{\hat{E}_H} - \frac{\hat{E}_n}{\hat{Z}_{Ln}} \right),$$

или

$$\dot{I}_n = \frac{P_{Gn} - P_{Hn}}{\hat{E}_n} - j\frac{Q_{Gn} - Q_{Hn}}{\hat{E}_n} + \frac{\hat{E}_n}{\hat{Z}_{Ln}}.$$

Математические модели Y и Z имеют как положительные, так и отрицательные стороны.

1. Если схема замещения сильно неоднородна, т. е. к одному и тому же узлу подключены комплексные продольные сопротивления, имеющие разные величины, то математическая модель Y не обеспечивает решение проблемы установившегося режима.

2. Если схема замещения содержит отрицательные сопротивления, которые возникают во время построения схем замещения трехфазных трехрожковых трансформаторов, то в этом случае Y – математическая модель также не обеспечивает решения проблемы установившегося режима.

3. При построении Z – математической модели нужно обращать Y-матрицу комплексных проводимостей, что требует большого объема вычислительных работ.

1.4. *Y-Z* – математические модели установившегося режима электроэнергетической системы

Математическая модель *Y-Z* содержит положительные стороны математических моделей *Y* и *Z*:

– при *Y* электрическая станция может быть в любом виде: «*P-U*», «*P-Q*», «*P-U*, *P-Q*»;

– при *Z* безоговорочно обеспечивается соответствующая сходимость нелинейных алгебраических уравнений.

Соответствующая математическая модель представляется в следующем виде [12 – 24]:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \hline \dot{U}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} Y_{ii} - Y_{in}Y_{nn}^{-1}Y_{ni} & Y_{in}Y_{nn}^{-1} \\ \hline -Y_{nn}^{-1}Y_{ni} & Y_{nn}^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \hline \dot{I}_n \end{bmatrix},$$

где $\dot{U}_i, \dot{I}_i$ и $\dot{U}_n, \dot{I}_n$ – комплексные напряжения и токи станционных и нагрузочных узлов; Y_{ii}, Y_{nn} – квадратные подматрицы станционных и нагрузочных узлов собственными и взаимными комплексными проводимостями $Y_{ni} = Y_{in}$.

Построенную систему нелинейных алгебраических уравнений предлагалось решить путем совмещения метода Ньютона – Рафсона и метода Якоба

$$AX = F(X), \tag{1.10}$$

где A – неособенная квадратная матрица, имеющая искомый вектор X порядка *N*, а $F(x)$ – нелинейная функция искомой переменной *X*.

Поскольку A – неособенная матрица, то из уравнения (1.10) можно определить *X*

$$X = A^{-1}F(X),$$

или в виде рекуррентного выражения

$$X_{n+1} = A^{-1}F(X_n). \tag{1.11}$$

Система уравнений установившегося режима типа Y представляется в следующем виде:

$$Y\dot{U} = \dot{I}\left(\dot{U},\, P,\, Q\right), \tag{1.12}$$

или

$$\sum_{j} Y_{ij}\dot{U}_{j} = \frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i}. \tag{1.13}$$

Представляя уравнение (1.12) в виде рекуррентного выражения (1.11), получим

$$\dot{U} = Y^{-1} I\left(\dot{U},\, P,\, Q\right),$$

или

$$\dot{U}_{n+1} = ZI\left(\dot{U}_{n},\, P,\, Q\right) \tag{1.14}$$

– систему уравнений установившегося режима типа Z.

Если узлы 1-M являются нагрузочными, то уравнение (1.13) принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{M} Y_{ij}\dot{U}_{j} = \frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i} - \sum_{j=M+1}^{N} Y_{ij}\dot{U}_{j}. \tag{1.15}$$

Системы нелинейных алгебраических уравнений, представленные в уравнении (1.14) в виде Z и в уравнении (1.15) в виде Y, необходимо решать совместно.

Качественный анализ показывает, что соответствующий вычислительный алгоритм не обеспечивает общность решения, в результате чего он не нашел дальнейшего применения.

С этой точки зрения предлагается более усовершенствованная математическая модель

$$\begin{matrix}\dfrac{\bar{k}}{m}\\[2ex] \dfrac{\bar{k}}{\underline{m}}\end{matrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\Delta f_{PQ}}{\Delta f_{PU}}\\ \Delta e_{PQ}\\ \Delta e_{PU}\end{bmatrix} = \begin{matrix}\dfrac{\bar{k}}{m}\\[2ex] \dfrac{\bar{k}}{\underline{m}}\end{matrix}\begin{bmatrix} {}^{k}B^{m} & \vdots & {}^{k}G^{m}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{G'}{J} & \vdots & \dfrac{-B'}{M}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{C}{\underline{RP}}\\[2ex] \dfrac{d}{RV}\end{bmatrix} = \begin{matrix}\dfrac{\bar{k}}{m}\\[2ex] \dfrac{\bar{k}}{\underline{m}}\end{matrix}. \tag{1.16}$$

Здесь m – количество станционных узлов вида P-U; k – количество нагрузочных узлов вида P-Q; j – нулевая матрица порядка $m(k+m)$:

M – угловая матрица порядка $m(k+m)$, каждый блок которой состоит из двух элементов, а остальные элементы равны нулю.

Согласно (1.16) строят системы уравнений P-U, P-Q, которые решают разными методами.

Математические модели Y-Z имеют следующие преимущества:

1) обеспечивается большая продуктивность для системы, где величина активных сопротивлений превосходит величину реактивных $R > X$;

2) сходимость итерационного процесса не зависит от выбора первоначальной величины зависимых режимных параметров;

3) гарантируется решение проблемы ЭЭС, которая содержит продольные новые ветви;

4) обеспечивается решение проблемы для существующих тяжелых режимов.

В настоящее время математическая модель Y-Z представляется в совокупности подмоделей $Y(Z)$ и $Z(Y)$.

$Y(Z)$ – математическая подмодель представляется как

$$\begin{cases} \Phi_{pm}\left(U'_n, U''_n\right) = 0, \\ \Phi_{qm}\left(U'_n, U''_n\right) = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

$Z(Y)$ – математическая подмодель представляется как

$$\begin{cases} \Phi_{pk}\left(I'_\ell, I''_\ell\right) = 0, \\ \Phi_{qk}\left(I'_\ell, I''_\ell\right) = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Как $Y(Z)$, так и $Z(Y)$ – математическая подмодель реализуется по методу Ньютона – Рафсона, когда соответствующие рекуррентные выражения имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} U'_m \\ --- \\ U''_m \end{bmatrix}^{\text{И}+1} = \begin{bmatrix} U'_m \\ --- \\ U''_m \end{bmatrix}^{\text{И}} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} & \dfrac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_n} \\ \hline \dfrac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_n} & \dfrac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_n} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{pm} \\ ---- \\ \Phi_{qm} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I'_k \\ -- \\ I''_k \end{bmatrix}^{\text{И}+1} = \begin{bmatrix} I'_k \\ -- \\ I''_k \end{bmatrix}^{\text{И}} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_\ell} & \dfrac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_\ell} \\ \hline \dfrac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_\ell} & \dfrac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_\ell} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{pk} \\ ---- \\ \Phi_{qk} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Как видим, вместо обращения матрицы порядка $2M$ (1.19) обращаются две нижние неособенные квадратные матрицы порядка 2Г и 2Н. Уравнения (1.17), (1.18) имеют следующий вид:

$$\Phi_{pm} = P_m - \left[P_{\text{Б}m} + \varphi_{pm}\left(U'_n\,,\, U''_n\right)\right],$$

$$\Phi_{qm} = Q_m - \left[Q_{\text{Б}m} + \varphi_{qm}\left(U'_n\,,\, U''_n\right)\right],$$

$$\Phi_{pk} = P_k - \left[P_{\text{Б}k} + \varphi_{pk}\left(I'_\ell\,,\, I''_\ell\right)\right],$$

$$\Phi_{qk} = Q_k - \left[Q_{\text{Б}k} + \varphi_{qk}\left(I'_\ell\,,\, I''_\ell\right)\right],$$

где

$$\varphi_{pm}\left(U'_n\,,\, U''_n\right) = \sum_{n=1}^{\Gamma}\left[g_{m,n}\left(U'_m U'_n + U''_m U''_n\right) + b_{m,n}\left(U''_m U'_n - U'_m U''_n\right)\right],$$

$$\varphi_{qm}\left(U'_n\,,\, U''_n\right) = \sum_{n=1}^{\Gamma}\left[g_{m,n}\left(U''_m U'_n - U'_m U''_n\right) - b_{m,n}\left(U'_m U'_n + U''_m U''_n\right)\right],$$

$$\varphi_{pk}\left(I'_\ell\,,\, I''_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{\Gamma}\left[R_{k,\ell}\left(I'_k I'_\ell + I''_k I''_{\ell n}\right) + X_{k,\ell}\left(I''_k I'_\ell - I'_k I''_{\ell n}\right)\right],$$

$$\varphi_{qk}\left(I'_\ell\,,\, I''_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{\Gamma}\left[R_{k,\ell}\left(I''_k I'_\ell - I'_k I''_{\ell n}\right) - X_{k,\ell}\left(I'_k I'_\ell + I''_k I''_{\ell n}\right)\right].$$

При типе станционных узлов *P-Q* соответствующие математические модели представляются следующим образом:

– для станционных узлов

$$\begin{cases} \Phi_{p1}(\Psi_{un}) = 0, \\ \Phi_{p2}(\Psi_{un}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{p\Gamma}(\Psi_{un}) = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

– для нагрузочных узлов

$$\begin{cases} \Phi_{p,\Gamma+1}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0, \\ \Phi_{p,\Gamma+2}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{p,M}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{q,\Gamma+1}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0, \\ \Phi_{q,\Gamma+2}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{q,M}(I'_\ell,\ I''_\ell) = 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Системы (1.20) и (1.21) нелинейных алгебраических уравнений решают относительно искомых переменных Ψ_{um} и I'_ℓ, I''_ℓ пользуясь так называемым методом минимизации, в основе которого лежит принцип построения вспомогательных функций.

В этом случае для системы нелинейных алгебраических уравнений (1.20) при обозначении вспомогательной функции буквой $F(\Psi)$ эта функция принимает следующий вид:

$$F(\Psi) = \sum_{m=1}^{\Gamma} \left[\Phi_{pm}(\Psi_u)\right]^2. \tag{1.22}$$

Если для системы уравнений (1.21) вспомогательную функцию обозначим буквой $F(I)$, то она будет иметь следующий вид:

$$F(I) = \sum_{k=\Gamma+1}^{m} \left\{ \left[\Phi_{pk}(I)\right]^2 + \left[\Phi_{qk}(I)\right]^2 \right\}. \tag{1.23}$$

При построении уравнения (1.22) согласно принципу минимизации вспомогательной функции, численное значение искомого вектора Ψ_u является результатом решения нелинейного векторного уравнения Φ_{pm} (Ψ_u), а численное значение искомого вектора I = (I', I''), полученное по принципу минимизации вспомогательной функции (1.23), – следствие решения нелинейных векторных уравнений $\left[\Phi_{pk}(I)\right]$ и $\left[\Phi_{qk}(I)\right]$.

В более компактном виде системы (1.20) и (1.21) соответственно можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{pm} = P_m - \left[P_{\text{Б}m} + \varphi_{pm}(U_n\,,\ \Psi_{un})\right] = 0, \tag{1.24}$$

$$\Phi_{qm} = Q_m - \left[Q_{\text{Б}m} + \varphi_{qm}(U_n\,,\ \Psi_{un})\right] = 0. \tag{1.25}$$

Вышеприведенная функция φ_{pm} системы (1.24) определяется согласно следующему выражению:

$$\varphi_{pm}(U_n\,,\ \Psi_{un}) = \sum_{n=1}^{\Gamma} U_m \left[g_{m,n}\cos(\Psi_{um} - \Psi_{un}) + b_{m,n}\sin(\Psi_{um} - \Psi_{un})\right] U_n,$$

а функции Φ_{pk} и Φ_{qk} системы (1.25) решаются так:

$$\Psi_{pk}(I'_\ell\,,\ I''_\ell) = \sum_{\ell=\Gamma+1}^{M} \left[R_{k,\ell}(I'_k I'_\ell + I''_k I''_\ell) + X_{k,\ell}(I''_k I'_\ell - I'_k I''_\ell)\right],$$

$$\Psi_{qk}(I'_\ell\,,\ I''_\ell) = -\sum_{\ell=\Gamma+1}^{M} \left[R_{k,\ell}(I''_k I'_\ell - I'_k I''_\ell) - X_{k,\ell}(I'_k I'_\ell + I''_k I''_\ell)\right].$$

Согласно решению системы нелинейных алгебраических уравнений (1.24) и (1.25) рекуррентные выражения представляются в следующем виде:

$$\left[\Psi_{um}\right]^{И+1} = \left[\Psi_{um}\right]^{И} - \left[\frac{\partial^2 \Phi(\Psi)}{\partial \Psi_{um} \partial \Psi_{un}}\right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(\Psi)}{\partial \Psi_{um}}\right],$$

$$\begin{bmatrix} I'_\ell \\ -- \\ I''_\ell \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I'_\ell \\ -- \\ I''_\ell \end{bmatrix}^{И+1} - \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 \Phi(I)}{\partial I'_k \partial I'_\ell} & \dfrac{\partial^2 \Phi(I)}{\partial I'_k \partial I''_\ell} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 \Phi(I)}{\partial I''_k \partial I'_\ell} & \dfrac{\partial^2 \Phi(I)}{\partial I''_k \partial I''_\ell} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial \Phi(I)}{\partial I'_k} \\ \hdashline \dfrac{\partial \Phi(I)}{\partial I''_k} \end{array}\right].$$

В отличие от вышеприведенных математических моделей математические модели *Y-Z* представляются в следующем виде (когда станционные узлы могут быть одновременно как типа *P-U*, так и типа *P-Q*):

$$\begin{cases} \Phi_{pm} = P_m - \left[P_{Бm} + \varphi_{pm}\left(U_n\,,\ \Psi_{un}\,;\ U_\ell\,,\ \Psi_{u\ell}\right)\right] = 0\,, \\ \Phi_{qm} = Q_m - \left[Q_{Бm} + \varphi_{qm}\left(U_n\,,\ \Psi_{un}\,;\ U_\ell\,,\ \Psi_{u\ell}\right)\right] = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - \left[P_{Бk} + \varphi_{pk}\left(U_n, \Psi_{un}; U_\ell, \Psi_{u\ell}\right)\right] = 0, \\ \Phi_{qk} = Q_k - \left[Q_{Бk} + \varphi_{qk}\left(U_n, \Psi_{un}; U_\ell, \Psi_{u\ell}\right)\right] = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

$$\begin{cases} \Phi_{pi} = P_i - \left[P_{Бi} + \varphi_{pi}\left(I'_j, I''_j\right)\right] = 0\,, \\ \Phi_{qi} = Q_i - \left[Q_{Бi} + \varphi_{qi}\left(I'_j, I''_j\right)\right] = 0. \end{cases}$$

Поскольку при наличии аргументов комплексных напряжений станционных узлов типа *P-U* можно определить численное значение реактивных мощностей, то из системы уравнений (1.26) можно исключить второе уравнение и можно представить математическую модель в следующем виде:

$$\begin{cases} \Phi_{pm}\left(U_n, \Psi_{un}; U_\ell, \Psi_{u\ell}\right) = 0, \\ \Phi_{qm}\left(U_n, \Psi_{un}; U_\ell, \Psi_{u\ell}\right) = 0, \\ \Phi_{pk}\left(U_n, \Psi_{un}; U_\ell, \Psi_{u\ell}\right) = 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} \Phi_{pi}\left(I'_j, I''_j\right) = 0, \\ \Phi_{qi}\left(I'_j, I''_j\right) = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Полученное рекуррентное выражение реализации математической подмодели (1.27) представляется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U_m \\ \hdashline \Psi_{um} \\ \hdashline \Psi_{uk} \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} U_m \\ \hdashline \Psi_{um} \\ \hdashline \Psi_{uk} \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c:c:c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial U_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{un}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{u\ell}} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial U_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial \Psi_{un}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial \Psi_{u\ell}} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial U_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial \Psi_{un}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial \Psi_{u\ell}} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial U_m} \\ \hdashline \dfrac{\partial F}{\partial \Psi_{um}} \\ \hdashline \dfrac{\partial F}{\partial \Psi_{uk}} \end{bmatrix}.$$

Как видим, математическая подмодель (1.27) решается по методу минимизации. Реализация рекуррентного выражения математической подмодели (1.28) представляется в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} I'_i \\ \hdashline I''_i \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I'_i \\ \hdashline I''_i \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_j} & \dfrac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I''_j} \\ \hdashline \dfrac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_j} & \dfrac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_j} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{pi} \\ \hdashline \Phi_{qi} \end{bmatrix}.$$

Можно отметить, что математическая подмодель (1.28) решается по методу Ньютона – Рафсона.

1.5. Диакоптические математические модели *Z* установившегося режима электроэнергетической системы

При реализации Z – математических моделей ЭЭС использовался также принцип диакоптического расщепления [5 – 18].

Термин «диакоптика» в энергетической литературе впервые был использован американским ученым-электротехником Габриелом Кроном.

Диакоптика – от греч. *копти* – «разделить» и *диа* – «система». Фактически слово «диакоптика» можно перевести как *разделенная система*. Однако мы используем данное понятие в значении *диакоптическая математическая модель*.

Г. Крон выделил два типа диакоптики.

1. **Диакоптика диффузонного типа**, когда ЭЭС нужно представить как комплекс радиально связанных подсистем, имеющих один общий узел, который может быть и базисным, как это представлено на рис. 4.

Как можно заметить, все N подсистем связаны электрическим образом только с одним узлом.

2. **Диакоптика пуассонного типа**, когда ЭЭС нужно представить как совокупность разделенных друг от друга подсистем, как это показано на рис. 5.

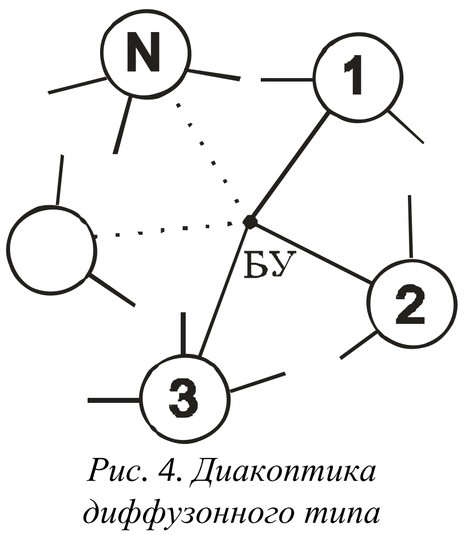


Рис. 4. Диакоптика диффузонного типа

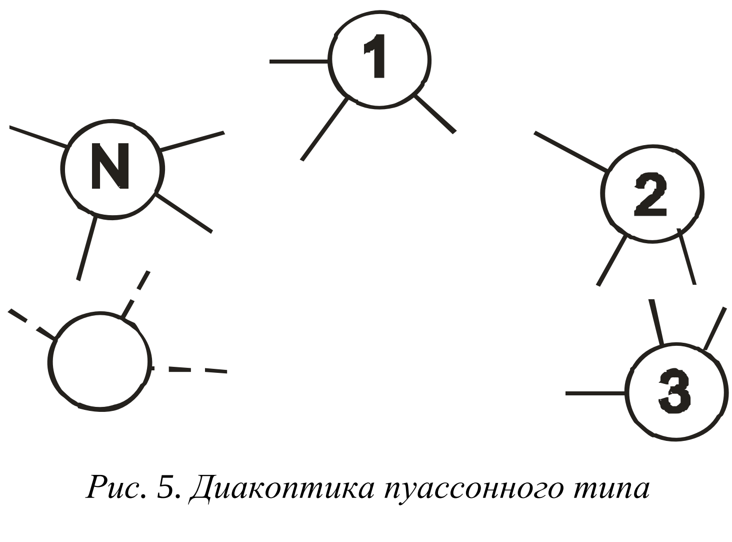


Рис. 5. Диакоптика пуассонного типа

Если диакоптика диффузонного вида требует от ЭЭС особой структуры, которая ограничивает и даже исключает ее использование, то диакоптика пуассонного вида приводит к неразрешимости проблемы.

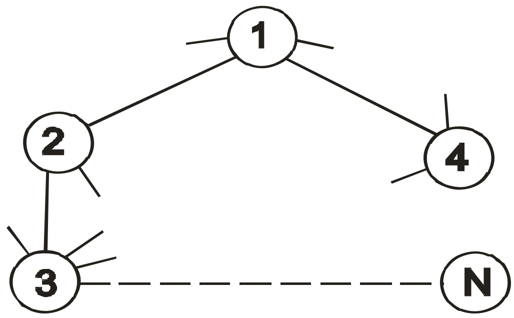


Рис. 6. ЭЭС представлена как совокупности радиально связанных N подсистем

Согласно новому диакоптическому направлению ЭЭС представляется как совокупность радиально связанных подсистем (рис. 6).

Основное преимущество построенной диакоптической модели в том, что полученные результаты расчетов совпадают с результатами расчетов классической математической модели.

Данные, полученные для каждой предыдущей подсистемы, используют для построения соответствующей математической модели следующей подсистемы. Реализация каждого шага, или итерации, по отношению к подсистемам воспринимается как реализация одного шага, или итерации, для ЭЭС.

Диакоптическая модель ЭЭС реализуется по методу Ньютона – Рафсона, в основе которого лежит построение расчетной матрицы Z, имеющей следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
Z_{i_1 j_1} & & & & Z_{i_1\gamma_1} - Z_{i_1 S_1} \\
\hline
 & Z_{i_2 j_2} & & & Z_{i_2\gamma_2} - Z_{i_2 S_2} \\
\hline
 & & \cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & & & Z_{i_N j_N} & Z_{i_N\gamma_N} - Z_{i_N S_N} \\
\hline
\multicolumn{4}{c|}{} & Z_{\ell\delta} - Z \\
\hline
\end{array}.$$

Строим уравнения отдельных подсистем установившегося режима

$$\begin{cases}
\dot{U}_{i_1} = \dot{U}_{\text{Б}i_1} + Z_{i_1 j_1}\dot{I}_{j_1}, \\
\dot{U}_{i_2} = \dot{U}_{\text{Б}i_2} + Z_{i_2 j_2}\dot{I}_{j_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{U}_{i_N} = \dot{U}_{\text{Б}i_N} + Z_{i_N j_N}\dot{I}_{j_N}.
\end{cases} \tag{1.29}$$

Отметим, что рассматриваемая новая система (1.29) представлена как совокупность радиально связанных N подсистем.

Затем представим системы нелинейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c}
\Phi_{pi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=0, & & & \\
\Phi_{qi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=0, & & & \\
\hline
 & \Phi_{pi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right)=0, & & \\
 & \Phi_{qi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right)=0, & & \\
\hline
 & & \ldots & \\
\hline
 & & & \Phi_{pi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)=0, \\
 & & & \Phi_{qi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)=0:
\end{array}\right| . \quad (1.30)$$

Как видно из системы (1.30), для каждой подсистемы соответственно составляется система нелинейных алгебраических уравнений по отношению к составляющим комплексных токов узлов.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_1\left(I_1\right)=\begin{cases}\Phi_{pi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=0,\\ \\ \Phi_{qi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=0,\end{cases}$$

$$\Phi_2\left(I_2\right)=\begin{cases}\Phi_{pi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right)=0,\\ \\ \Phi_{qi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right)=0,\end{cases}$$

. . . .

$$\Phi_N\left(I_N\right)=\begin{cases}\Phi_{pi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)=0,\\ \\ \Phi_{qi_1}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)=0,\end{cases}$$

где система (1.30) представляется в следующем виде:

$$
\begin{array}{|cccc|}
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{\Phi_1(I_1)=0,} & & & \\
\hline
& \multicolumn{1}{|c|}{\Phi_2(I_2)=0,} & & \\
\cline{2-3}
& & \multicolumn{1}{|c|}{\dots} & \\
\cline{3-4}
& & & \multicolumn{1}{|c|}{\Phi_N(I_N)=0:} \\
\hline
\end{array}
.
$$

Сначала рассмотрим решение нелинейных векторных уравнений первого порядка по методу Ньютона – Рафсона, где соответствующее рекуррентное выражение имеет следующий вид:

$$
I_1^{\text{И}+1} = I_1^{\text{И}} - \left[\frac{\partial \Phi_1(I_1)}{\partial I_1}\right]^{-1} \Phi_1(I_1), \tag{1.31}
$$

где И – номер итерации.

Реализуя первую итерацию согласно рекуррентному выражению (1.31), получим новое численное значение I и построим соответствующее рекуррентное выражение второй подсистемы

$$
I_2^{\text{И}+1} = I_2^{\text{И}} - \left[\frac{\partial \Phi_2(I_2)}{\partial I_2}\right]^{-1} \Phi_2(I_2)
$$

и т. д.

Последнее рекуррентное выражение N подсистемы представим следующим образом:

$$
I_N^{\text{И}+1} = I_N^{\text{И}} - \left[\frac{\partial \Phi_N(I_N)}{\partial I_N}\right]^{-1} \Phi_N(I_N).
$$

Реализуя первую итерацию, или первый шаг, всех N подсистем, мы реализуем первую итерацию, или первый шаг, всей системы согласно диакоптическому принципу.

Потом перейдем на вторую итерацию, или второй шаг, и так далее до тех пор, пока искомые переменные не получат численные значения требуемой точности.

Контрольные вопросы

1. Какие положительные стороны имеют Y – математические модели?
2. Какие отрицательные стороны имеют Y – математические модели?
3. Как представляют электрическую схему при построении Z-матрицы?
4. Какие методы используют для построения Z-матрицы ЭЭС?
5. По какому методу решают составленные нелинейные алгебраические уравнения Z-типа? Запишите основную расчетную формулу.
6. Какие отрицательные стороны имеют Z – математические модели?
7. Какие положительные стороны имеет гибридная математическая модель Y-Z? Какие положительные стороны математических моделей Y и Z содержит математическая модель Y-Z?
8. Как представляют соответствующую математическую модель Y-Z? Запишите матричное уравнение.
9. Какие преимущества имеют математические модели Y-Z?
10. Какие пассивные параметры используют при построении Y – математических моделей?
11. Какие пассивные параметры используют при построении Z – математических моделей?
12. Какие пассивные параметры используют при построении Y-Z – математических моделей?
13. Что означает понятие «диакоптика диффузонного типа»?
14. Что означает понятие «диакоптика пуассонного вида»?

Глава 2. ПОСТРОЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ «*Z, P-Q*» – МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Построение диакоптической математической модели разделенной электроэнергетической системы

В основе построения диакоптической математической модели лежит матричное уравнение типа *Y* ЭЭС

$$\dot{I} = Y\dot{U}, \tag{2.1}$$

где $\dot{I}$ – многомерный вектор, или столбцевая матрица, независимых узлов комплексных токов; $\dot{U}$ – многомерный вектор, или столбцевая матрица, независимых узлов комплексных напряжений, приведенный при напряжении базисных узлов; *Y* – обычная квадратная матрица собственных и взаимно комплексных проводимостей независимых узлов.

Если уравнение (2.1) представить в виде матричного уравнения типа *Z*, получим

$$\dot{U} = \dot{U}_{\acute{A}} + Z\dot{I}, \tag{2.2}$$

где $\dot{U}_{\acute{A}}$ – комплексное напряжение базисного узла, аргумент которого примем равным нулю, так что можно записать $\dot{U}_{\acute{A}} = U_{\acute{A}}$; *Z* – обращенная форма *Y* и неособенное матричное уравнение независимых станционных узлов, составленных из собственных и взаимно комплексных сопротивлений.

Полученное матричное уравнение (2.2) можно представить в следующем алгебраическом виде:

$$\dot{U}_i = \dot{U}_{\acute{A}} + \sum_{j=1}^{M} Z_{ij}\dot{I}_j,$$

где *i, j* – равные индексы; *M* – количество независимых узлов.

Предположим, что исследуемая ЭЭС состоит из (M + 1) узлов и что их необходимо представить как совокупность радиально связанных подсистем.

Отрезав ветви необходимого количества, заданную ЭЭС можно представить как совокупность радиально связанных N подсистем.

Если выберем какой-либо станционный узел первой подсистемы базисным, тогда данная ЭЭС будет составлена из независимых узлов M. Допустим, что каждая подсистема соответственно состоит из $M_1, M_2 \ldots M_N$ узлов, так что $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_N$.

Для подсистем выберем следующую систему индексов:

$$i,\, j = \left(i_1,\, j_1; i_2,\, j_2 \ldots i_N,\, j_N\right),$$

где $i_1, j_1 = 0, 1, 2 \ldots \grave{I}_1$ – индексы первой подсистемы; $i_2, j_2 = M_1 + 1, M_1 + 2 \ldots M_1 + M_2 = M_{12}$ – индексы второй подсистемы; $i_N, j_N = M_{N-1} + 1, M_{N-1} + 2 \ldots M_{N-1} + M_N = M_{N-1,N}$ – индексы N подсистем.

Для противоположных узлов, возникших вследствие разрезания дополнительных ветвей, выбраны следующие индексы:

$$\delta, \gamma = \left(\delta_1, \gamma_1; \delta_2, \gamma_2 \ldots \delta_N, \gamma_N\right),$$

$$\ell, S = \left(\ell_1, S_1; \ell_2, S_2 \ldots \ell_N, S_N\right).$$

Например, чтобы представить большую электроэнергетическую систему (БЭЭС) как совокупность N подсистем, необходимо отрезать L ветвей.

Согласно выбранным индексам при разрезании и отстранении ветви БЭЭС можем записать следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \hdashline \dot{U}_\delta \\ \hdashline \dot{U}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\acute{A}} \\ \hdashline \dot{U}_{\acute{A}} \\ \hdashline \dot{U}_{\acute{A}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c:c} Z'_{ij} & Z'_{i\gamma} & Z'_{iS} \\ \hdashline Z'_{\delta j} & Z'_{\delta\gamma} & Z'_{\delta S} \\ \hdashline Z'_{\ell j} & Z'_{\ell\gamma} & Z'_{\ell S} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{I}_j \\ \hdashline \dot{I}_\gamma \\ \hdashline \dot{I}_S \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot U_i - \dot U_{\acute{A}} \\ \hdashline \dot U_\delta - \dot U_{\acute{A}} \\ \hdashline \dot U_\ell - \dot U_{\acute{A}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} Z'_{ij} & Z'_{i\gamma} & Z'_{iS} \\ \hdashline Z'_{\delta j} & Z'_{\delta\gamma} & Z'_{\delta S} \\ \hdashline Z'_{\ell j} & Z'_{\ell\gamma} & Z'_{\ell S} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot I_j \\ \hdashline \dot I_\gamma \\ \hdashline \dot I_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где $(\dot U_1 - \dot U_{\acute{A}})$ – комплексные напряжения основных узлов ЭЭС, выявленные по отношению к напряжениям базисных узлов; $\left(\dot U_\delta - \dot U_{\acute{A}}\right)$, $\left(\dot U_\ell - \dot U_{\acute{A}}\right)$ – встречные напряжения узлов по отношению к напряжениям базисных узлов, выявленные при разрезании ветвей ЭЭС; $\dot I_j$ – комплексные токи основных узлов; $\dot I_\gamma, \dot I_S$ – комплексные токи, имеющие противоположные направления встречных узлов; Z'_{ij} – собственные и взаимные комплексные сопротивления основных узлов; $Z'_{i\gamma}, Z'_{iS}, Z'_{\delta j}, Z'_{\ell j}$ – основные и новоявленные взаимно комплексные сопротивления; $Z'_{\delta\gamma}, Z'_{\delta S}, Z'_{\ell\gamma}, Z'_{\ell S}$ – собственные и взаимно комплексные сопротивления новоявленных узлов.

Поскольку $\dot I_S = -\dot I_\gamma$, матричное выражение (2.3) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \dot U_i - \dot U_{\acute{A}} = Z'_{ij}\dot I_j + \left(Z'_{i\gamma} - Z'_{iS}\right)\dot I_\gamma, \\ \dot U_\delta - \dot U_{\acute{A}} = Z'_{\delta j}\dot I_j + \left(Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S}\right)\dot I_\gamma, \\ \dot U_\ell - \dot U_{\acute{A}} = Z'_{\ell j}\dot I_j + \left(Z'_{\ell\gamma} - Z'_{\ell S}\right)\dot I_\gamma. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Полученное выражение (2.4) дает возможность представить уравнение отдельных подсистем в следующем виде:

$$\dot U_{i_1} - \dot U_{\acute{A}} = Z'_{i_1,j_1}\dot I_{j_1} + Z_{i_1,M_1}\dot I_{1(2N)} + \left(Z'_{i_1,\gamma_1} - Z'_{i_1,S_1}\right)\dot I_\gamma, \tag{2.5}$$

$$\dot U_{i_2} - \dot U_{M_1\text{-}1} = Z'_{i_2,j_2}\dot I_{j_2} + Z_{i_2,M_2}\dot I_{2(3N)} + \left(Z'_{i_2,\gamma_2} - Z'_{i_2,S_2}\right)\dot I_\gamma, \tag{2.6}$$

....

$$\dot U_{i_N} - \dot U_{M_1,N\text{-}1} = Z'_{i_N,j_N}\dot I_{j_N} + Z_{i_N,M_N}\dot I_{N(NN)} + \left(Z'_{i_N,\gamma_N} - Z'_{i_N,S_N}\right)\dot I_\gamma, \tag{2.7}$$

где $\dot{I}_{j1}, \dot{I}_{j2} \ldots \dot{I}_{jn}$ – 1-й, 2-й … N – векторы комплексных напряжений радиально связанных подсистем.

С другой стороны,

$$\Delta\dot{I}_{2,N} = \sum_{M_2} \dot{I}_{i_2} + \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \cdots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N},$$

$$\Delta\dot{I}_{3,N} = \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \sum_{M_4} \dot{I}_{i_4} + \cdots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_{N3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta\dot{I}_{N-1,N} = \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N},$$

$$\Delta\dot{I}_{N,N} = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$Z'_{i_1\ell_1} = Z'_{\ell_1\gamma_1} - Z'_{\ell_1 S_1};$$

$$Z'_{i_2\ell_2} = Z'_{\ell_2\gamma_2} - Z'_{\ell_2 S_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_{i_N\ell_N} = Z'_{\ell_N\gamma_N} - Z'_{\ell_N S_N};$$

тогда матричные уравнения (2.5) – (2.7) можно представить в следующем виде:

$$\dot{U}_{i_1} = \dot{U}_{Á} + Z'_{i_1, j_1}\dot{I}_{j_1} + Z_{i_1, M_1}\dot{I}_{1(2N)} + Z'_{i_1, S_1}\dot{I}_{\gamma}, \qquad (2.8)$$

$$\dot{U}_{i_2} = \dot{U}_{M\text{-}1} + Z'_{i_2, j_2}\dot{I}_{j_2} + Z_{i_2, M_2}\dot{I}_{2(3N)} + Z'_{i_2, S_2}\dot{I}_{\gamma}, \qquad (2.9)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{U}_{i_N} = \dot{U}_{M_1, N\text{-}1} + Z'_{i_N, j_N}\dot{I}_{j_N} + Z_{i_N, M}\dot{I}_{N(NN)} + Z'_{i_N, S_N}\dot{I}_{\gamma}. \qquad (2.10)$$

Введем также следующие обозначения:

$$\dot{U}_{Ái_1} = \dot{U}_{Á} + Z_{i_1M_1}\dot{I}_{1(2N)} + Z_{i_1\ell_1}\dot{I}_{\gamma}, \tag{2.11}$$

$$\dot{U}_{Ái_2} = \dot{U}_{M-1} + Z_{i_2M_{12}}\dot{I}_{2(3N)} + Z_{i_2\ell_2}\dot{I}_{\gamma}, \tag{2.12}$$

....

$$\dot{U}_{Ái_N} = \dot{U}_{M_1,N-1} + Z_{i_NM_{1N}}\dot{I}_{N(NN)} + Z_{i_N\ell_N}\dot{I}_{\gamma}. \tag{2.13}$$

Можно отметить, что $Z_{i_1M_1}, Z_{1_2M_2} \dots Z_{1_NM_N}$ – элементы последних столбов I, II и N клеток матрицы (2.4).

Сейчас необходимо получить соответствующее выражение обрубленных ветвей для выявленных токов i_{γ}. Поскольку $\dot{U}_{\delta} - \dot{U}_{Á} = \dot{U}_1 - \dot{U}_{Á}$ – напряжение встречных узлов, тогда (2.4) можем записать как

$$Z'_{\delta j}\dot{I}_j + (Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S})\dot{I}_{\gamma} = Z'_{ij}\dot{I}_j + (Z'_{i\gamma} - Z'_{iS})\dot{I}_{\gamma},$$

или

$$(Z'_{\delta j} - Z'_{ij})\dot{I}_j = -(Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S} - Z'_{i\gamma} + Z'_{iS})\dot{I}_{\gamma}.$$

Отсюда ток

$$\dot{I}_{\gamma} = -\left(Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S} - Z'_{i\gamma} + Z'_{iS}\right)^{-1}\left(Z'_{\delta j} - Z'_{ij}\right)\dot{I}_j. \tag{2.14}$$

Если отметим

$$Z'_{\ell\ell} = Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S} - Z'_{i\gamma} + Z'_{iS}, \tag{2.15}$$

тогда выражение (2.14) примет следующий вид:

$$\dot{I}_{\gamma} = -(Z'_{\ell\ell})^{-1}(Z'_{\delta j} - Z'_{ij})\dot{I}_j. \tag{2.16}$$

Поскольку $\dot I_j = \left(\dot I_{j1}, \dot I_{j2} \ldots \dot I_{jN}\right)$, тогда можно представить выражение (2.16) в следующем виде:

$$\dot I_\gamma = -(Z'_{\ell\ell})^{-1} \Delta \dot U_j, \tag{2.17}$$

где

$$\Delta \dot U_j = (Z'_{\delta j_1} - Z'_{ij_1})\, \dot I_{j_1} + (Z'_{\delta j_2} - Z'_{ij_2})\, \dot I_{j_2} + \ldots + (Z'_{\delta j_N} - Z'_{ij_N})\, \dot I_{j_N}. \tag{2.18}$$

Отметим, что выражение (2.17), представленное в матрице $Z'_{\ell\ell}$, квадратное, порядок которого определяется по количеству обрубленных ветвей.

В результате выражения (2.8) – (2.18) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot U_{i_1} &= \dot U_{\text{Б}i_1} + \dot Z_{i_1 j_1} \dot I_{j_1}, \\ \dot U_{i_2} &= \dot U_{\text{Б}i_2} + \dot Z_{i_2 j_2} \dot I_{j_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot U_{i_N} &= \dot U_{\text{Б}i_N} + \dot Z_{i_N j_N} \dot I_{j_N}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Полученную систему нелинейных алгебраических уравнений (2.19) можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot U_{i_1} \\ \hdashline \dot U_{i_2} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline \dot U_{i_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Á}i_1} \\ \hdashline \dot U_{\text{Á}i_2} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline \dot U_{\text{Á}i_N} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c:c:c:c} Z_{i_1 j_1} & & & \\ \hdashline & Z_{i_2 j_2} & & \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline & & & Z_{i_N j_N} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dot I_{j_1} \\ \hdashline \dot I_{j_2} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline \dot I_{j_N} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Полученная система нелинейных алгебраических уравнений (2.19) на основе полученного матричного выражения (2.20) позволяет построить диакоптическую математическую модель установившегося режима БЭЭС. Для этого нужно построить квадратные неособенные подматрицы комплексных сопротивлений узлов $Z_{i_1 j_1}, Z_{i_2 j_2} \ldots Z_{i_N j_N}$.

Построение данной подматрицы обусловлено обращением квадратных неособенных матриц соответствующих комплексных проводимостей узлов $Y_{i_1 j_1}, Y_{i_2 j_2} \ldots Y_{i_N j_N}$.

2.2. Расчет подматриц диакоптических видов

Представим, что требуется построить первую подматрицу $Z_{i_1 j_1}$, для этого необходима соответствующая неособенная квадратная матрица порядка $\grave{I}_1$

$$\left[\begin{array}{cccccc}
Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & \vdots & Y_{1,M_1-1} & Y_{1,M_1} \\
Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{21} & \vdots & Y_{2,M_1-1} & Y_{2,M_1} \\
Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & \vdots & Y_{3,M_1-1} & Y_{3,M_1} \\
Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & \vdots & Y_{4,M_1-1} & Y_{4,M_1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
Y_{M_1-1,1} & Y_{M_1-1,2} & Y_{M_1-1,3} & Y_{M_1-1,4} & \vdots & Y_{M_1-1,M_1-1} & Y_{M_1-1,M_1} \\
Y_{M_1,1} & Y_{M_1,2} & Y_{M_1,3} & Y_{M_1,4} & \vdots & Y_{M_1-1,M_1} & Y_{M_1,M_1}
\end{array}\right]. \quad (2.21)$$

Для построения соответствующей подматрицы $Z_{i_1 j_1}$ по классическому методу нужно обращать неособенную квадратную матрицу (2.21).

Представим

$$Z_{11} = [Y_{11}]^{-1}, \quad (2.22)$$

$$Z_{22} = \left[\begin{array}{c:c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hdashline Y_{21} & Y_{22} \end{array}\right]^{-1}, \quad (2.23)$$

$$Z_{33} = \left[\begin{array}{c:c:c} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \hdashline Y_{21} & Y_{22} & Y_{13} \\ \hdashline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array}\right]^{-1}, \quad (2.24)$$

$$Z_{44}=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{13} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1},$$

……………………………………………………

$$Z_{M_1M_1}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & \vdots & Y_{1M_1} \\ \hdashline Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & \vdots & Y_{2M_1} \\ \hdashline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & \vdots & Y_{3M_1} \\ \hdashline Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & \vdots & Y_{4M_1} \\ \hdashline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \hdashline Y_{M_11} & Y_{M_12} & Y_{M_13} & Y_{M_14} & \vdots & Y_{M_1M_1} \end{array}\right]^{-1}. \qquad (2.25)$$

Подматрица (2.22) составлена из одной комплексной величины, и ее обращение не представляет никакой сложности. Затем нужно обращать матрицу (2.23)

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}. \qquad (2.26)$$

Представим искомую обращенную матрицу в таком виде, в каком представлена первоначальная матрица (2.26)

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \qquad (2.27)$$

В отношении подматриц (2.26) и (2.27) можно записать

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2.28)$$

По выражению (2.28) можно составить следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{11}T_{11} + Y_{12}T_{21} = 1,\\
&Y_{11}T_{12} + Y_{12}T_{22} = 0,\\
&Y_{21}T_{11} + Y_{22}T_{21} = 0,\\
&Y_{21}T_{12} + Y_{22}T_{22} = 1.
\end{aligned}\right\}$$

В результате получим четыре уравнения по отношению к четырем неизвестным $T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}$

$$\begin{aligned}
&T_{11} = Y_{11}^{-1} + Y_{11}^{-1}Y_{12}Y_{21}Y_{11}^{-1}T_{22},\\
&T_{12} = -Y_{11}^{-1}Y_{12}T_{22},\\
&T_{21} = -Y_{21}Y_{11}^{-1}T_{22},\\
&T_{22} = \left(Y_{22} - Y_{21}Y_{11}^{-1}Y_{12}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Исходя из выражения (2.22) выражение (2.29) можно представить в следующем виде:

$$\left[\begin{array}{c:c} Y'_{22} & Y'_{23} \\ \hdashline Y'_{32} & Y'_{33} \end{array}\right]. \tag{2.30}$$

Можно отметить, что для получения обращенной подматрицы (2.23) не требовалось обращать какую-либо матрицу. Для правой части записано только одно число, обращение которого не представляет никакой сложности.

Таким образом, в выражении (2.29) мы воспользовались результатом реализации первого шага. Сейчас рассмотрим обращение подматрицы (2.24), представив ее в следующем виде:

$$Y'_{22} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

$$Y'_{23} = \begin{bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \end{bmatrix}^T, \; Y'_{32} = \begin{bmatrix} Y_{31} & Y_{32} \end{bmatrix}, \; Y'_{33} = \begin{bmatrix} Y_{33} \end{bmatrix},$$

где T – знак транспонирования.

Здесь искомую матрицу также представим в первоначальном виде

$$\left[\begin{array}{c|c} T'_{22} & T'_{23} \\ \hline T'_{32} & T'_{33} \end{array}\right].$$

В результате чего можем написать

$$\left[\begin{array}{c|c} Y'_{22} & Y'_{23} \\ \hline Y'_{32} & Y'_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} T'_{22} & T'_{23} \\ \hline T'_{32} & T'_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],$$

где E – единичная матрица.

Составим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Y'_{22}T'_{22} + Y'_{23}T'_{32} &= E, \\ Y'_{22}T'_{23} + Y'_{23}T'_{33} &= 0, \\ Y'_{32}T'_{22} + Y'_{33}T'_{32} &= 0, \\ Y'_{32}T'_{23} + Y'_{33}T'_{33} &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решим данную клеточную матричную систему по отношению к искомым величинам $T'_{22}, T'_{23}, T'_{32}, T'_{33}$

$$\begin{aligned}
&T'_{22} = \left(Y'_{22}\right)^{-1} + \left(Y'_{22}\right)^{-1} Y'_{23} Y'_{32} \left(Y'_{22}\right)^{-1} T'_{33}, \\
&T'_{23} = -\left(Y'_{22}\right)^{-1} Y'_{23} T'_{33}, \\
&T'_{32} = -Y'_{32} \left(Y'_{22}\right)^{-1} T'_{33}, \\
&T'_{33} = \left[Y'_{33} - Y'_{32} \left(Y'_{22}\right)^{-1} Y'_{23}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Исходя из (2.23) и (2.31) получим

$$\begin{aligned}
&T'_{22} = Z'_{22} + Z'_{22} Y'_{23} Y'_{32} Z'_{22} T'_{33}, \\
&T'_{23} = -Z'_{22} Y'_{23} T'_{33}, \\
&T'_{32} = -Y'_{32} Z'_{22} T'_{33}, \\
&T'_{33} = \left[Y'_{33} - Y'_{32} Z'_{22} Y'_{23}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь можно отметить, что при обращении матрицы (2.30) также не возникло проблем. В этом случае достаточно только воспользоваться полученной матрицей предыдущего шага.

Необходимо отметить, что выражение, записанное в скобках последней формулы (2.32), представляет собой одно число, обращение которого не представляет никакой сложности.

Таким же образом можно обращать и другие матрицы.

Посмотрим обращение матрицы (2.25) порядка $\grave{I}_1$.

Представим матрицу (2.25) в следующем виде:

$$\left[\begin{array}{c|c} Y'_{M_1-1,M_1-1} & Y'_{M_1-1,M_1} \\ \hline Y'_{M_1,M_1-1} & Y'_{M_1,M_1} \end{array}\right], \tag{2.33}$$

где

$$Y'_{M_1-1,M_1-1}=\left[\begin{array}{ccc} Y_{11} & Y_{12} & \vdots & Y_{1,M_1-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \vdots & Y_{2,M_1-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \vdots & \ldots\ldots \\ Y_{M_1-1,1} & Y_{M_1-1,2} & \vdots & Y_{M_1-1,M_1-1} \end{array}\right],$$

$$Y'_{M_1-1,M_1}=\begin{bmatrix} Y_{1M_1} & Y_{2M_1} & Y_{3M_1} & \cdots & Y_{M_1-1,M_1} \end{bmatrix}^T,$$

$$Y'_{M_1,M_1-1}=\begin{bmatrix} Y_{1M_1} & Y_{2M_1} & Y_{3M_1} & \cdots & Y_{M_1,M_1-1} \end{bmatrix},$$

$$Y'_{M_1,M_1}=Y_{M_1,M_1}.$$

Представим искомую противоположную матрицу по отношению к матрице (2.33) в следующем виде:

$$\left[\begin{array}{c|c} T'_{M_1-1,M_1-1} & T'_{M_1-1,M_1} \\ \hline T'_{M_1,M_1-1} & T'_{M_1,M_1} \end{array}\right].$$

Согласно данному условию

$$\left[\begin{array}{c|c} Y'_{M_1-1,M_1-1} & Y'_{M_1-1,M_1} \\ \hline Y'_{M_1,M_1-1} & Y'_{M_1,M_1} \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} T'_{M_1-1,M_1-1} & T'_{M_1-1,M_1} \\ \hline T'_{M_1,M_1-1} & T'_{M_1,M_1} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right].$$

Построив системы четырех клеточных матричных уравнений с помощью четырех неизвестных клеток и решив их совместным образом, получим следующие выражения искомых противоположных матриц отдельных клеток:

$$T'_{M_1-1,M_1-1}=\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}+\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}Y'_{M_1-1,M_1}Y'_{M_1,M_1-1}\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}T'_{M_1,M_1},$$

$$T'_{M_1-1,M_1}=-\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}Y'_{M_1-1,M_1}T'_{M_1,M_1},$$

$$T'_{M_1,M_1-1}=-Y'_{M_1,M_1-1}\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}T'_{M_1,M_1}, \tag{2.34}$$

$$T'_{M_1,M_1}=\left[Y'_{M_1,M_1}-Y'_{M_1,M_1-1}\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1}Y'_{M_1-1,M_1}\right]^{-1}.$$

Согласно предыдущей постановке задачи очевидно, что

$$Z_{M_1-1,M_1-1}=\left(Y'_{M_1-1,M_1-1}\right)^{-1},$$

и если учесть выражения (2.34), то последнее примет следующий вид:

$$T'_{M_1-1,M_1-1}=Z'_{M_1-1,M_1-1}+Z'_{M_1-1,M_1-1}Y'_{M_1-1,M_1}Y'_{M_1,M_1-1}Z'_{M_1-1,M_1-1}T'_{M_1,M_1},$$

$$T'_{M_1-1,M_1}=-Z'_{M_1-1,M_1-1}Y'_{M_1-1,M_1}T'_{M_1,M_1},$$

$$T'_{M_1,M_1-1}=-Y'_{M_1,M_1-1}Z'_{M_1-1,M_1-1}T'_{M_1,M_1}, \tag{2.35}$$

$$T'_{M_1,M_1}=\left[Y'_{M_1,M_1}-Y'_{M_1,M_1-1}Z'_{M_1-1,M_1-1}Y'_{M_1-1,M_1}\right]^{-1}.$$

Отметим, что даже в этом случае не возникает проблемы обращения какой-либо матрицы. Кроме того, как видим из первой части выражения (2.35), $T'_{\grave{I}_1,\grave{I}_2}$, то можно представить себе одну комплексную величину, обращение которой не требует сложности.

Представим выражение (2.35) в следующем виде:

$$T_{M_1-1,M_1-1} = Z_{M_1-1,M_1-1} + Z_{M_1-1,M_1-1} Y_{M_1-1,M_1} Y_{M_1,M_1-1} Z_{M_1-1,M_1-1} T_{M_1,M_1},$$

$$T_{M_1-1,M_1} = -Z_{M_1-1,M_1-1} Y_{M_1-1,M_1} T_{M_1,M_1},$$

$$T_{M_1,M_1-1} = -Y_{M_1,M_1-1} Z_{M_1-1,M_1-1} T_{M_1,M_1}, \qquad (2.36)$$

$$T_{M_1,M_1} = \left[Y_{M_1,M_1} - Y_{M_1,M_1-1} Z_{M_1-1,M_1-1} Y_{M_1-1,M_1} \right]^{-1}.$$

Если введем следующие обозначения:

$$\alpha_{M_1-1,M_1} = Z_{M_1-1,M_1-1} Y_{M_1-1,M_1},$$

$$\beta_{M_1,M_1-1} = Y_{M_1,M_1-1} Z_{M_1-1,M_1-1},$$

тогда выражение (2.36) примет следующий вид:

$$T_{M_1-1,M_1-1} = Z_{M_1-1,M_1-1} + \alpha_{M_1-1,M_1} \beta_{M_1,M_1-1} T_{M_1,M_1}, \qquad (2.37)$$

$$T_{M_1-1,M_1} = -\alpha_{M_1-1,M_1} T_{M_1,M_1}, \qquad (2.38)$$

$$T_{M_1,M_1-1} = -\beta_{M_1,M_1-1} T_{M_1,M_1}, \qquad (2.39)$$

$$T_{M_1,M_1} = \left[Y_{M_1,M_1} - \beta_{M_1-1,M_1-1} Y_{M_1-1,M_1} \right]^{-1}. \qquad (2.40)$$

Необходимо отметить, что выражение (2.40) можно представить в следующем виде:

$$T_{M_1,M_1} = \left[Y_{M_1,M_1} - Y_{M_1,M_1-1} \alpha_{M_1-1,M_1} \right]^{-1}.$$

Структура приведенных выражений (2.37) – (2.40) показывает, что для определения численных значений искомых матриц необходимо только перемножить несколько матриц, что не является вычислительно сложным процессом.

Фактически мы описывали метод получения подматрицы $Z_{i_1 j_1}$. Таким же образом можно построить подматрицы $Z_{1_2\, j_2} \ldots Z_{1_N\, j_N}$.

2.3. Построение *Z* – расчетной диакоптической матрицы и ее коррекция

В основе построения диакоптической математической модели лежит расчетная матрица *Z*, которая имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
Z_1 & & & & \Delta Z_1 \\
\hline
 & Z_2 & & & \Delta Z_2 \\
\hline
 & & \ldots & & \ldots \\
\hline
 & & & Z_N & \Delta Z_N \\
\hline
 & & & & \Delta Z_{\ddot{E}} + Z_{\ddot{E}} \\
\hline
\end{array} \quad . \qquad (2.41)$$

Если матрица Z_1 составлена по отношению к единственному базисному узлу, то матрица Z_2 – по отношению к пограничному узлу первой подсистемы. Z_N – матрицу последней *N*-й подсистемы – составляют по отношению к пограничному узлу предпоследней подсистемы. Затем строят подсистемы $\Delta Z_1, \Delta Z_2 \ldots \Delta Z_N$; число строк которых характеризуется числом узлов подматриц, а число столбцов – числом обрубленных ветвей.

Каждый столбец подматрицы определяется разностью двух столбцов, номера которых совпадают с номерами тех узлов, между которыми находились удаленные ветви.

Целесообразно каждый столбец прямоугольной подматрицы $\Delta Z\left(\Delta Z_1, \Delta Z_2 \ldots \Delta Z_N\right)$ пронумеровать. Номера прямоугольных подматриц являются соответственно начальными и конечными номерами удаленной линии. $(\Delta Z_{\ddot{E}} + Z_{\ddot{E}})$ – квадратная матрица, порядок которой определяется по числу удаленных линий, притом $\Delta Z_{\ddot{E}}$ является полным прямоугольником, а $Z_{\ddot{E}}$ – диагональным прямоугольником.

Каждая строка $\Delta Z_{\ddot{E}}$-матрицы определяется разностью двух строк прямоугольной матрицы ΔZ, номера которых совпадают с номерами тех чисел, между которыми находятся удаленные ветви.

Во время построения матрицы $\Delta Z_{\ddot{E}}$ при выборе соответствующих строк подматрицы ΔZ необходимо иметь в виду, что к элементам каждой последующей подматрицы по столбцам нужно прибавить элементы последних строк предыдущей подматрицы, этим и завершается построение подсчетной матрицы Z.

Предположим, что в соответствующих узлах первоначальной ЭЭС происходят структурные изменения по причине подключения отдельных ветвей. В этом случае возникает проблема коррекции расчетной матрицы *Z* как в первой подсистеме, где находятся базисные узлы, так и в других радиально связанных подсистемах.

В первой подсистеме структурные изменения происходят между ветвями из-за подключения или отключения отдельных ветвей, в результате чего меняется матрица узловых сопротивлений $Z_{i_1 j_1}$.

В случае если одновременно подключаются две ветви между узлами *A*-*B* и *C*-*D*, то новая матрица $Z_{i_1 j_1}^{H}$ определяется следующим выражением:

$$Z_{i_1 j_1}^{H} = Z_{i_1 j_1}^{\ddot{I}} + \Delta Z_{i_1 j_1}^{\ddot{A}}.$$

Здесь $Z_{i_1 j_1}^{\ddot{I}}$ представляет собой первоначальную матрицу, т. е. матрицу до подключения новых ветвей, а $\Delta Z_{i_1 j_1}^{\ddot{A}}$ – дополнительную матрицу, которая выявляется вследствие подключения новых отмеченных ветвей.

Элементы предварительной матрицы определяются согласно следующему выражению:

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{L} = \frac{1}{\Delta}\Big\{ & (Z_{iA} - Z_{iB})\big[\Delta_{CD}(-Z_{Aj} + Z_{Bj}) + \Delta_{ABCD}(-Z_{Cj} + Z_{Dj})\big] + \\ & + (Z_{iC} - Z_{iD})\big[\Delta_{ABCD}(-Z_{Aj} + Z_{Bj}) + \Delta_{AB}(-Z_{Cj} + Z_{Dj})\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

где

$$\Delta_{AB} = Z^{AB} + Z_{AA} + Z_{BB} - 2Z_{AB}\,,$$

$$\Delta_{CD} = Z^{CD} + Z_{CC} + Z_{DD} - 2Z_{CD}\,,$$

$$\Delta_{ABCD} = Z_{BC} + Z_{AD} - Z_{BD} - Z_{AC}\,, \qquad (2.43)$$

$$\Delta = \Delta_{AB} \cdot \Delta_{CD} - \Delta^{2}_{ABCD}\,,$$

где Z^{AB}, Z^{CD} – комплексные сопротивления ветвей, которые подключаются между узлами *A*-*B* и *C*-*D*; $Z_{i\grave{A}}, Z_{ic}, Z_{\grave{A}j}, Z_{Cj}$ – комплексные сопротивления между теми же основными узлами, к которым подключаются начала ветвей Z^{AB}, Z^{CD}; Z_{iB}, Z_{iD}, Z_{Bj}, Z_{Dj} – комплексные сопротивления между теми же основными узлами, к которым подключаются концы ветвей Z^{AB}, Z^{CD}; $Z_{\grave{A}A}, Z_{CC}, Z_{\grave{A}C}, Z_{CA}$ – комплексные сопротивления, которые подключаются между узлами, к которым подключаются начала этих ветвей; $Z_{BB}, Z_{DD}, Z_{BD}, Z_{DB}$ – комплексные сопротивления между узлами, к которым подключаются концы этих ветвей; $Z_{\grave{A}B}, Z_{CD}$ – комплексные сопротивления, происходящие между узлами, к которым подключаются начала и концы этих ветвей.

Предположим, что одновременно подключаются не две ветви, а одна между узлами, тогда выражение (2.42) примет следующий вид:

$$Z^{L}_{ij} = \frac{(Z_{iA} - Z_{iB})(-Z_{Aj} + Z_{Bj})}{Z^{AB} + Z_{AA} + Z_{BB} - 2Z_{AB}}\,, \qquad (2.44)$$

где $Z_{i\grave{A}}, Z_{i\hat{A}}, Z_{\grave{A}j}, Z_{\hat{A}j}$ – комплексные сопротивления между узлами *A* и *B*; $Z_{\grave{A}A}, Z_{\hat{A}\hat{A}}$ – частные комплексные сопротивления между узлами *A* и *B*; $Z_{\grave{A}B}$ – продольные комплексные сопротивления между теми же самыми узлами.

В результате этого меняется квадратная матрица узловых сопротивлений первой подсистемы, составленной из единственного базисного узла, которую мы обозначим по $Z'_{i_1 j_1}$. Квадратные матрицы узловых сопротивлений отдельных подсистем, т. е. $Z_{i_2 j_2}, Z_{i_3 j_3} \ldots Z_{i_N j_N}$, остаются неизменными, и искомая расчетная уточняющая матрица примет следующий вид:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
Z'_{i_1 j_1} & & & & \Delta Z'_{i_1 \ell} \\
\hline
 & Z_{i_2 j_2} & & & \Delta Z_{i_2 \ell} \\
\hline
 & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\hline
 & & & Z_{i_N j_N} & \Delta Z_{i_N \ell} \\
\hline
 & & & & \Delta Z'_{\ddot{E}} + Z_{\ddot{E}} \\
\hline
\end{array}
\quad . \qquad (2.45)
$$

Как можно заметить, $\Delta Z'_{i_1 \ell}$ – прямоугольная подматрица, входящая в выражение (2.45), тоже меняется по причине изменения матрицы $Z_{i_1 j_1}$. Для других прямоугольных подматриц ($\Delta Z_{i_2 \ell}$, $\Delta Z_{i_3 \ell} \ldots$) необходимо сказать следующее: если $i_2 \ell$, $i_3 \ell$ больше, чем номера удаленных ветвей, тогда они остаются устойчивыми, в противном случае они тоже меняются.

Прямоугольная $\Delta Z_{i_N \ell}$ подматрица остается неизмененной, и квадратная подматрица $\Delta Z'_{\ddot{E}}$ строится по вышеприведенному методу.

Рассмотрим тот случай, когда изменения происходят в любой подсистеме типа k.

Если квадратная матрица $Z_{i_1 j_1}$ первой подсистемы узловых сопротивлений связана с единственным и базисным узлом, то относительно других матриц узловых сопротивлений подсистемы мы то же самое сказать не можем.

Каждая подматрица $Z_{i_k j_k}$ $(k \neq 1)$ следующей матрицы узловых сопротивлений подсистемы типа k строится по отношению к пограничным узлам предыдущей подсистемы ($k - 1$).

Для реализации структурных изменений матрицы узловых сопротивлений подсистемы типа k необходимо привести последнюю в форму пограничного узла, которая принадлежит данной подсистеме.

Для этого достаточно из элементов первоначальной расчетной матрицы (2.41) удалить величину взаимно комплексных сопротивлений, которая связывает подсистему типа k с подсистемой $[k-1]$, т. е.

$$Z_{k(k-1)} = Z_{(k-1)k}\,.$$

После этого можно реализовать структурные изменения рассматриваемой подсистемы типа k.

Структурное изменение в рассматриваемой подсистеме k может возникнуть даже из-за подключения или отключения отдельных ветвей.

В том случае, если одновременно подключаются две ветви, можно воспользоваться следующим выражением:

$$Z^{H}_{i_k j_k} = Z^{\text{Ï}}_{i_k j_k} + \Delta Z^{\text{Ä}}_{i_k j_k}\,.$$

Элементы дополнительной матрицы $\Delta Z^{\text{Ä}}_{i_k j_k}$ определяются выражениями (2.42) и (2.43), а в том случае, когда подключается одна ветвь, нужно воспользоваться выражением (2.44).

После завершения построения матрицы $Z_{i_k j_k}$ узловых сопротивлений типа k ее необходимо привести в первоначальный вид, т. е. ее нужно построить по отношению к граничной точке подсистемы $(k-1)$.

Для этого нужно прибавить элементы полученной новой подматрицы $Z_{i_k j_k}$ к комплексному сопротивлению продольной ветви, который связывает подсистему $(k-1)$ с подсистемой типа k.

Если обозначим ее $Z'_{i_k j_k}$, то искомая уточненная расчетная матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
Z_{i_1 j_1} & & & & & \Delta Z_{i_1 \ell} \\
\hline
 & \ldots\ldots & & & & \ldots\ldots \\
\hline
 & & Z'_{i_k j_k} & & & \Delta Z'_{i_k \ell} \\
\hline
 & & & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\hline
 & & & & Z_{i_N j_N} & \Delta Z_{i_N \ell} \\
\hline
 & & & & & \Delta Z'_{\text{Ë}} + Z_{\text{Ë}} \\
\hline
\end{array}\,. \qquad (2.46)$$

Рассматривая матрицу (2.46), можно отметить, что соответственно любым изменениям меняется и $\Delta Z'_{i_k \ell}$.

Необходимо обратить внимание и на то, что если такие высокие подматрицы $\Delta Z_{i_1 \ell}$ не меняются выше $\Delta Z'_{i_k \ell}$, то ниже данной подматрицы меняются, и как всегда не меняется подматрица последней подматрицы.

$\Delta Z'_{Ë}$-подматрицу, которая тоже изменяется, нужно построить по вышеприведенному методу.

Во время коррекции расчетной диакоптической матрицы Z метод обеспечивает высокую маневренность при ее использовании, т. е. во время расчета установившегося режима оптимальной ЭЭС.

Численные исследования показывают, что коррекция расчетной диакоптической матрицы Z требует небольшого вычислительного объема.

2.4. Построение диакоптической модели «*Z, P-Q*»

Строя диакоптическую матрицу Z и решая вопрос ее коррекции, мы можем перейти к построению диакоптической математической модели «*Z*, *P*-*Q*», когда для независимых станционных узлов в качестве исходной информации задаются активные и реактивные мощности.

Для этого необходимо построить системы нелинейных алгебраических уравнений, совокупность которых представляет собой диакоптическую математическую модель установившегося режима БЭЭС.

Если умножим первую систему (2.19) на комплексно сопряженный ток i_{i_1}, тогда получим

$$\begin{aligned} \Phi_{pi_1}\left(I'_{i_1}, I''_{i_1}\right) &= P_{i_1} - \left[P_{Ái_1} + \varphi_{pi_1}\left(I'_{i_1}, I''_{i_1}\right)\right] = 0, \\ \Phi_{qi_1}\left(I'_{i_1}, I''_{i_1}\right) &= Q_{i_1} - \left[Q_{Ái_1} + \varphi_{qi_1}\left(I'_{i_1}, I''_{i_1}\right)\right] = 0, \end{aligned} \qquad (2.47)$$

где

$$\varphi_{pi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=\sum_{i_1}^{M_1}\left[R_{i_1 j_1}\left(I'_{i_1}I'_{j_1}+I''_{i_1}I''_{j_1}\right)+X_{i_1 j_1}\left(I''_{i_1}I'_{j_1}-I'_{i_1}I''_{j_1}\right)\right],$$

$$\varphi_{qi_1}\left(I'_{i_1},\, I''_{i_1}\right)=\sum_{i_1}^{M_1}\left[X_{i_1 j_1}\left(I'_{i_1}I'_{j_1}+I''_{i_1}I''_{j_1}\right)-R_{i_1 j_1}\left(I''_{i_1}I'_{j_1}-I'_{i_1}I''_{j_1}\right)\right],$$

$$P_{Ái_1}=U'_{Ái_1}I'_{i_1}+U''_{Ái_1}I''_{i_1},$$

$$Q_{Ái_1}=-\left(U'_{Ái_1}I'_{i_1}-U''_{Ái_1}I''_{i_1}\right).$$

Подмодель (2.47), полученную для первой подсистемы, нужно реализовать по методу второго порядка, или методу Ньютона – Рафсона, для чего построим следующую квадратную функцию:

$$F_{i_1}(I)=\sum_{i_1}\left(\Phi^2_{pi_1}+\Phi^2_{qi_1}\right), \qquad (2.48)$$

где

$$I=\left(I',\, I''\right).$$

Квадратную функцию (2.24) разложим в ряд Тейлора

$$F(I)=F\left(I^0\right)+\left.\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right|_{I^0}\Delta I+\frac{1}{2}\Delta I^T\left.\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right|_{I^0}\Delta I+F(I)_Á, \qquad (2.49)$$

где $F(I)_Á$ – сумма слагаемых производных выше второго порядка ряда Тейлора, а T – знак транспонирования.

Если пренебречь слагаемым $F(I)_Á$, тогда ряд (2.49) примет следующий вид:

$$F(I)=F\left(I^0\right)+\left.\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right|_{I^0}\Delta I+\frac{1}{2}\Delta I^T\left.\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right|_{I^0}\Delta I. \qquad (2.50)$$

Необходимо найти такой прирост ΔI, который будет минимизировать функцию (2.50), и, соответственно, нужное условие запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I}\left[F\left(I^0\right)+\left.\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right|_{I^0} \Delta I+\frac{1}{2} \Delta I^T \left.\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right|_{I^0} \Delta I\right]=0. \tag{2.51}$$

Учитывая тот факт, что производная первой функции выражения (2.51) равна нулю, получим

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I}\left[\left.\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right|_{I^0} \Delta I+\frac{1}{2} \Delta I^T \left.\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right|_{I^0} \Delta I\right]=0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right|_{I^0} \Delta I+\frac{1}{2} \Delta I^T \left.\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right|_{I^0} \Delta I=0. \tag{2.52}$$

В результате получим

$$\left[\frac{\partial F(I)}{\partial I}\right]=G(I)$$

– столбцевую матрицу градиента от заданной функции $F(1)$

$$\left[\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2}\right]=H(I),$$

которая называется *матрицей Гессе* и представляет собой необычную квадратную матрицу, имеющую элементы частных производных второго порядка. Тогда выражение (2.52) примет следующий вид:

$$G(I)+H(I)\Delta I=0. \tag{2.53}$$

Из полученного выражения (2.53) определим ΔI

$$\Delta I = -\left[H(I)\right]^{1}_{I^0} \cdot \left[G(I)\right]_{I^0}. \tag{2.54}$$

Фактически выражение (2.54) представляет собой приращение коррекции вектора.

Если обозначим новый вектор I^1, т. е. его значения для первого шага, тогда можем написать

$$[I]^1 = [I]^0 + [\Delta I],$$

или

$$[I]^1 = \left[I^0\right] - \left[H(I)\right]^{-1}_{I^0} \cdot G(I). \tag{2.55}$$

Для первой подсистемы выражение (2.55) в развернутой форме принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_1,k_1} \\ ---- \\ I''_{i_1,k_1} \end{bmatrix}^{\grave{E}+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_1,k_1} \\ ---- \\ I''_{i_1,k_1} \end{bmatrix}^{\grave{E}} - \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I'_{i_1,k_1}\partial I'_{i_1,\ell_1}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I'_{i_1,k_1}\partial I''_{i_1,\ell_1}} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I''_{i_1,k_1}\partial I'_{i_1,\ell_1}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I''_{i_1,k_1}\partial I''_{i_1,\ell_1}} \end{array}\right]^{-1}_{\grave{E}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I'_{i_1,\ell_1}} \\ \hdashline \dfrac{\partial F\left(I_{i_1}\right)}{\partial I''_{i_1,\ell_1}} \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Реализовав первый шаг, или итерацию, для первой подсистемы, определим компоненты комплексных токов и, соответственно, сами комплексные токи.

Зная комплексный ток узла $\grave{I}_1$ второй подсистемы, мы сможем определить комплексное напряжение $\dot{U}_{\grave{I}_1}$. Имея $\dot{U}_{\grave{I}_1}$, определим $\dot{U}_{\acute{A}i_2}$ и построим математическую подмодель второй подсистемы

$$\begin{aligned} \Phi_{pi_2}\left(I'_{i_2},\ I''_{i_2}\right) &= P_{i_2} - \left[P_{\acute{A}i_2} + \varphi_{pi_2}\left(I'_{i_2},\ I''_{i_2}\right)\right] = 0, \\ \Phi_{qi_2}\left(I'_{i_2},\ I''_{i_2}\right) &= Q_{i_2} - \left[Q_{\acute{A}i_2} + \varphi_{qi_2}\left(I'_{i_2},\ I''_{i_2}\right)\right] = 0, \end{aligned} \tag{2.57}$$

где

$$\varphi_{pi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right) = \sum_{i_2}^{M_2}\left[R_{i_2 j_2}\left(I'_{i_2} I'_{j_2} + I''_{i_2} I''_{j_2}\right) + X_{i_2 j_2}\left(I''_{i_2} I'_{j_2} - I'_{i_2} I''_{j_2}\right)\right],$$

$$\varphi_{qi_2}\left(I'_{i_2},\, I''_{i_2}\right) = \sum_{i_2}^{M_2}\left[X_{i_2 j_2}\left(I'_{i_2} I'_{j_2} + I''_{i_2} I''_{j_2}\right) - R_{i_2 j_2}\left(I''_{i_2} I'_{j_2} - I'_{i_2} I''_{j_2}\right)\right].$$

С другой стороны,

$$P_{Ái_2} = U'_{Ái_2} I'_{i_2} + U''_{Ái_2} I''_{i_2},$$

$$Q_{Ái_2} = -\left(U'_{Ái_2} I'_{i_2} - U''_{Ái_2} I''_{i_2}\right).$$

Полученную математическую подмодель (2.57) также нужно реализовать по методу второго порядка, или методу Ньютона – Рафсона, для чего построим следующую квадратичную функцию:

$$F_{i_2}(I) = \sum_{i_2}\left(\Phi^2_{pi_2} + \Phi^2_{qi_2}\right). \tag{2.58}$$

Поступив так же с функцией (2.58), как в предыдущем случае с математической подмоделью второй подсистемы, получим следующее рекуррентное выражение:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_2,k_2} \\ \hline I''_{i_2,k_2} \end{bmatrix}^{È+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_2,k_2} \\ \hline I''_{i_2,k_2} \end{bmatrix}^{È} - \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I'_{i_2,k_2}\partial I'_{i_2,\ell_2}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I'_{i_2,k_2}\partial I''_{i_2,\ell_2}} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_2,k_2}\partial I'_{i_2,\ell_2}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_2,k_2}\partial I''_{i_2,\ell_2}} \end{array}\right]^{-1}_{È} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I'_{i_2,\ell_2}} \\ \hdashline \dfrac{\partial F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_2,\ell_2}} \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Реализовав первый шаг, или итерацию, получим комплексные токи узлов второй подсистемы, а также комплексные токи $Ì_2$, перекрещивающиеся с узлами третьей подсистемы.

Определив комплексное напряжение $\grave{I}_2$ узла, сможем построить математическую подмодель третьей подсистемы и т. д.

Реализовав математическую подмодель предпоследней подсистемы, сможем определить $U_{Ái_N}$ и построить математическую подмодель последней подсистемы

$$\Phi_{pi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right) = P_{i_N} - \left[P_{Ái_N} + \varphi_{pi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)\right] = 0,$$
$$\Phi_{qi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right) = Q_{i_N} - \left[Q_{Ái_N} + \varphi_{qi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right)\right] = 0, \tag{2.60}$$

где

$$\varphi_{pi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right) = \sum_{i_N}^{M_N}\left[R_{i_N j_N}\left(I'_{i_N} I'_{j_N} + I''_{i_N} I''_{j_N}\right) + X_{i_N j_N}\left(I''_{i_N} I'_{j_N} - I'_{i_N} I''_{j_N}\right)\right],$$

$$\varphi_{qi_N}\left(I'_{i_N},\, I''_{i_N}\right) = \sum_{i_N}^{M_N}\left[X_{i_N j_N}\left(I'_{i_N} I'_{j_N} + I''_{i_N} I''_{j_N}\right) - R_{i_N j_N}\left(I''_{i_N} I'_{j_N} - I'_{i_N} I''_{j_N}\right)\right].$$

С другой стороны,

$$P_{Ái_N} = U'_{Ái_N} I'_{i_N} + U''_{Ái_N} I''_{i_N},$$

$$Q_{Ái_N} = -\left(U'_{Ái_N} I'_{i_N} - U''_{Ái_N} I''_{i_N}\right).$$

Полученную математическую подмодель (2.60) реализуем снова по методу второго порядка, или методу Ньютона – Рафсона, и соответствующая квадратичная функция представится в следующем виде:

$$F_{i_N}(I) = \sum_{i_N}\left(\Phi^2_{pi_N} + \Phi^2_{qi_N}\right). \tag{2.61}$$

Разложив ряд Тейлора (2.61) и сделав соответствующие модификации для реализации математической подмодели (2.60), получим следующее рекуррентное выражение:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_N,k_N} \\ ----- \\ I''_{i_N,k_N} \end{bmatrix}^{È+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_N,k_N} \\ ----- \\ I''_{i_N,k_N} \end{bmatrix}^{È} - \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_N}\right)}{\partial I'_{i_N,k_N}\partial I'_{i_N,\ell_N}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I'_{i_N,k_N}\partial I''_{i_N,\ell_N}} \\ \hdashline \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_N,k_N}\partial I'_{i_N,\ell_N}} & \dfrac{\partial^2 F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_N,k_N}\partial I''_{i_N,\ell_N}} \end{array}\right]_{È}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I'_{i_N,\ell_N}} \\ \hdashline \dfrac{\partial F\left(I_{i_2}\right)}{\partial I''_{i_N,\ell_N}} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Сейчас необходимо получить аналитические выражения частных производных, входящих в состав рекуррентных выражений.

2.5. Получение аналитических выражений с составляющими частных производных рекуррентных выражений

Полученные аналитические выражения составляющих частных производных, входящих в рекуррентное выражение (2.56), определяются согласно квадратичной функции (2.48). Частные производные, входящие в состав рекуррентных выражений (2.59) и (2.62), определяются соответственно аналитическим видам (2.57) и (2.60).

Поскольку частные производные, входящие в состав рекуррентных выражений (2.56), (2.59) и (2.62), имеют тот же вид, мы представим их в обобщенном виде, предполагая, что

$$i,\, j = \left(i_1\,,\; j_1\,;\, i_2\,,\; j_2\;\; \ldots\; i_N\,,\; j_N\right).$$

Частные производные первого порядка, т. е. элементы столбцевой матрицы градиентов, определяются

$$\frac{\partial F_i}{\partial I'_i} = 2\sum_{j}^{M}\left(\Phi_{pj}\,\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} + \Phi_{qj}\,\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i}\right),$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial I''_i} = 2\sum_{j}^{M}\left(\Phi_{pj}\,\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} + \Phi_{qj}\,\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i}\right). \quad (2.63)$$

Частные производные второго порядка, в данном случае элементы матрицы Гессе, определяются

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i'^2} = 2\sum_j^M \left[\left(\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i''^2} = 2\sum_j^M \left[\left(\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_i''} = 2\sum_j^M \left[\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} \right],$$

$i \neq j$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_j'} = 2\sum_j^M \left[\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j'} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j'} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j'} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j'} \right],$$

$$i \neq j \qquad (2.64)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i'' \partial I_j''} = 2\sum_j^M \left[\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} \right],$$

$i \neq j$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_j''} = 2\sum_j^M \left[\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j''} \right].$$

Как можно заметить из (2.63) и (2.64), кроме выражений частных производных первого и второго порядка в них также входят соответствующие производные функции Φ_{pi} и Φ_{qi}.

Для получения выражений частных производных указанных функций целесообразно представить их в следующем виде:

$$\Phi_{pi}\left(I_i',\ I_i''\right) = P_i - \Big\{\left(U_{\acute{A}\mathrm{i}}' I_i' + U_{\acute{A}\mathrm{i}}'' I_i''\right) + R_{i,i}\left(I_i'^2 + I_i''^2\right) +$$
$$+ \sum_i \left[R_{i,j}\left(I_i' I_j' + I_i'' I_j''\right) + X_{i,j}\left(I_i'' I_j' - I_i' I_j''\right)\right]\Big\} = 0, \tag{2.65}$$

$$\Phi_{qi}\left(I_i',\ I_i''\right) = Q_i - \Big\{\left(U_{\acute{A}\mathrm{i}}'' I_i'' - U_{\acute{A}\mathrm{i}}' I_i'\right) + R_{i,i}\left(I_i'^2 + I_i''^2\right) +$$
$$+ \sum_i \left[X_{i,j}\left(I_i' I_j' + I_i'' I_j''\right) - R_{i,j}\left(I_i'' I_j' - I_i' I_j''\right)\right]\Big\} = 0. \tag{2.66}$$

Согласно выражениям (2.65) и (2.66) можем получить частные производные первого и второго порядка, которые, соответственно, входят в состав рекуррентных выражений.

Частные производные первого порядка определяются при равных индексах

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} = -\left[U_{\acute{A}i}' + 2R_{i,i} I_i' + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \left(R_{i,j} I_j' - X_{i,j} I_j''\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} = -\left[U_{\acute{A}i}'' + 2R_{i,i} I_i'' + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \left(R_{i,j} I_j'' + X_{i,j} I_j'\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} = -\left[-U_{\acute{A}i}' + 2X_{i,i} I_i' + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \left(X_{i,j} I_j' + R_{i,j} I_j''\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} = -\left[-U_{\acute{A}i}' + 2X_{i,i} I_i' + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \left(X_{i,j} I_j' + R_{i,j} I_j''\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_j} = -\left[U'_{\acute{A}j} + 2R_{j,j} I'_j + \sum_{\substack{ii \\ i \neq j}} \left(R_{j,i} I'_i - X_{j,i} I''_i \right) \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_j} = -\left[U''_{\acute{A}j} + 2R_{j,j} I''_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \left(R_{j,i} I''_i + X_{j,i} I'_i \right) \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_j} = -\left[-U'_{\acute{A}j} + 2X_{j,j} I'_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \left(X_{j,i} I'_i + R_{j,i} I''_i \right) \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_j} = -\left[U''_{\acute{A}j} + 2X_{j,j} I''_i + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \left(X_{j,i} I''_i - R_{j,i} I'_i \right) \right].$$

При разных индексах

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_j} = -\left(R_{i,j} I'_i + X_{i,j} I''_i \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} = -\left(R_{j,i} I'_j + X_{j,i} I''_j \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I''_j} = -\left(R_{i,j} I''_i - X_{i,j} I'_i \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} = -\left(R_{j,i} I''_j - X_{j,i} I'_j \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_j} = -\left(X_{i,j} I'_i - R_{i,j} I''_i \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} = -\left(-X_{j,i} I'_j - R_{j,i} I''_j \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_j} = -\left(X_{i,j} I''_i + R_{i,j} I'_i \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} = -\left(X_{j,i} I''_j + R_{j,i} I'_j \right).$$

Частные производные второго порядка определяются

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i''^2} = -2R_{i,i}\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j''^2} = -2R_{j,j}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial^2 I_i''^2} = -2X_{i,i}\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j''^2} = -2X_{j,j}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'^2} = \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i''^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} = \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j' \partial I_j''} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i' \partial I_i''} = \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j' \partial I_j''} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j'} = \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -R_{j,i}\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i' \partial I_j'} = \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = X_{j,i}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -R_{j,i}\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -X_{j,i}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j' \partial I_i''} = -X_{j,i}\,, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i''} = R_{j,i}\,.$$

2.6. Вычислительный алгоритм реализации диакоптической математической модели «*Z, P-Q*» установившегося режима

Для реализации вычислительной диакоптической математической модели «*Z, P-Q*» установившегося режима предлагается соответствующий вычислительный алгоритм, который необходимо осуществлять в следующей последовательности.

1. Исследовать схему замещения ЭЭС по совокупности подсистем, связанных друг с другом по единой линии, которая получается при отключении соответствующего количества линий электропередач.

2. Пронумеровать узлы по такому принципу, чтобы привести их в соответствие представленному принципу подсистем. В данном случае единственный и общий базисный узел, находящийся в первой подсистеме, имеет нумерацию 0, или Б, следующие подсистемы нумеруются другими натуральными числами.

3. Построить диакоптическую Z – расчетную матрицу согласно предложенной методике в параграфе 2.4.

4. Имея диакоптическую расчетную матрицу Z, построить числовую математическую модель первой подсистемы и рекуррентное выражение ее реализации.

5. Подсчитать численные значения частных производных, входящих в рекуррентное выражение первого и второго порядка, и реализовать математическую модель первой подсистемы. В результате чего будут получены численные значения узловых комплексных токов первой подсистемы.

6. Имея численные значения узловых комплексных токов первой подсистемы, подсчитать комплексное напряжение примыкающего узла второй подсистемы. Затем построить числовую математическую модель второй подсистемы и рекуррентное выражение ее реализации.

7. Подсчитав численные значения частных производных первого и второго порядка, входящих в рекуррентное выражение, построенное для второй подсистемы, реализовать математическую модель и получить численные значения узловых комплексных токов.

8. Имея численные значения узловых комплексных токов второй подсистемы, подсчитать комплексные напряжения, которые примыкают к третьей подсистеме, и построить числовую математическую модель подсистемы.

9. Продолжать тем же образом строить числовую математическую модель предпоследней подсистемы и соответствующее рекуррентное выражение. Подсчитав численные значения частных производных первого и второго порядка, входящих в рекуррентное выражение, построенное для предпоследней подсистемы, реализовать соответствующую математическую модель. В результате будут получе-

ны численные значения узловых комплексных токов предпоследней подсистемы.

10. Имея численные значения узловых комплексных токов предпоследней подсистемы, подсчитать комплексное напряжение узла, к которому примыкает последняя подсистема, и построить соответствующую математическую модель.

11. Имея числовую математическую модель последней подсистемы, построить рекуррентное выражение ее реализации и также сделать шаг, или итерацию.

12. В результате будут реализованы числовые математические модели всех подсистем и получены, соответственно, численные значения комплексных токов узлов.

Совокупность численных значений комплексных токов всех подсистем представляет собой числовые значения комплексных токов узлов полной системы.

После каждой полной итерации проверяем следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &\left|P_{i_1} - \left(P_{\text{Á}i_1} + \varphi_{pi_1}\right)\right| \le \Delta P_{i_1}, \\ &\left|Q_{i_1} - \left(Q_{\text{Á}i_1} + \varphi_{qi_1}\right)\right| \le \Delta Q_{i_1}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left|P_{i_2} - \left(P_{\text{Á}i_2} + \varphi_{pi_2}\right)\right| \le \Delta P_{i_2}, \\ &\left|Q_{i_2} - \left(Q_{\text{Á}i_2} + \varphi_{qi_2}\right)\right| \le \Delta Q_{i_2}; \end{aligned}\right\}$$

…………………………….....

$$\left.\begin{aligned} &\left|P_{i_N} - \left(P_{\text{Á}i_N} + \varphi_{pi_N}\right)\right| \le \Delta P_{i_N}, \\ &\left|Q_{i_N} - \left(Q_{\text{Á}i_N} + \varphi_{qi_N}\right)\right| \le \Delta Q_{i_N}, \end{aligned}\right\}$$

где $\Delta P_{i_1}, \Delta Q_{i_1}, \ldots, \Delta P_{i_N}, \Delta Q_{i_N}$ – доступные не балансирующие приращения активных и реактивных мощностей узлов отдельных подсистем.

Как всегда принимается, что

$$\left.\begin{aligned} \Delta P_{i_1} &= \Delta \mathrm{P}_{i_2} = \ldots = \Delta \mathrm{P}_{i_N} = \Delta \mathrm{P}_i, \\ \Delta Q_{i_1} &= \Delta Q_{i_2} = \ldots = \Delta Q_{i_N} = \Delta Q_i. \end{aligned}\right\}$$

Контрольные вопросы

1. Какое матричное уравнение лежит в основе построения диакоптической математической модели типа *Y*?
2. Как можно представить матричное уравнение типа *Z*?
3. Чему равен аргумент комплексного напряжения базисного узла?
4. Какая матрица является обращенной формой матрицы *Y*?
5. Как называется обращенная форма матрицы *Z*?
6. Напишите матричное уравнение ЭЭС как совокупность *N* подсистем.
7. Какая расчетная матрица лежит в основе построения диакоптической математической модели?
8. По отношению к какому узлу составляется матрица Z_1?
9. По отношению к какому узлу составляется матрица Z_2?
10. По отношению к какому узлу составляется матрица Z_N?
11. Что обеспечивает *Z*-метод во время коррекции расчетной диакоптической матрицы?
12. Какие мощности задаются в качестве исходной информации для построения математической модели «*Z*, *P*-*Q*»?
13. Что представляет собой матрица Гессе?
14. Что получают после реализации первой итерации?
15. Для чего предлагают исследовать схему замещения ЭЭС по совокупности подсистем?

Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ «*Z-Y, P-Q*» – МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Построение *Z-Y* – диакоптической математической модели

В основе диакоптической математической модели *Z-Y* лежит диакоптическая модель *Z*, которая имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline Z_{i_1 j_1} & & & \\ \hline & Z_{i_2 j_2} & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & Z_{i_N j_N} \\ \hline \end{array} . \qquad (3.1)$$

Полученная модель (3.1) представляет собой математическую модель радиально связанных подсистем.

Для формулирования дальнейшего материала выберем следующую систему предварительных индексов:

$i_1, j_1 = (m_1, n_1; k_1, l_1)$,

$i_2, j_2 = (m_2, n_2; k_2, l_2)$,

....

$i_N, j_N = (m_N, n_N; k_N, l_N)$,

тогда матричное выражение (3.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \begin{array}{c:c} Z_{m_1 n_1} & Z_{m_1 k_1} \\ \hdashline Z_{\ell_1 n_1} & Z_{\ell_1 k_1} \end{array} & & & \\ \hline & \begin{array}{c:c} Z_{m_2 n_2} & Z_{m_2 k_2} \\ \hdashline Z_{\ell_2 n_2} & Z_{\ell_2 k_2} \end{array} & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & \begin{array}{c:c} Z_{m_N n_N} & Z_{m_N k_N} \\ \hdashline Z_{\ell_N n_N} & Z_{\ell_N k_N} \end{array} \\ \hline \end{array} .$$

Кроме вышеприведенной обобщенной межподсистемной системы индексов необходимо также выбрать внутриподсистемные индексы.

В данном случае

$$m_1(n_1) = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ \Gamma_1,$$

$$k_1(\ell_1) = \Gamma_1 + 1,\ \Gamma_1 + 2\ \ldots \Gamma_1 + \text{Н}_1,$$

где $\Gamma_1, \text{Н}_1$ – количество электрических станций и нагрузок первой подсистемы соответственно;

$$m_2(n_2) = 1,\ 2,\ 3 \ldots \Gamma_2,$$

$$k_2(\ell_2) = \Gamma_2 + 1,\ \Gamma_2 + 2\ \ldots\ \Gamma_2 + \text{Н}_2,$$

где $\Gamma_2, \text{Н}_2$ – количество электрических станций и нагрузок второй подсистемы соответственно;

$$m_N(n_N) = 1,\ 2,\ 3 \ldots \Gamma_N,$$

$$k_N(\ell_N) = \Gamma_N + 1,\ \Gamma_N + 2\ \ldots \Gamma_N + \text{Н}_N,$$

где $\Gamma_N, \text{Н}_N$ – количество электрических станций и нагрузок последней N подсистемы соответственно.

Рассмотрим уравнение отдельных клеточных подматриц.

Для первой клеточки

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1} \\ \hline \dot{U}_{\ell_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{Бm_1} \\ \hline \dot{U}_{Б\ell_1} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} Z_{m_1 n_1} & Z_{m_1 k_1} \\ \hline Z_{\ell_1 n_1} & Z_{\ell_1 k_1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{I}_{n_1} \\ \hline \dot{I}_{k_1} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Написанное матричное уравнение (3.2) представим в открытом виде двух подматричных уравнений

$$\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{\text{Б}m_1} + Z_{m_1 n_1} \dot{I}_{n_1} + Z_{m_1 k_1} \dot{I}_{k_1}, \quad (3.3)$$

$$\dot{U}_{\ell_1} = \dot{U}_{\text{Б}\ell_1} + Z_{\ell_1 n_1} \dot{I}_{n_1} + Z_{\ell_1 k_1} \dot{I}_{k_1}. \quad (3.4)$$

Эти две матрицы $Z_{m_\ell n_\ell}$ и $Z_{\ell_\ell k_\ell}$, входящие в подматричные уравнения, квадратны и неособенны. При расчете матрицы $Z_{m_1 k_1}$ и $Z_{\ell_1 n_1}$ обычно являются прямоугольными, однако в частном случае они могут быть квадратными.

Поскольку матрица $Z_{\ell_\ell k_\ell}$ является квадратной и неособенной, то она имеет противоположную матрицу.

Умножим матричное уравнение (3.4) на противоположную матрицу $Z^{-1}_{\ell_1 k_1}$, получим

$$Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\ell_1} = Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} + Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 n_1}\dot{I}_{n_1} + Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 k_1}\dot{I}_{k_1}.$$

Если иметь в виду, что

$$Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 k_1} = 1,$$

получим

$$Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\ell_1} = Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} + Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 n_1}\dot{I}_{n_1} + \dot{I}_{k_1}.$$

Из последнего выражения можем получить следующий вид для тока $\dot{I}_{k_1}$:

$$\dot{I}_{k_1} = -Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 n_1}\dot{I}_{n_1} - Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} + Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\ell_1}. \tag{3.5}$$

Подставив полученное выражение (3.5) в уравнение (3.3), получим

$$\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{\text{Б}m_1} + Z_{m_1 n_1}\dot{I}_{n_1} + Z_{m_1 k_1}\left(-Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 n_1}\dot{I}_{n_1} - Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} + Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\ell_1}\right). \tag{3.6}$$

Представим последнее выражение следующим образом:

$$\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{Бm_1} - Z_{m_1 k_1}Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{Б\ell_1} + \left(Z_{m_1 n_1} - Z_{m_1 k_1}Z^{-1}_{\ell_1 k_1}Z_{\ell_1 n_1}\right)\dot{I}_{n_1} + Z_{m_1 k_1}Z^{-1}_{\ell_1 k_1}\dot{U}_{\ell_1}.$$

Введем следующие обозначения:
в выражение (3.5)

$$-Z_{\ell_1 k_1}^{-1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} = \dot{I}_{k_1\text{Б}},$$

а в выражение (3.6)

$$\dot{U}_{\text{Б}m_1} - Z_{m_1k_1}Z_{\ell_1k_1}^{-1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1} = \dot{U}_{m_1\text{Б}}.$$

В результате уравнения (3.5) и (3.6) примут следующие виды соответственно:

$$\begin{aligned} &\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{m_1\text{Б}} + \left(Z_{m_1n_1} - Z_{m_1k_1}Z_{\ell_1k_1}^{-1}Z_{\ell_1n_1}\right)\dot{I}_{n_1} + Z_{m_1k_1}Z_{\ell_1k_1}^{-1}\dot{U}_{\ell_1}, \\ &\dot{I}_{k_1} = \dot{I}_{k_1\text{Б}} - Z_{\ell_1k_1}^{-1}Z_{\ell_1n_1}\dot{I}_{n_1} + Z_{\ell_1k_1}^{-1}\dot{U}_{\ell_1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если систему матричных уравнений (3.7) запишем в одноматричном виде, получим

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1} \\ \dot{I}_{k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{m_1\text{Б}} \\ \dot{I}_{k_1\text{Б}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} Z_{m_1n_1} - Z_{m_1k_1}Z^{-1}{}_{\ell_1k_1}Z_{\ell_1n_1} & Z_{m_1k_1}Z^{-1}{}_{\ell_1k_1} \\ \hline -Z^{-1}{}_{\ell_1k_1}Z_{\ell_1n_1} & Z^{-1}{}_{\ell_1k_1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{I}_{n_1} \\ \dot{U}_{\ell_1} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Полученное матричное уравнение (3.8) называют *гибридным уравнением*, поскольку квадратная матрица коэффициентов составлена из совокупности Z и Y – обобщенных комплексных параметров.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &Z_{m_1,n_1} = Z_{m_1n_1} - Z_{m_1k_1}Y_{\ell_1k_1}Z_{\ell_1n_1}, \\ &\dot{B}_{m_1,\ell_1} = Z_{m_1k_1}Y_{\ell_1k_1}, \\ &\dot{C}_{k_1,n_1} = -Y_{\ell_1k_1}Z_{\ell_1n_1}, \\ &Y_{k_1,\ell_1} = Z^{-1}{}_{\ell_1k_1}. \end{aligned}$$

При данных обозначениях матричное уравнение (3.8) примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot U_{m_1} \\ \dot I_{k_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{m_1\text{Б}} \\ \dot I_{k_1\text{Б}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{m_1,n_1} & \dot B_{m_1,\ell_1} \\ \dot C_{k_1,n_1} & Y_{k_1,\ell_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot I_{n_1} \\ \dot U_{\ell_1} \end{bmatrix}. \qquad (3.9)$$

Те же самые обозначения можем сделать для второй и N подсистем. Для второй подсистемы получим

$$\begin{bmatrix} \dot U_{m_2} \\ \dot I_{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{m_2\text{Б}} \\ \dot I_{k_2\text{Б}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{m_2,n_2} & \dot B_{m_2,\ell_2} \\ \dot C_{k_2,n_2} & Y_{k_2,\ell_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot I_{n_2} \\ \dot U_{\ell_2} \end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

И для N подсистем можем написать

$$\begin{bmatrix} \dot U_{m_N} \\ \dot I_{k_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{m_N\text{Б}} \\ \dot I_{k_N\text{Б}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{m_N,n_N} & \dot B_{m_N,\ell_N} \\ \dot C_{k_N,n_N} & Y_{k_N,\ell_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot I_{n_N} \\ \dot U_{\ell_N} \end{bmatrix}. \qquad (3.11)$$

Согласно полученным видам уравнений (3.9) – (3.11) Z-Y – математическую модель можем представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot U_{m_1} \\ \dot I_{k_1} \\ \dot U_{m_2} \\ \dot I_{k_2} \\ \vdots \\ \dot U_{m_N} \\ \dot I_{k_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Б}_1} \\ \dot I_{\text{Б}_1} \\ \dot U_{\text{Б}_2} \\ \dot I_{\text{Б}_2} \\ \vdots \\ \dot U_{\text{Б}_N} \\ \dot I_{\text{Б}_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{m_1,n_1} & \dot A_{m_1\ell_1} & & & & & \\ \dot B_{k_1,n_1} & Y_{k_1,\ell_1} & & & & & \\ & & Z_{m_2,n_2} & \dot A_{m_2\ell_2} & & & \\ & & \dot B_{k_2,n_2} & Y_{k_2,\ell_2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & Z_{m_N,n_N} & \dot A_{m_N,\ell_N} \\ & & & & & \dot B_{k_N,n_N} & Y_{k_N,\ell_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot I_{n_1} \\ \dot U_{\ell_1} \\ \dot I_{n_2} \\ \dot U_{\ell_2} \\ \vdots \\ \dot I_{n_N} \\ \dot U_{\ell_N} \end{bmatrix}. \qquad (3.12)$$

Заметим, что в матричных уравнениях (3.9) – (3.11) элементами подматриц в виде A и B являются комплексные величины, не имеющие размерности.

Рассмотрим матричное уравнение (3.9) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_{m_1} &= \dot{U}_{m_1\text{Б}} + Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1} + \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}, \\ \dot{I}_{k_1} &= \dot{I}_{k_1\text{Б}} + \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1} + Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}. \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Из матричного вида (3.13) перейдем к алгебраическому виду

$$\dot{U}_{m_1} = \dot{U}_{m_1\text{Б}} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1} + \sum_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}, \quad (3.14)$$

$$\dot{I}_{k_1} = \dot{I}_{k_1\text{Б}} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1} + \sum_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1} Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}. \quad (3.15)$$

$$\dot{U}_{m_1\text{Б}} = \dot{U}_{\text{Б}m_1} - Z_{m_1,k_1}Y_{\ell_1,k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1},$$

где

$$\dot{I}_{k_1\text{Б}} = -Y_{\ell_1,k_1}\dot{U}_{\text{Б}\ell_1}.$$

Умножим уравнение (3.14) на комплексно-сопряженный ток I_{m_1}, а уравнение (3.15) – на комплексно-сопряженное напряжение $\hat{U}_{k_1}$ и получим

$$\dot{U}_{m_1}\hat{I}_{m_1} = \dot{U}_{m_1\text{Б}}\hat{I}_{m_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{I}_{m_1} + \sum_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{I}_{m_1}, \quad (3.16)$$

$$\dot{I}_{k_1}\hat{U}_{k_1} = \dot{I}_{k_1\text{Б}}\hat{U}_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{U}_{k_1} + \sum_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1} Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{U}_{k_1}. \quad (3.17)$$

Поскольку

$$\dot{U}_{m_1}\hat{I}_{m_1} = P_{m_1} + jQ_{m_1},$$

$$\hat{U}_{k_1}\dot{I}_{k_1} = P_{k_1} - jQ_{k_1},$$

тогда системы уравнений (3.16) и (3.17) примут следующий вид:

$$P_{m_1+j}Q_{m_1} = \dot{U}_{m_1Б}\hat{I}_{m_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{I}_{m_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{I}_{m_1}, \quad (3.18)$$

$$P_{k_1-j}Q_{k_1} = \dot{I}_{k_1Б}\hat{U}_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{U}_{k_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{U}_{k_1}. \quad (3.19)$$

Сейчас необходимо с помощью уравнения (3.18) получить отдельные уравнения для P_{m_1} и Q_{m_1}, а с помощью уравнения (3.19) – для P_{k_1} и Q_{k_1}

$$P_{m_1} = \mathrm{Re}\left(\dot{U}_{m_1Б}\hat{I}_{m_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{I}_{m_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{I}_{m_1}\right), \quad (3.20)$$

$$Q_{m_1} = J_m\left(\dot{U}_{m_1Б}\hat{I}_{m_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} Z_{m_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{I}_{m_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{I}_{m_1}\right) \quad (3.21)$$

и

$$P_{k_1} = \mathrm{Re}\left(\dot{I}_{k_1Б}\hat{U}_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{U}_{k_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{U}_{k_1}\right),$$

$$Q_{k_1} = J_m\left(\dot{I}_{k_1Б}\hat{U}_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1} \dot{C}_{k_1,n_1}\dot{I}_{n_1}\hat{U}_{k_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1} Y_{k_1,\ell_1}\dot{U}_{\ell_1}\hat{U}_{k_1}\right),$$

или

$$\begin{cases} P_{m_1} = P_{\text{Б}m_1} + \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1} Z_{m_1,n_1} \dot{I}_{n_1} \hat{I}_{m_1} + \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1} \dot{U}_{\ell_1} \hat{I}_{m_1} \right), \\ Q_{m_1} = Q_{\text{Б}m_1} + J_m\left(\sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1} Z_{m_1,n_1} \dot{I}_{n_1} \hat{I}_{m_1} + \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} \dot{B}_{m_1,\ell_1} \dot{U}_{\ell_1} \hat{I}_{m_1} \right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{k_1} = P_{\text{Б}k_1} + \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1} \dot{C}_{k_1,n_1} \dot{I}_{n_1} \hat{U}_{k_1} + \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} Y_{k_1,\ell_1} \dot{U}_{\ell_1} \hat{U}_{k_1} \right), \\ Q_{k_1} = Q_{\text{Б}k_1} + J_m\left(\sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1} \dot{C}_{k_1,n_1} \dot{I}_{n_1} \hat{U}_{k_1} + \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} Y_{k_1,\ell_1} \dot{U}_{\ell_1} \hat{U}_{k_1} \right). \end{cases}$$

Воспользуемся следующим обозначением:

$$\begin{cases} \dot{I}_{n_1} = I'_{n_1} + jI''_{n_1}, \\ \dot{U}_{k_1} = U'_{k_1} + jU''_{k_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{I}_{m_1} = I'_{m_1} - jI''_{m_1}, \\ \hat{U}_{k_1} = U'_{k_1} - jU''_{k_1}, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} \dot{B}_{m_1,\ell_1} = B'_{m_1,\ell_1} + jB''_{m_1,\ell_1}, \\ \dot{C}_{k_1,n_1} = C'_{k_1,n_1} + jC''_{k_1,n_1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{m_1,n_1} = R_{m_1,n_1} + jX_{m_1,n_1}, \\ Y_{k_1,\ell_1} = g_{k_1,\ell_1} + jb_{k_1,\ell_1}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Представляя вышеприведенные системы уравнений (3.20) и (3.21) реальными и мнимыми частями, можем определить выражения мощностей P_{m_1} и Q_{m_1}

$$P_{m_1} = P_{\text{Б}m_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \left[R_{m_1,n_1} \left(I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1} \right) + X_{m_1,n_1} \left(I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1} \right) \right], \quad (3.24)$$

$$Q_{m_1} = Q_{\text{Б}m_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \left[X_{m_1,n_1} \left(I'_{m_1} I'_{n_1} + I''_{m_1} I''_{n_1} \right) - R_{m_1,n_1} \left(I''_{m_1} I'_{n_1} - I'_{m_1} I''_{n_1} \right) \right], \quad (3.25)$$

где

$$P_{\text{Б}m_1} = U'_{m_1\text{Б}} I'_{m_1} + U''_{m_1\text{Б}} I''_{m_1} + \sum_{n_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} \left(B'_{m_1,\ell_1} \text{Т}'_{m_1,\ell_1} + B''_{m_1,\ell_1} \text{Т}''_{m_1,\ell_1} \right), \quad (3.26)$$

$$Q_{\text{Б}m_1} = -U'_{m_1\text{Б}} I''_{m_1} + U''_{m_1\text{Б}} I'_{m_1} + \sum_{n_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{Н}_1} \left(B''_{m_1,\ell_1} \text{Т}'_{m_1,\ell_1} - B'_{m_1,\ell_1} \text{Т}''_{m_1,\ell_1} \right). \quad (3.27)$$

В полученных выражениях (3.26) и (3.27) величины $\dot{U}'_{m_1\text{Б}}$ и $\dot{U}''_{m_1\text{Б}}$ определяются следующими матричными выражениями:

$$U'_{m_1\text{Б}} = U'_{\text{Б}m_1} - \left(R_{m_1k_1} g_{\ell_1k_1} - X_{m_1k_1} b_{\ell_1k_1} \right) U'_{\text{Б}\ell_1} + \left(R_{m_1k_1} b_{\ell_1k_1} + X_{m_1k_1} g_{\ell_1k_1} \right) U'_{\text{Б}\ell_1},$$

$$U''_{m_1\text{Б}} = U''_{\text{Б}m_1} - \left(R_{m_1k_1} g_{\ell_1k_1} - X_{m_1k_1} b_{\ell_1k_1} \right) U''_{\text{Б}\ell_1} + \left(R_{m_1k_1} b_{\ell_1k_1} + X_{m_1k_1} g_{\ell_1k_1} \right) U''_{\text{Б}\ell_1}.$$

В вышеприведенных выражениях $\text{Т}'_{m_1,\ell_1}, \text{Т}''_{m_1,\ell_1}$ определяются следующим образом:

$$\text{Т}'_{m_1,\ell_1} = U'_{\ell_1} I'_{m_1} + U''_{\ell_1} I''_{m_1},$$

$$\text{Т}''_{m_1,\ell_1} = U'_{\ell_1} I''_{m_1} - U''_{\ell_1} I'_{m_1}.$$

Рассмотрим системы уравнений (3.22) и (3.23); если мы представим их реальными и мнимыми частями, можем определить выражения мощностей P_{k_1} и Q_{k_1}

$$P_{k_1} = P_{Бk_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1}\left[g_{k_1,\ell_1}\left(U'_{k_1}U'_{\ell_1} + U''_{k_1}U''_{\ell_1}\right) + b_{k_1,\ell_1}\left(U''_{k_1}U'_{\ell_1} - U'_{k_1}U''_{\ell_1}\right)\right], \quad (3.28)$$

$$Q_{k_1} = Q_{Бk_1} + \sum_{\ell_1=Г_1+1}^{Г_1+Н_1}\left[g_{k_1,\ell_1}\left(U''_{k_1}U'_{\ell_1} - U'_{k_1}U''_{\ell_1}\right) - b_{k_1,\ell_1}\left(U'_{k_1}U'_{\ell_1} + U''_{k_1}U''_{\ell_1}\right)\right], \quad (3.29)$$

где

$$P_{Бk_1} = I'_{k_1Б}U'_{k_1} + I''_{k_1Б}U''_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1}\left(C'_{k_1,n_1}L'_{k_1,n_1} + C''_{k_1,n_1}L''_{k_1,n_1}\right), \quad (3.30)$$

$$Q_{Бk_1} = I'_{k_1Б}U''_{k_1} - I''_{k_1Б}U'_{k_1} + \sum_{n_1=1}^{Г_1}\left(C'_{k_1,n_1}L''_{k_1,n_1} - C''_{k_1,n_1}L'_{k_1,n_1}\right). \quad (3.31)$$

В двух последних выражениях (3.30) и (3.31) $\dot{I}'_{k_{1Б}}$ и $\dot{I}''_{k_{1Б}}$ определяются следующими матричными выражениями:

$$I'_{k_1Б} = -\left(g_{\ell_1,k_1}U'_{Б\ell_1} - b_{\ell_1,k_1}U''_{Б\ell_1}\right),$$

$$I''_{k_1Б} = -\left(g_{\ell_1,k_1}U''_{Б\ell_1} + b_{\ell_1,k_1}U'_{Б\ell_1}\right).$$

С другой стороны, L'_{k_1,n_1} и L''_{k_1,n_1} определяются

$$L'_{k_1,n_1} = U'_{k_1}I'_{n_1} + U''_{k_1}I''_{n_1},$$
$$L''_{k_1,n_1} = U''_{k_1}I'_{n_1} - U'_{k_1}I''_{n_1}.$$

Пользуясь матричными уравнениями (3.10) второй подсистемы тем же образом, как и в предыдущем случае, получим соответственно следующие выражения для активных и реактивных мощностей:

$$P_{m_2} = P_{Бm_2} + \sum_{n_2=1}^{Г_2}\left[R_{m_2,n_2}\left(I'_{m_2}I'_{n_2} + I''_{m_2}I''_{n_2}\right) + X_{m_2,n_2}\left(I''_{m_2}I'_{n_2} - I'_{m_2}I''_{n_2}\right)\right], \quad (3.32)$$

$$Q_{m_2} = Q_{\text{Б}m_2} + \sum_{n_2=1}^{\Gamma_2} \left[X_{m_2,n_2} \left(I'_{m_2} I'_{n_2} + I''_{m_2} I''_{n_2} \right) - R_{m_2,n_2} \left(I''_{m_2} I'_{n_2} - I'_{m_2} I''_{n_2} \right) \right], \quad (3.33)$$

где

$$P_{\text{Б}m_2} = U'_{m_2\text{Б}} I'_{m_2} + U''_{m_2\text{Б}} I''_{m_2} + \sum_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2} \left(B'_{m_2,\ell_2} \text{Т}'_{m_2,\ell_2} + B''_{m_2,\ell_2} \text{Т}''_{m_2,\ell_2} \right),$$

$$Q_{\text{Б}m_2} = -U'_{m_2\text{Б}} I''_{m_2} + U''_{m_2\text{Б}} I'_{m_2} + \sum_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2} \left(B''_{m_2,\ell_2} \text{Т}'_{m_2,\ell_2} - B'_{m_2,\ell_2} \text{Т}''_{m_2,\ell_2} \right),$$

где величины $\dot{U}'_{m_2}$ и $\dot{U}''_{m_2}$ определяются следующим матричным выражением:

$$U'_{m_2\text{Б}} = U'_{\text{Б}m_2} - \left(R_{m_2k_2} g_{\ell_2k_2} - X_{m_2k_2} b_{\ell_2k_2} \right) U'_{\text{Б}\ell_2} + \left(R_{m_2k_2} b_{\ell_2k_2} + X_{m_2k_2} g_{\ell_2k_2} \right) U'_{\text{Б}\ell_2},$$

$$U''_{m_2\text{Б}} = U''_{\text{Б}m_2} - \left(R_{m_2k_2} g_{\ell_2k_2} - X_{m_2k_2} b_{\ell_2k_2} \right) U''_{\text{Б}\ell_2} - \left(R_{m_2k_2} b_{\ell_2k_2} + X_{m_2k_2} g_{\ell_2k_2} \right) U''_{\text{Б}\ell_2}.$$

С другой стороны,

$$\text{Т}'_{m_2,\ell_2} = U'_{\ell_2} I'_{m_2} + U''_{\ell_2} I''_{m_2},$$

$$\text{Т}''_{m_2,\ell_2} = U'_{\ell_2} I''_{m_2} - U''_{\ell_2} I'_{m_2}.$$

Тогда получим следующие уравнения для активных и реактивных мощностей:

$$P_{k_2} = P_{\text{Б}k_2} + \sum_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2} \left[g_{k_2,\ell_2} \left(U'_{k_2} U'_{\ell_2} + U''_{k_2} U''_{\ell_2} \right) + b_{k_2,\ell_2} \left(U''_{k_2} U'_{\ell_2} - U'_{k_2} U''_{\ell_2} \right) \right], \quad (3.34)$$

$$Q_{k_2} = Q_{\text{Б}k_2} + \sum_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2} \left[g_{k_2,\ell_2} \left(U''_{k_2} U'_{\ell_2} - U'_{k_2} U''_{\ell_2} \right) - b_{k_2,\ell_2} \left(U'_{k_2} U'_{\ell_2} + U''_{k_2} U''_{\ell_2} \right) \right]. \quad (3.35)$$

В данных уравнениях величины $P_{\text{Б}k_2}$ и $Q_{\text{Б}k_2}$ определяются следующими выражениями:

$$P_{\text{Б}_2} = I'_{k_2\text{Б}} U'_{k_2} + I''_{k_2\text{Б}} U''_{k_2} + \sum_{n_2=1}^{\Gamma_2} \left(C'_{k_2,n_2} L'_{k_2,n_2} + C''_{k_2,n_2} L''_{k_2,n_2} \right),$$

$$Q_{\text{Б}k_2} = I'_{k_2\text{Б}} U''_{k_2} - I''_{k_2\text{Б}} U'_{k_2} + \sum_{n_2=1}^{\Gamma_2} \left(C'_{k_2,n_2} L''_{k_2,n_2} - C''_{k_2,n_2} L'_{k_2,n_2} \right),$$

где величины $\dot{I}'_{k_2\text{Б}}$ и $\dot{I}''_{k_2\text{Б}}$ определяются следующими матричными выражениями:

$$I'_{k_2\text{Б}} = -\left(g_{\ell_2,k_2} U'_{\text{Б}\ell_2} - b_{\ell_2,k_2} U''_{\text{Б}\ell_2} \right),$$

$$I''_{k_2\text{Б}} = -\left(g_{\ell_2,k_2} U''_{\text{Б}\ell_2} + b_{\ell_2,k_2} U'_{\text{Б}\ell_2} \right),$$

$$L'_{k_2,n_2} = U'_{k_2} I'_{n_2} + U''_{k_2} I''_{n_2},$$

$$L''_{k_2,n_2} = U''_{k_2} I'_{n_2} - U'_{k_2} I''_{n_2}.$$

Соответствующие уравнения следующей подсистемы для узловых активных и реактивных мощностей будут иметь новые виды.

На основе матричного уравнения (3.11) последней N подсистемы можем написать следующие уравнения для активных и реактивных мощностей:

$$P_{m_N} = P_{\text{Б}m_N} + \sum_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left[R_{m_N,n_N} \left(I'_{m_N} I'_{n_N} + I''_{m_N} I''_{n_N} \right) + X_{m_N,n_N} \left(I''_{m_N} I'_{n_N} - I'_{m_N} I''_{n_N} \right) \right], \quad (3.36)$$

$$Q_{m_N} = Q_{\text{Б}m_N} + \sum_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left[X_{m_N,n_N} \left(I'_{m_N} I'_{n_N} + I''_{m_N} I''_{n_N} \right) - R_{m_N,n_N} \left(I''_{m_N} I'_{n_N} - I'_{m_N} I''_{n_N} \right) \right], \quad (3.37)$$

где

$$P_{\text{Б}m_N} = U'_{m_N\text{Б}} I'_{m_N} + U''_{m_N\text{Б}} I''_{m_N} + \sum_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\text{Н}_N} \left(B'_{m_N,\ell_N} \text{Т}'_{m_N,\ell_N} + B''_{m_N,\ell_N} \text{Т}''_{m_N,\ell_N} \right),$$

$$Q_{\text{Б}m_N} = -U'_{m_N\text{Б}} I''_{m_N} + U''_{m_N\text{Б}} I'_{m_N} + \sum_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\text{Н}_N} \left(B''_{m_N,\ell_N} \text{Т}'_{m_N,\ell_N} - B'_{m_N,\ell_N} \text{Т}''_{m_N,\ell_N} \right).$$

Величины $U'_{m_N\text{Б}}$ и $U''_{m_N\text{Б}}$ определяются следующими матричными выражениями:

$$U'_{m_N\text{Б}} = U'_{\text{Б}m_N} - \left(R_{m_N k_N} g_{\ell_N k_N} - X_{m_N k_N} b_{\ell_N k_N} \right) U'_{\text{Б}l_N} + \left(R_{m_N k_N} b_{\ell_N k_N} + X_{m_N k_N} g_{\ell_N k_N} \right) U'_{\text{Б}\ell_N},$$
$$U''_{m_N\text{Б}} = U''_{\text{Б}m_N} - \left(R_{m_N k_N} g_{\ell_N k_N} - X_{m_N k_N} b_{\ell_N k_N} \right) U''_{\text{Б}\ell_N} - \left(R_{m_N k_N} b_{\ell_N k_N} + X_{m_N k_N} g_{\ell_N k_N} \right) U''_{\text{Б}\ell_N}.$$

Величины $\text{Т}'_{m_N,\ell_N}, \text{Т}''_{m_N,\ell_N}$ определяются следующими выражениями:

$$\text{Т}'_{m_N,\ell_N} = U'_{\ell_N} I'_{m_N} + U''_{\ell_N} I''_{m_N},$$

$$\text{Т}''_{m_N,\ell_N} = U'_{\ell_N} I''_{m_N} - U''_{\ell_N} I'_{m_N}.$$

Для внутренней правой клеточки активных и реактивных мощностей последней N подсистемы можем написать следующие уравнения:

$$P_{k_N} = P_{\text{Б}k_N} + \sum_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\text{Н}_N} \left[g_{k_N,\ell_N} \left(U'_{k_N} U'_{\ell_N} + U''_{k_N} U''_{\ell_N} \right) + b_{k_N,\ell_N} \left(U''_{k_N} U'_{\ell_N} - U'_{k_N} U''_{\ell_N} \right) \right], \quad (3.38)$$

$$Q_{k_N} = Q_{\text{Б}k_N} + \sum_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\text{Н}_N} \left[g_{k_N,\ell_N} \left(U''_{k_N} U'_{\ell_N} - U'_{k_N} U''_{\ell_N} \right) - b_{k_N,\ell_N} \left(U'_{k_N} U'_{\ell_N} + U''_{k_N} U''_{\ell_N} \right) \right], \quad (3.39)$$

где

$$P_{\text{Б}k_N} = I'_{k_N\text{Б}} U'_{k_N} + I''_{k_N\text{Б}} U''_{k_N} + \sum_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left(C'_{k_N,n_N} L'_{k_N,n_N} + C''_{k_N,n_N} L''_{k_N,n_N} \right), \quad (3.40)$$

$$Q_{\text{Б}k_N} = I'_{k_N\text{Б}} U''_{k_N} - I''_{k_N\text{Б}} U'_{k_N} + \sum_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left(C'_{k_N,n_N} L''_{k_N,n_N} - C''_{k_N,n_N} L'_{k_N,n_N} \right). \quad (3.41)$$

В выражениях (3.40) и (3.41) величины $I'_{k_N\text{Б}}$ и $I''_{k_N\text{Б}}$ определяются следующим образом:

$$I'_{k_N\text{Б}} = -\left(g_{\ell_N,k_N} U'_{\text{Б}\ell_N} - b_{\ell_N,k_N} U''_{\text{Б}\ell_N} \right),$$

$$I''_{k_N\text{Б}} = -\left(g_{\ell_N,k_N} U''_{\text{Б}\ell_N} + b_{\ell_N,k_N} U'_{\text{Б}\ell_N} \right).$$

Затем

$$L'_{k_N,n_N} = U'_{k_N} I'_{n_N} + U''_{k_N} I''_{n_N},$$

$$L''_{k_N,n_N} = U''_{k_N} I'_{n_N} - U'_{k_N} I''_{n_N}.$$

С другой стороны,

$$B'_{m_N,\ell_N} = \mathrm{Re}\left(\dot{B}_{m_N,\ell_N} \right),$$

$$B''_{m_N,\ell_N} = J_m\left(\dot{B}_{m_N,\ell_N} \right),$$

$$C'_{k_N,n_N} = \mathrm{Re}\left(\dot{C}_{k_N,n_N} \right),$$

$$C''_{k_N,n_N} = J_m\left(\dot{C}_{k_N,n_N} \right).$$

Представим системы уравнений (3.24) и (3.25) первой подсистемы в виде следующих нераскрытых функций

$$
\begin{cases}
P_{m_1} = P_{\text{Б}m_1} + f_{pm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right), \\
Q_{m_1} = Q_{\text{Б}m_1} + f_{qm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right),
\end{cases}
\tag{3.42}
$$

а уравнения (3.28), (3.29) в виде

$$
\begin{cases}
P_{k_1} = P_{\text{Б}k_1} + f_{pk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right), \\
Q_{k_1} = Q_{\text{Б}k_1} + f_{qk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right),
\end{cases}
\tag{3.43}
$$

где

$$
\begin{cases}
f_{pm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = \sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[R_{m_1,n_1}\left(I'_{m_1}I'_{n_1} + I''_{m_1}I''_{n_1}\right) + X_{m_1,n_1}\left(I''_{m_1}I'_{n_1} - I'_{m_1}I''_{n_1}\right)\right], \\
f_{qm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = \sum\limits_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[X_{m_1,n_1}\left(I'_{m_1}I'_{n_1} + I''_{m_1}I''_{n_1}\right) - R_{m_1,n_1}\left(I''_{m_1}I'_{n_1} - I'_{m_1}I''_{n_1}\right)\right],
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
f_{pk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1}\left[g_{k_1,\ell_1}\left(U'_{k_1}U'_{\ell_1} + U''_{k_1}U''_{\ell_1}\right) + b_{k_1,\ell_1}\left(U''_{k_1}U'_{\ell_1} - U'_{k_1}U''_{\ell_1}\right)\right], \\
f_{qk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = \sum\limits_{\ell_1=\Gamma_1+1}^{\Gamma_1+\text{H}_1}\left[g_{k_1,\ell_1}\left(U'_{k_1}U'_{\ell_1} - U''_{k_1}U''_{\ell_1}\right) - b_{k_1,\ell_1}\left(U''_{k_1}U'_{\ell_1} + U'_{k_1}U''_{\ell_1}\right)\right].
\end{cases}
$$

В виде тех же нераскрытых функций можем представить системы уравнений (3.32) – (3.35) второй подсистемы

$$
\begin{cases}
P_{m_2} = P_{\text{Б}m_2} + f_{pm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right), \\
Q_{m_2} = Q_{\text{Б}m_2} + f_{qm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right)
\end{cases}
\tag{3.44}
$$

и

$$\begin{cases} P_{k_2} = P_{\text{Б}k_2} + f_{pk_2}\left(U'_{\ell 2}, U''_{\ell 2}\right), \\ Q_{k_2} = Q_{\text{Б}k_2} + f_{qk_2}\left(U'_{\ell 2}, U''_{\ell 2}\right). \end{cases} \tag{3.45}$$

Здесь

$$\begin{cases} f_{pm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = \sum\limits_{n_2=1}^{\Gamma_2}\left[R_{m_2,n_2}\left(I'_{m_2}I'_{n_2} + I''_{m_2}I''_{n_2}\right) + X_{m_2,n_2}\left(I''_{m_2}I'_{n_2} - I'_{m_2}I''_{n_2}\right)\right], \\ f_{qm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = \sum\limits_{n_2=1}^{\Gamma_2}\left[X_{m_2,n_2}\left(I'_{m_2}I'_{n_2} + I''_{m_2}I''_{n_2}\right) - R_{m_2,n_2}\left(I''_{m_2}I'_{n_2} - I'_{m_2}I''_{n_2}\right)\right] \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} f_{pk_2}\left(U'_{\ell 2}, U''_{\ell 2}\right) = \sum\limits_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2}\left[g_{k_2,\ell_2}\left(U'_{k_2}U'_{\ell 2} + U''_{k_2}U''_{\ell 2}\right) + b_{k_2,\ell_2}\left(U''_{k_2}U'_{\ell 2} - U'_{k_2}U''_{\ell 2}\right)\right], \\ f_{qk_2}\left(U'_{\ell 2}, U''_{\ell 2}\right) = \sum\limits_{\ell_2=\Gamma_2+1}^{\Gamma_2+\text{Н}_2}\left[g_{k_2,\ell_2}\left(U''_{k_2}U'_{\ell 2} - U'_{k_2}U''_{\ell 2}\right) - b_{k_2,\ell_2}\left(U'_{k_2}U'_{\ell 2} + U''_{k_2}U''_{\ell 2}\right)\right]. \end{cases}$$

Представим системы нелинейных алгебраических уравнений (3.36) – (3.39) N подсистемы соответственно в следующем виде:

$$\begin{cases} P_{m_N} = P_{\text{Б}m_N} + f_{pm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right), \\ Q_{m_N} = Q_{\text{Б}m_N} + f_{qm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} P_{k_N} = P_{\text{Б}k_N} + f_{pk_N}\left(U'_{\ell N}, U''_{\ell N}\right), \\ Q_{k_N} = Q_{\text{Б}k_N} + f_{qk_N}\left(U'_{\ell N}, U''_{\ell N}\right). \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} f_{pm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = \sum\limits_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left[R_{m_N,n_N}\left(I'_{m_N} I'_{n_N} + I''_{m_N} I''_{n_N}\right) + X_{m_N,n_N}\left(I''_{m_N} I'_{n_N} - I'_{m_N} I''_{n_N}\right)\right], \\ f_{qm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = \sum\limits_{n_N=1}^{\Gamma_N} \left[X_{m_N,n_N}\left(I'_{m_N} I'_{n_N} + I''_{m_N} I''_{n_N}\right) - R_{m_N,n_N}\left(I''_{m_N} I'_{n_N} - I'_{m_N} I''_{n_N}\right)\right], \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{pk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = \sum\limits_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\mathrm{H}_N} \left[g_{k_N,\ell_N}\left(U'_{k_N} U'_{\ell_N} + U''_{k_N} U''_{\ell_N}\right) + b_{k_N,\ell_N}\left(U''_{k_N} U'_{\ell_N} - U'_{k_N} U''_{\ell_N}\right)\right], \\ f_{qk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = \sum\limits_{\ell_N=\Gamma_N+1}^{\Gamma_N+\mathrm{H}_N} \left[g_{k_N,\ell_N}\left(U''_{k_N} U'_{\ell_N} - U'_{k_N} U''_{\ell_N}\right) - b_{k_N,\ell_N}\left(U'_{k_N} U'_{\ell_N} + U''_{k_N} U''_{\ell_N}\right)\right]. \end{cases}$$

Представим системы нелинейных алгебраических уравнений (3.42) и (3.43) первой подсистемы в следующем виде:

$$\begin{cases} F_{pm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = \left\{P_{m_1} - \left[P_{\text{Б}m_1} + f_{pm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = \left\{Q_{m_1} - \left[Q_{\text{Б}m_1} + f_{qm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right)\right]\right\} = 0, \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\begin{cases} F_{pk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = \left\{P_{k_1} - \left[P_{\text{Б}k_1} + f_{pk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = \left\{Q_{k_1} - \left[Q_{\text{Б}k_1} + f_{qk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right)\right]\right\} = 0, \end{cases} \tag{3.47}$$

а системы нелинейных алгебраических уравнений (3.44), (3.45) второй подсистемы в виде

$$\begin{cases} F_{pm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = \left\{P_{m_2} - \left[P_{\text{Б}m_2} + f_{pm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = \left\{Q_{m_2} - \left[Q_{\text{Б}m_2} + f_{qm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right)\right]\right\} = 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

$$\begin{cases} F_{pk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right) = \left\{P_{k_2} - \left[P_{\text{Б}k_2} + f_{pk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right) = \left\{Q_{k_2} - \left[Q_{\text{Б}k_2} + f_{qk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right)\right]\right\} = 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Таким же образом представим системы нелинейных алгебраических уравнений N подсистемы

$$\begin{cases} F_{pm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = \left\{P_{m_N} - \left[P_{Бm_N} + f_{pm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = \left\{Q_{m_N} - \left[Q_{Бm_N} + f_{qm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right)\right]\right\} = 0 \end{cases} \tag{3.50}$$

и

$$\begin{cases} F_{pk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = \left\{P_{k_N} - \left[P_{Б\text{k}_N} + f_{pk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right)\right]\right\} = 0, \\ F_{qk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = \left\{Q_{k_N} - \left[Q_{Бk_N} + f_{qk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right)\right]\right\} = 0. \end{cases} \tag{3.51}$$

Если представим вышеприведенные системы нелинейных алгебраических уравнений (3.46) – (3.51) в виде нижеприведенных (3.52) – (3.57)

$$\begin{cases} F_{pm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = 0, \\ F_{qm_1}\left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.52}$$

$$\begin{cases} F_{pk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = 0, \\ F_{qk_1}\left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{cases} F_{pm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = 0, \\ F_{qm_2}\left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\begin{cases} F_{pk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right) = 0, \\ F_{qk_2}\left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.55}$$

....

....

$$\begin{cases} F_{pm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = 0, \\ F_{qm_N}\left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\begin{cases} F_{pk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = 0, \\ F_{qk_N}\left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.57}$$

то математическую модель (3.12) можем представить в следующем виде:

$$\begin{array}{|c:c|c:c|c|c:c|}
\hline
\begin{array}{l} F_{pm_1}\left(I'_{n_1},I''_{n_1}\right)=0, \\ F_{qm_1}\left(I'_{n_1},I''_{n_1}\right)=0, \end{array} & & & & & & \\
\hdashline
 & \begin{array}{l} F_{pk_1}\left(U'_{\ell_1},U''_{\ell_1}\right)=0, \\ F_{qk_1}\left(U'_{\ell_1},U''_{\ell_1}\right)=0, \end{array} & & & & & \\
\hline
 & & \begin{array}{l} F_{pm_2}\left(I'_{n_2},I''_{n_2}\right)=0, \\ F_{qm_2}\left(I'_{n_2},I''_{n_2}\right)=0, \end{array} & & & & \\
\hdashline
 & & & \begin{array}{l} F_{pk_2}\left(U'_{\ell_2},U''_{\ell_2}\right)=0, \\ F_{qk_2}\left(U'_{\ell_2},U''_{\ell_2}\right)=0, \end{array} & & & \\
\hline
 & & & & \cdots & & \\
\hline
 & & & & & \begin{array}{l} F_{pm_N}\left(I'_{n_N},I''_{n_N}\right)=0, \\ F_{qm_N}\left(I'_{n_N},I''_{n_N}\right)=0, \end{array} & \\
\hdashline
 & & & & & & \begin{array}{l} F_{pk_N}\left(U'_{\ell_N},U''_{\ell_N}\right)=0, \\ F_{qk_N}\left(U'_{\ell_N},U''_{\ell_N}\right)=0, \end{array} \\
\hline
\end{array} . \quad (3.58)$$

3.2. Получение рекуррентного выражения для реализации «*Z-Y, P-Q*» – диакоптической математической модели

Полученную математическую модель (3.58) необходимо реализовать по методу минимизации, или по методу Ньютона – Рафсона второго порядка [15 – 25].

Для этого необходимо сделать следующие дополнительные обозначения:

$$F_1(I_1) = \begin{cases} F_{pm_1}\left(I'_{n_1},\, I''_{n_1}\right) = 0, \\ F_{qm_1}\left(I'_{n_1},\, I''_{n_1}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_1(U_1) = \begin{cases} F_{pk_1}\left(U'_{\ell_1},\, U''_{\ell_1}\right) = 0, \\ F_{qk_1}\left(U'_{\ell_1},\, U''_{\ell_1}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_2(I_2) = \begin{cases} F_{pm_2}\left(I'_{n_2},\, I''_{n_2}\right) = 0, \\ \\ F_{qm_2}\left(I'_{n_2},\, I''_{n_2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_2(U_2) = \begin{cases} F_{pk_2}\left(U'_{\ell_2},\, U''_{\ell_2}\right) = 0, \\ \\ F_{qk_2}\left(U'_{\ell_2},\, U''_{\ell_2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_N(I_N) = \begin{cases} F_{pm_N}\left(I'_{n_N},\, I''_{n_N}\right) = 0, \\ \\ F_{qm_N}\left(I'_{n_N},\, I''_{n_N}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_N(U_N) = \begin{cases} F_{pk_N}\left(U'_{\ell_N},\, U''_{\ell_N}\right) = 0, \\ \\ F_{qk_N}\left(U'_{\ell_N},\, U''_{\ell_N}\right) = 0. \end{cases}$$

Затем для первой подсистемы

$$I_{n_1} = \left(I'_{n_1}, I''_{n_1}\right),$$

$$U_{\ell_1} = \left(U'_{\ell_1}, U''_{\ell_1}\right).$$

Следовательно,

$$F_{m_1}\left(I_{n_1}\right) = \begin{cases} F_{pm_1}\left(I_{n_1}\right) = 0, \\ F_{qm_1}\left(I_{n_1}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_{k_1}\left(U_{l_1}\right) = \begin{cases} F_{pk_1}\left(U_{l_1}\right) = 0, \\ F_{qk_1}\left(U_{l_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Для второй подсистемы

$$I_{n_2} = \left(I'_{n_2}, I''_{n_2}\right),$$

$$U_{\ell_2} = \left(U'_{\ell_2}, U''_{\ell_2}\right).$$

Следовательно,

$$F_{m_2}\left(I_{n_2}\right) = \begin{cases} F_{pm_2}\left(I_{n_2}\right) = 0, \\ F_{qm_2}\left(I_{n_2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_{k_2}\left(U_{l_2}\right) = \begin{cases} F_{pk_2}\left(U_{l_2}\right) = 0, \\ F_{qk_2}\left(U_{l_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Для N подсистем

$$I_{n_N} = \left(I'_{n_N}, I''_{n_N}\right),$$

$$U_{\ell_N} = \left(U'_{\ell_N}, U''_{\ell_N}\right),$$

тогда функции F_{m_N}, F_{k_N} будут представлены в следующем виде:

$$F_{m_N}\left(I_{n_N}\right) = \begin{cases} F_{pm_N}\left(I_{n_N}\right) = 0, \\ F_{qm_N}\left(I_{n_N}\right) = 0, \end{cases}$$

$$F_{k_N}\left(U_{l_N}\right) = \begin{cases} F_{pk_N}\left(U_{l_N}\right) = 0, \\ F_{qk_N}\left(U_{l_N}\right) = 0. \end{cases}$$

Согласно этим обозначениям математическая модель (3.58) примет следующий вид:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} F_1(I_1) = 0, \\ F_1(U_1) = 0, \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} F_2(I_2) = 0, \\ F_2(U_2) = 0, \end{matrix} & & \\ \hline & & \ldots & \\ \hline & & & \begin{matrix} F_N(I_N) = 0, \\ F_N(U_N) = 0, \end{matrix} \end{array}\right]. \qquad (3.59)$$

Как было отмечено, полученную математическую модель (3.59) можно реализовать по методу минимизации, или по методу Ньютона – Рафсона второго порядка, для которого нужно построить соответствующие квадратные функции.

Для каждой подсистемы составим квадратные функции, выбирая нелинейные векторные функции двух видов: верхнюю левую и нижнюю правую.

Для нелинейных векторных математических моделей верхняя левая и нижняя правая отмеченные квадратные функции первой подсистемы запишутся следующим образом:

$$F(I_1) = \sum_{m_1} F_1^2(I_1) = \sum_{m_1}\left(F_{pm_1}^2 + F_{qm_1}^2\right),$$

$$F(U_1) = \sum_{k_1} F_1^2(U_1) = \sum_{k_1}\left(F_{pk_1}^2 + F_{qk_1}^2\right).$$

Для второй подсистемы

$$F(I_2) = \sum_{m_2} F_2^2(I_2) = \sum_{m_2}\left(F_{pm_2}^2 + F_{qm_2}^2\right),$$

$$F(U_2) = \sum_{k_2} F_2^2(U_2) = \sum_{k_2}\left(F_{pk_2}^2 + F_{qk_2}^2\right).$$

. . . .

Для N подсистем

$$F(I_N) = \sum_{m_N} F_N^2(I_N) = \sum_{m_N}\left(F_{pm_N}^2 + F_{qm_N}^2\right),$$

$$F(U_N) = \sum_{k_N} F_N^2(U_N) = \sum_{k_N}\left(F_{pk_N}^2 + F_{qk_N}^2\right).$$

Как видим, квадратные функции, составленные для всех подсистем, являются одинаковыми, что дает возможность пользоваться обобщенными видами их представления

$$F(I_i) = \sum_{m_i} F_i^2(I_i) = \sum_{m_i}\left(F_{pm_i}^2 + F_{qm_i}^2\right), \tag{3.60}$$

$$F(U_i) = \sum_{k_i} F_i^2(U_i) = \sum_{k_i}\left(F_{pk_i}^2 + F_{qk_i}^2\right), \tag{3.61}$$

где $i = 1, 2 \ldots N$.

Разложив по отдельности квадратные функции (3.60) и (3.61) в ряд Тейлора, можем построить соответствующие рекуррентные выражения.

Разложим квадратную функцию (3.60) в ряд Тейлора, получим

$$F(I_i) = F(I^\circ{}_i) + \left.\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\right|_{I^\circ{}_i} \Delta I_i + \frac{1}{2}\Delta I^2 \left.\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\right|_{I^\circ{}_i} \Delta I_i + F_Б(I_i), \tag{3.62}$$

где $F_Б(I_i)$ представляет собой сумму членов ряда Тейлора, которые имеют частные производные выше второго порядка. Если пренебречь $F_Б(I_i)$, квадратная функция (3.62) примет следующий вид:

$$F(I_i) = F(I^\circ{}_i) + \left.\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\right|_{I^\circ{}_i} \Delta I_i + \frac{1}{2}\Delta I^2 \left.\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\right|_{I^\circ{}_i} \Delta I_i. \tag{3.63}$$

Условие минимума полученной функции (3.63) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I_i}\left[F(I^\circ{}_i) + \frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\Delta I_i + \frac{1}{2}\Delta I^T{}_i \frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\Delta I_i\right] = 0, \tag{3.64}$$

где T – знак транспонирования.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I_i}\left[F(I^\circ{}_i)\right] = 0,$$

тогда выражение (3.64) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I_i}\left[\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\Delta I_i + \frac{1}{2}\Delta I^T{}_i \frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\Delta I_i\right] = 0. \tag{3.65}$$

Из (3.65) следует, что

$$\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\Delta I_i + \frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\Delta I_i = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\Delta I_i = -\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}. \qquad (3.66)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left[\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\right] = \left[H(I_i)\right]$$

– неособенная квадратная матрица Гесса;

$$\left[\frac{\partial F(I_i)}{\partial I_i}\right] = \left[G(I_i)\right]$$

– столбцевая матрица градиента.

В результате матричное выражение (3.66) примет следующий вид:

$$\left[H(I_i)\right]\left[\Delta I\right] = -\left[G(I_i)\right].$$

Откуда

$$\left[\Delta I\right] = -\left[H(I_i)\right]^{-1}\left[G(I_i)\right].$$

Можно написать следующее рекуррентное выражение:

$$\left[I\right]^{И+1} = \left[I\right]^{И} - \left[\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I^2{}_i}\right]_{И}^{-1}\left[G(I_i)\right]_{И},$$

а в открытом и законченном виде

$$\begin{bmatrix} I'_{ik} \\ -- \\ I''_{ik} \end{bmatrix}^{\text{И}+1} = \begin{bmatrix} I'_{ik} \\ -- \\ I''_{ik} \end{bmatrix}^{\text{И}} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'_{ik}\partial I'_{i\ell}} & \dfrac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'_{ik}\partial I''_{i\ell}} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I''_{ik}\partial I'_{i\ell}} & \dfrac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I''_{ik}\partial I''_{i\ell}} \end{array}\right]_{\text{И}}^{-1} \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial F(I_i)}{\partial I'_{ik}} \\ \hline \dfrac{\partial F(I_i)}{\partial I''_{ik}} \end{array}\right], \tag{3.67}$$

который будет правильным для всех подсистем.

Разложив вспомогательную функцию (3.61) в ряд Тейлора, получим

$$F(U_i) = F(U^\circ{}_i) + \left.\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}\right|_{U^\circ{}_i} \Delta U_i + \frac{1}{2}\Delta U^2 \left.\frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\right|_{U^\circ{}_i} \Delta U_i + F_{\text{Б}}(U_i), \tag{3.68}$$

где $F_{\text{Б}}(U_i)$ представляет собой сумму тех членов ряда Тейлора, которые имеют частные производные выше второго порядка. Если пренебречь $F_{\text{Б}}(U_i)$, то ряд Тейлора (3.68) примет следующий вид:

$$F(U_i) = F(U^\circ{}_i) + \left.\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}\right|_{U^\circ{}_i} \Delta U_i + \frac{1}{2}\Delta U^2 \left.\frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\right|_{U^\circ{}_i} \Delta U_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta U_i}\left[F(U^\circ{}_i) + \frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}\Delta U_i + \frac{1}{2}\Delta U^T{}_i \frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\Delta U_i\right] = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \Delta U_i}\left[F(U^\circ{}_i)\right] = 0,$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial \Delta U_i}\left[\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}\Delta U_i + \frac{1}{2}\Delta U^T{}_i \frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\Delta U_i\right] = 0. \tag{3.69}$$

Из (3.69) следует

$$\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i} + \frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i} \Delta U_i = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i} \Delta U_i = -\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}. \qquad (3.70)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left[\frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\right] = \left[H(U_i)\right]$$

– неособенная квадратная матрица Гесса;

$$\left[\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i}\right] = \left[G(U_i)\right]$$

– столбцевая матрица градиента.

В результате матричное выражение (3.70) примет следующий вид:

$$\left[H(U_i)\right]\left[\Delta U\right] = -\left[G(U_i)\right],$$

откуда

$$\left[\Delta U\right] = -\left[H(U_i)\right]^{-1}\left[G(U_i)\right].$$

Можно написать следующее рекуррентное выражение:

$$\left[U\right]^{И+1} = \left[U\right]^{И} - \left[\frac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U^2{}_i}\right]^{-1}_{И}\left[G(U_i)\right]_{И},$$

которое представится в открытом и законченном виде

$$\begin{bmatrix} U'_{\ell i} \\ --- \\ U''_{\ell i} \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} U'_{\ell i} \\ --- \\ U''_{\ell i} \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U'_{ki} \partial U'_{\ell i}} & \dfrac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U'_{ki} \partial U''_{\ell i}} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U''_{ki} \partial U'_{\ell i}} & \dfrac{\partial^2 F(U_i)}{\partial U''_{ki} \partial U''_{\ell i}} \end{array}\right]_{И}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(I_i)}{\partial U'_{ik}} \\ \dfrac{\partial F(I_i)}{\partial U''_{ik}} \end{bmatrix} \qquad (3.71)$$

и которое также будет правильным для всех подсистем.

3.3. Получение частных производных аналитических видов, входящих в состав рекуррентных выражений (3.67)

Имея построенное рекуррентное выражение (3.67), нужно определить соответствующие производные.

Сначала установим виды производных рекуррентного выражения (3.67).

Частные производные первого порядка столбцевой матрицы градиента определяют следующим образом:

$$\frac{\partial F(I_i)}{\partial I'_{m_i}} = 2 \sum_{n_i=1}^{\Gamma_i} \left(F_{pn_i} \frac{\partial F_{pn_i}}{\partial I'_{m_i}} + F_{qn_i} \frac{\partial F_{qn_i}}{\partial I'_{m_i}} \right),$$

$$\frac{\partial F(I_i)}{\partial I''_{m_i}} = 2 \sum_{n_i=1}^{\Gamma_i} \left(F_{pn_i} \frac{\partial F_{pn_i}}{\partial I''_{m_i}} + F_{qn_i} \frac{\partial F_{qn_i}}{\partial I''_{m_i}} \right). \qquad (3.72)$$

Пользуясь частными производными первого порядка (3.72), нетрудно определить частные производные второго порядка матрицы Гесса

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'^2_{m_1}} = 2 \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \left[\left(\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}} \right)^2 + F_{pn_1} \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I'^2_{m_1}} + F_{qn_1} \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I'^2_{m_i}} \right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I''^2_{m_1}} = 2\sum_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[\left(\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I''_{m_1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I''_{m_1}}\right)^2 + F_{pn_1}\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I''^2_{m_1}} + F_{qn_1}\frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I''^2_{m_i}}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{m_1}} = 2\sum_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I''_{m_1}} + \frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I''_{m_1}} + F_{pn_1}\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{m_1}} + F_{qn_1}\frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{m_1}}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'_{m_1}\partial I'_{n_1}} = 2\sum_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I'_{n_1}} + \frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I'_{n_1}} + F_{pn_1}\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I'_{n_1}} + F_{qn_1}\frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I'_{n_1}}\right],$$

$m_1 \neq n_1$

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I''_{m_1}\partial I''_{n_1}} = 2\sum_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I''_{m_1}}\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I''_{n_1}} + \frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I''_{m_1}}\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I''_{n_1}} + F_{pn_1}\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I''_{m_1}\partial I''_{n_1}} + F_{qn_1}\frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I''_{m_1}\partial I''_{n_1}}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I_i)}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{n_1}} = 2\sum_{n_1=1}^{\Gamma_1}\left[\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{pn_1}}{\partial I''_{n_1}} + \frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}}\frac{\partial F_{qn_1}}{\partial I''_{n_1}} + F_{pn_1}\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{n_1}} + F_{qn_1}\frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I'_{m_1}\partial I''_{n_1}}\right].$$

Как видим, в частные производные первого и второго порядков входят также соответствующие частные производные согласно функциям F_p и F_q.

Из отмеченных функций частные производные первого порядка определяются следующим образом:

– при равных индексах

$$\frac{\partial F_{p_{m_1}}}{\partial I'_{m_1}} = -\left[U'_{\text{Б}m_1} + 2R_{m_1,m_1}I'_{m_1} + \sum_{\substack{n_1=1\\ n_1\neq m_1}}^{\text{Б}_1}\left(R_{m_1,n_1}I'_{n_1} - X_{m_1,n_1}I''_{n_1}\right)\right],$$

$$\frac{\partial F_{p_{m_1}}}{\partial I''_{m_1}} = -\left[U''_{\text{Б}m_1} + 2R_{m_1,m_1} I''_{m_1} + \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_1 \neq m_1}}^{\text{Б}_1} \left(R_{m_1,n_1} I''_{n_1} + X_{m_1,n_1} I'_{n_1} \right) \right],$$

$$\frac{\partial F_{q_{m_1}}}{\partial I'_{m_1}} = -\left[U''_{\text{Б}m_1} + 2X_{m_1,m_1} I'_{m_1} + \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_1 \neq m_1}}^{\text{Б}_1} \left(X_{m_1,n_1} I'_{n_1} + R_{m_1,n_1} I''_{n_1} \right) \right],$$

$$\frac{\partial F_{q_{m_1}}}{\partial I''_{m_1}} = -\left[U'_{\text{Б}m_1} + 2X_{m_1,m_1} I''_{m_1} + \sum_{\substack{n_1=1 \\ n_1 \neq m_1}}^{\text{Б}_1} \left(X_{m_1,n_1} I''_{n_1} - R_{m_1,n_1} I'_{n_1} \right) \right];$$

– при разных индексах

$$\frac{\partial F_{p_{m_1}}}{\partial I'_{n_1}} = -\left(R_{m_1,n_1} I'_{m_1} + X_{m_1,n_1} I''_{m_1} \right),$$

$$\frac{\partial F_{p_{m_1}}}{\partial I''_{n_1}} = -\left(R_{m_1,n_1} I''_{m_1} + X_{m_1,n_1} I'_{m_1} \right),$$

$$\frac{\partial F_{q_{m_1}}}{\partial I'_{n_1}} = -\left(X_{m_1,n_1} I'_{m_1} - R_{m_1,n_1} I''_{m_1} \right),$$

$$\frac{\partial F_{q_{m_1}}}{\partial I''_{n_1}} = -\left(X_{m_1,n_1} I''_{m_1} + R_{m_1,n_1} I'_{m_1} \right).$$

С другой стороны,

$$U'_{\text{Б}m_1} = U'_{\text{Б}_1} + \sum_{\ell_1=\text{Б}_1+1}^{M_1} \left(A'_{m_1,\ell_1} U'_{\ell_1} - A''_{m_1,\ell_1} U''_{\ell_1} \right),$$

$$U''_{\text{Б}m_1} = U''_{\text{Б}_1} + \sum_{\ell_1=\text{Б}_1+1}^{M_1} \left(A'_{m_1,\ell_1} U''_{\ell_1} + A''_{m_1,\ell_1} U'_{\ell_1} \right).$$

Частные производные второго порядка определяются при равных индексах

$$\frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{m_1}'^2} = \frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{m_1}''^2} = -2R_{m_1,m_1}, \frac{\partial^2 F_{qm_1}}{\partial I_{m_1}'^2} = \frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{m_1}''^2} = -2X_{m_1,m_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{m_1}'^2} = \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{m_1}''^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I_{m_1}'^2} = \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{m_1}''^2} = 0.$$

Частные производные второго порядка смешанного типа определяются

$$\frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{m_1}'' \partial I_{m_1}'} = \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{m_1}'' \partial I_{m_1}'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_{qm_1}}{\partial I_{m_1}'' \partial I_{m_1}'} = \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I_{m_1}'' \partial I_{m_1}'} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{n_1}' \partial I_{m_1}'} = \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{n_1}' \partial I_{m_1}'} = -R_{m_1,n_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qm_1}}{\partial I_{n_1}' \partial I_{m_1}'} = \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I_{n_1}' \partial I_{m_1}'} = X_{m_1,n_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}''} = \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}''} = -R_{m_1,n_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qm_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}''} = \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}''} = -X_{m_1,n_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{pm_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}'} = X_{m_1,n_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{pn_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}'} = -X_{m_1,n_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{qm_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}'} = -R_{m_1,n_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qn_1}}{\partial I_{n_1}'' \partial I_{m_1}'} = R_{m_1,n_1}.$$

3.4. Получение частных производных аналитических видов, входящих в состав рекуррентных выражений (3.71)

Определим частные производные первого и второго порядков рекуррентного выражения (3.71).

Частные производные первого порядка столбцевой матрицы градиента определяются

$$\frac{\partial F(U_i)}{\partial U'_{k_i}} = 2\sum_{n_i=1}^{\Gamma_i}\left(\partial F_{p\ell_i}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_i}} + \partial F_{q\ell_i}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\right),$$

$$\frac{\partial F(U_i)}{\partial U''_{k_i}} = 2\sum_{n_i=1}^{\Gamma_i}\left(\partial F_{p\ell_i}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{k_i}} + \partial F_{q\ell_i}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_i}}\right). \quad (3.73)$$

С помощью полученных частных производных первого порядка (3.73) можно получить выражения частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U'^2_{k_1}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\left(\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_i}}\right)^2 + \left(F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U'^2_{k_1}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U'^2_{k_1}}\right)\right], \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U''^2_{k_1}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\left(\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{k_i}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_i}}\right)^2 + \left(F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U''^2_{k_1}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U''^2_{k_1}}\right)\right], \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{k_1}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{k_i}} + \frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_i}} + F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{k_1}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{k_1}}\right], \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U'_{k_1}\partial U'_{\ell_1}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{\ell_1}} + \frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U'_{\ell_1}} + F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U'_{\ell_1}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U'_{\ell_1}}\right]. \quad (3.77)$$

$k_1 \neq \ell_1$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U''_{k_1}\partial U''_{\ell_1}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{k_1}}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{\ell_1}} + \frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_1}}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{\ell_1}} + F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U''_{k_1}\partial U''_{\ell_1}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U''_{k_1}\partial U''_{\ell_1}}\right], \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{\ell_i}} = 2\sum_{\ell_i}\left[\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{p\ell_i}}{\partial U''_{\ell_i}} + \frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_i}}\frac{\partial F_{q\ell_i}}{\partial U''_{\ell_i}} + F_{p\ell_i}\frac{\partial^2 F_{p\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{\ell_i}} + F_{q\ell_i}\frac{\partial^2 F_{q\ell_i}}{\partial U'_{k_1}\partial U''_{\ell_i}}\right]. \quad (3.79)$$

Частные производные функций F_p и F_q, входящие в выражения (3.73) – (3.79), определяются следующим образом:

– при равных индексах

$$\frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U'_{k_1}} = -\left\{I'_{\text{Б}k_1} + 2g_{k_1,k_1}U'_{k_1} + \sum_{\substack{\ell=\Gamma_1+1\\ \ell\neq k_1}}^{M_1}\left(g_{k_1,\ell_1}U'_{\ell_1} - b_{k_1,\ell_1}U''_{\ell_1}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U''_{k_1}} = -\left\{I''_{\text{Б}k_1} + 2g_{k_1,k_1}U''_{k_1} + \sum_{\substack{\ell=\Gamma_1+1\\ \ell\neq k_1}}^{M_1}\left(g_{k_1,\ell_1}U''_{\ell_1} + b_{k_1,\ell_1}U'_{\ell_1}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U'_{k_1}} = -\left\{-I''_{\text{Б}k_1} - 2b_{k_1,k_1}U'_{k_1} - \sum_{\substack{\ell=\Gamma_1+1\\ \ell\neq k_1}}^{M_1}\left(g_{k_1,\ell_1}U''_{\ell_1} + b_{k_1,\ell_1}U'_{\ell_1}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U''_{k_1}} = -\left\{I'_{\text{Б}k_1} - 2b_{k_1,k_1}U''_{k_1} + \sum_{\substack{\ell=\Gamma_1+1\\ \ell\neq k_1}}^{M_1}\left(g_{k_1,\ell_1}U'_{\ell_1} - b_{k_1,\ell_1}U''_{\ell_1}\right)\right\};$$

– при разных индексах

$$\frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U'_{\ell_1}} = -\left(g_{k_1,\ell_1}U'_{k_1} + b_{k_1,\ell_1}U''_{k_1}\right), \qquad \frac{\partial F_{pk_1}}{\partial U''_{\ell_1}} = -\left(g_{k_1,\ell_1}U''_{k_1} - b_{k_1,\ell_1}U'_{k_1}\right),$$

$$\frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U'_{\ell_1}} = -\left(g_{k_1,\ell_1}U''_{k_1} - b_{k_1,\ell_1}U'_{k_1}\right), \qquad \frac{\partial F_{qk_1}}{\partial U''_{\ell_1}} = -\left(-g_{k_1,\ell_1}U'_{k_1} - b_{k_1,\ell_1}U''_{k_1}\right).$$

С другой стороны,

$$I'_{Бk_1} = I'_{Б_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \left(B'_{k_1,n_1} I'_{n_1} - B''_{k_1,n_1} I''_{n_1} \right),$$

$$I''_{Бk_1} = I''_{Б_1} + \sum_{n_1=1}^{\Gamma_1} \left(B'_{k_1,n_1} I''_{n_1} + B''_{k_1,n_1} I'_{n_1} \right).$$

Частные производные второго порядка определяются

$$\frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U'^2_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U''^2_{k_1}} = -g_{k_1k_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qk_1}}{\partial U'^2_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{qk_1}}{\partial U''^2_{k_1}} = -b_{k_1k_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U'^2_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U''^2_{k_1}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U'^2_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U''^2_{k_1}} = 0.$$

Частные производные второго порядка смешанного типа определяются

$$\frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U''_{k_1} \partial U'_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U''_{k_1} \partial U'_{k_1}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_{qk_1}}{\partial U''_{k_1} \partial U'_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U''_{k_1} \partial U'_{k_1}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U'_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U'_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = -g_{k_1,\ell_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qk_1}}{\partial U'_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U'_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = b_{k_1,\ell_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U''_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U''_{k_1}} = -g_{k_1,\ell_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{qk_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U''_{k_1}} = \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U''_{k_1}} = b_{k_1,\ell_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = b_{k_1,\ell_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{pk_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = g_{k_1,\ell_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_{p\ell_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = -b_{k_1,\ell_1}, \qquad \frac{\partial^2 F_{q\ell_1}}{\partial U''_{\ell_1} \partial U'_{k_1}} = -g_{k_1,\ell_1}.$$

В результате имеем аналитические виды всех типов частных производных рекуррентных выражений и можем перейти к описанию предложенного вычислительного алгоритма.

3.5. Вычислительный алгоритм реализации математической модели установившегося режима электроэнергетической системы

Для реализации численной математической модели установившегося режима ЭЭС предлагается соответствующий вычислительный алгоритм, сущность которого состоит в следующем.

1. Построить схему замещения исследуемой ЭЭС и в зависимости от ее структуры представить ее как совокупность подсистем, которые связаны друг с другом одной электрической линией посредством отключения соответствующих ветвей.

2. Осуществить нумерацию узлов с первой подсистемы, в которой находится единственный базисный (балансирующий) узел, который следует обозначить 0 или Б.

3. Построить диакоптическую Z-матрицу, которая приведена в (3.1) и представляет собой совокупность матриц подсистемы.

4. Выбрать дополнительную систему межподсистемных индексов и построить Z-Y – диакоптическую матрицу, которая приведена в (3.12).

5. Пользуясь диакоптической (Z-Y)-матрицей (3.12), построить математические модели отдельных подсистем. При этом математическая подмодель каждой подсистемы представляет собой совокупность $Z(Y)$- и $Y(Z)$-подмоделей. Полученную математическую модель представить как совокупность подмоделей в виде (3.58).

6. Математическую модель (3.58) представить в новом виде (3.59) и построить вспомогательные квадратные функции минимизации отдельных подсистем.

7. Разложив вспомогательную квадратную функцию первой подсистемы в ряд Тейлора, построить соответственное рекуррентное выражение.

8. Получить аналитические виды частных производных первого и второго порядка, входящие в рекуррентное выражение реализации математической модели подсистем, и определить их численные значения.

9. Давая искомым проводимостям первоначальные численные значения, пользуясь рекуррентным выражением, построенным для

первой подсистемы, осуществить первый шаг, или первую итерацию, и в результате получить новые численные значения искомых режимных узлов.

10. Имея численные значения приграничных параметров первой и второй подсистем, построить числовую математическую модель второй подсистемы и вспомогательную квадратичную функцию.

11. Разложив вспомогательную квадратную функцию второй подсистемы в ряд Тейлора, построить соответствующее рекуррентное выражение.

12. Определить численные значения частных производных первого и второго порядка, входящие в рекуррентное выражение второй подсистемы, и осуществить первый шаг, или первую итерацию.

13. Получив численные значения узловых режимных приграничных параметров второй подсистемы, построить численную математическую модель третьей подсистемы и так продолжать до численной математической модели N подсистем и построения соответствующего рекуррентного выражения.

14. Осуществив первый шаг, или первую итерацию, для N подсистем, получить численные значения соответствующих режимных параметров.

15. Закончив первый шаг, или первую итерацию, для всех подсистем, в результате получить один шаг, или итерацию, для полных схем замещения и начать второй шаг для всех подсистем.

Итерационный процесс считается завершенным, если обеспечивается следующее условие для всех подсистем:

$$\left|P_{m_i} - \left(P_{Ám_1} + f_{pm_1}\right)\right| \le \Delta P_{m_i} ,$$

$$\left|Q_{m_i} - \left(Q_{Ám_1} + f_{qm_1}\right)\right| \le \Delta Q_{m_i} ,$$

$$\left|P_{k_i} - \left(P_{Ák_1} + f_{pk_1}\right)\right| \le \Delta P_{k_i} ,$$

$$\left|Q_{k_i} - \left(Q_{Ák_1} + f_{qk_1}\right)\right| \le \Delta Q_{k_i} ,$$

где $\Delta P_{m_i}, \Delta Q_{m_i}, \Delta P_{k_i}, \Delta Q_{k_i}$ – допустимые небалансирующие величины, которые обеспечивают точность решения численных результатов искомых параметров.

Здесь тоже принимаем

$$\Delta P_{m_1} = \Delta P_{m_2} = \cdots = \Delta P_{m_N} = \Delta P,$$

$$\Delta Q_{m_1} = \Delta Q_{m_2} = \cdots = \Delta Q_{m_N} = \Delta Q,$$

$$\Delta P_{k_1} = \Delta P_{k_2} = \cdots = \Delta P_{k_N} = \Delta P,$$

$$\Delta Q_{k_1} = \Delta Q_{k_2} = \cdots = \Delta Q_{k_N} = \Delta Q.$$

С другой стороны, индекс i принимает соответствующие индексы всех подсистем, так что $i = 1, 2 \ldots N$.

Контрольные вопросы

1. По какому методу реализуется диакоптическая математическая модель, если ЭЭС представлена как совокупность радиально связанных N подсистем?
2. Какими режимными параметрами характеризуется каждый узел ЭЭС?
3. Какие режимные параметры задаются при узле типа U-Ψ?
4. Какие режимные параметры задаются при узле типа P-Q?
5. Какие режимные параметры задаются при узле типа P-U?
6. Каким методом реализуется Z-Y, P-Q – математическая модель?
7. Каким образом ЭЭС можно представить в виде радиально связанных подсистем?
8. Чем характеризуется число строк подматрицы ΔZ?
9. Когда происходит коррекция Z – расчетной матрицы?
10. Каким методом решают построенные системы нелинейных алгебраических уравнений?
11. Когда считается завершенным итерационный процесс решения?

Глава 4. ПОСТРОЕНИЕ «*Z-Y, P-Q*» – ЧИСЛЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Реализация численных математических моделей ЭЭС, состоящей из десяти узлов

Рассматривается схема замещения ЭЭС, состоящей из десяти узлов, которая приведена на рис. 7.

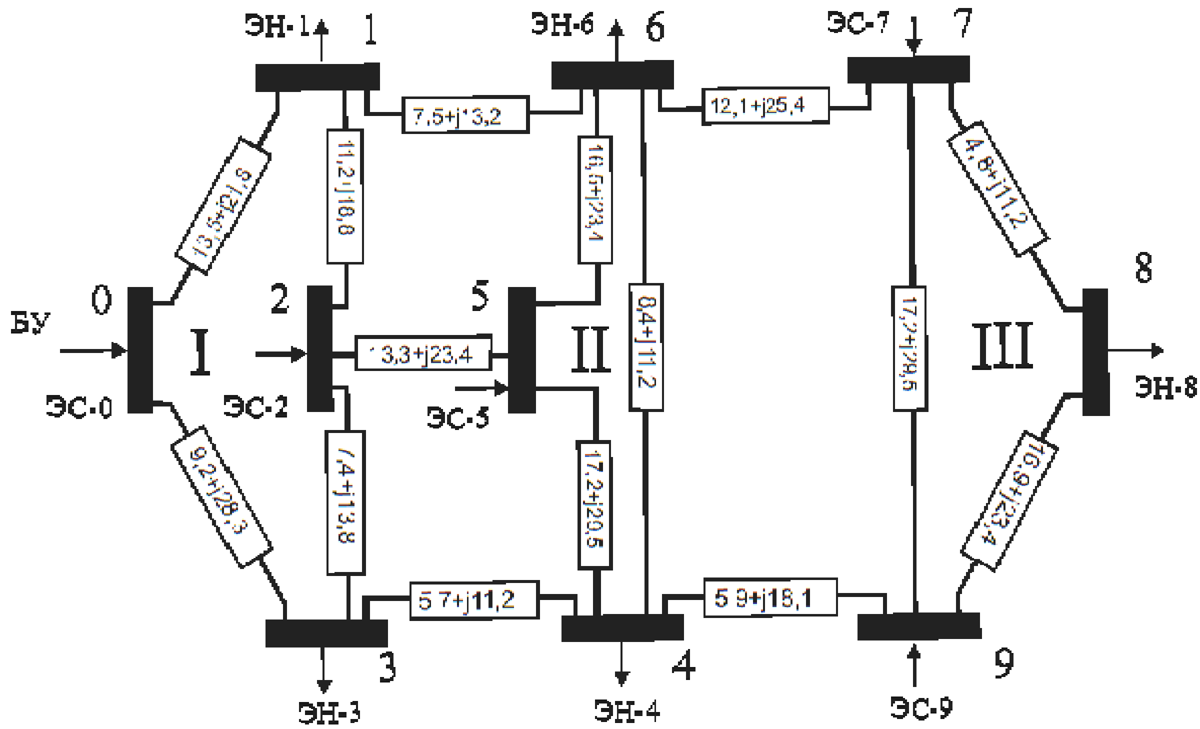


Рис. 7. Схема замещения ЭЭС, состоящей из десяти узлов

Исследование осуществляется по разработанному вычислительному алгоритму.

Режимные активные параметры узлов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходная информация относительно режимных параметров узлов

Узел	Параметр			
	P, МВт	Q, МВар	U, кВ	Ψ_u , град.
ЭС-0	–	–	220	0
ЭС-1	110	100,0	–	–
ЭН-2	100	50,0	–	–
ЭН-3	60	30,0	–	–
ЭС-4	70	51,0	–	–
ЭН-5	80	40,0	–	–
ЭН-6	110	55,0	–	–
ЭС-7	60	136,7	–	–
ЭС-8	94	45,0	–	–
ЭН-9	96	48,0	–	–

1. Построенную схему замещения представим как совокупность трех подсистем посредством отключения ветвей 1-6, 2-5 и 4-9 (рис. 8).

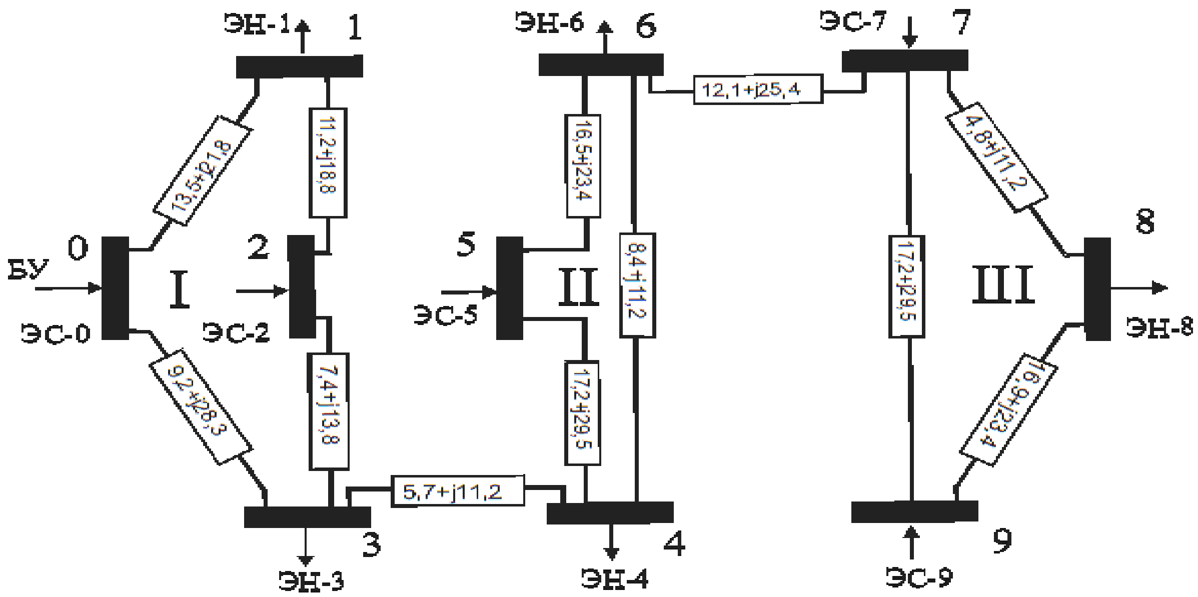


Рис. 8. Схема замещения ЭЭС, состоящей из десяти узлов, представленная в виде трех радиально связанных подсистем

2. Пронумеруем узлы:

первая подсистема – 0(Б), 1, 2, 3;

вторая подсистема – 4, 5, 6;

третья подсистема – 7, 8, 9.

3. Диакоптическая матрица Z как совокупность $Z_{i_1 j_1}$-, $Z_{i_2 j_2}$-, $Z_{i_3 j_3}$-подсистем имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline Z_{i_1 j_1} & & \\ \hline & Z_{i_2 j_2} & \\ \hline & & Z_{i_3 j_3} \\ \hline\end{array}\,. \tag{4.1}$$

4. Выберем следующие межподсистемные дополнительные индексы:

первая подсистема – $m_1(n_1) = 1{,}0; \quad k_1(\ell_1) = 2{,}3;$

вторая подсистема – $m_2(n_2) = 4{,}0; \quad k_2(\ell_2) = 5{,}6;$

третья подсистема – $m_3(n_3) = 7{,}8; \quad k_3(\ell_3) = 9{,}0.$

1.1. До построения диакоптической численной матрицы Z-Y представим ее в буквенном виде

$$Z_1(Y_1) = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{m_1 n_1} - Z_{m_1 k_1} Y_{\ell_1 k_1} Z_{\ell_1 n_1} & Z_{m_1 k_1} Y_{\ell_1 k_1} \\ \hline -Y_{\ell_1 k_1} Z_{\ell_1 n_1} & Y_{\ell_1 k_1} \\ \hline\end{array}\,,$$

$$Z_2(Y_2) = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{m_2 n_2} - Z_{m_2 k_2} Y_{\ell_2 k_2} Z_{\ell_2 n_2} & Z_{m_2 k_2} Y_{\ell_2 k_2} \\ \hline -Y_{\ell_2 k_2} Z_{\ell_2 n_2} & Y_{\ell_2 k_2} \\ \hline\end{array}\,,$$

$$Z_3(Y_3) = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{m_3 n_3} - Z_{m_3 k_3} Y_{\ell_3 k_3} Z_{\ell_3 n_3} & Z_{m_3 k_3} Y_{\ell_3 k_3} \\ \hline -Y_{\ell_3 k_3} Z_{\ell_3 n_3} & Y_{\ell_3 k_3} \\ \hline\end{array}$$

или

$$Z_{m_1} - Y_{k_1} = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{m_1 n_1} & \dot{B}_{m_1 \ell_1} \\ \hline \dot{C}_{k_1 n_1} & Y_{k_1 \ell_1} \\ \hline\end{array}\,,$$

$$Z_{m_2} - Y_{k_2} = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{m_2 n_2} & \dot{B}_{m_2 \ell_2} \\ \hline \dot{C}_{k_2 n_2} & Y_{k_2 \ell_2} \\ \hline\end{array}\,,$$

$$Z_{m_3} - Y_{k_3} = \left|\begin{array}{c:c} Z_{m_3 n_3} & \dot{B}_{m_3 \ell_3} \\ \hdashline \dot{C}_{k_3 n_3} & Y_{k_3 \ell_3} \end{array}\right|.$$

Имея численные значения Z_1, Z_2, Z_3 подматриц по матрице (4.1), получим

$Z_{m_1} - Y_{k_1} =$

	1	2	3
1	6,124694 + *j*10,09233	0,550795 + *j*0,001763	–0,017643 – *j*0,008115
2	–0,550795 – *j*0,001763	0,041115 – *j*0,074256	–0,030179 + *j*0,056279
3	0,017643 + *j*0,008115	–0,030179 + *j*0,056279	0,040568 – *j*0,088237

$Z_{m_2} - Y_{k_2} =$

	4	5	6
4	2,900837 + *j*4,748182	0,162913 – *j*0,003368	0,395661 + *j*0,037717
5	–0,162913 + *j*0,003368	0,032557 – *j*0,049670	–0,026916 + *j*0,037995
6	–0,395661 – *j*0,037717	–0,026916 + *j*0,037995	–0,043871 – *j*0,064693

$Z_{m_3} - Y_{k_3} =$

	7	8	9
7	5,409654 + *j*9,819633	4,268076 + *j*6,675977	–0,602214 – *j*0,023482
8	4,268076 + *j*6,675977	7,219765 + *j*12,188958	0,720539 + *j*0,034905
9	–0,602214 – *j*0,023482	– 0,720539 – *j*0,034905	0,009959 – *j*0,018965

Совокупность полученных трех подсистем представляет собой (*Z*-*Y*) – диакоптическую матрицу исследуемой схемы замещения.

Для всех подсистем начало итерационного процесса примем равным $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \cdots = = \dot{U}_M = \dot{U}_0$, $\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \cdots = \hat{U}_M = U = 220$ кВ.

Первоначальные значения комплексных токов подсистем определяются

$$\dot{I}_{j_1} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}500000 - j0{,}454545 \\ -0{,}454545 + j0{,}227272 \\ -0{,}272727 + j0{,}136363 \end{bmatrix},$$

$$\dot{I}_{j_2} = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}318181 - j0{,}231818 \\ -0{,}363636 + j0{,}181818 \\ -0{,}500000 + j0{,}250000 \end{bmatrix},$$

$$\dot{I}_{j_3} = \begin{bmatrix} \dot{I}_7 \\ \dot{I}_8 \\ \dot{I}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}272727 - j0{,}621363 \\ 0{,}427272 - j0{,}204545 \\ -0{,}436363 + j0{,}218181 \end{bmatrix}.$$

1.2. Построим математическую модель первой подсистемы как совокупность подмоделей $Z_1(Y_1)$ и $(Y_1)Z_1$.

$$\begin{cases} \Phi_{p1} = P_1 - \left[P_{Б1} + R_{11}\left(I_1'^2 + I_1''^2\right)\right] = 0, \\ \Phi_{q1} = Q_1 - \left[Q_{Б1} + X_{11}\left(I_1'^2 + I_1''^2\right)\right] = 0, \end{cases}$$

где

$$P_{Б1} = U'_{Б1}I'_1 + U''_{Б1}I''_1 + \left[A'_{12}\left(U'_2I'_1 + U''_2I''_1\right) + A''_{12}\left(U'_2I''_1 - U''_2I'_1\right)\right] +$$
$$+\left[A'_{13}\left(U'_3I'_1 + U''_3I''_1\right) + A''_{13}\left(U'_3I''_1 - U''_3I'_1\right)\right],$$

$$Q_{Б1} = -U'_{1Б}I''_1 + U''_{1Б}I'_1 + \left[A''_{21}\left(U'_2I'_1 + U''_2I''_1\right) + A'_{21}\left(U'_2I''_1 - U''_2I'_1\right)\right] +$$
$$+\left[A''_{31}\left(U'_3I'_1 + U''_3I''_1\right) + A'_{31}\left(U'_3I''_1 - U''_3I'_1\right)\right].$$

Для этой подсистемы в качестве вспомогательной функции будет

$$F\left(I_1\right) = \Phi_{p1}^2 + \Phi_{q1}^2. \qquad (4.2)$$

Разложив квадратную функцию (4.2) в ряд Тейлора, можем построить соответствующее рекуррентное выражение

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ -- \\ I''_1 \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ -- \\ I''_1 \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial I_1'^2} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial I'_1 \partial I''_1} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial I''_1 \partial I'_1} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial I_2''^2} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial I'_1} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial I''_1} \end{bmatrix}. \qquad (4.3)$$

Частные производные, входящие в полученное рекуррентное выражение (4.3), определяются как частные производные первого порядка

$$\frac{\partial F_1}{I'_1} = 2\left(\Phi_{p1}\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I'_1} + \Phi_{q1}\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I'_1}\right),$$

$$\frac{\partial F_1}{I''_1} = 2\left(\Phi_{p1}\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I''_1} + \Phi_{q1}\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I''_1}\right).$$

Частные производные второго порядка, входящие в матрицу Гессе, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1'}\right)^2 + \Phi_{p1}\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1'^2} + \Phi_{q1}\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1''}\right)^2 + \Phi_{p1}\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1''^2} + \Phi_{q1}\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1' \partial I_1''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1'}\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1''} + \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1'}\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1''} + \Phi_{p1}\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1' \partial I_1''} + \Phi_{q1}\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1' \partial I_1''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1'' \partial I_1'} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1''}\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1'} + \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1''}\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1'} + \Phi_{p1}\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1'' \partial I_1'} + \Phi_{q1}\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1'' \partial I_1'}\right).$$

Частные производные первого и второго порядка типа Φ_p и Φ_q, входящие в вышеприведенные частные производные первого и второго порядка, определяются следующим образом:

– частные производные первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_{p_1}}{\partial I_1'} = -\left(\frac{\partial P_{\text{Б}1}}{\partial I_1'} + 2R_{1,1}I_1'\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{p_1}}{\partial I_1''} = -\left(\frac{\partial P_{\text{Б}1}}{\partial I_1''} + 2R_{1,1}I_1''\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q_1}}{\partial I_1'} = -\left(\frac{\partial Q_{\text{Б}1}}{\partial I_1'} + 2X_{1,1}I_1'\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{q_1}}{\partial I_1''} = -\left(\frac{\partial Q_{\text{Б}1}}{\partial I_1''} + 2X_{1,1}I_1''\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial P_{Б1}}{\partial I_1'} = U_{1,Б}' + \left(A_{12}'U_2' - A_{12}''U_2''\right) + \left(A_{13}'U_3' - A_{13}''U_3''\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б1}}{\partial I_1''} = U_{1,Б}'' + \left(A_{12}'U_2'' + A_{12}''U_2'\right) + \left(A_{13}'U_3'' - A_{13}''U_3'\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б1}}{\partial I_1'} = U_{1,Б}'' + \left(A_{12}''U_2' + A_{12}'U_2''\right) + \left(A_{13}''U_3' - A_{13}'U_3''\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б1}}{\partial I_1''} = -U_{1,Б}' + \left(A_{12}''U_2'' - A_{12}'U_2'\right) + \left(A_{13}''U_3'' - A_{13}'U_3'\right).$$

Частные производные второго порядка определяются следующими выражениями:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p_1}}{\partial I_1'^2} = -2R_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p_1}}{\partial I_1''^2} = -2R_{1,1},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q_1}}{\partial I_1'^2} = -2X_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q_1}}{\partial I_1''^2} = -2X_{1,1},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p_1}}{\partial I_1' \partial I_1''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p_1}}{\partial I_1'' \partial I_1'} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q_1}}{\partial I_1' \partial I_1''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q_1}}{\partial I_1'' \partial I_1'} = 0.$$

Определим численные значения вышеприведенных выражений

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1'^2} = -2 \cdot 6{,}124694 = -12{,}249880,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p1}}{\partial I_1''^2} = -2 \cdot 6{,}124694 = -12{,}249880,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1'^2} = -2 \cdot 10{,}092333 = -20{,}184666,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q1}}{\partial I_1''^2} = -2 \cdot 10{,}092333 = -20{,}184666.$$

Поскольку имеем $U'_{1,\text{Б}}, U''_{1,\text{Б}}$, а также численные значения $U'_{2,\text{Б}}, U''_{2,\text{Б}}$ и $U'_{3,\text{Б}}, U''_{3,\text{Б}}$ величин, то можем определить

$$\frac{\partial P_{\text{Б}1}}{\partial I_1'} = 104{,}074917 + \left(0{,}550795 \cdot 220 - 0{,}001763 \cdot 0\right) +$$
$$+ \left(0{,}017643 \cdot 220 + 0{,}008115 \cdot 0\right) = 221{,}368357,$$

$$\frac{\partial P_{\text{Б}1}}{\partial I_1''} = 4{,}937185 + \left(0{,}550795 \cdot 0 + 0{,}001763 \cdot 220\right) +$$
$$+ \left(-0{,}001763 \cdot 0 - 0{,}008115 \cdot 220\right) = 3{,}539745,$$

$$\frac{\partial Q_{\text{Б}1}}{\partial I_1'} = 4{,}937185 + (0{,}001763 \cdot 220 + 0{,}550795 \cdot 0) +$$
$$+ (-0{,}008115 \cdot 220 - 0{,}017643 \cdot 0) = 3{,}539745,$$

$$\frac{\partial Q_{\text{Б}1}}{\partial I_1''} = -104{,}074917 + (0{,}001763 \cdot 0 - 0{,}550795 \cdot 220) +$$
$$+ (-0{,}008115 \cdot 0 + 0{,}017643 \cdot 220) = -221{,}368357.$$

Затем можем определить

$$\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1'} = -(221{,}368357 + 2 \cdot 6{,}124694 \cdot 0{,}500000) = -227{,}493051,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial I_1''} = -\left[3{,}539745 + 2 \cdot 6{,}124694 \cdot (-0{,}454545)\right] = 2{,}028153,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1'} = -\left(3{,}539745 + 2 \cdot 10{,}092333 \cdot 0{,}500000\right) = -13{,}632078,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial I_1''} = -\left[-221.368357 + 2 \cdot 10{,}092333 \cdot (-0{,}454545)\right] = 230{,}543196.$$

Определим численные значения функции Φ_{p1} и Φ_{q1}

$$\begin{aligned} P_{Б1} &= 104{,}074917 \cdot 0{,}500000 + 4{,}937185\left(-0{,}454545\right) + \{0{,}550795 \times \\ &\times [220 \cdot 0{,}5000000 + 0 \cdot (-0{,}454545)] + 0{,}001763[220 \cdot (-0{,}454545) - \\ &- 0 \cdot 0{,}500000]\} + \{-0{,}017643[220 \cdot 0{,}500000 + 0(-0{,}454545)] - \\ &- 0{,}008115[220\,(-0{,}454545) - 0 \cdot 0{,}500000]\} = 109{,}075205, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{Б1} &= -104{,}074917 \cdot (-0{,}454545) + 4{,}937185 \cdot 0{,}500000 + \{0{,}001763 \times \\ &\times [220 \cdot 0{,}500000 + 0 \cdot (-0{,}454545)] - 0{,}550795[220 \cdot (-0{,}454545) - \\ &- 0 \cdot 0{,}500000]\} + \{-0{,}008115[220 \cdot 0{,}500000 + 0 \cdot (-0{,}454545)] + \\ &+ 0{,}017643[220 \cdot (-0{,}454545) - 0 \cdot 0{,}500000]\} = 102{,}392136, \end{aligned}$$

$$\Phi_{p1} = 110 - \{109{,}075205 + 6{,}124694[0{,}5000002 + (-0{,}454545)2]\} = -1{,}871808,$$

$$\Phi_{q1} = 100 - \{102.392136 + 10.092333[0{,}5000002 + (-0{,}454545)2]\} = -7{,}000407.$$

Имея численные значения всех необходимых величин, определим

$$\frac{\partial F_{p1}}{\partial I_1'} = 2[-1,871808(-227,493051) - 7,000407(-13,632078)] = 1042,506814,$$

$$\frac{\partial F_{p1}}{\partial I_1''} = 2[-1,871808 \cdot 2,028153 - 7,00407 \cdot 230,543196] = -3220,199780.$$

Затем

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1'^2} = 2[(-227,493051)2 + (-13,632078)2 - 1,871808 \cdot (-12,249880) -$$
$$- 7,000407 \cdot (-20,184666)] = 104206,314208,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial I_1''^2} = 2[2,0281532 + 230,5431962 - 1,871808 \cdot (-12,249880) -$$
$$- 7,000407 \cdot (-20,184666)] = 106637,017853,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_1' \partial I_1''} = 2[(-227,493051) \cdot 2,028153 - 13,632078 \cdot 230,543196 -$$
$$-1,871808 \cdot 0 - 7,000407 \cdot 0] = -7208,347088,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial I_1'' \partial I_1'} = 2[2,028153 \cdot (-227,493051) + 230,543196 \cdot (-13,632078) -$$
$$-1,871808 \cdot 0 - 7,000407 \cdot 0] = -7208,347088.$$

Осуществим первый шаг, или первую итерацию, по отношению к вышеприведенным рекуррентным выражениям

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_1'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0,500000 \\ -0,454545 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 104206,304208 & -7208,347088 \\ -7208,347088 & 106637,017853 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1042,506814 \\ -3220,199780 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ \hdashline I_1'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}500000 \\ \hdashline -0{,}454545 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0{,}007952 \\ \hdashline -0{,}029660 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}492048 \\ \hdashline -0{,}424885 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ \hdashline I_1'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}492048 \\ \hdashline -0{,}424885 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим результат реализации математической подмодели верхней левой части первой подсистемы.

Перейдем к построению математической подмодели нижней правой части той же первой подсистемы. Для этого сначала остановимся на построении соответствующей математической подмодели.

Нелинейные алгебраические уравнения, представляющие соответствующую математическую подмодель, будут равны

$$\begin{aligned}
&\Phi_{p2} = P_2 - \left\{P_{Б2} + g_{2,2}\left(U_2'^2 + U_2''^2\right) + \left[g_{2,3}\left(U_2'U_3' + U_2''U_3''\right) + \right.\right.\\
&\left.\left. + b_{2,3}\left(U_2''U_3' - U_2'U_3''\right)\right]\right\} = 0,\\
&\Phi_{p3} = P_3 - \left\{P_{Б3} + g_{3,3}\left(U_3'^2 + U_3''^2\right) + \left[g_{3,2}\left(U_3'U_2' + U_3''U_2''\right) + \right.\right.\\
&\left.\left. + b_{3,2}\left(U_3''U_2' - U_3'U_2''\right)\right]\right\} = 0,\\
&\Phi_{q2} = Q_2 - \left\{Q_{Б2} - b_{2,2}\left(U_2'^2 + U_2''^2\right) + \left[g_{2,3}\left(U_2''U_3' - U_2'U_3''\right) - \right.\right.\\
&\left.\left. - b_{2,3}\left(U_2'U_3' + U_2''U_3''\right)\right]\right. = 0,\\
&\Phi_{q3} = Q_3 - \left\{Q_{Б3} - b_{3,3}\left(U_3'^2 + U_3''^2\right) + \left[g_{3,2}\left(U_3''U_2' - U_3'U_2''\right) - \right.\right.\\
&\left.\left. - b_{3,2}\left(U_3'U_2' + U_3''U_2''\right)\right]\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&P_{Б2} = U_2'I_{Б2}' + U_2''I_{Б2}'' + B_{2,1}'\left(U_2'I_1' + U_2''I_1''\right) + B_{2,1}''\left(U_2''I_1' - U_2'I_1''\right),\\
&P_{Б3} = U_3'I_{Б3}' + U_3''I_{Б3}'' + B_{3,1}'\left(U_3'I_1' + U_3''I_1''\right) + B_{3,1}''\left(U_3''I_1' - U_3'I_1''\right),\\
&Q_{Б2} = U_2''I_{2Б}' - U_2'I_{2Б}'' + B_{2,1}'\left(U_2''I_1' - U_2'I_1''\right) - B_{2,1}''\left(U_2'I_1' + U_2''I_1''\right),\\
&Q_{Б3} = U_3''I_{3Б}' - U_3'I_{3Б}'' + B_{3,1}'\left(U_3''I_1' - U_3'I_1''\right) - B_{3,1}''\left(U_2'I_1' + U_3''I_1''\right).
\end{aligned}$$

Полученную математическую модель (4.4) также нужно реализовать по методу второго порядка, для этого построим следующую квадратную функцию:

$$F(U) = \Phi_{p2}^2 + \Phi_{p3}^2 + \Phi_{q2}^2 + \Phi_{q3}^2. \tag{4.5}$$

Разложив квадратную функцию (4.5) в ряд Тейлора, после соответствующих модификаций можем построить решение рекуррентного выражения вышеприведенной системы уравнений

$$\begin{bmatrix} U_2' \\ U_3' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} U_2' \\ U_3' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_3'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_2''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_3''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_3' \partial U_2'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3' \partial U_2''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3' \partial U_3''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_2'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_3'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2''^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_3''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_3'' \partial U_2'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3'' \partial U_3'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3'' \partial U_2''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_3''^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial U_2'} \\ \frac{\partial F}{\partial U_3'} \\ \frac{\partial F}{\partial U_2''} \\ \frac{\partial F}{\partial U_3''} \end{bmatrix}.$$

Частные производные первого и второго порядка, входящие в данное рекуррентное выражение, определяются нижеприведенным выражением

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_2'} = 2\left(\Phi_{p2} \frac{\partial F_{p2}}{\partial U_2'} + \Phi_{p3} \frac{\partial F_{p3}}{\partial U_2'} + \Phi_{q2} \frac{\partial F_{q2}}{\partial U_2'} + \Phi_{q3} \frac{\partial F_{q3}}{\partial U_2'} \right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_3'} = 2\left(\Phi_{p2} \frac{\partial F_{p2}}{\partial U_3'} + \Phi_{p3} \frac{\partial F_{p3}}{\partial U_3'} + \Phi_{q2} \frac{\partial F_{q2}}{\partial U_3'} + \Phi_{q3} \frac{\partial F_{q3}}{\partial U_3'} \right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_2''} = 2\left(\Phi_{p2} \frac{\partial F_{p2}}{\partial U_2''} + \varphi_{p3} \frac{\partial F_{p3}}{\partial U_2'} + \varphi_{q2} \frac{\partial F_{q2}}{\partial U_2''} + \varphi_{q3} \frac{\partial F_{q3}}{\partial U_2''} \right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_3''} = 2\left(\Phi_{p2} \frac{\partial F_{p2}}{\partial U_3''} + \Phi_{p3} \frac{\partial F_{p3}}{\partial U_3'} + \Phi_{q2} \frac{\partial F_{q2}}{\partial U_3''} + \Phi_{q3} \frac{\partial F_{q3}}{\partial U_3''} \right).$$

Затем определим частные производные второго порядка неособенной квадратной матрицы Гессе

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'^2} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2'^2} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'^2} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3'^2} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3'^2} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3'^2} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2''^2} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2''^2} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2''^2} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3''^2} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3''^2} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3''^2} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3'} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3'} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_3'} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_3'} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_3'} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_3'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_2''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2''} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2''} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_2''} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_2''} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_2''} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_2''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2'}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_3''} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_3''} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_3''} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_3''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_2''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3'} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3'} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'' \partial U_3'} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2'' \partial U_3'} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'' \partial U_3'} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2'' \partial U_3'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_3''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3'}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3'}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3'}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3'}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3' \partial U_3''} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3' \partial U_3''} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3' \partial U_3''} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3' \partial U_3''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_3''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3''} + \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2''}\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p2}\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'' \partial U_3''} + \Phi_{p3}\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2'' \partial U_3''} + \Phi_{q2}\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'' \partial U_3''} + \Phi_{q3}\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2'' \partial U_3''}\right).$$

Необходимо иметь в виду следующее:

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3'} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_2'}, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_1' \partial U_1''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_1'' \partial U_1'}, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_2'},$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_2''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_3'}, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_{31}''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_3'}, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_3''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_2''}.$$

Определим частные производные первого и второго порядка по отношению к функциям Φ_p и Φ_q.

Прежде всего, определим частные производные первого порядка при равных индексах, когда $\ell_1 = k_1$,

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_2} = -\left[\frac{\partial P_{\text{Б}2}}{\partial U'_2} + 2g_{2,2}U'_2 + \left(g_{2,3}U'_3 - b_{2,3}U''_3\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U'_3} = -\left[\frac{\partial P_{\text{Б}3}}{\partial U'_3} + 2g_{3,3}U'_3 + \left(g_{3,2}U'_2 - b_{3,2}U''_2\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U'_2} = -\left[\frac{\partial Q_{\text{Б}2}}{\partial U'_2} - 2b_{2,2}U'_2 + \left(-g_{2,3}U''_3 - b_{2,3}U'_3\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U'_3} = -\left[\frac{\partial Q_{\text{Б}3}}{\partial U'_3} - 2b_{3,3}U'_3 + \left(-g_{3,2}U''_2 - b_{3,2}U'_2\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U''_2} = -\left[\frac{\partial P_{\text{Б}2}}{\partial U''_2} + 2g_{2,2}U''_2 + \left(g_{2,3}U''_3 + b_{2,3}U'_3\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U''_3} = -\left[\frac{\partial P_{\text{Б}3}}{\partial U''_3} + 2g_{3,3}U''_3 + \left(g_{3,2}U''_2 + b_{3,2}U'_2\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U''_2} = -\left[\frac{\partial Q_{\text{Б}2}}{\partial U''_2} - 2b_{2,2}U''_2 + \left(g_{2,3}U'_3 - b_{2,3}U''_3\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U''_3} = -\left[\frac{\partial Q_{\text{Б}3}}{\partial U''_3} - 2b_{3,3}U''_3 + \left(g_{3,2}U'_2 - b_{3,2}U''_2\right)\right].$$

При разных индексах, когда $\ell_1 \neq k_1$, получим

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_3} = -\left(g_{2,3}U'_2 + b_{2,3}U''_2\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U''_3} = -\left(g_{2,3}U''_2 - b_{2,3}U'_2\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U'_2} = -\left(g_{3,2}U'_3 + b_{3,2}U''_3\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U''_2} = -\left(g_{3,2}U''_3 - b_{3,2}U'_3\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U'_3} = -\left(g_{2,3}U''_2 - b_{2,3}U'_2\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U''_3} = -\left(g_{2,3}U'_2 - b_{2,3}U''_2\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U'_2} = -\left(g_{3,2}U''_3 - b_{3,2}U'_3\right), \qquad \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U''_2} = -\left(-g_{3,2}U'_3 - b_{3,2}U''_3\right).$$

Затем определим

$$\frac{\partial P_{Б2}}{\partial U_2'} = B_{2,1}' I_1' - B_{2,1}'' I_1'', \qquad \frac{\partial P_{Б2}}{\partial U_2''} = B_{2,1}' I_1'' + B_{2,1}'' I_1',$$

$$\frac{\partial P_{Б3}}{\partial U_3'} = B_{3,1}' I_1' - B_{3,1}'' I_1'', \qquad \frac{\partial P_{Б3}}{\partial U_3''} = B_{3,1}' I_3'' + B_{3,1}'' I_1',$$

$$\frac{\partial Q_{Б2}}{\partial U_2'} = -B_{2,1}' I_1'' - B_{2,1}'' I_1', \qquad \frac{\partial Q_{Б2}}{\partial U_2''} = B_{2,1}' I_1' - B_{2,1}'' I_1'',$$

$$\frac{\partial Q_{Б3}}{\partial U_3'} = -B_{3,1}' I_1'' - B_{3,1}'' I_1', \qquad \frac{\partial Q_{Б3}}{\partial U_3''} = B_{3,1}' I_1' - B_{3,1}'' I_1''.$$

Далее определим частные производные второго порядка по отношению к Φ_p и Φ_q, пользуясь выражениями частных производных первого порядка:

– при равных индексах

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б2}}{\partial U_2'^2} + 2g_{2,2}\right), \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3'^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б3}}{\partial U_3'^2} + 2g_{3,3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б2}}{\partial U_2''^2} + 2g_{2,2}\right), \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б3}}{\partial U_3''^2} + 2g_{3,3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б2}}{\partial U_2'^2} - 2b_{2,2}\right), \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3'^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б3}}{\partial U_3'^2} + 2b_{3,3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б2}}{\partial U_2''^2} - 2b_{2,2}\right), \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б3}}{\partial U_3''^2} - 2b_{3,3}\right).$$

Поскольку частные производные второго порядка функций $P_Б$ и $Q_Б$ типа равны нулю, тогда последние выражения примут следующий простейший вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'^2} = -2g_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3'^2} = -2g_{3,3},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2''^2} = -2g_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3''^2} = -2g_{3,3},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'^2} = 2b_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3'^2} = 2b_{3,3},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2''^2} = 2b_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3''^2} = 2b_{3,3}.$$

При разных индексах

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p_3}}{\partial U_2'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p_2}}{\partial U_3'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p_3}}{\partial U_2''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p_2}}{\partial U_3''^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q_3}}{\partial U_2'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q_2}}{\partial U_3'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q_3}}{\partial U_2''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q_2}}{\partial U_3''^2} = 0.$$

Определим численные значения частных производных

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'^2} = -2 \cdot 0{,}041115 = -0{,}082230,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3'^2} = -2 \cdot 0{,}040568 = -0{,}081136,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2''^2} = -2 \cdot 0{,}041115 = -0{,}082230,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3''^2} = -2 \cdot 0{,}040568 = -0{,}081136,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'^2} = 2\,(-0{,}074256) = -0{,}148512,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3'^2} = 2\,(-0{,}088237) = -0{,}0176474,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2''^2} = 2\,(-0{,}074256) = -0{,}148512,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3''^2} = 2\,(-0{,}088237) = -0{,}176474.$$

Для разных индексов

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2''^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3''^2} = 0.$$

Затем определим частные производные второго порядка смешанного типа

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_3'} = -g_{2,3} = 0,030179, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_3'} = b_{2,3} = 0,056279,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_3'} = -g_{3,2} = 0,030179, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_3'} = b_{3,2} = 0,056279,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_2''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_2''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_2''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_2''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2' \partial U_3''} = b_{2,3} = 0,056279, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2' \partial U_3''} = g_{2,3} = -0,030179,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2' \partial U_3''} = -b_{3,2} = -0{,}056279, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2' \partial U_3''} = -g_{3,2} = 0{,}030179,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'' \partial U_3'} = -b_{2,3} = -0{,}056279, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'' \partial U_3'} = -g_{2,3} = 0{,}030179,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3' \partial U_3''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_3' \partial U_3''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_3' \partial U_3''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_3' \partial U_3''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_2'' \partial U_3''} = -g_{2,3} = 0{,}030179, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q2}}{\partial U_2'' \partial U_3''} = b_{2,3} = 0{,}056279,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p3}}{\partial U_2'' \partial U_3''} = -g_{3,2} = 0{,}030179, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_2'' \partial U_3''} = b_{3,2} = 0{,}056279.$$

Затем определим численные значения вышеприведенных выражений

$$\Phi_{p2} = -100 - \{-639{,}257223 + 0{,}041115(2202 + 02) +$$
$$+ [-0{,}030179(2202 + 02) + 0{,}056279(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0)]\} = 9{,}954823,$$

$$\Phi_{p3} = -60 - \{-355{,}568148 + 0{,}040568(2202 + 02) +$$
$$+ [-0{,}030179(2202 + 02) + 0{,}056279(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0)]\} = 207{,}259452,$$

$$\Phi_{q2} = -50 - \{-907{,}602971 + 0{,}074256(2202 + 02) +$$
$$+ [-0{,}030179(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0) - 0{,}056279(2202 + 02)]\} = 12{,}483829,$$

$$\Phi_{q3} = -30 - \{-1655{,}716199 + 0{,}088237(220^2 + 0^2) +$$
$$+ [-0{,}030179(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0) - 0{,}056279(220^2 + 0^2)]\} = 78{,}948999.$$

$$P_{\text{Б}2} = 220\left(-2{,}633948\right) + 0 \cdot 3{,}892311 - 0{,}550795 \times$$
$$\times \left[220 \cdot 0{,}492048 + 0 \cdot \left(-0{,}424885\right)\right] - 0{,}001763\left[0 \cdot 0{,}492048 -\right.$$
$$\left. - 220\left(-0{,}424885\right)\right] = -639{,}257223\,,$$

$$P_{\text{Б}3} = 220\,(-1{,}628348) + 0 \cdot 7{,}529486 + 0{,}017643\left[220 \cdot 0{,}492048 +\right.$$
$$\left. + 0(-0{,}424885)\,\right] + 0{,}008115\left[0 \cdot 0{,}492048 -\right.$$
$$\left. - 220\,(-0{,}424885)\,\right] = -355{,}568148\,,$$

$$Q_{\text{Б}2} = 0 \cdot (-2{,}633948) - 220 \cdot 3{,}892311 - 0{,}550795\left[0 \cdot 0{,}492048 -\right.$$
$$\left. - 220\ 0 \cdot (-0{,}424885)\right] + 0{,}001763\left[220 \cdot 0{,}492048 +\right.$$
$$\left. + 0 \cdot (-0{,}424885)\right] = -907{,}602971,$$

$$Q_{\text{Б}3} = 0 \cdot (-1{,}628348) - 220 \cdot 7{,}529486 + 0{,}017643\left[0 \cdot 0{,}492048 -\right.$$
$$\left. - 220(-0{,}424885)\right] - 0{,}008115\left[220 \cdot 0{,}492048 +\right.$$
$$\left. + 0 \cdot (-0{,}424885)\right] = -1655{,}716199,$$

$$\frac{\partial P_{\text{Б}2}}{\partial U_2'} = -0{,}550795 \cdot 0{,}492048 + 0{,}001763(-0{,}424885) = -0{,}271766,$$

$$\frac{\partial P_{\text{Б}2}}{\partial U_2''} = -0{,}550795(-0{,}424885) - 0{,}001763 \cdot 0{,}492048 = 0{,}233157,$$

$$\frac{\partial P_{\text{Б}3}}{\partial U_3'} = 0{,}017643 \cdot 0{,}492048 - 0{,}008115(-0{,}424885) = 0{,}012129,$$

$$\frac{\partial P_{\text{Б}3}}{\partial U_3''} = 0{,}017643(-0{,}424885) + 0{,}008115 \cdot 0{,}492048 = -0{,}003503,$$

$$\frac{\partial Q_{Б2}}{\partial U_2'} = 0{,}550795(-0{,}424885) + 0{,}001763 \cdot 0{,}492048 = -0{,}233157,$$

$$\frac{\partial Q_{Б2}}{\partial U_2''} = -0{,}550795 \cdot 0{,}492048 + 0{,}001763(-0{,}424885) = -0{,}271766,$$

$$\frac{\partial Q_{Б3}}{\partial U'_3} = -0{,}017643(-0{,}424885) - 0{,}008115 \cdot 0{,}492048 = 0{,}003503,$$

$$\frac{\partial Q_{Б3}}{\partial U_3''} = 0{,}017643 \cdot 0{,}492048 - 0{,}008115(-0{,}424885) = 0{,}012129.$$

При разных индексах

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'} = -[-0{,}271766 + 2 \cdot 0{,}041115 \cdot 220 + (-0{,}030179 \cdot 220 -$$
$$-0{,}056279 \cdot 0)] = -11{,}179454,$$
$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3'} = -\left[0{,}12129 + 2 \cdot 0{,}040568 \cdot 220 + (-0{,}030179 \cdot 220 -\right.$$
$$\left.-0{,}056279 \cdot 0)\right] = -11{,}222669,$$
$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''} = -[0{,}233157 + 2 \cdot 0{,}041115 \cdot 0 + (-0{,}030179 \cdot 0 +$$
$$+0{,}056279 \cdot 220)] = -12{,}614537,$$
$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3''} = -\left[-0{,}003503 + 2 \cdot 0{,}040568 \cdot 0 + (-0{,}030179 \cdot 0 +\right.$$
$$\left.+0{,}056279 \cdot 220)\right] = -12{,}377877,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2'} = -[-0{,}233157 - 2 \cdot (-0{,}074256)220 + (0{,}030179 \cdot 0 -$$
$$-0{,}056279 \cdot 220)] = -20{,}058103,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3'} = -[0{,}003503 - 2 \cdot 0{,}088237 \cdot 220 + (0{,}030179 \cdot 0 -$$
$$-0{,}056279 \cdot 220)] = 51.202157,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2''} = -[-0{,}271766 - 2(-0{,}074256)\cdot 0 + (-0{,}030179\cdot 220 -$$
$$-0{,}056790\cdot 0)] = 6{,}911146,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3''} = -\left[0{,}012129 - 2\cdot(-0{,}088237)0 + (-0{,}030179\cdot 220 -\right.$$
$$\left.-0{,}056279\cdot 0)\right] = 6{,}627251,$$

При разных индексах

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3'} = -(-0{,}030179\cdot 220 + 0{,}056279\cdot 0) = 6{,}639380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2'} = -(-0{,}030179\cdot 220 + 0{,}056279\cdot 0) = 6{,}639380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3'} = -(-0{,}030179\cdot 0 - 0{,}056279\cdot 220) = 12{,}381380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2'} = -(-0{,}030179\cdot 0 - 0{,}056279\cdot 220) = 12{,}381380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3''} = -(-0{,}030179\cdot 0 - 0{,}056279\cdot 220) = 12{,}381380,$$
$$\frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial U_2''} = -(-0{,}030179\cdot 0 - 0{,}056279\cdot 220) = 12{,}381380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3''} = -(0{,}030179\cdot 220 - 0{,}056279\cdot 0) = -6{,}639380,$$
$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2''} = -(0{,}030179\cdot 220 - 0{,}056279\cdot 0) = -6{,}639380.$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_2'} = 2[9{,}954823(-11{,}179454) - 207{,}259452\cdot 6{,}639380 -$$
$$-12{,}483829(-20{,}058103) + 78{,}948999\cdot 12{,}381380] = -518{,}928522,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_3'} = 2[9{,}954823 \cdot 6{,}639380 - 207{,}259452(-11{,}179454) -$$
$$-12{,}483849 \cdot 12{,}381380 + 78{,}948999 \cdot 51{,}202157] = 12559{,}780181,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_2''} = 2[9{,}954823(-12{,}614537) - 207{,}259452 \cdot 12{,}381380 -$$
$$-12{,}483829 \cdot 6{,}911146 + 78{,}948999(-6{,}639380)] = -6604{,}366973,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_3''} = 2[9{,}954823 \cdot 12{,}381380 - 207{,}259452(-12{,}377877) -$$
$$-12{,}483829(-6{,}639380) + 78{,}948999 \cdot 6{,}627251] = 6589{,}572334.$$

Подсчитаем численные значения частных производных второго порядка матрицы Гессе

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'^2} = 2[(-11{,}179454)2 + 6{,}6292802 + (-20{,}058103)2 + 12{,}3813802 +$$
$$+9{,}954823(-0{,}082230) - 207{,}259452 \cdot 0 -$$
$$-12{,}483829(-0{,}148512) + 78{,}948999 \cdot 0] = 1451{,}446077,$$

$$\frac{\partial F^2(U)}{\partial U_3'^2} = 2[6{,}6393802 + (-11{,}222669)2 + 12{,}3813802 + 51{,}2021572 +$$
$$+9{,}954823 \cdot 0 - 207{,}259452(-0{,}081136) - 12{,}483829 \cdot 0 +$$
$$+78{,}948999(-0{,}176474)] = 5895{,}745751,$$

$$\frac{\partial F^2(U)}{\partial U_2''^2} = 2[(-12{,}614537)2 + 12{,}3813802 + 6{,}9111462 + (-6{,}639380)2 +$$
$$+9{,}954823 \cdot (-0{,}082230) - 207{,}259452 \cdot 0 -$$
$$-12{,}483829(-0{,}148512) + 78{,}948999 \cdot 0] = 810{,}611667,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3''^2} = 2[12,381380 2 + (-12,377877) 2 + (-6,39380) 2 + 6,6272512 +$$

$$+ 9,954823 \cdot 0 - 207,259452 (-0,081136) - 12,483829 \cdot 0 +$$

$$+ 78,948999(-0,176474)] = 794,7919779,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3'} = 2[-11,179454 + 6,639380 + 6,639380(-11,222669) -$$

$$- 20,058103 \cdot 12,381380 + 1,381380 \cdot 51,202157 +$$

$$+ 9,954823 \cdot 0,030179 - 207,259452 \cdot 0,030179 -$$

$$- 12,483829 \cdot 0,056279 + 78,948999 \cdot 0,056279] = 1453,480061,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_2''} = 2[-11,179454(-12,614537) + 6,639380 \cdot 12,381380 -$$

$$- 20,058103 \cdot 6,911146 + 12,381380(-6,639380) +$$

$$+ 9,954823 \cdot 0 - 207,259452 \cdot 0 - 12,483829 \cdot 0 +$$

$$+ 78,948999 \cdot 0] = 4,798315,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2' \partial U_3''} = 2[-11,179454 \cdot 12,381380 \cdot 6,639380(-12,377877) -$$

$$- 20,058103(-6,639380) + 12,381380 \cdot 6,627251 +$$

$$+ 9,954823 \cdot 0,056279 - 207,259452(-0,056279) -$$

$$- 12,483829(-0,030179) + 78,948999 \cdot 0,030179] = 19,226674,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_2''} = 2[-12,614537 \cdot 6,639380 + 12,381380(-11,222669) +$$

$$+ 6,611146 \cdot 12,381380 - 6,639380 \cdot 51,202157 +$$

$$+ 9,954823(-0,056279) - 207,259452 \cdot 0,056279 -$$

$$- 12,483829 \cdot 0,030179 + 78,948999(-0,030179)] = 39,508084,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_3''} = 2[6{,}639380 \cdot 12{,}381380 - 11{,}222669(-12{,}377877) +$$
$$+ 12{,}381380(-6{,}639380) - 5{,}51202157 \cdot 6{,}627251 +$$
$$+ 9{,}954823 \cdot 0 - 207{,}259452 \cdot 0 - 12{,}483829 \cdot 0 +$$
$$+ 78{,}948999 \cdot 0] = 628{,}357553,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_3''} = 2[-12{,}614537 \cdot 12{,}381380 + 12{,}381380(-12{,}377877) +$$
$$+ 6{,}911146(-6{,}639380) - 6{,}639380 \cdot 6{,}627251 +$$
$$+ 9{,}954823 \cdot 0{,}030179 - 207{,}259452 \cdot 0{,}030179 -$$
$$- 12{,}483829 \cdot 0{,}056279 + 78{,}948999 \cdot 0{,}056279] = -803{,}0820000,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3' \partial U_2'} = -1453{,}480061, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_2'} = 4{,}798315,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_2'} = 19{,}226674, \qquad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_2'' \partial U_3'} = 39{,}508084,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_3'} = 628{,}57553, \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_3'' \partial U_2''} = -803{,}0820000.$$

В результате мы имеем все численные значения, входящие в рекуррентное выражение, и можем осуществить первый шаг

$$\begin{bmatrix} U_2' \\ U_3' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 1451{,}446077 & -1453{,}480061 & 4{,}798315 & 19{,}226674 \\ -1453{,}480061 & 2053{,}364963 & 39{,}508084 & 628{,}357553 \\ 4{,}798315 & 39{,}508084 & 810{,}611667 & -803{,}0820000 \\ 19{,}226674 & 628{,}357553 & -803{,}0820000 & 794{,}791979 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -518{,}9285 \\ 299{,}228009 \\ -6604{,}366973 \\ 6589{,}572334 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_2' \\ U_3' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -0{,}253681 \\ 0{,}079023 \\ -8{,}015827 \\ 0{,}135165 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим результат реализации математической подмодели нижней правой части первой подсистемы

$$\begin{bmatrix} U'_2 \\ \hdashline U'_3 \\ \hline U''_2 \\ \hdashline U''_3 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220{,}253681 \\ \hdashline 219{,}920976 \\ \hline 8{,}015827 \\ \hdashline -0{,}135165 \end{bmatrix}.$$

В результате осуществляется один полный шаг, или итерация, для первой подсистемы. Разберем вторую подсистему.

Определим напряжение третьего приграничного узла первой и второй подсистем

$$\dot{U}_3 = U'_3 + jU''_3 = 219{,}920976 - j0{,}135165.$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{\text{Б}m_2} \\ \\ \dot{U}_{\text{Б}m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\text{Б}_4} \\ \dot{U}_{\text{Б}_5} \\ \dot{U}_{\text{Б}_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_{Б_4} \\ U'_{Б_5} \\ U'_{Б_6} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} U''_{Б_4} \\ U''_{Б_5} \\ U''_{Б_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227{,}098862 \\ 231{,}365329 \\ 234{,}774236 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} -5{,}292140 \\ -9{,}703126 \\ -11{,}925609 \end{bmatrix}.$$

Затем подсчитаем комплексный ток $\dot{I}_{k_2\text{Б}}$

$$\dot{I}_{k_2\text{Б}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{5\text{Б}} \\ \dot{I}_{6\text{Б}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{5\text{Б}} \\ \dot{U}_{6\text{Б}} \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0{,}032557 - j0{,}049670 & -0{,}026916 + j0{,}037995 \\ -0{,}026916 + j0{,}037995 & 0{,}043871 - j0{,}064693 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 231{,}356329 - j9{,}703126 \\ 234{,}774236 - j11{,}925609 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}184536 + j2{,}566583 \\ -3{,}669518 + j6{,}659543 \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$\dot{I}_{k_2\text{Б}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{5\text{Б}} \\ \dot{I}_{6\text{Б}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_{5\text{Б}} \\ I'_{6\text{Б}} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} I''_{5\text{Б}} \\ I''_{6\text{Б}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,184536 \\ -3,669518 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 2,566583 \\ 6,659543 \end{bmatrix}.$$

Затем подсчитаем $U'_{4,\text{Б}}, U''_{4,\text{Б}}$ величины следующим образом:

$$\dot{U}_{m_2\text{Б}} = \dot{U}_{\text{Б}m_2} - Z_{m_2k_2} Y_{\ell_2k_2} \dot{U}_{\text{Б}\ell_2} = \dot{U}_{\text{Б}_4} -$$
$$-\left[5,700000 + j11,200000 \quad 5,700000 + j11,200000\right] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 0,041115 - j6,823300 & -0,030179 + j0,056279 \\ -0,030179 + j0,056279 & j0,040568 - j0,088237 \end{bmatrix} =$$
$$= \left[227,098862 - j5,292140\right] - \left[131,000734 + j1,776494\right] =$$
$$= \left[96,098128 - j7,068634\right].$$

Получив численное значение $\hat{U}_{m_2\text{Б}} = \dot{U}_{4,\text{Б}}$ комплексной величины, можем построить систему нелинейных алгебраических уравнений верхней левой части второй подсистемы

$$\begin{cases} \Phi_{p4} = P_4 - \left[P_{\text{Б}4} + R_{44}\left(I_4'^2 + I_4''^2\right)\right] = 0, \\ \Phi_{q4} = Q_4 - \left[Q_{\text{Б}4} + X_{44}\left(I_4'^2 + I_4''^2\right)\right] = 0, \end{cases}$$

где

$$P_{\text{Б}4} = U'_{\text{Б}4} I'_4 + U''_{\text{Б}4} I''_4 + \left[A'_{45}\left(U'_5 I'_4 + U''_5 I''_4\right) + A''_{45}\left(U'_5 I''_4 - U''_5 I'_4\right)\right] +$$
$$+ \left[A'_{46}\left(U'_6 I'_4 + U''_6 I''_4\right) + A''_{46}\left(U'_6 I''_4 - U''_6 I'_4\right)\right],$$

$$Q_{\text{Б}4} = U''_{\text{Б}4} I'_4 - U'_{\text{Б}4} I''_4 + \left[A''_{45}\left(U'_5 I'_4 + U''_5 I''_4\right) - A'_{45}\left(U'_5 I''_4 - U''_5 I'_4\right)\right] +$$
$$+ \left[A''_{46}\left(U'_6 I'_4 + U''_6 I''_4\right) - A'_{46}\left(U'_6 I''_4 - U''_6 I'_4\right)\right].$$

Построив квадратичную функцию

$$F(I_4) = \Phi_{p4}^2 + \Phi_{q4}^2,$$

строим рекуррентное выражение реализации математической подмодели верхней левой части второй подсистемы, которое имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} I_4' \\ -- \\ I_4'' \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I_4' \\ -- \\ I_4'' \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 F_4}{\partial I_4'^2} & \dfrac{\partial^2 F_4}{\partial I_4' \partial I_4''} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F_4}{\partial I_4'' \partial I_4'} & \dfrac{\partial^2 F_4}{\partial I_4''^2} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_4}{\partial I_4'} \\ \hline \dfrac{\partial F_4}{\partial I_4''} \end{bmatrix}.$$

Частные производные первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial F_4}{I_4'} = 2\left(\Phi_{p4} \frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} + \Phi_{q4} \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} \right),$$

$$\frac{\partial F_4}{I_4''} = 2\left(\Phi_{p4} \frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} + \Phi_{q4} \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} \right).$$

Частные производные второго порядка, входящие в матрицу Гессе, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} \right)^2 + \Phi_{p4} \frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4'^2} + \Phi_{q4} \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4'^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} \right)^2 + \Phi_{p4} \frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4''^2} + \Phi_{q1} \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4''^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4' \partial I_4''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} + \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} + \Phi_{p4} \frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4' \partial I_4''} + \Phi_{q4} \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4' \partial I_4''} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4'' \partial I_4'} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} + \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} + \Phi_{p4} \frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4'' \partial I_4'} + \Phi_{q4} \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4'' \partial I_4'} \right).$$

Вышеприведенные частные производные первого и второго порядка функций Φ_{p4} и Φ_{q4} типа определяются:

– частные производные первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} = -\left(\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4'} + 2 \cdot R_{44} I_4' \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} = -\left(\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4''} + 2 \cdot R_{44} I_4'' \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} = -\left(\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4'} + 2 \cdot X_{44} I_4' \right), \qquad \frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} = -\left(\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4''} + 2 \cdot X_{44} I_4'' \right).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4'} = U_{Б4}' + \left(A_{45}' U_5' - A_{45}'' U_5'' \right) + \left(A_{46}' U_6' - A_{46}'' U_6'' \right),$$

$$\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4''} = U_{Б4}'' + \left(A_{45}' U_5'' + A_{45}'' U_5' \right) + \left(A_{46}' U_6'' + A_{46}'' U_6' \right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4'} = U_{Б4}'' + \left(A_{45}'' U_5' + A_{45}' U_5'' \right) + \left(A_{46}'' U_6' + A_{46}' U_6'' \right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4''} = -U_{Б4}' + \left(A_{45}'' U_5'' - A_{45}' U_5' \right) + \left(A_{46}'' U_6'' - A_{46}' U_6' \right).$$

Частные производные второго порядка определяются следующими выражениями:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4'^2} = -2R_{4,4}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4'^2} = -2X_{4,4},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4''^2} = -2R_{4,4}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4''^2} = -2X_{4,4}.$$

Частные производные смешанного типа определяются

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4' \partial I_4''} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4'' \partial I_4'} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4' \partial I_4''} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4'' \partial I_4'} = 0.$$

Определим численные значения величин Φ_{p4} и Φ_{q4}

$$\begin{aligned} P_{Б4} &= 96{,}098128 \cdot 0{,}318181 + (-7{,}068634)(-0{,}231818) + \\ &+ \{0{,}162913[220 \cdot 0{,}318181 + 0 \cdot (-0{,}231818)] - \\ &- 0{,}003368[220 \cdot (-0{,}231818) - 0 \cdot 0{,}318181]\} + \\ &+ \{0{,}3956561[220 \cdot 0{,}318181 + 0(-0{,}231818)] + \\ &+ 0{,}037717[220 \cdot (-0{,}231818) - 0 \cdot 0{,}318181]\} = 69{,}563516, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{Б4} &= -7{,}068634 \cdot 0{,}318181 - 96{,}098128 \cdot (-0{,}231818) + \\ &+ \{-0{,}003368[220 \cdot 0{,}318181 + 0 \cdot (-0{,}231818)] - \\ &- 0{,}162913[220 \cdot (-0{,}231818) - 0 \cdot 0{,}318181]\} + \\ &+ \{0{,}037717[220 \cdot 0{,}318181 + 0 \cdot (-0{,}231818)] - \\ &- 0{,}395661[220 \cdot (-0{,}231818) - 0 \cdot 0{,}318181]\} = 50{,}919846, \end{aligned}$$

$$\Phi_{p4} = 70 - \{69{,}56516 + 2{,}900837[0{,}3181812 + (-0{,}231818)2]\} = -0{,}013084,$$
$$\Phi_{q4} = 51 - \{50{,}919846 + 4{,}748182[0{,}31818182 + (-0{,}231818)2]\} = -0{,}655713.$$

Определим численные значения частных производных первого порядка

$$\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4'} = 96{,}098128 + 0{,}162913 \cdot\ 220 + 0{,}003368 \cdot\ 0 +$$
$$+0{,}395661 \cdot\ \ 220 - 0{,}037717 \cdot\ 0 = 218{,}984408,$$

$$\frac{\partial P_{Б4}}{\partial I_4''} = -7{,}068634 + 0{,}162913 \cdot 0 - 0{,}003368 \cdot 220 +$$
$$+ 0{,}395661 \cdot 0 + 0{,}037717 \cdot 220 = 0{,}488146,$$

$$\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4'} = -7{,}068634 - 0{,}003368 \cdot 220 + 0{,}162913 \cdot 0 +$$
$$+ 0{,}037717 \cdot 220 + 0{,}395661 \cdot 0 = 0{,}488146,$$

$$\frac{\partial Q_{Б4}}{\partial I_4''} = -96{,}098128 - 0{,}03368 \cdot 220 + 0{,}037717 \cdot 0 -$$
$$- 0{,}395661 \cdot 220 = -218{,}984408,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4'} = \left[218{,}984408 + 2 \cdot 2{,}900837 \cdot 0{,}318181\right] = -220{,}830390,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p4}}{\partial I_4''} = \left[0{,}488146 + 2 \cdot 2{,}900837 \cdot (0{,}231818)\right] = 0{,}856786,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4'} = \left[0{,}488146 + 2 \cdot 4{,}748182 \cdot 0{,}318181\right] = -3{,}509708,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q4}}{\partial I_4''} = \left[-\ 218{,}984408 + 2 \cdot 4{,}748182 \cdot (0{,}231818)\right] = 221{,}185836.$$

Затем

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4'^2} = -2 \cdot 2{,}900837 = -5{,}801674,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p4}}{\partial I_4''^2} = -2 \cdot 2{,}900837 = -5{,}801674,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4'^2} = -2 \cdot 4{,}748182 = -9{,}496364,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q4}}{\partial I_4''^2} = -2 \cdot 4{,}748182 = -9{,}496364.$$

Имея численные значения всех необходимых величин, определим

$$\frac{\partial F_{p4}}{\partial I_4'} = 2[-0{,}013084 \cdot (-220{,}830390) - 0{,}655713 \cdot (-3{,}509708)] = 10{,}381411,$$

$$\frac{\partial F_{p4}}{\partial I_4''} = 2[-0{,}013084 \cdot 0{,}856786 - 0{,}655713 \cdot 221{,}185836] = -290{,}091276.$$

Затем

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4'^2} = 2[(-22{,}.830390)\,2 + (-3{,}50908)\,2 - 0{,}010384(-5{,}801674) -$$
$$- 0{,}656713(-9{,}496364)] = 97569{,}363992,$$
$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial I_4''^2} = 2[0{,}856786\,2 + 221{,}185836\,2 - 0{,}013084 - 5{,}801674) -$$
$$- 0{,}656713(\text{-}9{,}496364)] = 97860{,}421855,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial I_4' \partial I_4''} = 2[-220{,}830390 \cdot 0{,}856786 - 3{,}509708 \cdot 221{,}185836 -$$
$$- 0{,}010384 \cdot 0 - 0{,}6557130 = -1931{,}004169,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial I_4'' \partial I_4'} = 2[0{,}856786(-22.830390) + 221{,}185836(-3{,}509708) -$$
$$- 0{,}010384 \cdot 0 - 0{,}655713 \cdot 0 = -1931{,}004169.$$

Осуществим первый шаг вышеприведенным выражением

$$\begin{bmatrix} I_4' \\ \hdashline I_4'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}318181 \\ \hdashline -0{,}231818 \end{bmatrix}^0 - \left[\begin{array}{c:c} 97{,}569{,}363992 & -1931{,}004169 \\ \hdashline -1931{,}004169 & 97860{,}421855 \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 10{,}381411 \\ \hdashline -290{,}091276 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_4' \\ \hdashline I_4'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}318181 \\ \hdashline -0{,}231818 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}000048 \\ \hdashline -0{,}002964 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}318133 \\ \hdashline -0{,}228854 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим результат реализации математической подмодели верхней левой части первой подсистемы

$$\begin{bmatrix} I_4' \\ \hdashline I_4'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}318133 \\ \hdashline -0{,}228854 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к построению математической подмодели нижней правой части той же подсистемы. Соответствующие математические подмодели, представляющие нелинейные алгебраические уравнения, будут иметь следующий вид:

$$\Phi_{p5} = \left\{P_5 - P_{Б5} + g_{5,5}\left(U_5'^2 + U_5''^2\right) + \left[g_{5,6}\left(U_5'U_6' + U_5''U_6''\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_{5,6}\left(U_5''U_6' - U_5'U_6''\right)\right]\right\} = 0,$$

$$\Phi_{p6} = P_6 - \left\{P_{Б6} + g_{6,6}\left(U_6'^2 + U_6''^2\right) + \left[g_{6,5}\left(U_6'U_5' + U_6''U_5''\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_{6,5}\left(U_6''U_5' - U_6'U_5''\right)\right]\right\} = 0,$$

$$\varPhi_{q5} = \Big\{Q_5 - Q_{Б5} - b_{5,5}\Big(U_5'^2 + U_5''^2\Big) + \big[g_{5,6}\big(U_5''U_6' - U_5'U_6''\big) -$$
$$- b_{5,6}\big(U_5'U_6' + U_5''U_6''\big)\big]\Big\} = 0,$$

$$\varPhi_{q6} = Q_6 - \Big\{Q_{Б6} - b_{6,6}\Big(U_6'^2 + U_6''^2\Big) + \big[g_{6,5}\big(U_6''U_5' - U_6'U_5''\big) -$$
$$- b_{6,5}\big(U_6'U_5' + U_6''U_5''\big)\big]\Big\} = 0.$$

С другой стороны,

$$P_{Б5} = U_5'I_{Б5}' + U_5''I_{Б5}'' + B_{5,4}'\big(U_5'I_4' + U_5''I_4''\big) + B_{5,4}''\big(U_5''I_4' - U_5'I_4''\big),$$

$$P_{Б6} = U_6'I_{Б6}' + U_6''I_{Б6}'' + B_{6,4}'\big(U_6'I_4' + U_6''I_4''\big) + B_{6,4}''\big(U_6''I_4' - U_6'I_4''\big),$$

$$Q_{Б5} = U_5''I_{5Б}' - U_5'I_{5Б}'' + B_{5,4}'\big(U_5''I_4' - U_5'I_4''\big) - B_{5,4}''\big(U_5'I_4' + U_5''I_4''\big),$$

$$Q_{Б6} = U_6''I_{6Б}' - U_6'I_{6Б}'' + B_{6,4}'\big(U_6''I_4' - U_6'I_4''\big) - B_{6,4}''\big(U_6'I_4' + U_6''I_4''\big).$$

Согласно функции (3.50)

$$F(U) = \Phi_{p5}^2 + \Phi_{p6}^2 + \Phi_{q5}^2 + \Phi_{q6}^2$$

рекуррентное выражение реализации полученной математической модели будет равно

$$\begin{bmatrix} U_5' \\ U_6' \\ U_5'' \\ U_6'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} U_5' \\ U_6' \\ U_5'' \\ U_6'' \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5'^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5'\partial U_6'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5'\partial U_5''} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5'\partial U_6''} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6'\partial U_5'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6'^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6'\partial U_5''} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6'\partial U_6''} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5''\partial U_5'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5''\partial U_6'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5''^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_5''\partial U_6''} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6''\partial U_5'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6''\partial U_6'} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6''\partial U_5''} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_6''^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial U_5'} \\ \dfrac{\partial F}{\partial U_6'} \\ \dfrac{\partial F}{\partial U_5''} \\ \dfrac{\partial F}{\partial U_6''} \end{bmatrix}.$$

Определим частные производные первого порядка данного рекуррентного выражения

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_5'} = 2\left(\Phi_{p5}\frac{\partial F_{p5}}{\partial U_5'} + \Phi_{p6}\frac{\partial F_{p6}}{\partial U_5'} + \Phi_{q5}\frac{\partial F_{q5}}{\partial U_5'} + \Phi_{q6}\frac{\partial F_{q6}}{\partial U_5'}\right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_6'} = 2\left(\Phi_{p5}\frac{\partial F_{p5}}{\partial U_6'} + \Phi_{p6}\frac{\partial F_{p6}}{\partial U_6'} + \Phi_{q5}\frac{\partial F_{q5}}{\partial U_6'} + \Phi_{q6}\frac{\partial F_{q6}}{\partial U_6'}\right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_5''} = 2\left(\Phi_{p5}\frac{\partial F_{p5}}{\partial U_5''} + \Phi_{p6}\frac{\partial F_{p6}}{\partial U_5'} + \Phi_{q5}\frac{\partial F_{q5}}{\partial U_5''} + \Phi_{q6}\frac{\partial F_{q6}}{\partial U_5''}\right),$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_6''} = 2\left(\Phi_{p5}\frac{\partial F_{p5}}{\partial U_6''} + \Phi_{p6}\frac{\partial F_{p6}}{\partial U_6'} + \Phi_{q5}\frac{\partial F_{q5}}{\partial U_6''} + \Phi_{q6}\frac{\partial F_{q6}}{\partial U_6''}\right).$$

Затем определим частные производные второго порядка неособенной квадратной матрицы Гессе

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5'}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \Phi_{p5}\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'^2} + \Phi_{p6}\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'^2} + \Phi_{q5}\frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'^2} + \Phi_{q6}\frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6'}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \Phi_{p5}\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_6'^2} + \Phi_{p6}\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6'^2} + \Phi_{q5}\frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6'^2} + \Phi_{q6}\frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5''^2} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5''^2} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5''^2} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_6''^2} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6''^2} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6''^2} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6'} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5'} \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5'} \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5'} \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5'} \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6'} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_6'} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_6'} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5' \partial U_6'} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_6'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_5''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5''} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5''} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5''} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_5''} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_5''} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5' \partial U_5''} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_5''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_6''} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_6''} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5' \partial U_6''} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_6''}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6'} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6'} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'' \partial U_6'} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'' \partial U_6'} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'' \partial U_6'} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'' \partial U_6'} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_6''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_6' \partial U_6''} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6' \partial U_6''} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6' \partial U_6''} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6' \partial U_6''} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_6''} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U_6''} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_5''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U_6''} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p5} \frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'' \partial U_6''} + \Phi_{p6} \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'' \partial U_6''} + \Phi_{q5} \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'' \partial U_6''} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'' \partial U_6''} \right).$$

Необходимо иметь в виду следующее отношение:

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6'} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5'}; \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_5''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_5'}; \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_5'},$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_6'}; \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_6'}; \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_6''} = \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_5''}.$$

Определим частные производные первого и второго порядка по отношению к функциям Φ_p и Φ_q.

Сначала определим частные производные первого порядка при равных индексах, когда $\ell_1 = k_1$,

$$\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U_5'} = -\left[\frac{\partial P_{Б5}}{\partial U_5'} + 2g_{5,5}U_5' + \left(g_{5,6}U_6' - b_{5,6}U_6''\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U'_6} = -\left[\frac{\partial P_{Б6}}{\partial U'_6} + 2g_{6,6}U'_6 + \left(g_{6,5}U'_5 - b_{6,5}U''_5\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U'_5} = -\left[\frac{\partial Q_{Б5}}{\partial U'_5} - 2b_{5,5}U'_5 + \left(-g_{5,6}U''_6 - b_{5,6}U'_6\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U'_6} = -\left[\frac{\partial Q_{Б6}}{\partial U'_6} - 2b_{6,6}U'_6 + \left(-g_{6,5}U''_5 - b_{6,5}U'_5\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U''_5} = -\left[\frac{\partial P_{Б5}}{\partial U''_5} + 2g_{5,5}U''_5 + \left(g_{5,6}U''_6 + b_{5,6}U'_6\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U''_6} = -\left[\frac{\partial P_{Б6}}{\partial U''_6} + 2g_{6,6}U''_6 + \left(g_{6,5}U''_5 + b_{6,5}U'_5\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U''_5} = -\left[\frac{\partial Q_{Б5}}{\partial U''_5} - 2b_{5,5}U''_5 + \left(g_{5,6}U'_6 - b_{5,6}U''_6\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U''_6} = -\left[\frac{\partial Q_{Б6}}{\partial U''_6} - 2b_{6,6}U''_6 + \left(g_{6,5}U'_5 - b_{6,5}U''_5\right)\right].$$

При разных индексах, когда $\ell_1 \neq k_1$, получим

$$\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U'_6} = -\left(g_{5,6}U'_5 + b_{5,6}U''_5\right), \ \frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial U''_6} = -\left(g_{5,6}U''_5 - b_{5,6}U'_5\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U'_5} = -\left(g_{6,5}U'_6 + b_{6,5}U''_6\right), \ \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial U''_5} = -\left(g_{6,5}U''_6 - b_{6,5}U'_6\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U'_6} = -\left(g_{5,6}U''_5 - b_{5,6}U'_5\right), \ \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial U''_6} = -\left(g_{5,6}U'_5 - b_{5,6}U''_5\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U'_5} = -\left(g_{6,5}U''_6 - b_{6,5}U'_6\right), \ \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial U''_5} = -\left(-g_{6,5}U'_6 - b_{6,5}U''_6\right).$$

Затем определим

$$\frac{\partial P_{Б5}}{\partial U'_5} = I''_{Б5} + B'_{5,4}I'_4 - B''_{5,4}I''_4, \ \frac{\partial P_{Б5}}{\partial U''_5} = I'_{Б5} + B'_{5,4}I''_4 + B''_{5,4}I'_4,$$

$$\frac{\partial P_{Б6}}{\partial U_6'} = I_{Б6}'' + B_{6,4}' I_4'' - B_{6,4}'' I_4', \ \frac{\partial P_{Б6}}{\partial U_6''} = I_{Б6}' + B_{6,4}' I_4'' + B_{6,4}'' I_4',$$

$$\frac{\partial Q_{Б5}}{\partial U_5'} = -I_{Б5}'' + \left(- B_{5,4}' I_4'' - B_{5,4}'' I_4'\right), \ \frac{\partial Q_{Б5}}{\partial U_5''} = I_{Б5}' + \left(B_{5,4}' I_4' - B_{5,4}'' I_4''\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б6}}{\partial U_6'} = -I_{Б6}'' + \left(- B_{6,4}' I_4'' - B_{6,4}'' I_4'\right), \ \frac{\partial Q_{Б6}}{\partial U_6''} = I_{Б6}' + \left(B_{6,4}' I_4' - B_{6,4}'' I_4''\right).$$

Определим частные производные второго порядка по отношению к функциям Φ_p и Φ_q, пользуясь выражениями частных производных первого порядка.

При равных индексах

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б5}}{\partial U_5'^2} + 2g_{5,5}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б5}}{\partial U_5'^2} - 2b_{5,5}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6'^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б6}}{\partial U_6'^2} + 2g_{6,6}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6'^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б6}}{\partial U_6'^2} + 2b_{6,6}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б5}}{\partial U_5''^2} + 2g_{5,5}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б5}}{\partial U_5''^2} - 2b_{5,5}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б6}}{\partial U_6''^2} + 2g_{6,6}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б6}}{\partial U_6''^2} - 2b_{6,6}\right).$$

Поскольку частные производные второго порядка функции $P_Б$ и $Q_Б$ типа равны нулю, то последние выражения примут следующие простейшие виды:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'^2} = -2g_{5,5}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6'^2} = -2g_{6,6},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5''^2} = -2g_{5,5}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6''^2} = -2g_{6,6},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'^2} = 2b_{5,5}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6'^2} = 2b_{6,6},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5''^2} = 2b_{5,5}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6''^2} = 2b_{6,6}.$$

Для разных индексов

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'^2} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_6'^2} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5''^2} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5''^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_6''^2} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6''^2} = 0.$$

Определим частные производные второго порядка смешанного типа

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_6'} = -g_{5,6} = 0{,}026916, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q3}}{\partial U_5' \partial U_6'} = b_{5,6} = 0{,}037995,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_6'} = -g_{6,5} = 0{,}02916, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_6'} = b_{6,5} = 0{,}037995,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_5''} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5' \partial U_5''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_5''} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_5''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5' \partial U_6''} = b_{5,6} = 0{,}037995, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5' \partial U_6''} = g_{5,6} = -0{,}26916,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5' \partial U_6''} = -b_{6,5} = -0{,}037995, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5' \partial U_6''} = -g_{6,5} = 0{,}026916,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'' \partial U_6'} = -b_{5,6} = -0{,}037995, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'' \partial U_6'} = -g_{5,6} = 0{,}026916,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'' \partial U_6'} = b_{6,5} = 0{,}037995, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'' \partial U_6'} = g_{6,5} = -0{,}026916 \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p2}}{\partial U_3' \partial U_3''} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_6' \partial U_6''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_6' \partial U_6''} = 0, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_6' \partial U_6''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p5}}{\partial U_5'' \partial U_6''} = -g_{5,6} = 0{,}026916, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q5}}{\partial U_5'' \partial U_6''} = b_{5,6} = 0{,}037995,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p6}}{\partial U_5'' \partial U_6''} = -g_{6,5} = 0{,}026916 \ , \ \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial U_5'' \partial U_6''} = b_{6,5} = 0{,}037995.$$

Затем определим численные значения следующих величин:

$$\Phi_{p5} = -80 - \left\{ -271,830508 + 0,032557\left(220^2 + 0^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[-0,026916\left(220^2 + 0^2\right) + 0,037995\left(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0\right) \right] \right\} =$$
$$= -81,193892,$$

$$\Phi_{p6} = -110 - \left\{ -836,884951 + 0,043871\left(220^2 + 0^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[-0,026916\left(220^2 + 0^2\right) + 0,037995\left(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0\right) \right] \right\} =$$
$$= -93,737049,$$

$$\Phi_{q5} = -40 - \left\{ -573,086308 + 0,049670\left(220^2 + 0^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[-0,026916\left(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0\right) - 0,037995\left(220^2 + 0^2\right) \right] \right\} =$$
$$= -31,983692,$$

$$\Phi_{q6} = -55 - \left\{ -1482,376015 + 0,064693\left(220^2 + 0^2\right) + \right.$$
$$+ \left[-0,026916\left(0 \cdot 220 - 220 \cdot 0\right) - 0,037995\left(220^2 + 0^2\right) \right] =$$
$$= 135,192815,$$

где

$$P_{Б5} = -1,184536 \cdot 220 + 0 \cdot 2,566583 - 0,162913[220 \cdot 0,318133 +$$
$$+ 0 \cdot (-0,228854)] + 0,003368[0 \cdot 0,318133 -$$
$$- 220(-0,228854)] = -271,830508,$$

$$P_{Б6} = -3,669518 \cdot 220 + 6,659543 \cdot 0 - 0,395661[220 \cdot 0,318133 +$$
$$+ 0 \cdot (-0228854)] - 0,037717[0 \cdot 0,318133 -$$
$$- 220(-0,228854)] = -836,884951,$$

$$Q_{Б5} = -1,184536 \cdot 0 + 220 \cdot 2,566583 - 0,162913[0 \cdot 0,318133 -$$
$$- 220 \cdot (-0,228854)] - 0,003368[220 \cdot 0,318133 +$$
$$+ 0(-0,228854)] = -573,086308,$$

$$Q_{Б6} = 0\cdot(-3{,}669518) - 220\cdot 6{,}659543 - 0{,}395661[0\cdot 0{,}318133 -$$
$$-220(-0{,}228804)] + 0{,}037717[220\cdot 0{,}318133 +$$
$$+0(-0{,}228854)] = -482{,}376015.$$

Определим численные значения рекуррентного выражения

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_5'} = 2\,[-81{,}193892\cdot(-10{,}919085) - 93{,}737049\cdot 5{,}921564 - 31{,}983692\times$$
$$\times(-10{,}890963) + 135{,}192815\cdot 8{,}358900] = 3619{,}761730,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_6'} = 2[-81{,}193892\cdot 5{,}921564 - 93{,}737049\cdot(-19{,}906758) - 31{,}983692\times$$
$$\times 8{,}358900 + 135{,}192815\cdot(-13{,}367928)] = -1378{,}780755,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_5''} = 2[-81{,}193892\cdot(-7{,}212719) - 93{,}737049\cdot 8{,}358900 - 31{,}983692\times$$
$$\times 7{,}157113 + 135{,}192815\cdot(-5{,}921564)] = -2454{,}747391,$$

$$\frac{\partial F(U)}{\partial U_6''} = 2[-81{,}193892\cdot 8{,}358900 - 93{,}737049\cdot(-4{,}742270) - 31{,}983692\times$$
$$\times(-5{,}921564) + 135{,}192815\cdot 9{,}725542] = 2540{,}103302.$$

Определим частные производные второго порядка квадратной матрицы Гессе

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'^2} = 2\Big[(-10{,}919085)^2 + 5{,}921564^2 + (-10{,}890963)^2 + 8{,}358900^2 -$$
$$-81{,}193892\cdot(-0{,}065114) - 93{,}737049\cdot 0 - 31{,}983692\times$$
$$\times(-0{,}099340) + 135{,}192815\cdot 0\Big] = 702{,}479481.$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'^2} = 2\left[5,921564^2 + (-19,906758)^2 + 8,358900^2 + (-13,367928)^2 -\right.$$
$$-81,192815 \cdot 0 - 93,737049 \cdot (-0,087742) - 31,983692 \cdot 0 +$$
$$\left.+135,192815 \cdot (-0,12938)\right] = 1341,298522,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5''^2} = 2\left[(-7,212719)^2 + 8,358900^2 + 7,157113^2 + (-5,921564)^2 -\right.$$
$$-81,192815 \cdot (-0,065114) - 93,737049 \cdot 0 - 31,983692 \times$$
$$\left.\times(-0,099340) + 135,192815 \cdot 0\right] = 433,295520,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6''^2} = 2\left[8,358900^2 + (-4,742270)^2 + (-5,921504)^2 + 9,725542^2 -\right.$$
$$-71,825318 \cdot 0 - 72,143685 \cdot (-0,087742) - 35,906621 \cdot 0 +$$
$$\left.+123,054200 \cdot (-0,129386)\right] = 424,89923,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6'} = 2[-10,919085 \cdot 5,921564 + 5,921564 \cdot (-19,906758) -$$
$$-10,890963 \cdot 8,358900 + 8,358900 \cdot (-13,367928) - 81,193892 \times$$
$$\times 0,026916 - 93,737049 \cdot 0,026916 - 31,983692 \cdot 0,037995 +$$
$$+135,192815 \cdot 0,037995] = -770,108082,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_5''} = 2[-10,919085(7,212719) + 5,921564 \cdot 8,358900 - 10,890963 \times$$
$$\times 7,157113 + 8,358900 \cdot (-5,921564) - 81,693892 \cdot 0 - 93,737049 \cdot 0 -$$
$$-31,983692 \cdot 0 + 135,192815 \cdot 0] = 1,616877,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5' \partial U_6''} = 2[-10,919085 \cdot 8,358900 + 5,921564 \cdot (-4,672982) -$$
$$-10,890963 \cdot (-5,921564) + 8,358900 \cdot 9,725542 - 81,193892 \times$$
$$\times 0,037995 - 93,737049 \cdot (-0,03795) - 31983692 \cdot (-0,026916) +$$
$$+135,192815 \cdot 0,026916] = 63,639531,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5''} = 2\Big[5,921564 \cdot (-7,212719) - 19,906758 \cdot 8,58900 + 8,358900 \times$$
$$\times 7,157113 - 13,367928 \cdot (-5,921564) - 81,193872 \cdot (-0,037995) -$$
$$-93,737049 \cdot 0,037995 - 31,983692 \cdot 0,026916 +$$
$$+135,192815 \cdot (-0,026916)\Big] = -150,201688,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_6''} = 2[5,921564 \cdot 8,358900 - 19,906758 \cdot (-4,742270) + 8,358900 \times$$
$$\times (-5,921564) - 13,367928 \cdot 9,725542 - 81,193872 \cdot 0 - 93,737049 \cdot 0 -$$
$$-31,983692 \cdot 0 + 135,192815 \cdot 0] = -71,214247,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_6''} = 2\Big[-7,212719 \cdot 8,358900 + 8,358900 \cdot (-4,742270) + 7,157113 \times$$
$$\times (-5,921564) - 5,921564 \cdot 9,725542 - 71,825318 \cdot 0,026916 -$$
$$-72,13685 \cdot 0,026916 - 35,906621 \cdot 0,037995 +$$
$$+123,054200 \cdot 0,037995\Big] = -400,946888,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6' \partial U_5'} = -770,108082, \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_6'} = -150,201688,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_5'' \partial U_5'} = 1,616877, \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_6'} = -71,214247,$$

$$\frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_5'} = 63,639531, \quad \frac{\partial^2 F(U)}{\partial U_6'' \partial U_5''} = -400,946888,$$

$$\begin{bmatrix} U_5' \\ U_6' \\ U_5'' \\ U_6'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 700,479481 & -770,108082 & 1,616877 & 63,639531 \\ -770,108082 & 1341,298522 & -150,201688 & -71,214247 \\ 1,616877 & -150,201688 & 433,295520 & -400,94688 \\ 63,639531 & -71,214247 & -400,94688 & 424,839923 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3619,761730 \\ -1378780755 \\ -2454747391 \\ 2540,103302 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_5' \\ U_6' \\ \hline U_5'' \\ U_6'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 13{,}886545 \\ 210{,}39734120 \\ \hline -24{,}527527 \\ -28{,}789772 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим результат реализации нижней правой части математической подмодели второй подсистемы

$$\begin{bmatrix} U_5' \\ U_6' \\ \hline U_5'' \\ U_6'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13{,}886545 \\ 10{,}397341 \\ \hline -24{,}527527 \\ -28{,}789772 \end{bmatrix}.$$

Напряжение шестого приграничного узла второй и третьей подсистем

$$\dot{U}_6 = U_6' + U_6'' = 209{,}602658 - j28{,}789727.$$

Затем определим $U_{\text{Б}i3}$ согласно следующему выражению:

$$\dot{U}_{\text{Б}i_3} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\text{Б}m_3} \\ \\ \dot{U}_{\text{Б}i_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\text{Б}7} \\ \dot{U}_{\text{Б}8} \\ \dot{U}_{\text{Б}9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209{,}602658 - j28{,}789727 \\ 209{,}602658 - j28{,}789727 \\ 209{,}602658 - j28{,}789727 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 12{,}100000 + j25{,}400000 \\ 14{,}195997 + j30{,}538435 \\ 21{,}704184 + j41{,}329466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 + j0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 + j0 & 0 + j0 & -12{,}100000 - j25{,}400000 \\ 0 + j0 & 0 + j0 & -14{,}1959997 - j30{,}538435 \\ 0 + j0 & 0 + j0 & -21{,}704184 - j41{,}329466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}316462 + j0{,}056471 \\ 0{,}053830 + j0{,}030965 \\ -0{,}007891 + j0{,}200709 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 209{,}602658 - j28{,}789727 \\ 209{,}602658 - j28{,}789727 \\ 209{,}602658 - j28{,}789727 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5{,}193489 - j2{,}228147 \\ 6{,}241359 - j2{,}608285 \\ 8{,}466463 - j4{,}030094 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 214{,}796147 - j31{,}017919 \\ 215{,}844017 - j31{,}398057 \\ 218{,}069121 - j32{,}819866 \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$\dot U_{\text{Б}i_3} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Б}m_3} \\ \dot U_{\text{Б}l_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Б}7} \\ \dot U_{\text{Б}8} \\ \dot U_{\text{Б}9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_{\text{Б}7} \\ U'_{\text{Б}8} \\ U'_{\text{Б}9} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} U''_{\text{Б}7} \\ U''_{\text{Б}8} \\ U''_{\text{Б}9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 214{,}76147 \\ 215{,}844017 \\ 218{,}069121 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} -31{,}017919 \\ -31{,}398057 \\ -32{,}819866 \end{bmatrix}.$$

Затем подсчитаем комплексную величину $\dot I_{k_3\text{Б}}$

$$\dot I_{k_3\text{Б}} = [\dot I_{\text{Б}9}] = -[Y_{99}][\dot U_{\text{Б}9}] = -[0{,}009959 - j0{,}018965]\times$$
$$\times[218{,}069121 - j32{,}819866] = [-1{,}549321 + j4{,}462533].$$

В результате получим

$$\dot I_{k_3\text{Б}} = [\dot I_{\text{Б}9}] = [I'_{\text{Б}9}] + j[I''_{\text{Б}9}] = [-1{,}54921] + j[4{,}462533].$$

Подсчитаем $U'_{7,\text{Б}}, U''_{7,\text{Б}}$ и $U'_{8,\text{Б}}, U''_{8,\text{Б}}$ величины следующим образом:

$$\dot U_{m_3\text{Б}} = \dot U_{\text{Б}m_3} - Z_{m_3k_2}\cdot Y_{l_3k_2}\cdot \dot U_{\text{Б}l_3} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Б}7} \\ \dot U_{\text{Б}8} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12{,}100000 + j25{,}400000 \\ 14{,}195997 + j30{,}538435 \end{bmatrix}\times$$
$$\times[0{,}009959 - j0{,}01865] = [218{,}069121 - j32{,}819866] =$$
$$= \begin{bmatrix} 214{,}796147 - j31{,}017919 \\ \\ 215{,}844017 - j31{,}39857 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 132{,}095153 - j14{,}643891 \\ \\ 158{,}272967 - j16{,}036260 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 82{,}70094 - j16{,}374028 \\ \\ 57{,}57105 - j15{,}361797 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$\dot U_{m_3\text{Б}} = \begin{bmatrix} \dot U_{\text{Б}7} \\ \dot U_{\text{Б}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_{\text{Б}7} \\ U'_{\text{Б}8} \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} U''_{\text{Б}7} \\ U''_{\text{Б}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82{,}70094 \\ 57{,}57105 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} -16{,}37428 \\ -1{,}361797 \end{bmatrix}.$$

Получив численные значения элементов $U'_{m3Б} = \left(U'_{Б7}, U'_{Б8}\right)$ комплексных величин, можем построить систему нелинейных алгебраических уравнений верхней левой части третьей подсистемы

$$\Phi_{p_7} = P_7 - \left\{P_{Б7} + R_{7,7}\left(I_7'^2 + I_7''^2\right) + \left[R_{7,8}\left(I_7'I_8' + I_7''I_8''\right) + X_{7,8}\left(I_7''I_8' - I_7'I_8''\right)\right]\right\} = 0,$$

$$\Phi_{p_8} = P_8 - \left\{P_{Б8} + R_{8,8}\left(I_8'^2 + I_8''^2\right) + \left[R_{8,7}\left(I_8'I_7' + I_8''I_7''\right) + X_{8,7}\left(I_8''I_7' - I_8'I_7''\right)\right]\right\} = 0,$$

$$\Phi_{q_7} = Q_7 - \left\{Q_{Б7} + X_{7,7}\left(I_7'^2 + I_7''^2\right) + \left[X_{7,8}\left(I_7'I_8' + I_7''I_8''\right) - R_{7,8}\left(I_7''I_8' - I_7'I_8''\right)\right]\right\} = 0,$$

$$\Phi_{q_8} = Q_8 - \left\{Q_{Б8} + X_{8,8}\left(I_8'^2 + I_8''^2\right) + \left[X_{8,7}\left(I_8'I_7' + I_8''I_7''\right) - R_{8,7}\left(I_8''I_7' - I_8'I_7''\right)\right]\right\} = 0,$$

где

$$P_{Б7} = U'_{Б7}I_7' + U''_{Б7}I_7'' + \left[A'_{79}\left(U_9'I_7' + U_9''I_7''\right) + A''_{79}\left(U_9'I_7'' - U_9''I_7'\right)\right] +$$
$$+ \left[A'_{79}\left(U_9'I_7' + U_9''I_7''\right) + A''_{79}\left(U_9'I_7'' - U_9''I_7'\right)\right],$$

$$P_{Б8} = U'_{Б8}I_8' + U''_{Б8}I_8'' + \left[A'_{89}\left(U_9'I_8' + U_9''I_8''\right) + A''_{89}\left(U_9'I_8'' - U_9''I_8'\right)\right] +$$
$$+ \left[A'_{89}\left(U_9'I_8' + U_9''I_8''\right) + A''_{89}\left(U_9'I_8'' - U_9''I_8'\right)\right],$$

$$Q_{Б7} = U''_{Б7}I_7' - U'_{Б7}I_7'' + \left[A''_{79}\left(U_9'I_7' + U_9''I_7''\right) - A'_{79}\left(U_9'I_7'' - U_9''I_7'\right)\right] +$$
$$+ \left[A''_{79}\left(U_9'I_7' + U_9''I_7''\right) - A'_{79}\left(U_9'I_7'' - U_9''I_7'\right)\right],$$

$$Q_{Б8} = U''_{Б8}I_8' - U'_{Б8}I_8'' + \left[A''_{89}\left(U_9'I_8' + U_9''I_8''\right) - A'_{89}\left(U_9'I_8'' - U_9''I_8'\right)\right] +$$
$$+ \left[A''_{89}\left(U_9'I_8' + U_9''I_8''\right) - A'_{89}\left(U_9'I_8'' - U_9''I_8'\right)\right].$$

Имея систему нелинейных алгебраических уравнений, в данном случае математические подмодели верхней левой части третьей подсистемы, можем реализовать последние по методу минимизации, или второго порядка.

Как известно, в соответственном рекуррентном выражении действует квадратная необычная матрица Гессе, имеющая следующий вид:

$$
\begin{bmatrix} I'_7 \\ \text{—} \\ I'_8 \\ \text{—} \\ I''_7 \\ \text{—} \\ I''_8 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} I'_7 \\ \text{—} \\ I'_8 \\ \text{—} \\ I''_7 \\ \text{—} \\ I''_8 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'^2} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I'_8} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_8} \\ \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I'_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'^2} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I''_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I''_8} \\ \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_7 \partial I'_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_7 \partial I'_8} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7''^2} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_7 \partial I''_8} \\ \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_8 \partial I'_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_8 \partial I'_8} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_8 \partial I''_7} & \dfrac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8''^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial I'_7} \\ \dfrac{\partial F}{\partial I'_8} \\ \dfrac{\partial F}{\partial I''_7} \\ \dfrac{\partial F}{\partial I''_8} \end{bmatrix}.
$$

Она получается следующим образом:

$$
F(I) = \Phi_{p_7}^2 + \Phi_{p_8}^2 + \Phi_{q_7}^2 + \Phi_{q_8}^2 .
$$

Согласно функции (4.6) частные производные первого порядка определяются

$$
\frac{\partial F}{I'_7} = 2\left(\Phi_{p7} \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_7} + \Phi_{p8} \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_7} + \Phi_{q7} \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_7} + \Phi_{q8} \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_7} \right),
$$

$$
\frac{\partial F}{I'_8} = 2\left(\Phi_{p7} \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_8} \right),
$$

$$
\frac{\partial F}{I''_7} = 2\left(\Phi_{p7} \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_7} + \Phi_{p8} \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_7} + \Phi_{q7} \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_7} + \Phi_{q8} \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_7} \right),
$$

$$
\frac{\partial F}{I''_8} = 2\left(\Phi_{p7} \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_8} \right).
$$

С помощью полученных частных производных первого порядка определим частные производные второго порядка, входящие в матрицу Гессе,

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_7'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_7'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_7'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7}\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'^2} + \Phi_{p8}\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7'^2} + \Phi_{q7}\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'^2} + \Phi_{q8}\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_8'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_8'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7}\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_8'^2} + \Phi_{p8}\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8'^2} + \Phi_{q7}\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_8'^2} + \Phi_{q8}\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_7''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_7''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_7''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7}\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7''^2} + \Phi_{p8}\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7''^2} + \Phi_{q7}\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7''^2} + \Phi_{q8}\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_8''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_8''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7}\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_8''^2} + \Phi_{p8}\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8''^2} + \Phi_{q7}\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_8''^2} + \Phi_{q8}\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'\partial I_8'} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial I_7'}\cdot\frac{\partial \Phi_{p5}}{\partial I_8'} + \frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial I_7'}\cdot\frac{\partial \Phi_{p6}}{\partial I_8'} + \frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial I_7'}\cdot\frac{\partial \Phi_{q5}}{\partial I_8'} + \frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial I_7'}\cdot\frac{\partial \Phi_{q6}}{\partial I_8'} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7}\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'\partial I_8'} + \Phi_{p8}\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7'\partial I_8'} + \Phi_{q7}\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'\partial I_8'} + \Phi_{q8}\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7'\partial I_8'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_7} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_7} + \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_7} + \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_7} + \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_7} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7} \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I'_7 \partial I''_7} + \Phi_{p8} \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I'_7 \partial I''_7} + \Phi_{q7} \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I'_7 \partial I''_7} + \Phi_{q6} \frac{\partial^2 \Phi_{q6}}{\partial I'_7 \partial I''_7} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_8} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_8} + \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_8} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7} \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I'_7 \partial I''_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I'_7 \partial I''_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I'_7 \partial I''_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I'_7 \partial I''_8} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I''_7} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_8} + \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_8} + \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_8} + \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_8} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7} \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I''_7 \partial I'_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I''_7 \partial I'_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I''_7 \partial I'_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I''_7 \partial I'_8} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I''_8} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_8} \cdot \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_8} \cdot \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_8} \cdot \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_8} \cdot \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_8} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7} \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I'_8 \partial I''_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I'_8 \partial I''_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I'_8 \partial I''_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I'_8 \partial I''_8} \right),$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_7 \partial I''_8} = 2\left(\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_8} + \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_7} \cdot \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_8} + \right.$$

$$\left. + \Phi_{p7} \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I''_7 \partial I''_8} + \Phi_{p8} \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I''_7 \partial I''_8} + \Phi_{q7} \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I''_7 \partial I''_8} + \Phi_{q8} \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I''_7 \partial I''_8} \right).$$

Необходимо иметь в виду следующие отношения:

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I'_8} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_8 \partial I'_7}; \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_7} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_7 \partial I'_7}; \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I'_7 \partial I''_8} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I''_8 \partial I'_7},$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8' \partial I_7''} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'' \partial I_8'}; \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8' \partial I_8''} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'' \partial I_8'}; \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'' \partial I_8''} = \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'' \partial I_7''}.$$

Вышеприведенные частные производные первого и второго порядка по функциям типа Φ_{p7}, Φ_{p8} и Φ_{q7}, Φ_{q8} определяются:

– частные производные первого порядка при равных индексах

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_7'} = -\left(\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I_7'} + 2R_{77} I_7' + \left(R_{78} I_8' - X_{78} I_8'' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8'} = -\left(\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I_8'} + 2R_{88} I_8' + \left(R_{87} I_7' - X_{87} I_7'' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7'} = -\left(\frac{\partial Q_{Б7}}{\partial I_7'} + 2X_{77} I_7' + \left(X_{78} I_8' + R_{78} I_8'' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8'} = -\left(\frac{\partial Q_{Б8}}{\partial I_8'} + 2X_{88} I_8' + \left(X_{87} I_7' + R_{87} I_7'' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_7''} = -\left(\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I_7''} + 2R_{77} I_7'' + \left(R_{78} I_8'' + X_{78} I_8' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8''} = -\left(\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I_8''} + 2R_{88} I_8'' + \left(R_{87} I_7'' + X_{87} I_7' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7''} = -\left(\frac{\partial Q_{Б7}}{\partial I_7''} + 2X_{77} I_7'' + \left(X_{78} I_8'' - R_{78} I_8' \right) \right), \\
&\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8''} = -\left(\frac{\partial Q_{Б8}}{\partial I_8''} + 2X_{88} I_8'' + \left(X_{87} I_7'' - R_{87} I_7' \right) \right);
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

– при разных индексах

$$\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_7'} = -\left(R_{87} I_8' + X_{87} I_8'' \right), \; \frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_7''} = -\left(R_{87} I_8'' - X_{87} I_8' \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8'} = -\left(R_{78} I_7' + X_{78} I_7'' \right), \; \frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_8''} = -\left(R_{78} I_7'' - X_{78} I_7' \right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I'_7} = -\left(X_{87} I'_8 - R_{87} I''_8\right),\ \frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I''_7} = -\left(X_{87} I''_8 - R_{87} I'_8\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I'_8} = -\left(X_{78} I'_7 - R_{78} I''_7\right),\ \frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I''_8} = -\left(X_{78} I''_7 - R_{78} I'_7\right).$$

Затем определим

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I'_7} = U'_{7Б} + \left(A'_{79} U'_9 - A''_{79} U''_9\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I''_7} = U''_{7Б} + \left(A'_{79} U''_9 + A'_{79} U'_9\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I'_8} = U'_{8Б} + \left(A'_{89} U'_9 - A''_{89} U''_9\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I''_8} = U''_{8Б} + \left(A'_{89} U''_9 + A'_{89} U'_9\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б7}}{\partial I'_7} = U''_{7Б} + \left(A''_{79} U'_9 + A'_{79} U''_9\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I''_7} = -U'_{7Б} + \left(A''_{79} U''_9 - A'_{79} U'_9\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б8}}{\partial I'_8} = U''_{8Б} + \left(A''_{89} U'_9 + A'_{89} U''_9\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I''_8} = -U'_{8Б} + \left(A''_{89} U''_9 - A'_{89} U'_9\right).$$

Определим частные производные второго порядка по отношению к функциям Φ_p и Φ_q, пользуясь выражениями частных производных первого порядка.

При равных индексах

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial {I'_7}^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б7}}{\partial {I'_7}^2} + 2R_{7,7}\right),\ \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial {I'_7}^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б7}}{\partial {I'_7}^2} + 2X_{7,7}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8'^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б8}}{\partial I_8'^2} + 2R_{8,8}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8'^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б8}}{\partial I_8'^2} + 2X_{8,8}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б7}}{\partial I_7''^2} + 2R_{7,7}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б7}}{\partial I_7''^2} + 2X_{7,7}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8''^2} = -\left(\frac{\partial^2 P_{Б8}}{\partial I_8''^2} + 2R_{8,8}\right), \ \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8''^2} = -\left(\frac{\partial^2 Q_{Б8}}{\partial I_8''^2} + 2X_{8,8}\right).$$

Поскольку частные производные второго порядка функций типа $P_Б$ и $Q_Б$ равны нулю, последние выражения примут следующие простейшие виды:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'^2} = -2R_{7,7}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8'^2} = -2R_{8,8},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7''^2} = -2R_{7,7}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8''^2} = -2R_{8,8},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'^2} = -2X_{7,7}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8'^2} = -2X_{8,8},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7''^2} = -2X_{7,7}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8''^2} = -2X_{8,8},$$

При разных индексах

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_8'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_8''^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8'^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7''^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_8''^2} = 0.$$

Определим выражения частных производных смешанного типа

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7' \partial I_8'} = -R_{7,8} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7' \partial I_8'} = -X_{7,8} = -6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7' \partial I_8'} = -R_{8,7} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7' \partial I_8'} = -R_{7,8} = -6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7' \partial I_7''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7' \partial I_7''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7' \partial I_7''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7' \partial I_7''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7' \partial I_8''} = X_{7,8} = 6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7' \partial I_8''} = -R_{7,8} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7' \partial I_8''} = -X_{8,7} = -6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7' \partial I_8''} = R_{8,7} = 4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'' \partial I_8'} = -X_{7,8} = -6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'' \partial I_8'} = R_{7,8} = 4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'' \partial I_8'} = X_{8,7} = 6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'' \partial I_8'} = -R_{8,7} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_8' \partial I_8''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_8' \partial I_8''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_8' \partial I_8''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_8' \partial I_8''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p7}}{\partial I_7'' \partial I_8''} = -R_{7,8} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q7}}{\partial I_7'' \partial I_8''} = -X_{7,8} = -6{,}675977,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p8}}{\partial I_7'' \partial I_8''} = -R_{8,7} = -4{,}268076,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q8}}{\partial I_7'' \partial I_8''} = -X_{8,7} = -6{,}675977.$$

Затем определим численные значения вышеполученных выражений

$$\varPhi_{p7} = 60 - \Big\{65,651663 + 5,409654\left[0,272727^2 + (-0,621363)^2\right] +$$
$$+4,268076\left[0,272727 \cdot 0,42722 - 0,621363(-0,204545)\right] +$$
$$+6,675977\left[-0,621363 \cdot 0,427272 -\right.$$
$$\left.-0,272727(-0,204545)\right]\Big\} = -7,782475,$$

$$\varPhi_{p8} = 94 - \{93,900505 + 7,219765[0,427272^2 + (-0,204545)^2] +$$
$$+4,268076[0,427272 \cdot 0,272727 - 0,204545(-0,621363)] +$$
$$+6,675977[-0,204545 \cdot 0,272727 -$$
$$-0,427272(-0,621363)]\} = -4,705262,$$

$$\varPhi_{q7} = 136,7 - \{130,652813 + 9,819633[0,272727^2 + (-0,621363)^2] +$$
$$+6,675977[0,42722 \cdot 0,272727 - 0,204545(-0,621363)] -$$
$$-4,268076[-0,621363 \cdot 0,427272 -$$
$$-0,272727(-0,204545)]\} = -0,995957,$$

$$\varPhi_{q8} = 45 - \{40,917452 + 12,188958[0,427272^2 + (-0,204545)^2] +$$
$$+6,67977[0,427272 \cdot 0,272727 - 0,204545(-0,621363)] -$$
$$-4,268076[-0,204545 \cdot 0,272727 -$$
$$-0,427272(-0,621363)]\} = 0,314196,$$

$$P_{Б7} = 82,700394 \cdot 0,272727 + (-16,374028) \cdot (-0,621363) +$$
$$+0,602214[220 \cdot 0,272727 + 0 \cdot (-0,621363)] +$$
$$+0,023482[220 \cdot (-0,621363) - 0 \cdot 0,272727] = 65,651663,$$

$$P_{Б8} = 57,571050 \cdot 0,427272 - 15,361797 \cdot (-0,204545) +$$
$$+0,720539[220 \cdot 0,427272 - 0 \cdot (-0,204545)] +$$
$$+0,034905[220 \cdot (-0,204545) - 0 \cdot 0,427272] = 93,900505,$$

$$Q_{Б7} = -82{,}700394 \cdot (-0{,}621363) - 16{,}374028 \cdot 0{,}272727 +$$
$$+ 0{,}023482[220 \cdot 0{,}272727 + 0 \cdot (-0{,}621363)] -$$
$$- 0{,}602214[220 \cdot (-0{,}621363) - 0 \cdot 0{,}272727] = 130{,}652813,$$

$$Q_{Б8} = -57{,}571050 \cdot (-0{,}204545) - 15{,}361797 \cdot 0{,}427272 +$$
$$+ 0{,}034905[220 \cdot 0{,}427272 + 0 \cdot (-0{,}204545)] -$$
$$- 0{,}720539[220 \cdot (-0{,}204545) - 0 \cdot 0{,}427272] = 40{,}917452,$$

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I'_7} = 82{,}700394 + 0{,}602214 \cdot 220 - 0{,}023482 \cdot 0 = 215{,}187474,$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I'_8} = 57{,}571050 + 0{,}720539 \cdot 220 - 0{,}034905 \cdot 0 = 216{,}089630,$$

$$\frac{\partial Q_{Б7}}{\partial I'_7} = -16{,}374028 + 0{,}023482 \cdot 220 + 0{,}602214 \cdot 0 = -11{,}207988,$$

$$\frac{\partial Q_{Б8}}{\partial I'_8} = -15{,}36179 + 0{,}04905 \cdot 220 + 0{,}720539 \cdot 0 = -7{,}682697,$$

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I''_7} = -16{,}74028 + 0{,}602214 \cdot 0 + 0{,}023482 \cdot 220 = -11{,}207988,$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I''_8} = -15{,}361797 + 0{,}72059 \cdot 0 + 0{,}034905 \cdot 220 = -7{,}682697,$$

$$\frac{\partial P_{Б7}}{\partial I''_7} = -82{,}700394 + 0{,}023482 \cdot 0 - 0{,}602214 \cdot 220 = -215{,}187474,$$

$$\frac{\partial P_{Б8}}{\partial I''_8} = -57{,}571050 + 0{,}034905 \cdot 0 - 0{,}720539 \cdot 220 = -216{,}089630,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I'_7} = -[215{,}187474 + 2 \cdot 5{,}409654 \cdot 0{,}272727 + 4{,}268076 \cdot 0{,}427272 -$$
$$- 6{,}675977 \cdot (-0{,}204545)] = -221{,}521363,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I'_8} = -[216{,}089630 + 2 \cdot 7{,}219765 \cdot 0{,}427272 + 4{,}268076 \cdot 0{,}272727 -$$
$$- 6{,}675977 \cdot (-0{,}621363)] = -227{,}571461,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7'} = -[-11{,}207988 + 2 \cdot 9{,}819633 \cdot 0{,}272727 + 6{,}675977 \cdot 0{,}427272 +$$
$$+ 4{,}268076 \cdot (-0{,}204545)] = 3{,}872385,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8'} = -[-7{,}682697 + 2 \cdot 12{,}188958 \cdot 0{,}427272 + 6{,}675977 \cdot 0{,}272727 +$$
$$+ 4{,}268076 \cdot (-0{,}621363)] = -1{,}901998,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_7''} = -[-11{,}207988 + 2 \cdot 5{,}409654 \cdot (-0{,}621363) +$$
$$+ 4{,}268076 \cdot (-0{,}204545) + 6{,}675977 \cdot (-0{,}427272)] = 21{,}656177,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_8''} = -[-7{,}682697 + 2 \cdot 7{,}219765 \cdot (-0{,}204545) +$$
$$+ 4{,}268076 \cdot (-0{,}621362) + 6{,}675977 \cdot 0{,}272727] = 11{,}467537,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q7}}{\partial I_7''} = -[-215{,}18774 + 2 \cdot 9{,}819633 \cdot (-0{,}621363) +$$
$$+ 6{,}675977 \cdot (-0{,}204545) - 4{,}268076 \cdot 0{,}427272] = 230{,}579754,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_8''} = -[-216{,}089630 + 2 \cdot 12{,}188958 \cdot (-0{,}204545) +$$
$$+ 6{,}675977 \cdot (-0{,}621363) - 4{,}268076 \cdot 0{,}272727] = 226{,}388235,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p8}}{\partial I_7'} = -[4{,}268076 \cdot 0{,}427272 + 6{,}675977 \cdot (-0{,}204545)] = -0{,}458091,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p7}}{\partial I_8'} = -[4{,}268076 \cdot 0{,}272727 + 6{,}675977 \cdot (-0{,}621363)] = 2{,}984185,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q8}}{\partial I_7'} = -[6{,}675977 \cdot 0{,}427272 - 4{,}268076 \cdot (-0{,}204545)] = -3{,}725471,$$

$$\frac{\partial\Phi_{q7}}{\partial I_8'} = -\left[6,675977\cdot 0,272727 - 4,268076\cdot(-0,621363)\right] = -4,472743,$$

$$\frac{\partial\Phi_{p8}}{\partial I_7''} = -\left[4,268076\cdot(-0,204545) - 6,675977\cdot 0,427272\right] = 3,725471,$$

$$\frac{\partial\Phi_{p7}}{\partial I_8''} = -\left[4,268976\cdot(-0,621363) - 6,675977\cdot 0,272727\right] = 4,472743,$$

$$\frac{\partial\Phi_{q8}}{\partial I_7''} = -\left[6,675977\cdot(-0,204545) - 4,268076\cdot 0,427272\right] = 3,189167,$$

$$\frac{\partial\Phi_{q7}}{\partial I_8''} = -\left[6,675977\cdot(-0,621363) - 4,268076\cdot 0,272727\right] = 5,312224.$$

Определим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2\Phi_{p7}}{\partial I_7'^2} = -2\cdot 5,09654 = -10,819308,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{p8}}{\partial I_8'^2} = -2\cdot 7,219765 = -14,439530,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{p7}}{\partial I_7''^2} = -2\cdot 5,409654 = -10,819308,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{p8}}{\partial I_8''^2} = -2\cdot 7,219765 = -14,439530,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{q7}}{\partial I_7'^2} = -2\cdot 9,819633 = -19,639266,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{q8}}{\partial I_8'^2} = -2\cdot 12,188958 = -24,377916,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{q7}}{\partial I_7''^2} = -2\cdot 9{,}819633 = -19{,}639266,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{q8}}{\partial I_8''^2} = -2\cdot 12{,}188958 = -24{,}377916.$$

Подсчитаем численные значения градиентов

$$\frac{\partial F}{I_7'} = 2[-7{,}782475\cdot(-221{,}521363) - 4{,}705262\cdot(-0{,}458091) -$$
$$-0{,}995957\cdot 3{,}872385 + 0{,}314196\cdot(-3{,}725471)] = 3442{,}225301,$$

$$\frac{\partial F}{I_8'} = 2[-7{,}7845\cdot(-2{,}984185) - 4{,}705262\cdot(-227{,}71461) -$$
$$-0{,}995957\cdot(-4{,}472743) + 0{,}314196\cdot(-1{,}901998)] = 21{,}95729504,$$

$$\frac{\partial F}{I_7''} = 2[-7{,}782475\cdot 21656177 - 4{,}705262\cdot 3{,}725471 -$$
$$-0{,}995957\cdot 230{,}579754 + 0{,}314196\cdot 3{,}189167] = -829{,}426939,$$

$$\frac{\partial F}{I_8''} = 2[-7{,}782475\cdot 4{,}47243 - 4{,}705262\cdot 11{,}467537 -$$
$$-0{,}995957\cdot 5{,}312224 + 0{,}314196\cdot 226{,}388235] = -45{,}854490,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'^2} = 2[(-221{,}521363)^2 + (-0{,}458091)^2 + 3{,}87238^2 + (-3{,}725471)^2 -$$
$$-7{,}782475\cdot(-10{,}819308) - 4{,}705262\cdot 0 - 0{,}995957\cdot(-19{,}63266) +$$
$$+0{,}314196\cdot 0] = 98409{,}118941,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'^2} = 2[(-2{,}984185)^2 + (-227{,}51461)^2 + (-4{,}472743)^2 +$$
$$+(-1{,}901998)^2 - 7{,}782475\cdot 0 - 4{,}705262\cdot(-14{,}439530) -$$
$$-0{,}995957\cdot 0 + 0{,}314196\cdot(-24{,}377916)] = 103763{,}161152,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7''^2} = 2\left[21{,}656177^2 + 3{,}725471^2 + 230{,}579754^2 + 3{,}189167^2 - \right.$$
$$- 7{,}782475 \cdot (-10{,}819308) - 4{,}705262 \cdot 0 - 0{,}995957 \cdot (-19{,}639266) +$$
$$\left. + 0{,}314196 \cdot 0\right] = 107527{,}647471,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8''^2} = 2\left[4{,}472743^2 + 11{,}467537^2 + 5{,}312224^2 + 226{,}388235^2 - \right.$$
$$- 7{,}782475 \cdot 0 - 4{,}705262 \cdot (-14{,}439530) - 0{,}995957 \cdot 0 +$$
$$\left. + 0{,}314196 \cdot (-24{,}377916)\right] = 1029{,}28966,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7' \partial I_8'} = 2[-221{,}52163 \cdot (-2{,}984185) - 0{,}458091 \cdot (-227{,}571461) +$$
$$+ 3{,}72385 \cdot (-4{,}472743) - 3{,}725471 \cdot (-1{,}901998) -$$
$$- 7{,}782475 \cdot (-4{,}268076) - 4{,}705262 \cdot (-4{,}268076) -$$
$$- 0{,}995957 \cdot (-6{,}675977) + 0{,}314196 \cdot (-6{,}675977)] = 1625{,}849707,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7' \partial I_7''} = 2[-221{,}521363 \cdot 2{,}1656177 - 0{,}458091 \cdot 3{,}725471 +$$
$$+ 3{,}872385 \cdot 230{,}579754 - 3{,}725471 \cdot 3.18917 - 7{,}782475 \cdot 0 -$$
$$- 4{,}705262 \cdot 0 - 0{,}995957 \cdot 0 + 0{,}314196 \cdot 0] = -7836{,}000039,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7' \partial I_8''} = 2[-221{,}521363 \cdot 4{,}42743 - 0{,}458091 \cdot 11{,}467537 +$$
$$+ 3{,}872385 \cdot 5{,}312224 - 3{,}725471 \cdot 226{,}388235 - 7{,}782475 \cdot 6{,}675977 -$$
$$- 4{,}705262 \cdot (-6{,}67977) - 0{,}995957 \cdot (-4{,}268076) +$$
$$+ 0{,}314196 \cdot (-0{,}268076) + 0{,}314196 \cdot 4{,}268076] = -367{,}689399,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8' \partial I_7''} = 2[21{,}656177 \cdot (-2{,}984185) + 3{,}725471 \cdot (-227{,}571461) +$$
$$+ 230{,}59754 \cdot (-4{,}472743) + 3{,}189167 \cdot (-1{,}901998) -$$
$$- 7{,}782475 \cdot (-6{,}65977) - 4{,}705262 \cdot 6{,}675977 -$$
$$- 0{,}995957 \cdot 4{,}268076 + 0{,}314196 \cdot (-4{,}268076)] = -3869{,}750232,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8' \partial I_8''} = 2[-2{,}984185 \cdot 4{,}472743 - 227{,}571461 \cdot 11{,}467537 -$$
$$- 4{,}472743 \cdot 5{,}312224 - 1{,}901998 \cdot 226{,}388235 - 7{,}782475 \cdot 0 -$$
$$- 4{,}705262 \cdot 0 - 0{,}995957 \cdot 0 + 0{,}314196 \cdot 0] = -6154{,}763649,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'' \partial I_8''} = 2[21{,}656177 \cdot 4{,}472743 + 3{,}725471 \cdot 11{,}467537 +$$
$$+ 230{,}579754 \cdot 5{,}312224 + 3{,}189167 \cdot 226{,}38823 - 7{,}782475 \times$$
$$\times (-4{,}268076) - 4{,}705262 \cdot (-4{,}268076) - 0{,}995957 \cdot (-6{,}675977) +$$
$$+ 0{,}314196 \cdot (-6{,}675977) + 0{,}314196 \cdot (-6{,}675977)] = 610{,}933785.$$

Необходимо иметь в виду следующие отношения:

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8' \partial I_7'} = 1625{,}849707, \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'' \partial I_7'} = -7836{,}000039,$$
$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'' \partial I_7'} = -3667{,}689399,$$

$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_7'' \partial I_8'} = -3869{,}750232, \qquad \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'' \partial I_8'} = 6154{,}763649,$$
$$\frac{\partial^2 F(I)}{\partial I_8'' \partial I_7''} = -610{,}93785.$$

$$\begin{bmatrix} I_7' \\ I_8' \\ I_7'' \\ I_8'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}272727 \\ 0{,}427272 \\ -0{,}621363 \\ -0{,}204545 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 98409{,}118941 & 1625{,}849707 & -7836{,}000039 & -3667{,}689399 \\ 1625{,}849707 & 103763{,}161152 & -3869{,}750232 & -6154{,}763649 \\ -7836{,}000039 & -3869{,}750232 & 107527{,}6474. & -610{,}933785 \\ -3667{,}689399 & -6154{,}763649 & -610{,}933785 & 424{,}839923 \end{bmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 3442{,}225301 \\ 2195{,}729504 \\ -829{,}426939 \\ -45{,}854490 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} I'_7 \\ \hdashline I'_8 \\ \hline I''_7 \\ \hdashline I''_8 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}272727 \\ \hdashline 0{,}427272 \\ \hline -0{,}621363 \\ \hdashline -0{,}204545 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0{,}034357 \\ \hdashline 0{,}020573 \\ \hline -0{,}004458 \\ \hdashline 0{,}001981 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}238370 \\ \hdashline 0{,}406699 \\ \hline -0{,}61905 \\ \hdashline -0{,}206526 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получим результат реализации верхней левой математической подмодели третьей подсистемы

$$\begin{bmatrix} I'_7 \\ \hdashline I'_8 \\ \hline I''_7 \\ \hdashline I''_8 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}238370 \\ \hdashline 0{,}406699 \\ \hline -0{,}61905 \\ \hdashline -0{,}206526 \end{bmatrix}.$$

Следующая система нелинейных алгебраических уравнений представляет нижнюю правую подмодель третей подсистемы

$$\Phi_{p9} = P_9 - \left[P_{Б9} + g_{9,9}\left(I_9'^2 + I_9''^2\right)\right] = 0,$$

$$\Phi_{q9} = Q_9 - \left[Q_{Б9} + b_{9,9}\left(I_9'^2 + I_9''^2\right)\right] = 0,$$

где

$$P_{Б9} = U'_9 I'_{Б9} + U''_9 I''_{Б9} + B'_{9,7}\left(U'_9 I'_7 + U''_9 I''_7\right) + B''_{9,7}\left(U''_9 I'_7 - U'_9 I''_7\right) +$$
$$+ B'_{9,8}\left(U'_9 I'_8 + U''_9 I''_8\right) + B''_{9,8}\left(U''_9 I'_8 - U'_9 I''_8\right),$$

$$Q_{Б9} = U''_9 I'_{Б9} + U'_9 I''_{Б9} + B'_{9,7}\left(U''_9 I'_7 - U'_9 I''_7\right) - B''_{9,7}\left(U'_9 I'_7 + U''_9 I''_7\right) +$$
$$+ B'_{9,8}\left(U''_9 I'_8 - U'_9 I''_8\right) - B''_{9,8}\left(U'_9 I'_8 + U''_9 I''_8\right).$$

Соответствующее рекуррентное выражение можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} U_9' \\ --- \\ U_9'' \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} U_9' \\ --- \\ U_9'' \end{bmatrix}^{И} - \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'^2} & \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9' \partial U_9''} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'' \partial U_9'} & \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9''^2} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'} \\ \hline \dfrac{\partial^2 F_9}{\partial U_9''} \end{array}\right].$$

Частные производные первого и второго порядка, входящие в данное рекуррентное выражение, определяются следующей квадратной функцией:

$$F(U_9) = \Phi_{p9}^2 + \Phi_{q9}^2. \tag{4.7}$$

Согласно функции (4.7) частные производные первого порядка определяются

$$\frac{\partial F_9}{U_9'} = 2\left(\Phi_{p9} \frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'} + \Phi_{q9} \frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'}\right),$$

$$\frac{\partial F_9}{U_9''} = 2\left(\Phi_{p9} \frac{\partial \varphi_{p9}}{\partial U_9''} + \Phi_{q9} \frac{\partial \varphi_{q9}}{\partial U_9''}\right).$$

Частные производные второго порядка, входящие в матрицу Гессе, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'}\right)^2 + \Phi_{p9} \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9'^2} + \Phi_{q9} \frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9'^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9''^2} = 2\left[\left(\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9''}\right)^2 + \Phi_{p9} \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9''^2} + \Phi_{q9} \frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9''^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9' \partial U_9''} = 2\left[\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'} \cdot \frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} + \frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'} \cdot \frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9''} + \Phi_{p9} \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9' \partial U_9''} + \Phi_{q9} \frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9' \partial U_9''}\right],$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'' \partial U_9'} = 2\left[\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} \cdot \frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'} + \frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9''} \cdot \frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'} + \Phi_{p9} \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9'' \partial U_9'} + \Phi_{q9} \frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9'' \partial U_9'}\right].$$

Вышеприведенные частные производные первого и второго порядка определяются по функциям типа Φ_{p9} и Φ_{q9}.

Частные производные первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'} = -\left(\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9'} + 2g_{99} U_9'\right), \quad \frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} = -\left(\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9''} + 2g_{99} U_9''\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'} = -\left(\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9'} - 2b_{99} U_9'\right), \quad \frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} = -\left(\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9''} - 2b_{99} U_9''\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9'} = \left(B_{97}' I_7' - B_{97}'' I_7''\right) + \left(B_{98}' I_8' - B_{98}'' I_8''\right),$$

$$\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9''} = \left(B_{97}' I_7'' + B_{97}'' I_7'\right) + \left(B_{98}' I_8'' + B_{98}'' I_8'\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9'} = \left(-B_{97}' I_7'' - B_{97}'' I_7'\right) + \left(-B_{98}' I_8'' - B_{98}'' I_8'\right),$$

$$\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9''} = \left(B_{97}' I_7' - B_{97}'' I_7''\right) + \left(B_{98}' I_8' - B_{98}'' I_8''\right).$$

Частные производные второго порядка определяются согласно следующим выражениям:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9'^2} = -2g_{99}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9''^2} = -2g_{99},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9'^2} = 2b_{99}, \ \frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9''^2} = 2b_{99}.$$

Частные производные смешанного типа определяются

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9' \partial U_9''} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U''_9 \partial U'_9} = 0.$$

Определим численные величины функций Φ_{p9} и Φ_{q9}.

$$\Phi_{p9} = -96 - \left[-441{,}3802 + 0{,}009959 \cdot \left(220^2 + 0^2\right)\right] = -136{,}341798,$$

$$\Phi_{q9} = -48 - \left[-1091{,}872899 + 0{,}018965 \cdot \left(220^2 + 0^2\right)\right] = 125{,}966899,$$

$$\begin{aligned}P_{Б9} &= 220 \cdot (-1{,}549321) + 0 \cdot 4{,}462533 - 0{,}602214 \cdot [220 \cdot 0{,}238370 + \\ &+ 0 \cdot (-0{,}616905)] - 0{,}023482 \cdot [0 \cdot 0{,}238370 - 220 \cdot (-0{,}616905)] - \\ &- 0{,}720539 \cdot [220 \cdot 0{,}406699 + 0 \cdot (-0{,}206526)] - \\ &- 0{,}034905 \cdot [0 \cdot 0{,}406699 - 220 \cdot (-0206526)] = -441{,}673802,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{Б9} &= 0 \cdot (-1{,}549321) - 220 \cdot 4{,}462533 - 0{,}602214 \cdot [0 \cdot 0{,}238370 - \\ &- 220 \cdot (-0{,}616905)] + 0{,}023482 \cdot [220 \cdot 0{,}238370 + 0 \cdot (-0{,}226536)] - \\ &- 0{,}720539 \cdot [0 \cdot 0{,}46699 - 220 \cdot (-0{,}206526)] + \\ &+ 0{,}034905 \cdot [220 \cdot 0{,}406699 + 0 \cdot (-0{,}206526)] = -1091{,}872899.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9'} = -0,602214 \cdot 0,238370 + 0,023482 \cdot (-0,616905) -$$
$$-0,720539 \cdot 0,406699 + 0,034905 \cdot (-0,206526) = -0,458287,$$

$$\frac{\partial P_{Б9}}{\partial U_9''} = -0,602214 \cdot (-0,616905) - 0,023482 \cdot 0,238370 -$$
$$-0,720539 \cdot (-0,206526) - 0,034905 \cdot 0,406699 = 0,500525,$$

$$\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9'} = 0,602214 \cdot (-0,616905) + 0,023482 \cdot 0,238370 +$$
$$+0,720539 \cdot (-0,206526) + 0,034905 \cdot 0,406699 = -0,500525,$$

$$\frac{\partial Q_{Б9}}{\partial U_9''} = -0,602214 \cdot 0,238370 + 0,023482 \cdot (-0,616905) -$$
$$-0,720539 \cdot 0,406699 + 0,034905(-0,206526) = -0,458287 .$$

Затем определим

$$\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9'} = -[-0,458287 + 2 \cdot 0,009959 \cdot 220] = -3,923673,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} = -[0,500525 + 2 \cdot 0,009959 \cdot 0] = -0,500525,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q9}}{\partial U_9'} = -[-0,50052 + 2 \cdot 0,018965 \cdot 220] = -7,844075,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p9}}{\partial U_9''} = -[-0,458287 + 2 \cdot 0,018965 \cdot 0] = 0,458287.$$

Частные производные второго порядка определяются

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9'^2} = -2 \cdot 0{,}009958 = -0{,}019918,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{p9}}{\partial U_9''^2} = -2 \cdot 0{,}009959 = -0{,}019918,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9'^2} = -2 \cdot 0{,}018965 = -0{,}037930,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{q9}}{\partial U_9''^2} = 2 \cdot 0{,}018965 = -0{,}037930,$$

$$\frac{\partial F_9}{\partial U_9'} = 2[-136{,}341798 \cdot (-3{,}923673) +$$
$$+125{,}966899 \cdot (-7{,}844075)] = -906{,}266343.$$

$$\frac{\partial F_9}{\partial U_9''} = 2[-136{,}341798 \cdot (-0{,}500525) + 125{,}966899 \cdot 0{,}458287] = 251{,}942941.$$

Частные производные второго порядка матрицы Гессе определяются

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'^2} = 2\left[(-3{,}923673)^2 + (-7{,}844075)^2 - 136{,}341798 \cdot (-0{,}019918) +\right.$$
$$\left.+ 251{,}942940 \cdot (-0{,}037930)\right] = 140{,}168094,$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9''^2} = 2\left[(-0{,}500525)^2 + 0{,}0458287^2 - 136{,}341798 \cdot (-0{,}019918) +\right.$$
$$\left.+ 251{,}942911 \cdot (-0{,}037930)\right] = -12{,}759972,$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9' \partial U_9''} = 2[-3{,}923673 \cdot (-0{,}500525) - 7{,}844075 \cdot 0{,}458287 -$$
$$-136{,}341798 \cdot 0 + 251{,}942911 \cdot 0] = -3{,}261882,$$

$$\frac{\partial^2 F_9}{\partial U_9'' \partial U_9'} = 2[-0{,}500525 \cdot (-3{,}923673) + 0{,}458287 \cdot (-7{,}84405) -$$
$$-136{,}341798 \cdot 0 + 251{,}942911 \cdot 0] = -3{,}261882.$$

Осуществим первый шаг согласно вышеприведенному рекуррентному выражению

$$\begin{bmatrix} U_9' \\ \hline U_9'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ \hline 0 \end{bmatrix}^0 - \left[\begin{array}{c|c} 140{,}168094 & -3{,}261882 \\ \hline -3{,}261882 & -12{,}759972 \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} -906{,}266343 \\ \hline 251{,}942911 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_9' \\ -- \\ U_9'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ -- \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 140{,}168094 & -3{,}261882 \\ & \\ -3{,}261882 & -12{,}759972 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -906{,}266343 \\ \\ 251{,}942911 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_9' \\ \hline U_9'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ \hline 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -6{,}884100 \\ \hline -17{,}984975 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 226{,}884100 \\ \hline 17{,}984975 \end{bmatrix}.$$

В результате получим данные реализации нижней правой математической подмодели третьей подсистемы

$$\begin{bmatrix} U_9' \\ \hline U_9'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 226{,}884100 \\ \hline 17{,}984975 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, осуществим один полный шаг по отношению ко всем трем подсистемам, а следовательно, и к целой ЭЭС.

Полученные результаты представим следующим образом:

– для первой подсистемы

$\dot{I}_1 = 0{,}492048 - j0{,}424885,$

$\dot{U}_2 = 220{,}253681 + j8{,}015827,$

$\dot{U}_3 = 219{,}920976 - j0{,}135165,$

– второй подсистемы

$\dot{I}_4 = 0{,}318133 - j0{,}228854,$

$\dot{U}_5 = 206{,}113454 - j24{,}527527,$

$\dot{U}_6 = 209{,}602658 - j28{,}789772,$

– третьей подсистемы

$\dot{I}_7 = 0{,}238370 - j0{,}616905,$

$\dot{I}_8 = 0{,}406699 - j0{,}206526,$

$\dot{U}_9 = 226{,}884100 + j17{,}984975.$

Чтобы начать вторую итерацию, необходимо подсчитать численные значения комплексных токов для первой подсистемы (2-й и 3-й узлы), второй подсистемы (5-й и 6-й узлы) и третьей подсистемы (9 узлов):

– для первой подсистемы

$$\dot{I}_{j1} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}492048 - j0{,}424885 \\ -0{,}44517 + j0{,}243212 \\ -0{,}272909 + j0{,}136244 \end{bmatrix},$$

– второй подсистемы

$$\dot{I}_{j2} = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}318181 - j0{,}231818 \\ -0{,}363636 + j0{,}181818 \\ -0{,}500000 + j0{,}250000 \end{bmatrix},$$

– третьей подсистемы

$$\dot{I}_{j_3} = \begin{bmatrix} \dot{I}_7 \\ \dot{I}_8 \\ \dot{I}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}238370 - j0{,}616905 \\ 0{,}406699 - j0{,}206526 \\ -0{,}412575 + j0{,}244266 \end{bmatrix}.$$

Имея численные значения комплексных токов третьей подсистемы, можем перейти к следующим итерациям. Отметим, что они осуществляются тем же образом.

Результаты следующих итераций приведены в табл. 2 – 4.

Таблица 2

Поиск итерационного процесса элементов комплексных токов первой подсистемы десятиузловой ЭЭС

Число итерации	Искомые переменные					
	$\dot{I}_1 = I'_1 + jI''_1$		$\dot{I}_2 = I'_2 + jI''_2$		$\dot{I}_3 = I'_3 + jI''_3$	
	I'_1	I''_1	I'_2	I''_2	I'_3	I''_3
0	0,500000	–0,454545	–0,454545	0,227272	–0,272727	0,136363
1	0,492048	–0,424885	–0,445170	0,243212	–0,272909	0,136244
2	0,482728	–0,405257	–0,421997	0,173536	–0,247609	0,094055
3	0,482611	–0,405197	–0,420526	0,173670	–0,247513	0,094102

Таблица 3

Поиск итерационного процесса элементов комплексных токов второй подсистемы десятиузловой ЭЭС

Число итерации	Искомые переменные					
	$\dot{I}_4 = I'_4 + jI''_4$		$\dot{I}_5 = I'_5 + jI''_5$		$\dot{I}_6 = I'_6 + jI''_6$	
	I'_4	I''_4	I'_5	I''_5	I'_6	I''_6
0	0,318181	–0,231818	–0,363636	0,181818	–0,500000	0,250000
1	0,318133	–0,228854	–0,405487	0,145814	–0,550459	0,186793
2	0,306957	–0,222233	–0,419218	0,135090	–0,545875	0,193733
3	0,305801	–0,222045	–0,419586	0,134961	–0,544325	0,194618

Таблица 4

Поиск итерационного процесса элементов комплексных токов третьей подсистемы десятиузловой ЭЭС

Число итерации	Искомые переменные					
	$\dot{I}_7 = I_7' + jI_7''$		$\dot{I}_8 = I_8' + jI_8''$		$\dot{I}_9 = I_9' + jI_9''$	
	I_7'	I_7''	I_8'	I_8''	I_9'	I_9''
0	0,272727	–0,621362	0,427272	–0,204545	–0,436363	0,218181
1	0,238370	–0,616905	0,406699	–0,206526	–0,412575	0,244266
2	0,239068	–0,610621	0,416333	–0,200854	–0,404605	0,234241
3	0,238140	–0,610428	0,415613	–0,200106	–0,404217	0,234242

Имея численные значения узловых комплексных токов отдельных подсистем, нетрудно определить численные значения комплексных напряжений.

Сравнение результатов расчета установившегося режима классическим и диакоптическим методами приведено в табл. 5.

Таблица 5

Сравнение результатов расчета установившегося режима классическим и диакоптическим методами

Узел	Метод			
	Классический		Диакоптический	
	$\dot{I} = I' + jI''$, кА		$\dot{I} = I' + jI''$, кА	
	I'	I''	I'	I''
ЭС-1	0,482519	–0,405197	0,482611	–0,405197
ЭН-2	–0,421013	0,173733	–0,420526	0,173670
ЭН-3	–0,247509	0,094102	–0,247513	0,094102
ЭС-4	0,305794	–0,222044	0,305811	–0,222044
ЭН-5	–0,419585	0,134963	–0,419586	0,134961
ЭН-6	–0,544312	0,194589	–0,544326	0,194618
ЭС-7	0,238194	–0,610427	0,238140	–0,610429
ЭН-8	0,415599	–0,200091	0,415611	–0,200010
ЭН-9	–0,404343	0,234239	–0,404217	0,234242

Численные эксперименты показывают, что диакоптическая модель «*Z*-*Y*, *P*-*Q*» соответствует классической математической модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная ЭЭС рассматривается как непрерывно развивающаяся большая и сложная система, состоящая из взаимосвязанных и взаимоуправляемых подсистем и занимающая огромное пространство. Поэтому в современной прикладной науке проблема расчета установившегося режима ЭЭС была и остается актуальной. Один из решающих моментов при рассмотрении проблемы определения установившегося режима ЭЭС – обеспечение инженерной наглядности для восприятия физических процессов, происходящих как в данном объединении, так и в отдельных его звеньях (подсистемах).

Из этого следует, что решение проблем большой ЭЭС не только связано с совершенствованием электронных вычислительных машин, но и требует создания качественно нового подхода, удовлетворяющего отмеченным требованиям.

Проблема установившегося режима большой и сложной ЭЭС с математической точки зрения сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка и представляет серьезный интерес также для современной прикладной математики. Для составления нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка ЭЭС представляют в виде радиально связанных подсистем (диакоптической системы), и соответствующие системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима реализуют методом минимизации.

Расчет установившегося режима большой ЭЭС методом декомпозиции-диакоптики – единственное направление, которое дает возможность с точки зрения инженерной наглядности провести необходимые качественные и количественные исследования.

Построенные диакоптические математические модели позволяют организовать итерационный процесс. Осуществляя один шаг, или одну итерацию, для каждой подсистемы, которая радиально связана с другими подсистемами, получаем один шаг, или одну итерацию, для полной ЭЭС.

Построена Z-обобщенная диакоптическая математическая модель, которая представляется в виде совокупности соответствующих подматриц отдельных подсистем и позволяет построить диакоптические Y-Z – математические модели. На основании Y-Z – диакоптических математических моделей можно построить также обобщенную математическую модель сложной и большой ЭЭС, когда станционные узлы могут быть типа P-Q. Построенные диакоптические математические модели обеспечивают высокую наглядность для восприятия физических процессов, происходящих в сложной и большой ЭЭС. Становится возможным осуществлять количественное и качественное исследование любого характера.

В настоящее время исследование различных режимных вопросов большой и сложной ЭЭС должно основываться на рациональном сочетании диакоптики и современной вычислительной техники.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 659 с.

2. Мельников, Н. А. Матричный метод анализа электрических цепей / Н. А. Мельников. – М. : Энергия, 1972. – 231 с.

3. Веников, В. А. Некоторые алгоритмические проблемы управления нормальными режимами энергетических систем / В. А. Веников, В. Г. Журавлев // Электричество. – 1971. – № 8. – С. 7 – 14.

4. Гуревич, В. Л. Метод расчета установившихся режимов электроэнергетических систем в прямоугольных координатах / В. Л. Гуревич, В. И. Тарасов // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1987. – № 5. – С. 50 – 60.

5. Мельников, Н. А. Электрические сети и системы : учеб. пособие / Н. А. Мельников. – М. : Энергия. – 1975. – 463 с.

6. Идельчик, В. И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем / В. И. Идельчик. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 289 с.

7. Фазылов, Х. Ф. Некоторые вопросы итерационного расчета установившихся режимов электрических систем / Х. Ф. Фазылов, Т. Х. Насыров // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1971. – № 6. – С. 36 – 44.

8. Хачатрян, В. С. Об одном методе обращения матриц, встречающихся в электротехнике / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1969. – № 5 – С. 105 – 108.

9. Идельчик, В. И. Расчеты установившихся режимов электрических систем / В. И. Идельчик ; под ред. В. А. Веникова. – М. : Энергия, 1977. – 192 с.

10. Латышев, Т. С. Расчет установившихся режимов электрической сети при заданных мощностях в узлах / Т. С. Латышев // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1970. – № 1. – С. 157 – 161.

11. Идельчик, В. И. Расчеты установившихся режимов электрических систем / В. И. Идельчик. – М. : Энергия, 1979. – 192 с.

12. Хачатрян, В. С. Математическая модель установившегося режима эквивалентированной электроэнергетической системы / В. С. Хачатрян, М. Г. Тамразян // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 1998. – № 1. – С. 21 – 28.

13. Гераскин, О. Т. Обобщенные параметры больших энергосистем и их определение методом диакоптики / О. Т. Гераскин, В. А. Григорьев // Электричество. – 1981. – № 4. – С. 37 – 41.

14. Хачатрян, В. С. Решение Z-Y уравнений установившегося режима электроэнергетической системы методом декомпозиции / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 1997. – № 2. – С. 96 – 103.

15. Гераскин, О. Т. Методы декомпозиции для расчета установившихся режимов больших электроэнергетических систем / О. Т. Гераскин // Известия РАН. Энергетика. – 1997. – № 6. – С. 11 – 20.

16. Бабаян, Р. А. Расчет установившегося режима электроэнергетической системы при P-Q типе станционных узлов / Р. А. Бабаян // Известия НАН и ГИУА Армении. Сер. ТН. – 1996. – № 1. – С. 6 – 11.

17. Хачатрян, В. С. Метод и алгоритм расчета установившихся режимов больших энергосистем / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1973. – № 4. – С. 45 – 57.

18. Хачатрян, В. С. Определение установившихся режимов больших электроэнергетических систем с применением метода Ньютона – Рафсона / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 4. – С. 36 – 43.

19. Хачатрян, В. С. Определение установившихся режимов больших энергосистем методом подсистем / В. С. Хачатрян // Электричество. – 1974. – № 5. – С. 75 – 78.

20. Хачатрян, В. С. Решение уравнений установившихся режимов больших электрических систем с применением метода декомпозиции / В. С. Хачатрян // Электричество. – 1976. – № 6. – С. 12 – 19.

21. Хачатрян В. С. Новый метод определения обобщенных параметров установившегося режима электроэнергетической системы / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян // Сб. докл. II междунар. энергет. конф. в Армении. – Ереван, 2001. – С. 400 – 408.

22. Бадалян, Н. П. Построение Y-Z, P-Q математической модели установившегося режима ЭЭС и ее реализация методом минимизации / Н. П. Бадалян // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2001. – № 3. – С. 372 – 378.

23. Хачатрян, В. С. Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 11 – 16.

24. Бадалян, Н. П. Новый метод обращения Y матрицы узловых комплексных проводимостей электроэнергетической системы / Н. П. Бадалян // Вестник МАНЭБ. – СПб., 2003. – № 7. – С. 70 – 72.

25. Бадалян, Н. П. Метод построения Z-Y расчетной диакоптической матрицы большой электроэнергетической системы / Н. П. Бадалян // Вестник МАНЭБ. – СПб., 2004. – № 8. – С. 81 – 85.

26. Бадалян, Н. П. Метод коррекции Z расчетной диакоптической матрицы установившегося режима сложной электроэнергетической системы / Н. П. Бадалян // Известия вузов и энергетических объединений стран СНГ. Энергетика. – 2004. – № 3. – С. 30 – 38.

27. Хачатрян, В. С. Расчет установившегося режима электроэнергетической системы с использованием методов Ньютона первого и второго порядков / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян, Е. А. Чащин // Вестник ИГЭУ. – 2009. – Вып. 4. – С. 59 – 64.

ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Приложение 1

Построение и реализация математической модели установившегося режима тринадцатиузловой схемы замещения электроэнергетической системы

Соответствующая схема замещения тринадцатиузловой ЭЭС приведена на рис. П1.

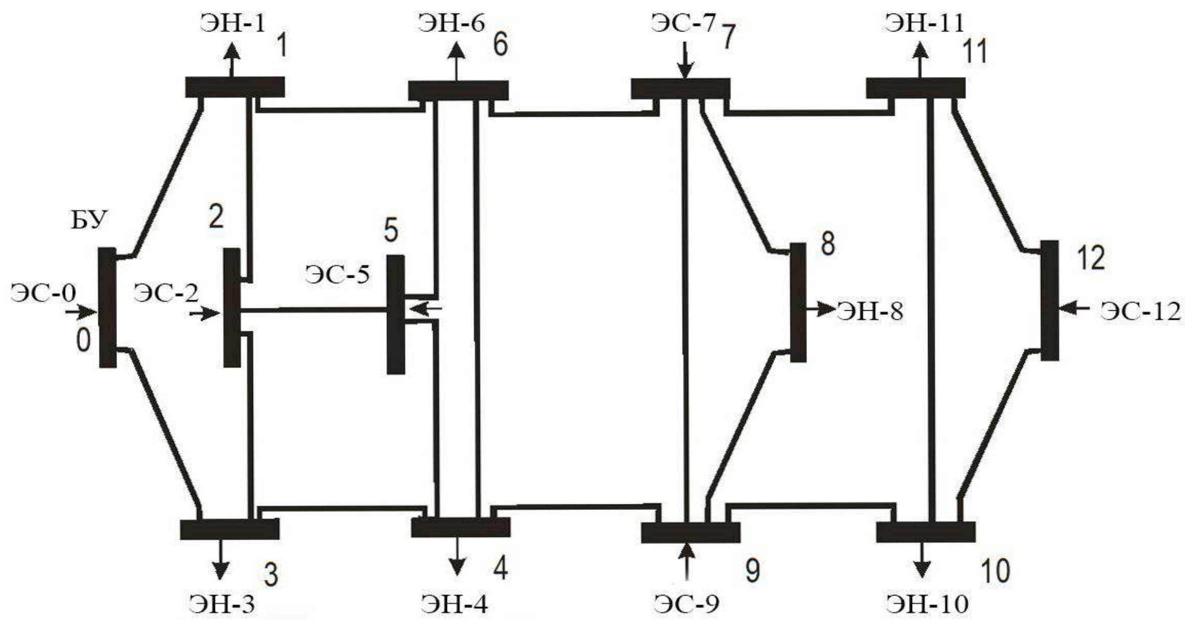


Рис. П1. Схема замещения тринадцатиузловой ЭЭС

После удаления ветвей 1-6, 2-5, 4-9, 7-11 схема замещения рассматриваемой ЭЭС, приведенная на рис. П1, представляется в виде совокупности четырех радиально связанных подсистем, как это показано на рис. П2.

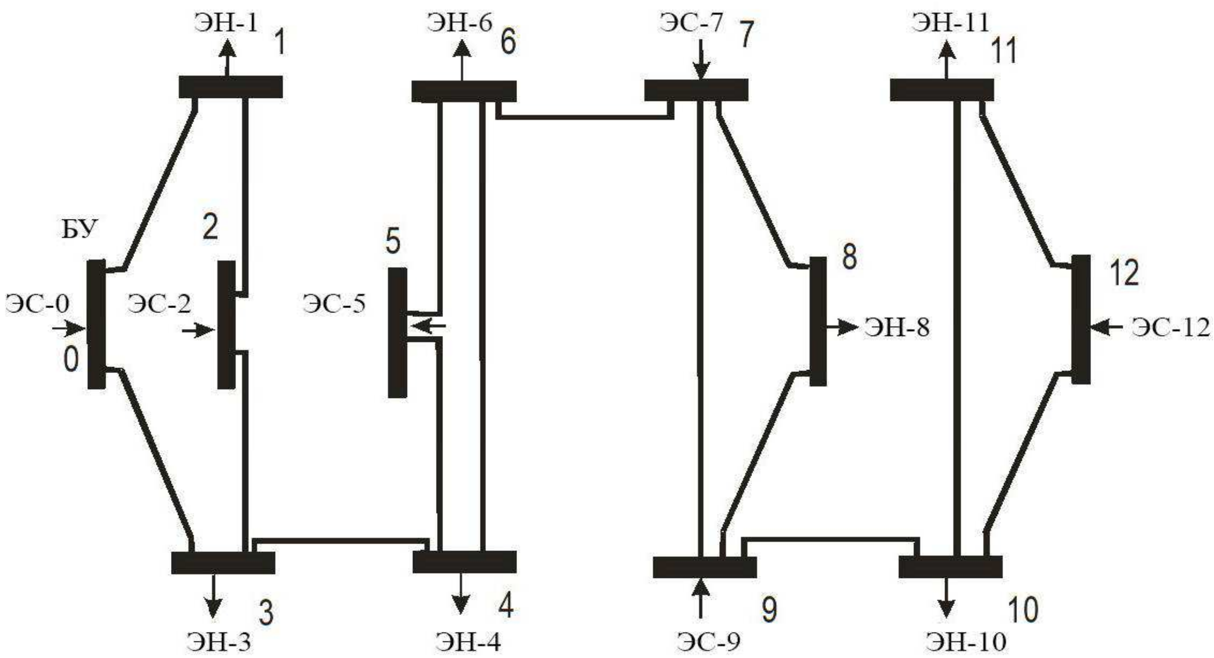


Рис. П2. Схема замещения тринадцатиузловой ЭЭС как совокупность радиально связанных подсистем

Пользуясь пассивными параметрами, приведенными в табл. П1, в данном случае численными значениями продольных комплексных сопротивлений, строим расчетную диакоптическую матрицу (П1).

Таблица П1

Численные значения продольных комплексных сопротивлений

Линии	*R*	*X*	Линии	*R*	*X*
0-1	13,5	21,8	5-6	16,5	23,4
0-3	9,2	28,3	6-7	12,1	25,4
1-2	11,2	18,8	7-8	8,4	11,2
1-6	7,5	13,2	7-9	17,2	29,5
2-3	7,4	13,8	7-11	7,5	13,2
2-5	13,3	23,4	8-9	16,9	23,4
3-4	5,7	11,2	9-10	5,7	11,2
4-5	17,2	29,5	10-11	8,4	11,2
4-6	8,4	11,2	1-12	17,2	29,5
4-9	5,9	18,1	11-12	16,5	23,4

9,219520 + +j16,119865	5,650244 + + j11,209785	3,257077 + + j7,384858										5,962443 + j8,735007	2,393167 + + j3,824927	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000
5,650244 + + j11,209785	10,307211 + + j20,858010	5,925110 + + j14,104810										–0,274866 – – j2,895025	4,382101 + + j6753200	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000
3,257077 + + j7,384858	5,925110 + + j14,104810	7,622149 + + j18,851484										–4,365072 – – j11,666260	–1,697039 – – j4,746674	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000
			5,700000 + + j11,200000	5,700000 + + j11,200000	5,700000 + + j11,200000							–5,700000 – – j11,200000	–5,700000 – – j11,200000	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000
			5,700000 + + j11,200000	15,951502 + + j27,175328	9,169585 + + j16,379210							–9,169585 – – j16,379210	–15,951502 – – j27,175328	–3,469585 – – j5,179210	0,000000 + + j0,000000
			5,700000 + + j11,200000	9,169585 + + j16,379210	12,442186 + + j20,455015							–12,442185 – – j20,455016	– 9,109585 – j16,379210	–6,742182 – – j9,255015	0,000000 + + j0,000000
						12,100000 + + j25,400000	12,100000 + + j25,400000	12,100000 + + j25,400000				0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	–12,100000 – – j25,400000	0,000000 + + j0,000000
						12,100000 + + j25,400000	16,382590 + + j34,388602	14,095997 + + j30,538435				0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	–14,195997 – – j30,538435	– 1,995997 – – j5,138435
						12,100000 + + j25,400000	14,095997 + + j30,538435	21,704184 + + j41,329466				0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	–21,704184 – – j41,329466	– 9,604184 – – j15,929466
									5,700000 + + j11,200000	5,700000 + + j11,200000	5,700000 + + j11,200000	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	5,700000 + + j11,200000
									5,700000 + + j11,200000	12,442186 + + j20,455015	9,169585 + + j16,379921	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	12,442186 + + j20,455015
									5,700000 + + j11,200000	9,169585 + + j16,379921	15,951502 + + j27,175328	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	9,169585 + + j16,379921
												30,269700 + + j53,856648	13,259791 + + j24,950811	6,742185 + + j9,255015	0,000000 + + j0,000000
												13,259791 + + j24,950811	35,330642 – j62,075202	3,469588 – – j5,179210	0,000000 + + j0,000000
												6,742188 + + j9,255015	3,469585 + + j5,179210	34,346369 + + j68,68448	9,604184 + + j15,929466
												0,000000 + + j0,000000	0,000000 + + j0,000000	9,604184 + + j15,929466	27,746370 + + j47,584481

(П1)

В табл. П2 приведены предварительные численные значения узловых активных параметров.

Таблица П2

Исходная информация узловых активных параметров тринадцатиузловой ЭЭС

Узлы	Параметр			
	P, МВт	*Q*, Мвар	*U*, кВ	φ, град
ЭС-0	–	–	220	0
ЭН-1	130	65	–	–
ЭС-2	110	50	–	–
ЭН-3	50	25	–	–
ЭН-4	90	45	–	–
ЭС-5	80	45	–	–
ЭН-6	100	50	–	–
ЭС-7	120	65	–	–
ЭН-8	108	54	–	–
ЭС-9	90	48	–	–
ЭН-10	94	47	–	–
ЭН-11	50	25	–	–
ЭС-12	150	70	–	–

В приложении приводятся только результаты реализации, поскольку однотипные математические модели схемы замещения десятиузловой ЭЭС со всей подробностью приведены в главах 3 и 4.

Согласно расчетной диакоптической матрице *Z* и численным значениям узловых активных параметров, приведенных в табл. П2, строим последовательно четыре математические подмодели, реализация которых приведена в табл. П3.

Таблица П3

Результаты реализации установившихся режимов диакоптических математических подмоделей

Подмодель	Узлы	Комплексные токи
I	1	0,593607 + j0,296804
	2	0,497738 – j0,226244
	3	0,227273 + j0,113636
II	4	0,410929 + j0,205479
	5	0,377143 - j0,200893
	6	0,456621 + j0,228311
III	7	0,540544 – j0,292793
	8	0,540000 + j0,245455
	9	0,401786 – j0,214286
IV	10	0,429224 + j0,214619
	11	0,228311 + j0,114155
	12	0,669643 – j0,312513

Соответствующая численная математическая модель реализовалась классическим методом, и для узлов получились те же комплексные токи. Можно заметить, что полученные результаты показывают соответствие расчетов диакоптическим и классическим методами.

Пользуясь расчетной диакоптической матрицей Z, строим Z-Y и Y-Z – диакоптические матрицы и соответствующие численные математические подмодели. Результаты реализации также показывают высокую работоспособность предложенных новых методов.

Приложение 2

Построение и реализация численных математических моделей схемы замещения двадцатидвухузловой электроэнергетической системы

Соответствующая схема замещения двадцатиузловой ЭЭС приведена на рис. П3, а численные значения продольных комплексных сопротивлений – в табл. П4, где узлы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 являются станционными, а узлы 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 – нагрузочными.

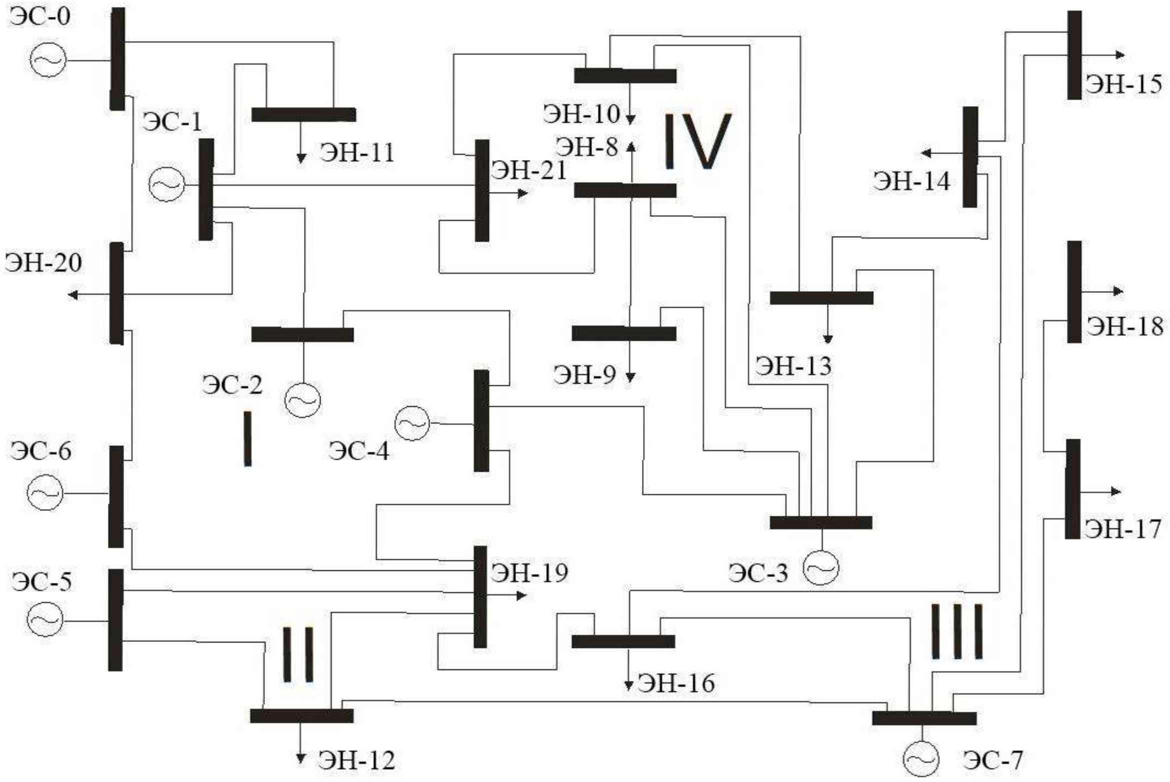


Рис. П3. Схема замещения двадцатиузловой ЭЭС

Таблица П.4

Численные значения продольных комплексных сопротивлений

Линии	R	X	Линии	R	X	Линии	R	X
0-11	12,4	49,6	3-13	13,4	21,7	8-21	1,9	7,0
0-20	0,4	2,4	4-19	10,2	18,5	10-13	17,2	34,4
1-2	0,0	23,8	5-12	16,4	33,2	10-21	0,0	24,1
1-11	0,9	3,8	5-19	2,9	7,4	12-19	12,1	34,2
1-20	2,9	17,8	6-19	0,9	19,6	13-14	42,4	85,6
1-21	1,4	8,6	6-20	1,1	33,1	14-15	8,1	24,8
2-4	29,9	70,0	7-12	70,0	142,2	14-16	53,6	98,4
3-4	10,4	20,8	7-15	0,4	18,2	15-18	5,1	19,8
3-8	0,3	0,7	7-16	7,7	15,6	16-19	21,3	45,9
3-9	15,2	37,6	7-17	2,3	43,2	17-18	2,1	19,8
3-10	16,4	32,8	8-9	14,0	34,4	–	–	–

После удаления ветвей 1-21, 4-3, 19-16 схема замещения, приведенная представляется как совокупность четырех подсистем на рис. П4.

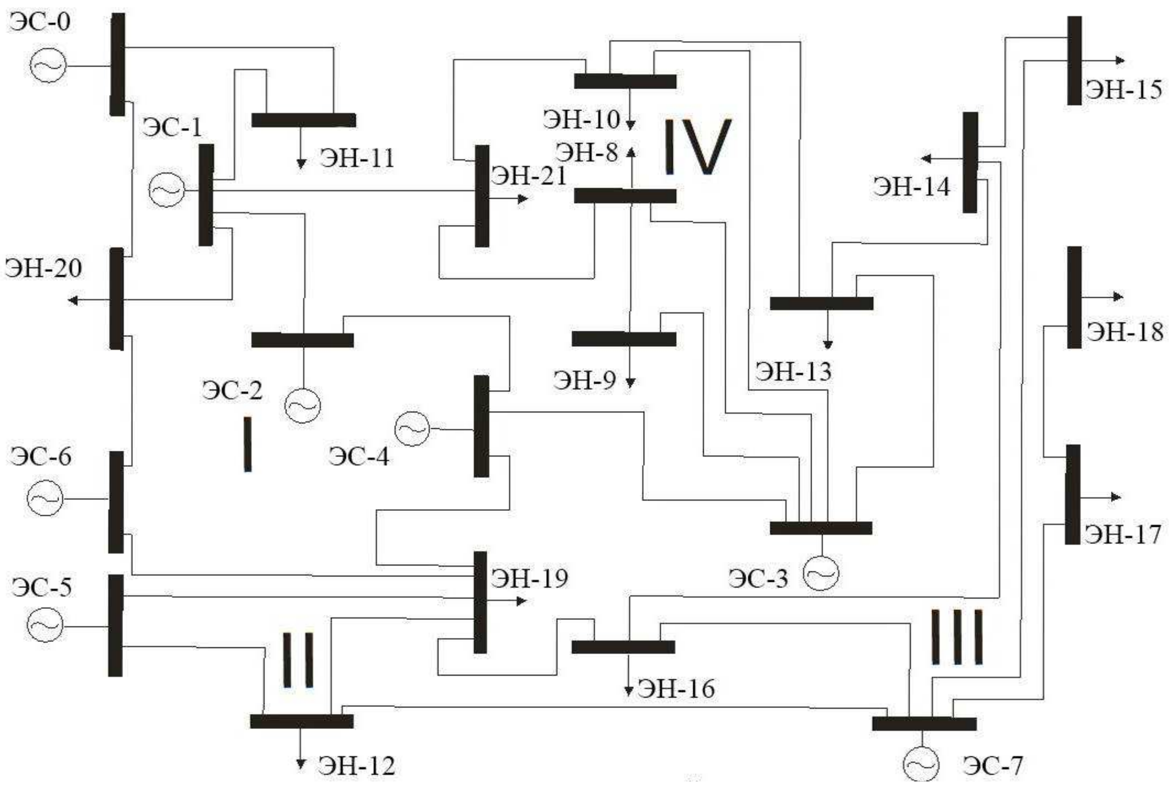


Рис. П4. Схема двадцатиузловой ЭЭС как совокупность четырех радиально связанных подсистем

Пользуясь численными значениями продольных комплексных сопротивлений, построим расчетную диакоптическую матрицу *Z*.

В табл. П5 приведены численные значения узловых активных параметров. Согласно расчетной диакоптической матрице *Z* и численным значениям узловых активных параметров, приведенным в табл. П5, последовательно построим численные математические подмодели четырех подсистем.

Таблица П5

Заданная исходная информация относительно активных параметров двадцатиузловой ЭЭС

Узел	Параметр			
	P, МВт	Q, Мвар	U, кВ	Ψ_u, град.
ЭС-0	–	–	220,0	0
ЭС-1	220,1	140,5	–	–
ЭС-2	190,0	89,8	–	–
ЭС-3	120,3	59,0	–	–
ЭС-4	130,9	55,7	–	–
ЭС-5	130,7	56,4	–	–
ЭС-6	120,0	70,0	–	–
ЭС-7	86,0	43,0	–	–
ЭН-8	96,1	48,7	–	–
ЭН-9	75,8	37,9	–	–
ЭН-10	174,2	87,1	–	–
ЭН-11	60,0	30,0	–	–
ЭН-12	22,2	11,1	–	–
ЭН-13	42,8	21,4	–	–
ЭН-14	75,5	37,8	–	–
ЭН-15	40,0	20,0	–	–
ЭН-16	26,0	13,0	–	–
ЭН-17	46,6	23,3	–	–
ЭН-18	50,2	25,1	–	–
ЭН-19	7,4	3,7	–	–
ЭН-20	150,3	100,1	–	–
ЭН-21	50,2	25,1	–	–

Поскольку для дисятиузловой схемы замещения рассматриваемой ЭЭС расчет осуществлен со всей подробностью, то здесь приводятся только результаты реализации в виде табл. П6 – П9.

Таблица П6

Результаты реализации диакоптической модели установившегося режима первой подсистемы

Узлы	Комплексные токи
1	0,995477 – *j*0,635459
2	0,853549 – *j*0,403414
4	0,593113 – *j*0,252400
6	0,543700– *j*0,317200
11	0,273500 + *j*0,136700
19	0,033700 + *j*0,016800

Таблица П7

Результаты реализации диакоптической модели установившегося режима второй подсистемы

Узлы	Комплексные токи
5	0,585600 – *j*0,252700
12	0,101000 + *j*0,050500
19	0,033700 + *j*0,016800

Таблица П8

Результаты реализации диакоптической модели установившегося режима третьей подсистемы

Узлы	Комплексные токи
7	0,394100 – *j*0,197100
14	0,347400 + *j*0,173953
15	0,183402 + *j*0,091701
16	0,119650 + *j*0,059825
17	0,215342 + *j*0,107671
18	0,228286 + *j*0,114143

Таблица П9

Результаты реализации диакоптической модели установившегося режима четвертой подсистемы

Узлы	Комплексные токи
3	0,542381 – *j*0,266005
8	0,459150 + *j*0,232680
9	0,349148 + *j*0,174574
10	0,800920 + *j*0,400460
13	0,194900 + *j*0,097450
21	0,229538 + *j*0,114769

Соответствующая численная математическая модель реализована классическим методом, и для узлов получены те же самые комплексные токи. Понятно, что полученные результаты показывают работоспособность диакоптического и классического методов.

Пользуясь расчетной диакоптической матрицей Z строят также Z-Y и Y-Z – диакоптические матрицы и соответствующие численные математические подмодели, для реализации которых пользуются методом минимизации, или методом Ньютона второго порядка.

Необходимо отметить, что и здесь результаты реализации показывают высокую работоспособность предложенных новых методов.

Учебное издание

БАДАЛЯН Норайр Петикович

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Редактор Е. А. Платонова

Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой, А. Н. Герасина

Корректор Н. В. Пустовойтова

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 16.08.24.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 11,39. Тираж 30 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.