

**Владимирский государственный университет**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

**Учебно-практическое пособие**

**Владимир 2024**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-практическое пособие

*Электронное издание*



Владимир 2024

ISBN 978-5-9984-2171-6

© ВлГУ, 2024

© Давлетярова Е. П.,

Жукова А. А.,

Курлыкова Л. И., 2024

УДК 519.61  
ББК 22.19

**Авторы-составители:** Е. П. Давлетярова (пп. 16 – 21), А. А. Жукова (введение, пп. 1, 2, 6, 7, заключение, библиографический список), Л. И. Курлыкова (пп. 3 – 5, 8 – 15, 22 – 25)

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент  
зав. кафедрой информационных технологий Российской академии  
народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации (Владимирский филиал)  
*И. В. Сидорова*

Кандидат технических наук, доцент  
доцент кафедры радиотехники и радиосистем  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Н. В. Садовский*

**Численные методы** [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / авт.-сост.: Е. П. Давлетярова, А. А. Жукова, Л. И. Курлыкова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 110 с. – ISBN 978-5-9984-2171-6. – Электрон. дан. (2,02 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткий теоретический материал и задания для самостоятельной работы по дисциплине «Численные методы».

Предназначено для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки, профили «Математика. Информатика»).

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 22. Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-9984-2171-6

© ВлГУ, 2024  
© Давлетярова Е. П.,  
Жукова А. А.,  
Курлыкова Л. И., 2024

*Учебное электронное издание*

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

*Учебно-практическое пособие*

**Авторы-составители:**

ДАВЛЕТЯРОВА Елена Петровна

ЖУКОВА Алла Адольфовна

КУРЛЫКОВА Любовь Игоревна

*Издается в авторской редакции*

**Системные требования:** Intel от 1,3 ГГц; Windows 7/8/10/11;  
дисковод CD-ROM.

**Тираж 25 экз.**

Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
Изд-во ВлГУ  
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт  
кафедра физико-математического образования и информационных технологий  
lk.vlsu@yandex.ru

## Введение

На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей математической задачи невозможно. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого, а поскольку искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных и других известных функциях. Поэтому важное значение приобретают численные методы решения математических задач. В зависимости от сложности задачи, заданной точности, применяемого метода и так далее для поиска численного решения математической

задачи может потребоваться выполнить от нескольких десятков до нескольких миллиардов различных арифметических действий. В связи с этим задачи численными методами решаются с использованием компьютера.

Решение, полученное численным методом, как правило, является приближенным, т.е. содержит в себе некоторую погрешность. Источники погрешности приближенного решения:

- несоответствие математической задачи изучаемому реальному явлению;

- погрешность исходных данных;
- погрешность метода решения;
- ошибки округления в арифметических и других действиях над числами.

Кроме этого, численные методы сами по себе являются приближенными, т.е. даже при отсутствии ошибок во входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой погрешностью метода. Это происходит потому, что численным методом обычно решается

некоторая другая, более простая, задача, приближающая исходную. В ряде случаев используемый численный метод строится на базе бесконечного процесса, который в пределе приводит к искомому решению. Однако реально осуществить предельный переход не удастся, и процесс, прерванный на некотором шаге, дает приближенное решение.



# 1. Теория погрешностей

Пусть  $x$  – точное значение некоторой величины,  $x^*$  – ее приближенное значение. Разность

$$\Delta(x^*) = |x - x^*| \quad (1)$$

называют *абсолютной погрешностью* числа  $x^*$ .

Абсолютная погрешность является одной из характеристик точности числа  $x^*$ . Вычислить точно эту величину можно не всегда, но всегда можно указать границы ее изменения. Наименьшую из верхних границ  $\Delta(x^*)$  называют *предельной*

*абсолютной погрешностью* и обозначают  $\bar{\Delta}(x^*)$ . Таким образом,

$$x \approx x^* \pm \bar{\Delta}(x^*). \quad (2)$$

Например, если  $x^* = 1,7$ ,  $\bar{\Delta}(x^*) = 0,1$ , то  $1,6 \leq x \leq 1,8$ .

Еще одной характеристикой точности является относительная погрешность. *Относительной погрешностью* называют отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению приближенной величины:

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|}. \quad (3)$$

*Предельной относительной погрешностью* называют величину, определяемую отношением:

$$\bar{\delta}(x^*) = \frac{\bar{\Delta}(x^*)}{|x^*|}. \quad (4)$$

Например, пусть  $x = 7,849 \pm 0,001$ . Тогда

$$\bar{\delta}(x^*) = \frac{0,001}{7,849} \approx 10^{-4}.$$

Отличие относительной погрешности от абсолютной заключается в том, что относительная погрешность – величина безразмерная.

Найдем абсолютную и относительную погрешности функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при условии, что нам известны погрешности ее аргументов.

По формуле (1) имеем:

$$\Delta(y^*) = |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)| =$$
$$|df(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*} dx_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*} \Delta(x_i^*) \right|.$$

Для предельной абсолютной погрешности получаем:

$$\bar{\Delta}(y^*) = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*} \bar{\Delta}(x_i^*) \right| \quad (5)$$

Используя формулу (4), можно вычислить предельную относительную погрешность при вычислении функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точке  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ :

$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*}}{f(x^*)} \right| \bar{\Delta}(x_i^*) \quad (6)$$

ИЛИ

$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \Big|_{x=x^*} \right| \bar{\Delta}(x_i^*). \quad (7)$$

Предельную относительную погрешность функции можно вычислить через предельную относительную погрешность ее аргумента:

$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \right|_{x=x^*} \left| \frac{|\bar{\Delta}(x_i^*)|}{|x_i^*|} \right| =$$
$$\sum_{i=1}^n \left| x_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y \right|_{x=x^*} \bar{\delta}(x_i^*). \quad (8)$$

Применим полученные формулы к сумме, разности, произведению и частному.

Пусть  $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Вычислим  $\bar{\Delta}(y^*)$ ,  $\bar{\delta}(y^*)$ , если известны  $\bar{\Delta}(x_i)$ ,  $\bar{\delta}(x_i)$ . Так как разность будет рассмотрена позже, то предположим, что  $x_i \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$ .

Используя формулы [\(5\)](#), [\(6\)](#) и [\(8\)](#) получим:

$$\bar{\Delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}(x_i^*),$$
$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*} \bar{\Delta}(x_i^*).$$

Или

$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*} \bar{\delta}(x_i^*).$$

Отсюда,

$$\bar{\delta}(x_i^*) \leq \bar{\delta}(y^*) \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \bar{\delta}(x_i^*).$$

Таким образом, при сложении приближенных величин их абсолютные погрешности складываются, а относительная погрешность суммы была заключена между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.

Пусть  $y = x_1 - x_2$ . Предположим, что  $x_1^* > x_2^* > 0$ , тогда



$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1.$$

По формулам (5), (6) и (8) будем иметь:

$$\bar{\Delta}(y^*) = \bar{\Delta}(x_1^*) + \bar{\Delta}(x_2^*),$$

$$\bar{\delta}(y^*) = \frac{\bar{\Delta}(x_1^*) + \bar{\Delta}(x_2^*)}{y^*},$$

$$\bar{\delta}(y^*) = \frac{x_1^* \bar{\delta}(x_1^*) + x_2^* \bar{\delta}(x_2^*)}{y^*}.$$

Итак, абсолютная погрешность разности равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого. Если уменьшаемое и вычитаемое близкие к друг другу числа,

то их разность будет очень мала, а значит, относительная погрешность будет очень большой. Поэтому при вычислениях необходимо избегать вычитания близких величин.

Пусть  $y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ , тогда

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{y}{x_i}.$$

Используя формулы (5) и (8) получим:

$$\bar{\Delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{y^*}{x_i^*} \right| \bar{\Delta}(x_i^*),$$

$$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{i=1}^n \bar{\delta}(x_i^*).$$

Следовательно, при умножении приближенных величин их относительные погрешности складываются.

Пусть  $y = \frac{x_1}{x_2}$ , тогда

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}.$$

По формулам (5) и (8) будем иметь:

$$\bar{\Delta}(y^*) = \frac{|x_2^*|\bar{\Delta}(x_1^*) + |x_1^*|\bar{\Delta}(x_2^*)}{(x_2^*)^2},$$

$$\bar{\delta}(y^*) = \bar{\delta}(x_1^*) + \bar{\delta}(x_2^*).$$

**Пример.** Найти предельные абсолютные и относительные погрешности вычисления объема шара  $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ , если  $d = 3,7 \pm 0,05$  см,  $\pi = 3,14 \pm 0,0016$ .

Рассмотрим функцию  $y = f(\pi, d) = \frac{1}{6}\pi d^3$ . Вычислим  $\bar{\Delta}(y^*)$  и  $\bar{\delta}(y^*)$  по формулам (5) и (6), учитывая, что  $\pi^* = 3,14$ ,  $\bar{\Delta}(\pi^*) = 0,0016$ ,  $d^* = 3,7$ ,  $\bar{\Delta}(d^*) = 0,05$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2$ .

Получаем

$$\bar{\Delta}(y^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial \pi} \right|_{\pi=\pi^*, d=d^*} \left| \bar{\Delta}(\pi^*) + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{\pi=\pi^*, d=d^*} \right| \bar{\Delta}(d^*) = \frac{1}{6} \cdot$$

$$(3,7)^3 \cdot 0,0016 + \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot (3,7)^2 \cdot 0,05 \approx 1,09,$$

$$\bar{\delta}(y^*) \approx \frac{1,09}{\frac{1}{6} \cdot 3,14 \cdot (3,7)^3} \approx 0,04 = 4\%.$$

## 2. Решение уравнений

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0. \quad (9)$$

Решить такое уравнение – это значит установить имеет ли оно корни, сколько их и найти их значения с нужной точностью. Так как подавляющее число уравнений не имеет аналитических формул для вычисления корней, то на практике чаще используют различные приближенные (численные методы) решения уравнений. Приближенные методы

нахождения корней уравнений в основном состоят из двух этапов.

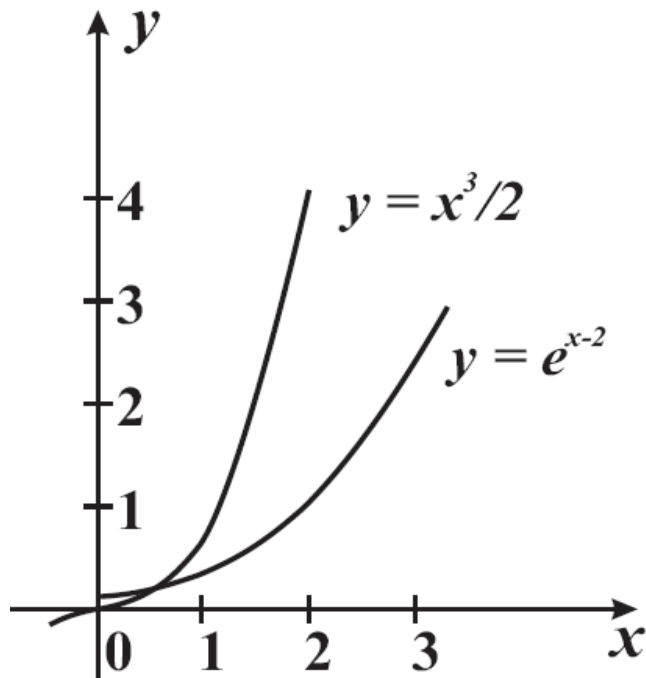
**Первый этап.** Отделение корней, т.е. установление тесных промежутков, содержащих только по одному корню. Для этого, в частности, можно использовать графические методы.

**Задача.** Графически отделить отрезок с корнем для уравнения

$$e^{x-2} - \frac{1}{2}x^3 = 0.$$

**Решение.** Преобразуем исходное уравнение к виду  $e^{x-2} = \frac{1}{2}x^3$  и построим графики функций, стоящих в левой и правой частях равенства.

Из рисунка видно, что на отрезке  $[0; 1]$  уравнение имеет единственный корень.





**Второй этап.** Уточнение приближенного значения корня до некоторой заданной степени точности.

При этом будем предполагать, что корень уравнения (9) на некотором отрезке  $[a; b]$  уже отделен. Заметим, что существуют различные интерпретации понятия точности. О том, как точно решено уравнение можно судить, например, по тому, насколько значение  $f(x)$  близко к 0 или по тому, насколько найденное решение  $x^*$  близко к точному решению  $x$

и т.д. Нельзя сказать, что верно какое-то одно понятие точности, всё зависит от условий конкретной задачи.

### 3. Решение уравнения $f(x) = 0$ методом бисекции (деления отрезка пополам)

В основе данного метода лежит следующая *теорема*:

1. Если на отрезке  $[a; b]$  функция  $f(x)$  непрерывна, и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то внутри него, хотя бы в одной точке, она принимает значение 0.
2. Если функция  $f(x)$  к тому же и монотонна, то корень внутри отрезка  $[a; b]$  единственен.

Пусть дано уравнение [\(9\)](#), где функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , т.е. функция удовлетворяет условиям

теоремы. Для нахождения корня уравнения (9), принадлежащего отрезку  $[a; b]$ , поделим этот отрезок пополам. Если  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , то  $c = \frac{a+b}{2}$  является корнем уравнения (9). Если  $f(c) \neq 0$ , что практически наиболее вероятно, то возможны два случая:

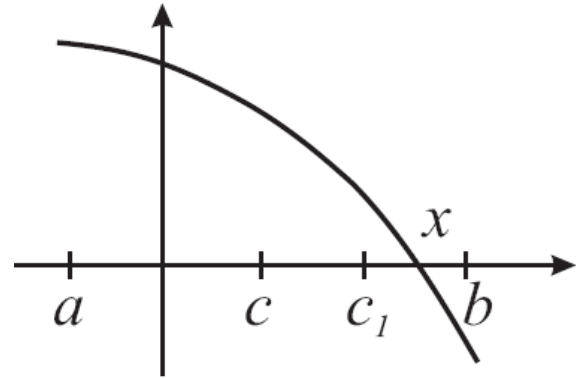
-  $f(x)$  меняет знак на  $[a; c]$ ;

-  $f(x)$  меняет знак на  $[c; b]$ .

Выбирая тот из отрезков, на котором функция меняет знак, снова делим его пополам и т.д.

Продолжая процесс половинного

деления дальше, мы либо на каком-то этапе получим точный корень уравнения [\(9\)](#), либо сможем прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего этот корень, т.е. вычислить его с любой наперёд заданной точностью.



Процесс деления будет конечным, так как мы получаем систему вложенных друг в друга отрезков  $[a_1; b_1]$ ,  $[a_2; b_2]$ , ...,  $[a_n; b_n]$  таких, что

$$f(a_i) \cdot f(b_i) < 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

и

$$b_i - a_i = \frac{1}{2^i} (b - a). \quad (11)$$

Левые концы отрезков  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образуют монотонную неубывающую ограниченную последовательность, а правые концы  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — монотонную невозрастающую

ограниченную последовательность. В силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности обе эти последовательности имеют пределы, причем из условия [\(11\)](#) следует, что оба эти предела равны между собой

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Перейдя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве [\(10\)](#), в силу непрерывности функции  $f(x)$ , получим

$$(f(\xi))^2 \leq 0.$$

Отсюда  $f(\xi) = 0$ , т.е.  $\xi$  является корнем уравнения (9), причем, очевидно, что

$$0 < \xi - a_n < \frac{1}{2^n} (b - a).$$

Метод бисекции связан с трудоемкими вычислениями, однако, он с успехом может быть реализован на компьютере. Алгоритм решения уравнения (9) методом бисекции при этом будет иметь следующий вид:

1. Ввод данных: концы отрезка  $[a; b]$  и точность вычисления  $\varepsilon$ .



## 2. Проверка условий применимости метода:

а) функция  $f(x)$  должна быть непрерывной на отрезке  $[a; b]$  (данное условие проверить на компьютере нельзя, это необходимо сделать "вручную");

б) функция  $f(x)$  на концах отрезка  $[a; b]$  должна принимать разные по знаку значения, т.е. необходимо проверить справедливо неравенство  $f(a) \cdot f(b) < 0$  или нет.

Если  $f(a) \cdot f(b) > 0$ , то метод неприменим. Конец алгоритма.

Если  $f(a) = 0$ , то  $a$  – корень уравнения [\(9\)](#). Конец алгоритма.

Если  $f(b) = 0$ , то  $b$  – корень уравнения [\(9\)](#). Конец алгоритма.

3.Нахождение середины отрезка  $[a; b]$  точки  $c = \frac{a+b}{2}$ .

4.Нахождение  $f(c)$ .

Если  $f(c) = 0$ , то  $c$  – корень уравнения [\(9\)](#). Конец алгоритма.

## 5. Проверка точности.

Точность будет достигнута, как только длина рассматриваемого отрезка  $[a; b]$  станет меньше  $2\varepsilon$ , т.е. будет выполнено одно из условий  $|b - a| < 2\varepsilon$  или  $|a - c| < \varepsilon$ . Действительно, в этом случае, в силу того, что точное решение  $\xi$  и приближенное решение  $c$  принадлежат одному и тому же отрезку  $[a; b]$  и  $c$  – середина этого

отрезка, расстояние между  $\xi$  и  $c$  будет не больше  $\varepsilon$ , т.е. требуемая точность будет достигнута. Итак, проверяем условие: если  $|a - b| < 2\varepsilon$ , то  $c$  – корень уравнения [\(9\)](#).  
Конец алгоритма.

6. Выбор отрезка, с которым будем работать дальше.

Если  $f(a) \cdot f(c) < 0$ , то дальше надо работать с отрезком  $[a; c]$ , иначе – с отрезком  $[c; b]$ . Чтобы не вводить новых переменных осуществим следующее переприсваивание: если  $f(a) \cdot f(c) < 0$ , то  $b$  присвоим

значение  $c$  ( $b = c$ ), иначе  $a$  присвоим значение  $c$  ( $a = c$ ). В этом случае концы отрезка, с которым работаем, всегда будут находиться в переменных  $a, b$ .

7. Применение данного алгоритма к новому отрезку  $[a; b]$ , т.е. переход к пункту 3.

Достоинствами данного метода является то, что он достаточно прост для реализации и применим для широкого класса уравнений. Недостатком метода является то, что его

применении многократно приходится вычислять значение функции  $f(x)$ , что иногда бывает сложно сделать.

Вернемся к оценке [\(11\)](#). Она верна при условии, что значения  $f(x)$  вычисляются точно. Однако на компьютере из-за ошибок округления, как правило, получается приблизительное значение функции. Но в методе бисекции используется не значение функции, а только ее знак, так что до тех пор, пока знак  $f(x)$  определяется верно, метод нечувствителен к ошибкам, допускаемым при вычислении

$f(x)$ . И все же ситуация, когда знак функции в точке вычислен неверно, возможна, и тогда следующий подынтервал выбирается неправильно, и оценка  $0 < \xi - a_n < \frac{1}{2^n}(b - a)$  перестает быть верной. Ясно, что если максимум абсолютной величины ошибки, допускаемой при вычислении функции  $f$  в произвольной точке интервала  $(a, b)$  равен  $E$ , то знак  $f$  будет определяться верно до тех пор, пока выполняется условие

$$|f(x)| > E.$$

Так как вблизи корня  $\xi$  значение функции  $f$  близко к 0, то можно утверждать и обратное: вблизи корня существует интервал неопределенности  $(\xi - \theta; \xi + \theta)$ , в котором знак  $f$  определяется неправильно. Когда приближения попадают в этот интервал, дальнейшее их продвижение к корню становится весьма проблематичным. К сожалению, установить интервал неопределенности заранее крайне сложно. Он зависит от неизвестного значения корня  $\xi$ , от того, насколько «пологим» является график функции в окрестности корня, и от



величины погрешности, допускаемой при вычислении  $f$ . С другой стороны, попадание в этот интервал обычно можно установить в ходе расчетов по неустойчивому поведению итераций. Когда это происходит, нет никакого смысла продолжать вычисления дальше.

Еще одним недостатком метода половинного деления является то, что он может быть весьма медленным. Чтобы сократить начальный интервал, например, в  $10^6$  раз, что соответствует точности приблизительно в шесть десятичных знаков, согласно оценке [\(11\)](#), нужно выполнить порядка  $n =$

$\frac{6}{\lg 2} \approx 20$  вычислений значений функции  $f(x)$ , что иногда может быть связано с большими затратами машинного времени.

## 4. Решение уравнения $f(x) = 0$ методом хорд

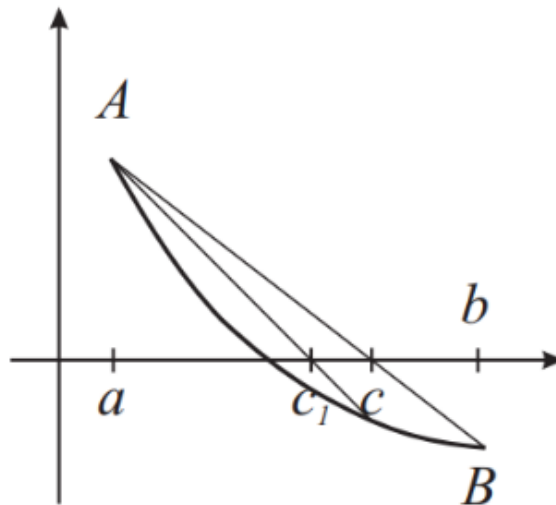
Метод половинного деления можно ускорить, если использовать не только знаки функции  $f(x)$ , но ее значения. Одним из методов, учитывающих эту информацию, является метод хорд.

Пусть корень уравнения  $f(x) = 0$  отделен на отрезке  $[a; b]$ , причем  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и первая и вторая производные  $f(x)$  сохраняют знак на

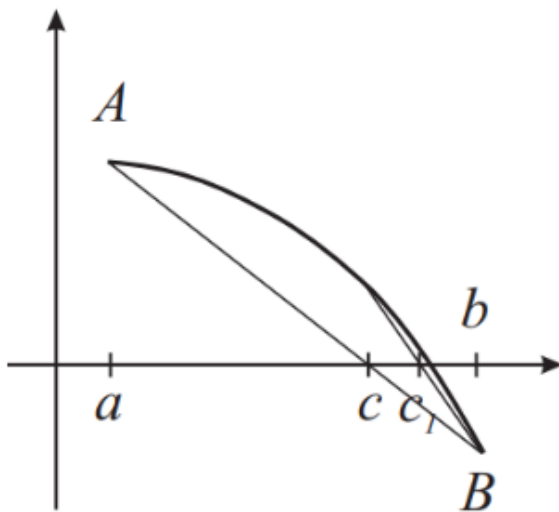
рассматриваемом отрезке. График функции  $f(x)$  проходит через точки  $A(a, f(a))$ ,  $B(b, f(b))$ .

Рассмотрим четыре основные типа расположения дуги кривой АВ.

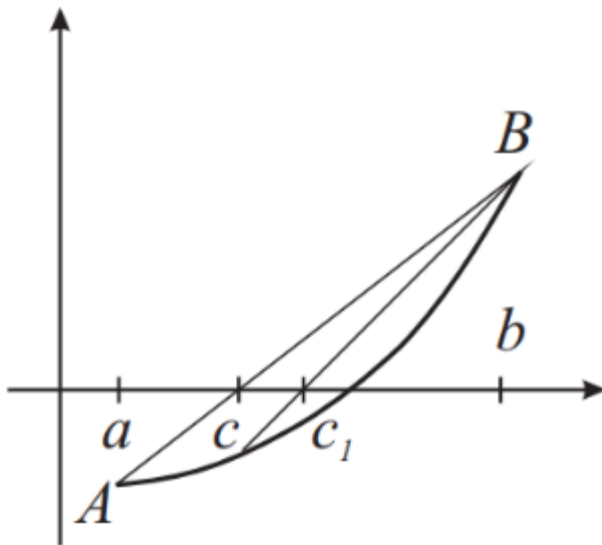
1. Здесь  $f'(x) < 0$  и  $f''(x) > 0$ , т.е. функция  $f(x)$  убывает и вогнута.



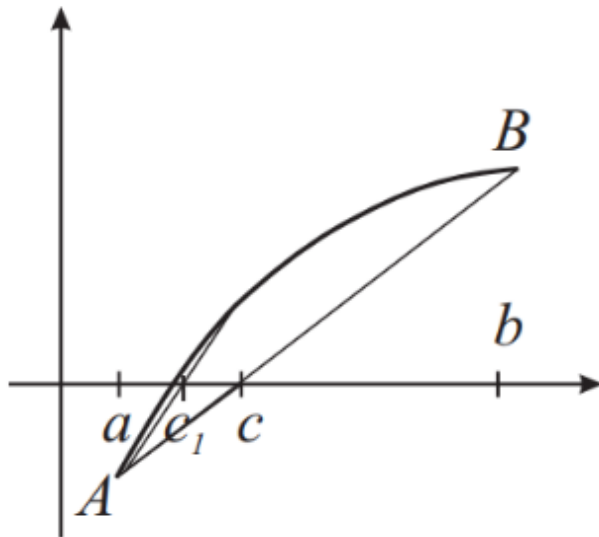
2. Здесь  $f'(x) < 0$  и  $f''(x) < 0$ , т.е. функция  $f(x)$  убывает и выпукла.



3. Здесь  $f'(x) > 0$  и  $f''(x) > 0$ , т.е. функция  $f(x)$  возрастает и выпукла.



4. Здесь  $f'(x) > 0$  и  $f''(x) < 0$ , т.е. функция  $f(x)$  возрастает и вогнута.



Рассмотрим третий случай. Метод хорд заключается в следующем: через точки  $A$  и  $B$  проводим прямую, и точка ее пересечения с осью  $Ox$  будет приближением искомого решения:

$$c_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a).$$

Возьмем точку  $A_1(c_1, f(c_1))$  и проведем прямую  $A_1B$ . Ее точка пересечения с осью  $Ox$  будет следующим приближением

$$c_2 = c_1 - \frac{b-c_1}{f(b)-f(c_1)} \cdot f(c_1).$$

И так далее



$$c_n = c_{n-1} - \frac{b-c_{n-1}}{f(b)-f(c_{n-1})} \cdot f(c_{n-1}). \quad (12)$$

То есть в данном случае точка  $B$  будет неподвижной.

Аналогично получится и для второго случая.

В первом и четвертом случаях неподвижным будет конец

$A$  и вычисления будут проходить по формулам:

$$c_1 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(b),$$
$$c_2 = c_1 - \frac{c_1-a}{f(c_1)-f(a)} \cdot f(c_1),$$

...

$$c_n = c_{n-1} - \frac{c_{n-1} - a}{f(c_{n-1}) - f(a)} \cdot f(c_{n-1}). \quad (13)$$

Можно указать простой признак того, когда следует применять формулу (12), а когда (13): неподвижным остается тот из концов отрезка  $[a; b]$  для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.

Алгоритм решения уравнения  $f(x) = 0$  методом хорд на компьютере имеет следующий вид:

1. Ввод данных.

К данным относятся: концы отрезка  $[a; b]$  и точность вычисления  $\varepsilon$ .

2. Проверка условий применимости метода.

Функция  $f(x)$  должна быть определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , ее первая и вторая производные не должны изменять своего знака на этом отрезке. Данные условия проверяются без использования компьютера.

3. Выбор первого приближения.

Если  $f(a) \cdot f''(a) > 0$ , то первое приближение  $c_0 = b$ , неподвижный конец  $d = a$ , иначе первое приближение  $c_0 = a$ , неподвижный конец  $d = b$ .

4. Проверка точности.

Если  $|f(c_0)| < \varepsilon$ , то  $c_0$  – корень, конец алгоритма.

5. Вычисление следующего приближения

$$c_0 = c_0 - \frac{c_0 - d}{f(c_0) - f(d)} \cdot f(c_0).$$

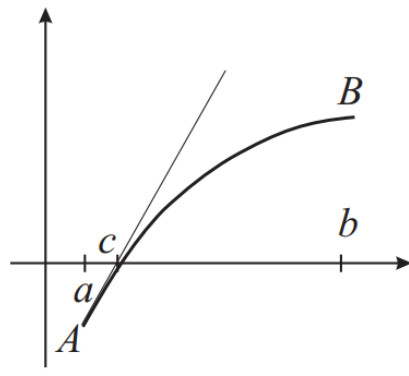
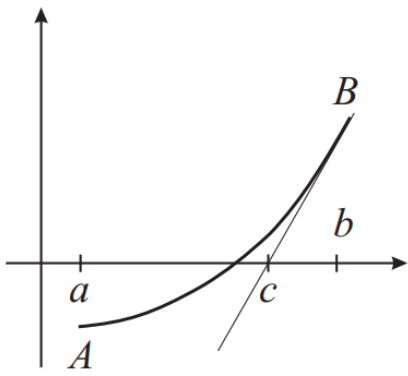
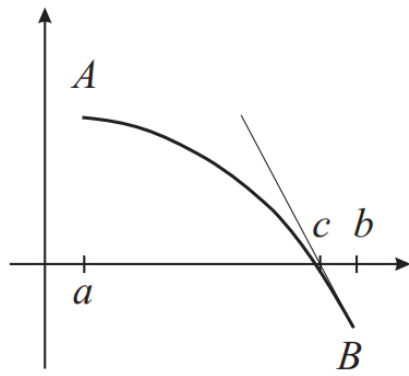
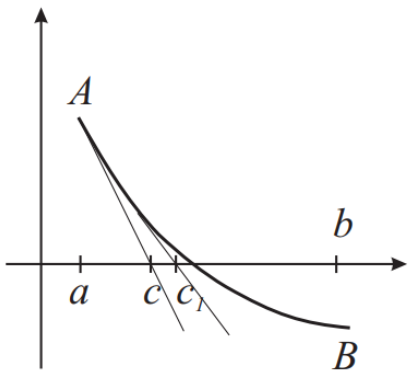
6. Переход на пункт 4 алгоритма.

В программе должны быть предусмотрены функции для вычисления  $f(x)$ ,  $f''(x)$ .

## 5. Решение уравнения $f(x) = 0$ методом касательных

При решении уравнения  $f(x) = 0$  методом касательных, также, как и при решении уравнения методом хорд, используется информация не только про саму функцию  $f$ , но и про ее первую и вторую производные. Условия применимости метода касательных такие же, как и метода хорд.

Графически процесс нахождения приближенного решения уравнения, в зависимости от поведения функции  $f(x)$  на отрезке, можно изобразить следующим образом:



Вычисления происходят по формуле

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)},$$

где  $c_n$  – предыдущее приближение. Формула для вычисления приближенного значения корня методом касательных получается из уравнения касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(c_n, f(c_n))$ :

$$y - f(c_n) = f'(c_n)(x - c_n),$$

где  $y = 0$ ,  $x = c_{n+1}$ .



Алгоритм решения уравнения  $f(x) = 0$  методом касательных на компьютере имеет следующий вид:

1. Ввод данных.

К данным относятся: концы отрезка  $[a; b]$  и точность вычисления  $\varepsilon$ .

2. Проверка условий применимости метода.

Функция  $f(x)$  должна быть определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , ее первая и вторая производные не должны

изменять своего знака на этом отрезке. Данные условия проверяются без использования компьютера.

3. Выбор первого приближения.

Если  $f(a) \cdot f''(a) > 0$ , то первое приближение  $c = a$ , иначе первое приближение  $c = b$ .

4. Проверка точности.

Если  $|f(c)| < \varepsilon$ , то  $c$  – корень, конец алгоритма.

5. Вычисление следующего приближения

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

6. Переход на пункт 4 алгоритма.

В программе должны быть предусмотрены функции для вычисления  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ .

Метод хорд и метод касательных дают приближение к точному корню уравнения  $f(x) = 0$  с разных сторон. Их совместное использование (так называемый *комбинированный метод*) позволяет значительно ускорить процесс нахождения корня.

## **Задания для самостоятельной работы**

- I. Напишите программу решения уравнений методом бисекции с наперед заданной точностью.
- II. Напишите программу решения уравнений методом касательных с наперед заданной точностью.
- III. Напишите программу решения уравнений методом хорд с наперед заданной точностью.
- IV. Используя методы бисекции, касательных, хорд найдите с наперед заданной точностью  $\varepsilon$  одни из корней уравнения. Сравните полученные результаты.

1.  $x - \sin x = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ .
2.  $\sqrt{x} - \cos(0,387x) = 0$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
3.  $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .
4.  $3x - \cos x - 1 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,000000001$ .
5.  $\operatorname{tg}(0,5x + 0,1) = x^2$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
6.  $\operatorname{ctg}(1,05x) - x^2 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .
7.  $x \lg x - 1,2 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
8.  $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{4} = 0$ ,  $\varepsilon = 0,0000001$ .
9.  $x^2 - 20 \sin x = 0$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ .

$$10. \operatorname{tg}(0,47x + 0,2) = x^2, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$11. 2x - \lg x - 7 = 0, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$12. 3x - \cos x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$13. x^2 + 4 \sin x = 0, \quad \varepsilon = 0,01.$$

$$14. \operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0, \quad \varepsilon = 0,1.$$

$$15. 2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

## **6. Решение уравнения $f(x) = x$ методом итераций (последовательных приближений, неподвижной точки)**

Уравнение  $F(x) = 0$  всегда можно переписать в следующем виде:  $f(x) = x$  и тогда для его решения используют метод последовательных приближений.

Теоретической основой данного метода является теорема Банаха.

*Теорема.* Пусть  $f$  – сжимающее отображение полного метрического пространства  $K$  в себя. Тогда существует

единственная точка этого пространства, переводимая отображением  $f$  в себя.

Это означает, что существует единственное решение уравнения  $f(x) = x$ . Найти это решение можно следующим образом: берется произвольная точка  $x_0$ , принадлежащая  $K$  и составляется последовательность

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Каждый член последовательности будет все ближе и ближе к искомому  $x$ , т.е.  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ .



Рассмотрим частный случай. В качестве  $K$  возьмем отрезок  $[a; b]$ . Тогда  $f(x)$  – функция, заданная на отрезке  $[a; b]$ . При этом функция  $f$  должна удовлетворять следующим условиям:

1) из того, что  $x \in [a; b]$  должно следовать, что  $f(x) \in [a; b]$  – условие того, что  $f$  – отображение отрезка  $[a; b]$  в себя;

2)  $|f(x) - f(y)| < \lambda|x - y|$ , где  $0 < \lambda < 1$ , – условие того, что отображение  $f$  является сжимающим.

Чтобы узнать, существует ли такое  $\lambda$ , проверим, дифференцируема ли функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Если да, то воспользуемся теоремой Лагранжа

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

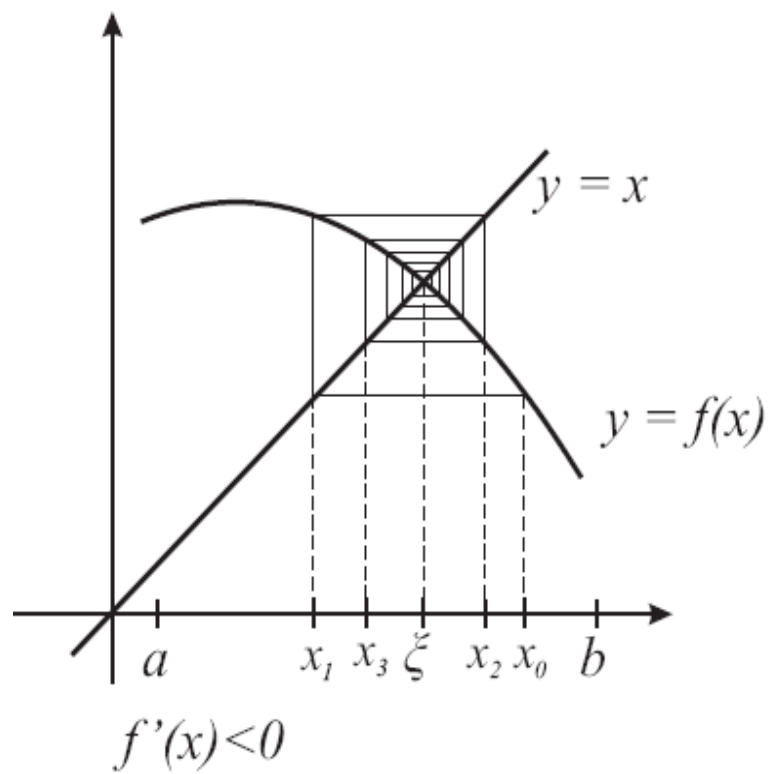
или

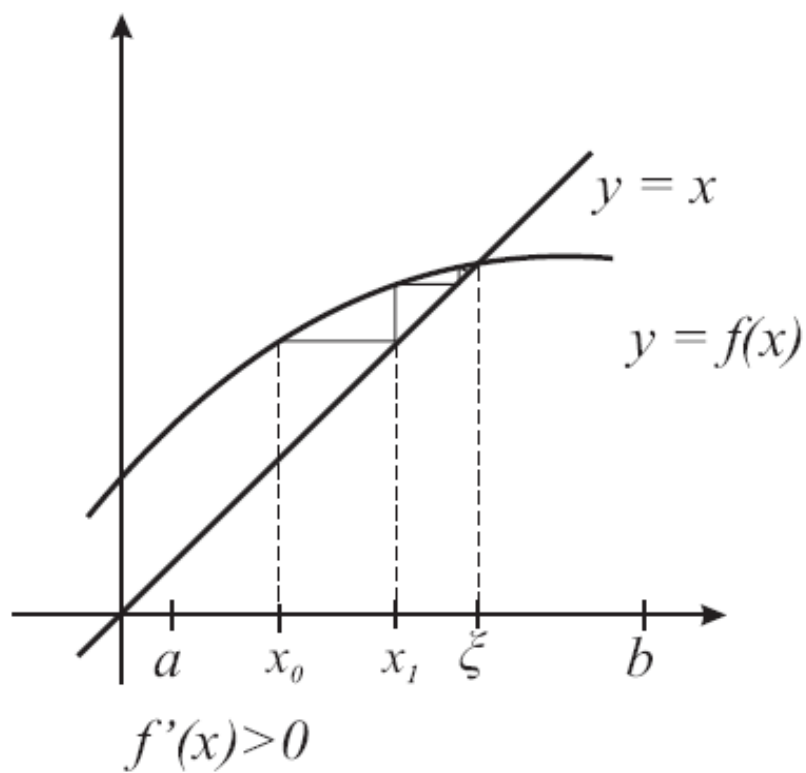
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|.$$

Если  $|f'(\xi)| < 1$ , то условие 2 выполняется. Таким образом, в качестве  $\lambda$  достаточно взять  $\max_{[a;b]} |f'(\xi)|$ .

Следует заметить, что ни одно из двух рассматриваемых условий проверить на компьютере нельзя.

Геометрически процесс построения итерационной последовательности можно изобразить следующим образом:





Приведем алгоритм решения уравнения  $f(x) = x$  методом итераций:

1. Положим  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  (за  $x_0$  можно было бы взять любую другую точку отрезка  $[a; b]$ ).

2. Вычисляем  $x_1 = f(x_0)$ .

3. Полагаем  $x_0 = x_1$  и переходим ко второму пункту (присваивая  $x_0$  значение  $x_1$ , мы тем самым «забываем» старое значение  $x_0$ , но оно в дальнейшем, в принципе, и не нужно).

Итак, получен циклический алгоритм. Выясним условие выхода из цикла.

Пусть  $\xi$  – точное решение. Зная  $x_n$  и  $x_{n-1}$  можно записать:

$$x_{n+1} = x_n + (x_{n+1} - x_n),$$

$$x_{n+2} = x_n + (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1})$$

и так далее. В пределе получим

$$\xi = x_n + (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \dots$$

Отсюда

$$|\xi - x_n| < |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots$$

Функция  $f(x)$  задает сжимающее отображение, поэтому

можно записать

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| < \lambda |x_n - x_{n-1}|,$$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \lambda |x_{n+1} - x_n| < \lambda^2 |x_n - x_{n-1}|$$

и так далее. Тогда

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}|(\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots),$$

где  $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$  — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $\lambda$  и знаменателем  $\lambda$ , меньшим 1. Поэтому можно записать



$$\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}| \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Полученное неравенство является оценкой точности метода. Таким образом, цикл будет работать до тех пор, пока  $|x_n - x_{n-1}| \frac{\lambda}{1-\lambda} > \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заранее заданная точность.

Заметим, что качество метода зависит от значения  $\lambda$ . Величина  $|x_n - x_{n-1}| \frac{\lambda}{1-\lambda}$  – оценка точности метода тем лучше, чем меньше данная величина, т.е. чем меньше  $\lambda$ .

Итак, получаем следующий алгоритм решения уравнения вида  $f(x) = x$  методом итераций на компьютере:

1. Ввод данных: концы отрезка  $[a; b]$ , точность  $\varepsilon$  и  $\lambda$ .

2. Выбор первого приближения  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ .

3. Вычисление следующего приближения  $x_1 = f(x_0)$ .

4. Проверка точности: если  $|x_1 - x_0| \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} > \varepsilon$ , то

переходим к шагу 3, предварительно присвоив  $x_0$  значение  $x_1$ ,

иначе  $x_1$  – корень уравнения, конец алгоритма.

Главным достоинством данного метода является то, что если в процессе вычисления допускались ошибки, то это никак не влияет на окончательный результат, т.е. метод как бы сам себя поправляет. Основным же недостатком данного метода является узкая область применения.

## 7. Приведение уравнений к итерационному виду

Уравнение

$$F(x) = 0 \quad (14)$$

может быть приведено к виду  $x = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  многими способами, однако это требуется сделать так, чтобы для функции  $f(x)$  выполнялись следующие условия:

1.  $f(x)$  определена и дифференцируема на отрезке  $[a; b]$ ;
2.  $f(x) \in [a; b]$  для всех  $x \in [a; b]$ ;

3. существует такое  $q \in \mathbb{R}$ , что  $|f'(x)| \leq q < 1$  для всех  $x \in [a; b]$ .

Рассмотрим один из способов приведения уравнения [\(14\)](#) к итерационному виду.

Если  $F'(x) > 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то умножим уравнение  $F(x) = 0$  на  $-\gamma$  и прибавим  $x$  к правой и левой частям уравнения

$$x = x - \gamma F(x).$$

Если  $F'(x) < 0$ , то

$$x = x + \gamma F(x).$$

Обозначим  $x \pm \gamma F(x)$  через  $f(x)$ . Подберем  $\gamma$  так, чтобы  $|f'(x)| < 1$ .

Пусть на отрезке  $[a; b]$  выполняется неравенство

$$m \leq |F'(x)| \leq M.$$

Тогда в качестве  $\gamma$  возьмем  $\frac{1}{M}$ . Действительно, в этом случае

$$f'(x) = 1 \pm \gamma F'(x),$$

$$1 - \gamma M \leq |f'(x)| \leq 1 - \gamma m,$$

$$|f'(x)| \leq 1 - \frac{m}{M}.$$

Тогда в качестве  $\lambda$  можно взять  $1 - \frac{m}{M} < 1$ .

*Пример.* Приведем уравнение  $x \cdot 2^x = 1$  на отрезке  $[0,1; 1]$  к итерационному виду.

Перенесем все слагаемые в одну часть  $1 - x \cdot 2^x = 0$  и введем функцию  $F(x) = 1 - x \cdot 2^x$ . Тогда  $F'(x) = -2^x - x \cdot 2^x \ln 2$ .

Найдем  $m$  и  $M$ . Для этого выясним, имеет ли уравнение  $F''(x) = 0$  корни на рассматриваемом отрезке и вычислим

значение функции  $F'(x)$  в найденных точках и на концах отрезка. Итак,

$$F''(x) = -2^{x+1} \ln 2 - x \cdot 2^x \ln^2 2,$$

$$F''(x) = 0 \Rightarrow -2^x \ln 2 (2 + x \ln 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\ln 2}.$$

Очевидно, что  $x \notin [0,1; 1]$ .

Вычислим значения  $F'(x)$  в точках 0,1 и 1:

$$F'(0,1) = -2^{0,1} - 0,1 \cdot 2^{0,1} \ln 2 \approx -1,146,$$

$$F'(1) = -2 - 2 \ln 2 \approx -3,386.$$



Таким образом, найдены  $t \approx 1,15$  и  $M \approx 4$  (округление происходит в большую по модулю сторону).

В этом случае исходное уравнение можно переписать в следующем виде  $x = x \pm \frac{1}{4}(1 - x \cdot 2^x)$ .

Выбор знака перед коэффициентом  $\frac{1}{4}$  зависит от знака производной функции  $F(x)$ . Так как  $F'(x) = -2^x - x \cdot 2^x \ln 2 < 0$  на отрезке  $[0,1; 1]$ , то перед коэффициентом  $\frac{1}{4}$  должен стоять знак плюс:  $x = x + \frac{1}{4}(1 - x \cdot 2^x)$ .

В качестве  $\lambda$  в рассматриваемом примере можно взять величину  $1 - \frac{1,15}{4}$ .

### **Задания для самостоятельной работы**

- I. Напишите программу решения уравнений методом итераций с наперед заданной точностью.
- II. Отделите отрезок с корнем, приведите уравнение к итерационному виду и решите его с помощью метода итераций.

1.  $x \cdot 2^x = 1,$

$\varepsilon = 0,0001.$

2.  $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
3.  $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .
4.  $3x - \cos x - 1 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,000000001$ .
5.  $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
6.  $\text{ctg}(1,05x) - x^2 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .
7.  $x \lg x - 1,2 = 0$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ .
8.  $(2-x)e^x = 0$ ,  $\varepsilon = 0,0000001$ .
9.  $x^2 - 20 \sin x = 0$ ,  $\varepsilon = 0,00001$ .

10.  $2,2x - 2^x = 0,$   $\varepsilon = 0,0001.$
11.  $2x - \lg x - 7 = 0,$   $\varepsilon = 0,001.$
12.  $3x - \cos x - 1 = 0,$   $\varepsilon = 0,0001.$
13.  $x^2 + 4 \sin x = 0,$   $\varepsilon = 0,01.$
14.  $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 0,$   $\varepsilon = 0,1.$
15.  $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0,$   $\varepsilon = 0,00001.$

## 8. Решение систем линейных уравнений. Метод Жордана – Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (15)$$

основная матрица которой невырожденная. Нам необходимо решить эту систему. Существует множество способов решения систем линейных уравнений. Рассмотрим один из них – метод

Жордана-Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных.

Сначала попытаемся ответить на следующий вопрос: какую систему линейных уравнений проще всего решить? Очевидно, что систему, основная матрица которой единичная. В этом случае решением будет столбец свободных членов:

$$\begin{cases} x_1 & & & = & \beta_1 \\ & x_2 & & = & \beta_2 \\ & & \dots & & \\ & & & x_n & = & \beta_n \end{cases} \quad (16)$$

Попробуем преобразовать систему [\(15\)](#) так, чтобы ее основная матрица стала единичной, а, точнее, попробуем получить с помощью каких-нибудь преобразований систему с единичной основной матрицей, равносильную системе [\(15\)](#). Напомним, что *две системы* называются *равносильными*, если решение первой системы является решением второй, и наоборот. Из курса алгебры известно, что для того, чтобы из данной системы получить систему равносильную ей, можно использовать следующие преобразования:

1. поменять два уравнения местами;

2. любое уравнение системы умножить или разделить на какое-нибудь отличное от нуля число;

3. из любого уравнения системы вычесть или прибавить к нему какое-нибудь другое уравнение этой системы.

Таким образом, идея метода Жордана-Гаусса заключается в том, чтобы, используя равносильные преобразования, привести основную матрицу системы к единичной. В этом случае решением системы будет столбец свободных членов.



Алгоритм решения системы линейных уравнений на компьютере по методу Жордана-Гаусса будет иметь следующий вид:

1. Ввод данных.

К данным относится: количество неизвестных  $n$ ; расширенная матрица системы  $A$  размером  $n \times (n + 1)$ .

2. Открываем цикл по номеру столбца  $j$ . В цикле делаем следующее:

а) Выбираем *ведущий* элемент, т.е. самый большой по модулю элемент в рассматриваемом столбце начиная с диагонального элемента и ниже. Строка, в которой находится ведущий элемент тоже называется *ведущей*. Если ведущий элемент равен нулю, то метод неприменим, конец алгоритма.

б) В цикле меняем местами ведущую строку и строку с номером  $j$  местами.

с) В цикле делим ведущую строку на ведущий элемент.

d) В цикле по номеру строки обнуляем ведущий столбец. Для этого из каждой строки, кроме ведущей, надо вычесть ведущую строку, умноженную на соответствующий элемент.

3. Выводим на экран полученные решения, т.е.  $(n + 1)$ -ый столбец матрицы  $A$ . Конец алгоритма.

В результате преобразований в основной матрице системы может получиться столбец, в котором на диагонали и ниже стоят нули. Определитель такой матрицы равен нулю. Выясним в каком случае возможно получение подобной

матрицы. Для этого рассмотрим действия, которые осуществляются с определителем основной матрицы системы в ходе преобразований:

1.Находим ведущий элемент.

Определитель не меняется, так как при этом система не преобразуется.

2.Меняем строки местами.

Определитель меняет знак на противоположный.

3.Делим (умножаем) строку на отличное от нуля число.

Определитель тоже делится (умножается) на это же число.

4. Вычитаем из одной строки другую.

Определитель не меняется.

Отсюда следует, что если в ходе преобразований получается система, определитель основной матрицы которой равен нулю, то это возможно лишь в том случае, когда определитель основной матрицы исходной системы был равен нулю, т.е. основная матрица исходной системы вырожденная и, значит, по теореме Крамера, у системы нет решений или их бесконечное множество.

Сделаем вывод о том, какими достоинствами и недостатками обладает метод Жордана-Гаусса.

Достоинства метода:

1. Универсальность: с помощью данного метода можно решить любую систему линейных уравнений, у которой основная матрица невырожденная, в то время, как многие другие методы решения систем для их применения требуют выполнения некоторых дополнительных условий.

2. Идеальная простота: этот метод применяют даже в школе для решения систем линейных уравнений.

Недостатки метода:

1. Так как метод универсален, то при его использовании не учитываются особенности конкретной системы, позволяющие экономить время получения решения и память компьютера.

2. Метод Жордана-Гаусса очень трудоемок, сложность алгоритма  $O(n^3)$ .

3. Из-за большого количества операций деления идет большое накопление ошибок округления.

## Задания для самостоятельной работы

- I. Напишите программу решения системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.
- II. Решите систему линейных уравнений и осуществите проверку найденного решения.

$$1. \begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4,3, \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6,8, \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8, \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = 7,2. \end{cases}$$



$$2. \begin{cases} 8,2x_1 - 3,2x_2 + 14,2x_3 + 14,8x_4 = -8, \\ 5,6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6,4x_4 = 4,5, \\ 5,7x_1 + 3,6x_2 - 12,4x_3 - 2,3x_4 = 3,3, \\ 6,8x_1 + 13,2x_2 - 6,3x_3 - 8,7x_4 = 14,3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5,7x_1 - 12,5x_2 + 9,2x_3 - 10,1x_4 = 14,3, \\ 5x_1 - 3x_2 - 14,9x_3 + 11,2x_4 = 16,8, \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8, \\ 14,2x_1 + 2,4x_2 - 18,8x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 2x_4 = 8, \\ 7x_1 - 11x_2 + x_3 - 6x_4 = -1, \\ 12x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7,2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = -4,3, \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = -6,8, \\ 7,1x_1 - 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = 1,8, \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = -7,2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 19x_3 - 10x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 - 14x_3 + 13x_4 = 6, \\ 7x_1 - 11x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -1, \\ 14x_1 + 23x_2 - 8x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 3, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4, \\ 5,7x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6, \\ 7,1x_1 + 11x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8, \\ 14,2x_1 + 23,4x_2 - 8,8x_3 + 5,3x_4 = -7. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4,4x_1 - 2,5x_2 + 19,2x_3 - 10,8x_4 = 4,3, \\ 5,5x_1 - 9,3x_2 - 14,2x_3 + 13,2x_4 = 6,8, \\ 7,3x_1 + 11,5x_2 + 5,3x_3 - 6,7x_4 = -1,8, \\ 14,2x_1 + 21,4x_2 + 8,8x_3 + 5,3x_4 = -7. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 44x_1 - 25x_2 + 192x_3 - 108x_4 = 43, \\ 55x_1 - 93x_2 - 142x_3 + 132x_4 = 68, \\ 71x_1 - 115x_2 + 53x_3 - 67x_4 = -18, \\ 142x_1 + 234x_2 - 88x_3 + 53x_4 = 72. \end{cases}$$

III. Решите систему линейных уравнений, если известно количество неизвестных  $n$  и формулы, по которым вычисляются элементы основной матрицы системы  $a_{i,j}$  и столбца свободных членов  $b_i$ . Осуществите проверку найденного решения. Что является точным решением системы? Обоснуйте полученные результаты.

$$1. n = 13, \quad a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

$$2. n = 11, \quad a_{i,j} = \frac{10}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

3.  $n = 10$ ,  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n (-1)^j a_{i,j}$ .
4.  $n = 15$ ,  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n 5a_{i,j}$ .
5.  $n = 12$ ,  $a_{i,j} = \frac{-1}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ .
6.  $n = 13$ ,  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n -a_{i,j}$ .
7.  $n = 10$ ,  $a_{i,j} = \frac{2}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n 12a_{i,j}$ .
8.  $n = 11$ ,  $a_{i,j} = \frac{-10}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ .
9.  $n = 15$ ,  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$ ,  $b_i = \sum_{j=1}^n 100a_{i,j}$ .

$$10. \quad n = 13, \quad a_{i,j} = \frac{1}{i+j}, \quad b_i = \sum_{j=1}^n 2a_{i,j}.$$

## 9. Метод итераций для решения систем линейных уравнений

Ранее мы уже встречались с методом итераций, он применялся для решения уравнений вида  $f(x) = x$ . Кроме этого, метод итераций применим и для решения систем линейных уравнений.

Пусть дана неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (17)$$

Перепишем эту систему в следующем виде

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \quad (18)$$

или сокращенно

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

что в матричной форме соответствует записи

$$x = Ax + b.$$

Правая часть системы [\(18\)](#) определяет отображение  $F$

$$F: y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (19)$$



преобразующее точку  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного векторного пространства в точку  $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$  того же пространства. Используя систему [\(18\)](#) и выбрав начальную точку  $x^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  можно построить итерационную последовательность точек  $n$ -мерного пространства (аналогично методу итерации для уравнений):

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \quad (20)$$

где  $x^{(1)} = F(x^{(0)})$ ,  $x^{(2)} = F(x^{(1)})$ , ...

Оказывается, что при определенных условиях последовательность [\(20\)](#) сходится и ее предел является решением системы [\(18\)](#), а значит и системы [\(17\)](#). Напомним, в этой связи, отдельные сведения из математического анализа.

**Определение.** Функция  $\rho(x, y)$ , определяющая расстояние между точками  $x$  и  $y$  множества  $X$ , называется *метрикой*, если выполнены условия:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ;
2.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

$$3. \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$4. \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Пусть  $F$  – отображение, действующее в метрическом пространстве  $E$  с метрикой  $\rho$ ,  $x$  и  $y$  – точки пространства  $E$ , а  $Fx$ ,  $Fy$  – образы этих точек.

**Определение.** Отображение  $F$  пространства  $E$  в себя называется *сжимающим отображением*, если существует такое число  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , что для любых двух точек  $x, y \in E$  выполняется неравенство

$$\rho(Fx, Fy) \leq \alpha\rho(x, y).$$

**Определение.** Точка  $x$  называется *неподвижной точкой* отображения  $F$ , если  $Fx = x$ .

Понятно, что применительно к системе [\(18\)](#) неподвижная точка – это решение системы. Для исследования вопроса о решении системы линейных уравнений методом итераций важное значение имеет следующая теорема, называемая принципом сжимающих отображений (теорема Банаха).

**Теорема.** Если  $F$  сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, то существует единственная неподвижная точка  $x$ , такая что  $x = Fx$ .

При этом итерационная последовательность, построенная для отображения  $F$  с любым начальным членом  $x^{(0)}$ , сходится к  $x$ .

Выведем формулу для оценки расстояния между неподвижной точкой  $x$  и приближением  $x^{(k)}$ .

Используя четвертое свойство метрики, можно записать

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) + \rho(x^{(k+1)}, x^{(k+2)}) + \dots$$

Из условия сжимаемости имеем

$$\rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \leq \alpha \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}),$$

$$\rho(x^{(k+1)}, x^{(k+2)}) \leq \alpha \rho(x^{(k)}, x^{(k+1)}) \leq \alpha^2 \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}),$$

т.д.

Отсюда получим

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \cdot (\alpha + \alpha^2 + \dots),$$

где  $\alpha + \alpha^2 + \dots$  – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $\alpha$  и знаменателем  $0 < \alpha < 1$ . Следовательно,

$$\alpha + \alpha^2 + \dots = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

а, значит,

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}).$$

Таким образом, используя принцип сжимающих отображений, можно заключить, что для решения системы [\(18\)](#) методом итераций достаточно установить, что отображение  $F$ ,

заданное соотношением (19), является сжимающим. Если это так, то метод итераций применим к системе (18), причем ее решение может быть получено с любой точностью при произвольном начальном приближении.

Рассмотрим условия, при которых отображение (19) будет сжимающим. Как следует из определения сжимающего отображения, решение этого вопроса зависит от способа метризации пространства.

Пусть  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$  – две точки  $n$ -мерного пространства. При практическом применении метода



итераций удобно рассматривать систему линейных уравнений в пространстве с одной из следующих метрик:

$$1. \rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|;$$

$$2. \rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$3. \rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Выясним каким условиям должна удовлетворять матрица  $A$  системы [\(18\)](#), чтобы отображение [\(19\)](#) было сжимающим.

1. Рассмотрим пространство с метрикой  $\rho_1$ . Для двух точек  $x'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $x''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  в соответствии с [\(19\)](#) имеем

$$y'_i - y''_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x'_j - x''_j), i = 1, 2, \dots, n$$

или по свойству модуля

$$|y'_i - y''_i| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| |x'_j - x''_j|, i = 1, 2, \dots, n.$$

Эти неравенства усилятся, если заменить каждый модуль  $|x'_j - x''_j|$  значением  $\rho_1(x', x'')$

$$|y'_i - y''_i| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \rho_1(x', x''), i = 1, 2, \dots, n.$$

Значение  $\rho_1(x', x'')$ , как постоянное число, можно вынести за знак суммы, а сумму заменить ее максимальным значением

$$|y'_i - y''_i| \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right) \rho_1(x', x''), i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , оно справедливо и для того значения  $i$ , при котором  $|y'_i - y''_i| = \rho_1(y', y'')$

$$\rho_1(y', y'') \leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right) \rho_1(x', x'').$$

Сравнивая последнее неравенство с определением сжимающего отображения, получаем следующее условие

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1,$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы [\(18\)](#), взятых по строкам, должна быть меньше 1.

2. Рассмотрим пространство с метрикой  $\rho_2$ . Для двух точек  $x'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $x''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  в соответствии с [\(19\)](#) и по свойству модуля

$$|y'_i - y''_i| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x'_j - x''_j|, i = 1, 2, \dots, n$$

Сложим  $n$  получившихся неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x'_j - x''_j| \leq \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x'_j - x''_j| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| \leq \\ &\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \rho_2(x', x''). \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ , т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы [\(18\)](#), взятых по столбцам, должна быть меньше 1.

3. Рассмотрим пространство с метрикой  $\rho_3$ . Для двух точек  $x'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $x''(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  в соответствии с [\(19\)](#) имеем

$$y'_i - y''_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x'_j - x''_j), i = 1, 2, \dots, n.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$(y'_i - y''_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2, i = 1, 2, \dots, n.$$

Просуммируем  $n$  полученных равенств и извлечем квадратный корень из левой и правой частей

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x'_j - x''_j))^2}.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$(\sum_i a_i b_i)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_k b_k^2,$$

получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \sum_{k=1}^n (x'_k - x''_k)^2}.$$

Используя определение метрики три будем иметь

$$\rho_3(y', y'') \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} \rho_3(x', x'').$$

Отсюда получаем

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} < 1,$$

т.е. сумма квадратов всех коэффициентов при неизвестных в правой части системы [\(18\)](#) должна быть меньше 1.



## 10. Приведение системы линейных уравнений к итерационному виду

Пусть дана система [\(17\)](#). Как из нее получить систему вида [\(18\)](#), удовлетворяющую условиям сжимающего отображения?

Существует несколько способов:

1. Если у системы [\(17\)](#) диагональные элементы основной матрицы значительно преобладают над остальными элементами, то в этом случае все уравнения системы [\(17\)](#) надо поделить на соответствующие диагональные элементы и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом,

равным 1. В результате получится система, у которой все  $|\alpha_{ij}| < 1$ .

Теперь необходимо проверить условия сходимости метода. Если ни одно из них не выполняется, то надо вернуться к исходной системе и попробовать провести какие-нибудь другие преобразования.

2. Если основная матрица системы  $LX = K$  близка к единичной  $E$ , то систему переписывают в виде  $X = AX + B$  и проверяют условия сходимости метода.

3. Необходимо подобрать матрицу  $H$  такую, чтобы матрица  $HL$  была близка к единичной:  $HLX = HK$  и применить способ 2.

Рассмотрим *пример*. Необходимо систему

$$\begin{cases} 2,34 x_1 - 4,21 x_2 - 11,61 x_3 = 14,41, & \text{(I)} \\ 8,04 x_1 + 5,22 x_2 + 0,27 x_3 = -6,44, & \text{(II)} \\ 3,92 x_1 - 7,99 x_2 + 8,37 x_3 = 55,56 & \text{(III)} \end{cases}$$

привести к итерационному виду.

Попробуем получить систему с преобладающими диагональными элементами. Переставим уравнения системы местами и сложим два из них

$$\begin{cases} 8,04 x_1 + 5,22 x_2 + 0,27 x_3 = -6,44, & \text{(II)} \\ 6,26 x_1 - 12,20 x_2 - 3,24 x_3 = 69,97, & \text{(I) + (III)} \\ 2,34 x_1 - 4,21 x_2 - 11,61 x_3 = 14,41. & \text{(I)} \end{cases}$$

Разделим каждое уравнение получившейся системы на соответствующие диагональные элементы и выразим из каждого уравнения неизвестное, коэффициент перед которым равен 1:

$$\begin{cases} x_1 = -0,65 x_2 - 0,03 x_3 - 0,8, \\ x_2 = 0,51 x_1 - 0,27 x_3 - 5,74, \\ x_3 = 0,20 x_1 - 0,36 x_2 - 1,24. \end{cases}$$

Проверим условие сходимости для всех метрик

$$\alpha_1 = \max\{0,68; 0,78; 0,56\} = 0,78 < 1,$$

$$\alpha_2 = \max\{0,71; 1,01; 0,3\} = 1,01 > 1,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{0,926} = 0,96 < 1.$$

Условие сходимости выполнено для первой и третьей метрики. Возникает вопрос: какую из двух метрик выбрать?

Рассмотрим оценку точности метода

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}).$$

Из нее следует, что метод сходится тем быстрее, чем меньше  $\alpha$ . Значит, в данном случае надо выбрать первую метрику, т.к.  $\alpha_1 < \alpha_3$ .

Запишем алгоритм решения системы линейных уравнений методом итераций:

1. Ввод данных: количество неизвестных  $n$ , матрица коэффициентов системы, точность  $\varepsilon$ . Матрицу коэффициентов системы будем хранить в массиве размером  $n \times (n + 1)$ .

2. Приведение системы к итерационному виду. Будем рассматривать только системы с преобладающими диагональными элементами. Поэтому данный шаг будет состоять из двух пунктов:

а) делим элементы матрицы  $A$  на соответствующие диагональные элементы со знаком минус, т.е. на  $-a_{ii}$ ;

б) обнуляем диагональные элементы.

3. Вычисляем  $\alpha$  и выбираем метрику.

4. Выбираем первое приближение. В качестве первого приближения можно взять любой вектор-столбец. Для определенности в качестве первого приближения будем брать столбец свободных членов  $(x_s) = b$ .

5. Считаем второе приближение:  $(x_n) = A(x_s) - b$ .

6. Проверяем точность. Если  $\rho((x_s), (x_n)) \geq \varepsilon \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , то  $(x_s) = (x_n)$ , переход к шагу 5.

7. Вывод результатов:  $(x_n)$  – решение.

**Задания для самостоятельной работы**



- I. Напишите программу решения системы линейных уравнений методом итераций с наперед заданной точностью.
- II. Приведите примеры таких систем с преобладающими диагональными элементами, после приведения которых к итерационному виду, при их решении методом итераций используется первая метрика, вторая метрика, систем, к которым метод итераций не применим. Решите эти системы линейных уравнений методом итераций с наперед заданной точностью и осуществите

проверку найденного решения. Обоснуйте  
правильность полученных результатов.

## 11. Интерполирование функций. Постановка задачи интерполяции

Предположим, что известно значение функции  $f(x)$  в каких-то попарно различных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , т.е. задана система равенств

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0), \\ y_1 &= f(x_1), \\ &\dots \\ y_n &= f(x_n). \end{aligned} \tag{21}$$

При этом сама функция неизвестна, а в задаче требуется работать с этой системой [\(21\)](#) не как с системой равенств, а как

с функцией, например, интегрировать. В этом случае применяется следующий прием – построение по исходной информации [\(21\)](#) приближающей функции  $F$ , которая в некотором смысле близка к исходной функции  $f$  и аналитическим выражением которой можно воспользоваться для вычислений, считая, приближенно, что  $f(x) \approx F(x)$ .

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании

строгoго совпадения значений  $f(x)$  и  $F(x)$  в точках  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), т.е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n.$$

В этом случае нахождение приближающей функции называют *интерполяцией* (или *интерполированием*), а точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — *узлами интерполяции*.

Обычно при построении приближающей функции  $F(x)$  исходят из предположения, что  $F(x)$  является линейной комбинацией других функций (известных и простых):

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Выбор функций  $\varphi_i(x)$  определяется условием задачи. Например, для приближения  $2\pi$ -периодической функции на отрезке  $[0; 2\pi]$  в качестве  $\varphi_i(x)$  берут тригонометрические функции.

Чаще всего используется полиномиальное интерполирование:  $\varphi_i(x) = x^i$ . Тогда приближающая функция будет многочленом степени  $n$ . Рассмотрим этот случай.

Итак, требуется найти многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

такой, что

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n.$$

Чтобы найти многочлен  $P(x)$  надо узнать его коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Для поиска  $a_i$  воспользуемся следующей системой

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases} \quad (22)$$

в которой  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) известны из условия задачи.

Запишем определитель этой системы в транспонированном виде (он от этого не изменится):

$$\begin{vmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \dots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Данный определитель называется *определителем Вандермонда* и он равен произведению всевозможных разностей  $(x_i - x_j)$ , где  $0 \leq j < i \leq n$ . Этот определитель равен нулю в том и только в том случае, когда хотя бы одна



разность равна нулю, т.е. хотя бы два из чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$  равны, что в данном случае, исходя из условий задачи, невозможно. Следовательно, определитель системы [\(22\)](#) отличен от нуля, и, значит, по теореме Крамера система имеет решение и причем только одно.

Итак, чтобы найти интерполяционный многочлен  $P(x)$  для функции  $f(x)$  необходимо решить систему линейных уравнений [\(22\)](#), что возможно сделать лишь с помощью метода Гаусса. Однако, это требует больших затрат времени на

вычисление. И, кроме того, система, определитель основной матрицы которой является определителем Вандермонда, является плохо обусловленной, т.е. ошибки округления, которые получаются при решении системы методом Гаусса на компьютере, приводят к очень большим изменениям в результирующем столбце свободных членов. Поэтому на практике для решения задачи полиномиальной интерполяции используют другие, более удобные и менее трудоемкие способы.

## 12. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Предположим, что известны значения функции  $f(x)$  в каких-то точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ . Необходимо найти такой полином

$$P(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

где  $\varphi_i(x)$  – многочлены степени не больше, чем  $n$ , что

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n.$$

Для этого надо решить систему линейных уравнений с основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ & \dots & \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix},$$

что будет легче сделать, если матрица  $A$  будет единичной матрицей, т.е.

$$\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

В качестве  $\varphi_k$  возьмем дробь:

$$\varphi_k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Эта дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю, т.е. при  $x \neq x_k$ , и единице при  $x = x_k$ . При таком наборе  $\varphi_k$  матрица  $A$  является единичной и коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  интерполяционного многочлена  $P(x)$  соответственно будут равны  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , а, значит, формула для интерполяционного многочлена Лагранжа будет иметь вид:

$$P(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + \dots + y_n\varphi_n(x).$$

Обозначим через

$$Q(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

фундаментальный многочлен для исходной интерполяционной задачи. Тогда числитель  $\varphi_k(x)$  будет равен

$$\frac{Q(x)}{(x - x_k)}$$

Найдем производную фундаментального многочлена  $Q(x)$ :

$$Q'(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Ее значение в точке  $x_k$  будет знаменателем  $\varphi_k(x)$ :

$$Q'(x_k) = (x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n).$$

В итоге получаем, что

$$\varphi_k(x) = \frac{Q(x)}{(x - x_k) \cdot Q'(x_k)}.$$

Алгоритм построения интерполяционного многочлена Лагранжа на компьютере имеет следующий вид:

1. Ввод данных: количество узлов интерполяции, узлы интерполяции и значения функции в них

$$x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n.$$

2. Построение фундаментального многочлена.

Строить многочлен  $Q(x)$  будем в цикле от 0 до  $n$  по формуле  $Q(x) = Q(x) \cdot (x - x_i)$ . При этом перед началом цикла  $Q(x)$  присвоим значение 1, т.е. обнулим все его коэффициенты кроме свободного члена (он равен 1):

*for*  $i:=1$  to  $n$  *do*

$Q[i]:=0$ ;

$Q[0]:=1$ ;

Возникает вопрос: как умножить многочлен на двучлен?



Если перемножить многочлен и двучлен «вручную», то получится

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (x - \alpha) = -\alpha a_0 + (a_0 - \alpha a_1)x + (a_1 - \alpha a_2)x^2 + \dots + (a_{n-1} - \alpha a_n)x^n + a_nx^{n+1}.$$

Если ввести фиктивное число  $a_{-1} = 0$ , то коэффициент перед  $x_0$  примет вид:  $a_{-1} - \alpha a_0$ . При вычислении коэффициентов будем сдвигаться от  $a_n$  к  $a_0$ . В этом случае, чтобы зря не тратить оперативную память компьютера, вновь вычисленные коэффициенты будем записывать на старые

места. Этот способ умножения многочлена на двучлен называется схемой Горнера:

$$Q[-1]:=0;$$

*for i:=0 to n do*

*for j:=i+1 downto 0 do*

$$Q[j]:=Q[j-1]-x[i]*Q[j];$$

3. В цикле по номеру точки  $k$  от 0 до  $n$ :

а. Вычисляем частное  $\frac{Q(x)}{x-x_k}$ .

Как разделить многочлен на двучлен?

Пусть  $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$  — ИСКОМЫЙ  
МНОГОЧЛЕН И

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} = (x - \alpha) \cdot \\ (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n).$$

Тогда  $b_{i-1} - \alpha b_i = a_i$  и, значит,  $b_{i-1} = a_i + \alpha b_i$ .

Следовательно, вычисление коэффициентов многочлена

$\frac{Q(x)}{x-x_k}$  должно происходить в цикле от  $n$  до 1 с учетом того,

что  $b_n = a_{n+1}$ :

$$b[n] := Q[n+1];$$

*for i:=n to 1 do*

*b[i-1]:=Q[i]+x[k]\*b[i]*

в. Вычисление  $Q'(x_k)$ .

Представим многочлен  $Q'(x)$  в виде:

$$Q'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots xa_n)) \dots).$$

По этой формуле значение многочлена  $Q'(x)$  в точке  $x_k$  будем вычислять в цикле от  $n$  до 1:

*p:=(n+1)Q[n+1];*

*for i:=n to 1 do*

*p:=p\*x[k]+i\*Q[i]*

с. Находим  $P(x)$  по формуле

$$P(x) = P(x) + y_k \cdot \frac{Q(x)}{(x-x_k) \cdot Q'(x_k)}.$$

4. Вывод результата – коэффициенты многочлена  $P(x)$ .

### 13. Оценка точности решения задачи интерполяции

Если известно аналитическое выражение интерполируемой функции  $f(x)$ , можно применять формулы для оценки погрешности интерполирования. Выведем их.

Пусть  $P(x)$  – интерполяционный многочлен функции  $f(x)$ . Хотелось бы знать, насколько  $P(x)$  и  $f(x)$  близки. Для этого необходимо оценить разность  $f(x) - P(x)$  по абсолютной величине. Очевидно, что в узлах интерполяции эта разность

равна нулю. Оценим  $f(x) - P(x)$  в какой-нибудь другой точке, например,  $t$ .

Введем вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - P(x) - A \cdot Q(x) \quad (23)$$

где  $A = \text{const}$  (величина этой константы будет найдена позже), а  $Q(x)$  – фундаментальный многочлен в формуле Лагранжа  $Q(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ . Так как  $f(x) - P(x)$  и  $Q(x)$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  равны нулю, то и функция  $F(x)$  тоже равна нулю в этих точках.

Подберем  $A$  так, чтобы  $f(t) - P(t) - A \cdot Q(t) = 0$ . Для этого достаточно, чтобы

$$A = \frac{f(t) - P(t)}{Q(t)}, \quad (24)$$

где  $Q(t) \neq 0$ , т.к.  $t \neq x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , а разность  $f(t) - P(t)$  может быть равна нулю, поскольку значение функции  $f(x)$  в точке  $t$  неизвестно. При этом значении  $A$  функция  $F(x)$  будет иметь  $n + 2$  корня на отрезке интерполирования и будет обращаться в ноль на концах каждого  $(n + 1)$ -го отрезка:

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_i; t], [t; x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n].$$



Применим теорему Ролля к каждому из отрезков. Получим,  
что:

$F'(x)$  имеет не менее  $(n + 1)$ -го корня,

$F''(x)$  имеет не менее  $n$  корней,

и т.д.

$F^{(n+1)}(x)$  имеет не менее одного корня.

Пусть  $\xi$  – та самая точка, в которой  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ .

Продифференцируем  $(n + 1)$  раз равенство [\(23\)](#) в точке  $\xi$ :

$$f^{(n+1)}(\xi) - A(n + 1)! = 0,$$

т.к.  $P^{(n+1)}(x) = 0$  ( $P(x)$  – многочлен степени  $n$ ),  $Q^{(n+1)}(x) = (n+1)!$  ( $Q(x)$  – многочлен степени  $n+1$ ). Отсюда найдем  $A$ :

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (25)$$

Сравнения [\(24\)](#) и [\(25\)](#) будем иметь:

$$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} Q(t).$$

Но точка  $t$  – произвольная точка, поэтому можем записать

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} Q(x).$$

Если принять  $M = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|$ , то

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |Q(x)|. \quad (26)$$

Из формулы [\(26\)](#) видно, что если  $M$  растет быстрее, чем  $(n + 1)!$ , то точность метода плохая. Ее можно улучшить, если брать как можно меньший интервал между точками  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , т.к. при этом и значение многочлена  $Q(x)$  будет маленьким (как произведение малых чисел).

## Задания для самостоятельной работы

- I. Напишите программу для нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа.
- II. Сколько и какие точки нужно ввести, чтобы приближающий многочлен Лагранжа имел указанный вид. Проверьте правильность своего ответа с помощью ранее написанной программы.
  1.  $x + 1$ ,
  2.  $x^2 + x - 5$ ,

3.  $x^2$ ,

4.  $3x^2 - 2$ ,

5.  $5x - 4$ ,

6.  $x^5$ ,

7.  $x^4 - 2x^2 + 1$ ,

8.  $x^2 + 1$ ,

9.  $x^3 + x^2$ ,

10.  $x^4 - x^2$ .

III. Сколько и какие точки нужно ввести, чтобы как можно лучше приблизить указанную функцию на данном отрезке интерполяционным многочленом Лагранжа. Проверьте правильность полученного результата, сравнив значения приближаемой функции и интерполяционного многочлена в некоторой промежуточной точке. Обоснуйте полученный результат.

1.  $y(x) = \ln x$ ,                     $[2; 7]$ .

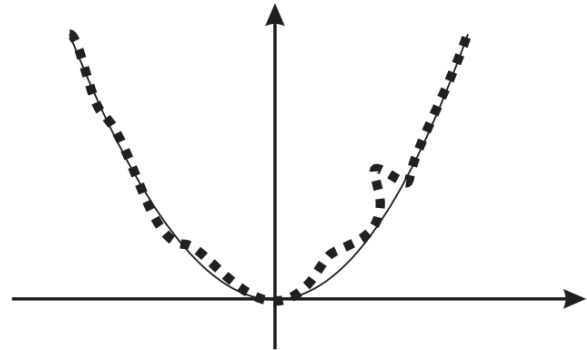
2.  $y(x) = \lg x$ ,                     $[12; 17]$ .

3.  $y(x) = \ln x + x^2$ ,  $[1; 7]$ .
4.  $y(x) = \lg x + x^2$ ,  $[12; 16]$ .
5.  $y(x) = e^x + x$ ,  $[-1; 3]$ .
6.  $y(x) = e^x$ ,  $[-1; 5]$ .
7.  $y(x) = e^{x+1} + x$ ,  $[-2; 3]$ .
8.  $y(x) = \cos x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .
9.  $y(x) = \sin x$ ,  $[0; \pi]$ .
10.  $y(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ .

## 14. Статистическая обработка результатов наблюдения. Метод наименьших квадратов

Очень часто возникает необходимость выразить в виде функциональной зависимости связь между величинами, которые заданы в виде набора точек с координатами  $(x, y)$ .

Предположим, например, что в результате некоторого эксперимента получены





следующие точки:  $(x_1; y_1), \dots, (x_N; y_N)$ .

Если необходимо эти данные использовать для каких-либо дальнейших вычислений, то нужно учитывать следующее:

1. В значениях  $y$  наверняка имеются погрешности эксперимента. Хотелось бы каким-либо образом «сгладить» те отклонения, которые обусловлены ошибками эксперимента.

2. Для более точных дальнейших вычислений может потребоваться знать значения  $y$  не только в исходных точках  $x$ , но и в некоторых промежуточных точках.

3. Может оказаться, что необходимо экстраполировать функциональную зависимость, т.е. найти значение  $y$ , соответствующее значению  $x$ , лежащему вне области эксперимента. И иногда это является главной целью эксперимента и вычислений.

Все эти соображения приводят к выводу, что желательно было бы установить некоторую функциональную зависимость между  $x$  и  $y$  в виде, по возможности, простой формулы. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую (или функцию),

которая приближенно бы соответствовала исходной информации с достаточной точностью. Таким образом, нужно выработать критерий, согласно которому та или иная кривая (или функция) является достаточно «хорошим» приближением к исходной информации.

Введем новое понятие. Назовем *отклонением* экспериментальной точки разность между экспериментальной ординатой  $y$  и той, которая вычислена из функциональной зависимости. Вопрос о том, является ли кривая (или функция) достаточно «хорошим» приближением к экспериментальным

данным можно переформулировать следующим образом: какое условие необходимо наложить на отклонение экспериментальной точки, чтобы приближающая кривая (или функция) представляла экспериментальные данные с достаточной точностью?

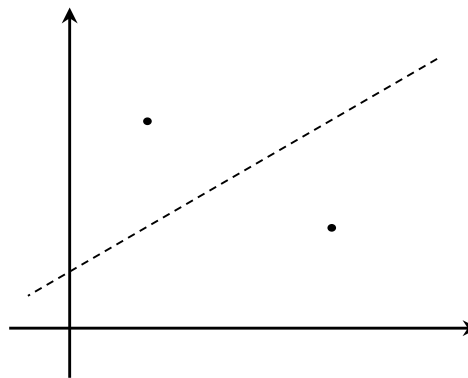
Казалось бы, что наиболее простое и логичное условие состоит в том, чтобы сумма отклонений точек от кривой была наименьшей. Если обозначить через  $y'$  значение  $y$ , вычисленное из функциональной зависимости, то это условие

можно записать так: требуется, чтобы  $\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)$  была минимальной, причем в этом выражении  $N$  означает количество точек в исходных данных. Но привлекательность этого простого критерия сразу становится сомнительной, стоит только рассмотреть простую задачу о проведении линии через две точки, как это показано на рисунке. Пунктирная линия

удовлетворяет нашему критерию, но ее никак нельзя признать удовлетворительным приближением к экспериментальным данным.

Можно попытаться обойти это затруднение, используя в критерии сумму абсолютных значений отклонений, т.е. требуя, чтобы

$\sum_{i=1}^N |y_i - y'_i|$  стала минимальной. Но в этом случае для нахождения минимума нельзя будет воспользоваться



производной, т.к. абсолютное значение не имеет производной в точке минимума.

Можно было бы наложить условие, согласно которому максимальное отклонение должно быть наименьшим (приближение Чебышева), но для определения функциональной зависимости на основе этого критерия придется использовать длинную и сложную итерационную процедуру.

Поэтому в данном случае воспользуемся критерием наименьших квадратов, т.е. будем искать такую

функциональную зависимость, при которой  $\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2$  обращается в минимум. Это выражение можно продифференцировать для решения задачи о нахождении минимума. К тому же, такой критерий во многих практических случаях приводит к системе линейных уравнений, которую легко решить, по крайней мере, в принципе.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как при использовании критерия наименьших квадратов получается система



линейных уравнений для определения функциональной зависимости  $y$  от  $x$ .

Сформулируем нашу задачу в следующем виде: дан набор базисных функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  (например,  $\varphi_0 = x^0, \varphi_1 = x^1, \dots, \varphi_n = x^n$ ). Необходимо найти их линейную комбинацию в описанной ранее смысле близкую к исходной функции  $f(x)$ .

Итак, имеем набор базисных функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  и базисные точки  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , причем количество базисных

точек  $N$  значительно больше числа базисных функций  $n + 1$ .

Для каждой из этих точек строим отклонение

$$\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_k) - y_k,$$

где  $y_k = f(x_k)$ .

Вычислим сумму квадратов этих отклонений

$$\sum_{k=1}^N (\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_k) - y_k)^2 = g.$$

Теперь необходимо подобрать  $a_i$  так, чтобы функция  $g$  принимала минимальное значение. Для этого найдем частные

производные по  $a_0, a_1, \dots, a_n$  и приравняем их к нулю. При этом частная производная по  $a_l$  будет иметь вид:

$$2 \sum_{k=1}^N (\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_k) - y_k) \cdot \varphi_l(x_k) = 0.$$

Или

$$a_0 \sum_{k=1}^N \varphi_0(x_k) \varphi_l(x_k) + a_1 \sum_{k=1}^N \varphi_1(x_k) \varphi_l(x_k) + \dots + a_n \sum_{k=1}^N \varphi_n(x_k) \varphi_l(x_k) = \sum_{k=1}^N y_k \varphi_l(x_k).$$

Найдя все частные производные, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} c_{00}a_0 + \dots + c_{0n}a_n = b_0, \\ \dots \\ c_{n0}a_0 + \dots + c_{nn}a_n = b_n, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^N \varphi_m(x_k) \varphi_l(x_k),$$
$$b_l = \sum_{k=1}^N y_k \varphi_l(x_k),$$

$a_i$  – неизвестные.

Докажем, что эта система имеет решение, т.е. ее определитель отличен от нуля. Для этого рассмотрим соответствующую исходной однородную систему:

$$\begin{cases} c_{00}a_0 + \dots + c_{0n}a_n = 0, \\ \dots \\ c_{n0}a_0 + \dots + c_{nn}a_n = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Из алгебры известно, что если ее определитель не равен нулю, то она имеет нулевое решение и оно единственное, если же определитель равен нулю, то она имеет ненулевое решение.

Доказывать будем от противного. Пусть система [\(28\)](#) имеет ненулевое решение, т.е. ее определитель равен нулю и среди  $a_0, a_1, \dots, a_n$  имеются числа, отличные от нуля. Умножим

первое уравнение системы (28) на  $a_0$ , второе – на  $a_1$  и т.д. и сложим их. В результате получим:

$$\sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n c_{lm} a_m a_l = 0,$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n \varphi_l(x_k) a_l \varphi_m(x_k) a_m = 0,$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n \varphi_l(x_k) a_l \sum_{m=0}^n \varphi_m(x_k) a_m = 0.$$

В качестве базисных функций  $\varphi_i$  будем рассматривать функции вида  $x^i$ . Получим

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^n x_k^l a_l \sum_{m=0}^n x_k^m a_m = 0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{l=0}^n x_k^l a_l = \sum_{m=0}^n x_k^m a_m = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \dots + a_n x_k^n = P(x).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^N P(x)P(x) = 0.$$

Следовательно, каждый многочлен равен нулю, а, значит, верны равенства  $P(x_1) = 0, P(x_2) = 0, \dots, P(x_N) = 0$ , т.е.  $x_1, x_2, \dots, x_N$  – корни многочлена  $P(x)$ .

Многочлен  $P(x)$  имеет степень  $n$ , а, как известно, число корней многочлена не превосходит его степени, т.е.  $N \leq n$ .

Однако, в это случае не выполняется условие, что  $N$  значительно больше  $n + 1$ . Таким образом, получено противоречие и, значит, определитель системы не равен нулю.

Поскольку в качестве базисных используются функции вида  $x^i$ , то коэффициенты системы [\(27\)](#) будут иметь вид

$$c_{lm} = \sum_{k=1}^N x_k^{m+l},$$

а свободные члены

$$b_l = \sum_{k=1}^N y_k x_k^l.$$



Решить систему линейных уравнений [\(27\)](#) можно, например, методом Жордана-Гаусса.

Таким образом, алгоритм нахождения приближающего многочлена по методу наименьших квадратов имеет вид:

1. Ввод данных: количество точек  $N$ , сами точки и значения исходной функции в этих точках –  $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$ , степень приближающего многочлена  $n$ .

2. Вычисление коэффициентов  $c_{lm}, b_l$ , где  $0 \leq l, m \leq n$ .

3.Решение системы линейных уравнений вида [\(27\)](#)  
методом Жордана-Гаусса.

4.Вывод результата:  $a_l$ , где  $0 \leq l \leq n$ .

## 15. Нахождение приближающей функции в виде некоторых элементарных функций

Пусть в результате измерений в процессе опыта была получена следующая таблица значений некоторой функциональной зависимости  $f$

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_N$
$f(x)$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_N$

(29)

Необходимо найти приближающую функцию  $F$  определенного вида так, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальной точки была наименьшей.

В качестве приближающей функции, в зависимости от характера точечного графика функции  $f$  кроме многочлена степени  $n$  часто используют следующие функции:

1.  $y = ax + b$  (многочлен первой степени);

2.  $y = ax^m$ ;

3.  $y = ae^{mx}$ ;

$$4. y = \frac{1}{ax+b};$$

$$5. y = a \ln x + b;$$

$$6. y = a \frac{1}{x} + b;$$

$$7. y = \frac{x}{ax+b}.$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $m$  – некоторые параметры. Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений этих параметров. Найдем параметры указанных приближающих функций.

*1. Линейная функция.*

Будем искать приближающую функцию вида  $F = ax + b$ .  
Нам необходимо подобрать параметры  $a$  и  $b$  так, чтобы была минимальной сумма квадратов отклонений

$$\sum_{k=1}^N (ax_k + b - y_k)^2 = g.$$

Для этого найдем частные производные функции  $g$  по  $a$  и  $b$  и приравняем их к нулю, получим следующую систему

$$\begin{cases} 2 \sum_{k=1}^N (ax_k + b - y_k) \cdot x_k = 0 \\ 2 \sum_{k=1}^N (ax_k + b - y_k) = 0 \end{cases}.$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{cases} (\sum_{k=1}^N x_k^2)a + (\sum_{k=1}^N x_k)b = \sum_{k=1}^N y_k x_k \\ (\sum_{k=1}^N x_k)a + Nb = \sum_{k=1}^N y_k \end{cases}.$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} M_{x^2} &= \sum_{k=1}^N x_k^2, \quad M_y = \sum_{k=1}^N y_k, \quad M_x = \sum_{k=1}^N x_k, \\ M_{xy} &= \sum_{k=1}^N x_k y_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда последняя система будет иметь вид:

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + Nb = M_y \end{cases} \quad (31)$$

Коэффициенты этой системы  $M_x$ ,  $M_{x^2}$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  – числа, которые в каждой конкретной задаче приближения могут быть легко вычислены по формулам [\(30\)](#), где  $x_k$ ,  $y_k$  – значения из таблицы [\(29\)](#). Решив систему [\(31\)](#), получим значения параметров  $a$  и  $b$ , а, следовательно, и конкретный вид линейной функции.

## *2. Степенная функция.*

Будем искать приближающую функцию в виде

$$F = ax^m \tag{32}$$



Предполагая, что в исходной таблице [\(29\)](#) значения аргумента и значения функции положительны, прологарифмируем равенство [\(32\)](#) при условии, что  $a > 0$ :

$$\ln F = \ln a + m \ln x. \quad (33)$$

Так как функция  $F$  является приближающей для функции  $f$  функция  $\ln F$  будет приближающей для  $\ln f$ . Введем новую переменную  $t = \ln x$ . Тогда, как следует из [\(33\)](#),  $\ln F$  будет функцией от  $t$ :  $w(t)$ . Обозначим

$$m = A, \ln a = B \quad (34)$$

Теперь равенство [\(33\)](#) примет вид

$$w = A \cdot t + B, \quad (35)$$

т.е. исходная задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

Практически для нахождения приближающей функции в виде степенной (при сделанных выше предположениях) необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, прологарифмировав значения  $x$  и  $y$  в исходной таблице;

2) по новой таблице найти параметры  $A$  и  $B$  приближающей функции вида [\(35\)](#);

3) используя обозначения [\(34\)](#), найти значения параметров  $a$  и  $m$  и подставить их в выражение [\(32\)](#).

### *3. Показательная функция.*

Пусть исходная таблица [\(29\)](#) такова, что приближающую функцию целесообразно искать в виде показательной функции:

$$F = a \cdot e^{mx}, a > 0. \quad (36)$$

Прологарифмируем равенство [\(36\)](#):

$$\ln F = \ln a + mx. \quad (37)$$

Приняв обозначения [\(34\)](#), перепишем [\(37\)](#) в виде:

$$\ln F = A \cdot x + B. \quad (38)$$

Практически для нахождения приближающей функции в виде показательной (при сделанных выше предположениях) необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, прологарифмировав значения функции в исходной таблице;

2) по новой таблице найти параметры  $A$  и  $B$  приближающей функции вида [\(38\)](#);

3) используя обозначения [\(34\)](#), найти значения параметров  $m$  и  $a$  и подставить их в выражение [\(36\)](#).

*4. Дробно-линейная функция.*

Будем искать приближающую функцию в виде

$$F = \frac{1}{ax+b} \quad (39)$$

Равенство [\(39\)](#) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{F} = ax + b.$$

Практически для нахождения приближающей функции в виде дробно-линейной необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, заменив в исходной таблице значения функции обратными числами;

2) по новой таблице найти параметры  $a$  и  $b$  приближающей функции вида  $ax + b$ ;

3) найденные значения параметров  $a$  и  $b$  подставить в выражение [\(39\)](#).

### *5. Логарифмическая функция.*

Пусть приближающая функция имеет вид

$$F = a \cdot \ln x + b. \quad (40)$$

Для перехода к линейной функции сделаем замену  $\ln x = t$ . Отсюда следует, что для нахождения приближающей функции в виде логарифмической необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, прологарифмировав в исходной таблице значения аргумента;

2) по новой таблице найти параметры  $a$  и  $b$  приближающей функции вида  $a \cdot t + b$ ;

3) найденные значения параметров  $a$  и  $b$  подставить в выражение [\(40\)](#).

*6. Гипербола.*



Если точечный график, построенный по таблице [\(29\)](#) дает ветвь гиперболы, приближающую функцию можно искать в виде

$$F = \frac{a}{x} + b. \quad (41)$$

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку  $t = \frac{1}{x}$ :

$$w = a \cdot t + b. \quad (42)$$

Практически для нахождения приближающей функции в виде гиперболы необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, заменив в исходной таблице значения аргумента обратными числами;

2) по новой таблице найти параметры  $a$  и  $b$  приближающей функции вида [\(42\)](#);

3) найденные значения параметров  $a$  и  $b$  подставить в выражение [\(41\)](#).

*7. Дробно-рациональная функция.*

Пусть приближающая функция находится в виде:

$$F = \frac{x}{ax+b}. \quad (43)$$

Имеем:

$$\frac{1}{F} = a + \frac{b}{x}.$$

Практически для нахождения приближающей функции в виде дробно-рациональной функции необходимо выполнить следующие действия:

1) по данной таблице [\(29\)](#) составить новую таблицу, заменив в исходной таблице значения аргумента и функции обратными числами;

2) по новой таблице найти параметры  $a$  и  $b$  приближающей функции вида  $w = a + b \cdot t$ ;

3) найденные значения параметров  $a$  и  $b$  подставить в выражение [\(43\)](#).

### **Задания для самостоятельной работы**

I. Напишите программу для статистической обработки результатов наблюдения (нахождение приближающей функции в виде многочлена, линейной функции, показательной функции, логарифмической функции, дробно-

рациональной функции, гиперболы, степенной функции, дробной функции).

II. Найдите приближающие функции различных видов для функции заданной таблично.

1.

$x$	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,87	6,7	7,53
$y$	0,63	1,11	1,42	1,94	2,3	2,89	3,29	3,87

2.

$x$	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,6
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------

$y$	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04
-----	------	------	------	------	------	------	------	-------

3.

$x$	1	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
$y$	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06

4.

$x$	1,2	1,57	1,94	3,31	2,68	3,05	3,42	3,79
$y$	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21

5.

$x$	1,1	1,74	2,38	3,02	3,66	4,3	4,94	5,18
-----	-----	------	------	------	------	-----	------	------

$y$	1,73	2,98	3,53	3,89	4,01	4,25	4,32	4,38
-----	------	------	------	------	------	------	------	------

6.

$x$	1,74	2,32	2,9	3,48	4,06	4,64	5,22	5,8
$y$	0,66	0,45	0,36	0,33	0,3	0,29	0,28	0,27

7.

$x$	1,92	2,84	3,76	4,68	5,6	6,52	7,44	8,36
$y$	1,48	2,69	4,07	5,67	7,42	9,35	11,66	13,54

8.

$x$	1,28	1,76	2,24	2,72	3,2	3,68	4,16	4,64
$y$	2,1	2,62	3,21	3,98	4,98	6,06	7,47	9,25

9.

$x$	-4,84	-4,3	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,6	-1,06
$y$	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81

10.

$x$	0,68	1,13	1,58	2,03	2,48	2,93	3,38	3,83
$y$	-2,16	-1,69	-1,36	-1,12	-0,95	-0,75	-0,65	-0,52



## 16. Приближенное вычисление определенных интегралов

Рассмотрим следующую задачу: вычислить значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , если дан отрезок  $[a; b]$  и функция  $f(x)$ . Очевидно, что чем больше известно о функции  $f(x)$ , тем больше методов можно использовать для решения задачи. Например, иногда удается воспользоваться известной формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ .

Однако, даже в тех практически редких случаях, когда первообразную удастся явно найти в аналитической форме, не всегда удастся довести решение поставленной задачи до числового ответа, поскольку полученное выражение оказывается слишком сложным для вычисления его значения. Кроме того, иногда подынтегральная функция может быть задана таблично или графически и тогда данную формулу применить невозможно. В таких случаях применяют различные методы *приближенного* (или *численного*)

интегрирования. Формулы, используемые для приближенных вычислений однократных интегралов, называют *квадратурными формулами*.

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция на отрезке  $[a; b]$  заменяется интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа  $L(x)$  и получается приближенное равенство

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L(x) dx.$$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на компьютере и позволяющим получить результат с любой наперед заданной точностью.

Итак, заменим приближенно подынтегральную функцию на многочлен и вычислим интеграл от него. Важно, чтобы многочлен «хорошо» приближал исходную функцию. Для этого нужно взять большое число узловых точек. Но тогда степень многочлена будет тоже большой, что не всегда удобно. Чтобы избежать этого разобьем интервал интегрирования на

отрезки, и на каждом из них приближенно заменим функцию  $f(x)$  многочленом, а затем подсчитаем интегралы на каждом отрезке и сложим их. Будем иметь

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx,$$

где  $m$  – число отрезков разбиения.

Для приближения функции обычно берут многочлены, степени которых не превышают трех.

Рассмотрим теперь отдельно взятый отрезок  $[x_k; x_{k+1}]$ . Возьмем на нем  $n + 1$  точку и построим интерполяционный многочлен. Он будет иметь вид

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{y_{k_i} Q_k(x)}{(x-x_{k_i}) Q'_k(x_{k_i})},$$

где  $x_{k_i}$  –  $i$ -ая точка  $k$ -го отрезка,  $y_{k_i}$  – значение функции в этой точке,  $Q_k(x)$  – фундаментальный многочлен в формуле Лагранжа. Тогда будем иметь

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n y_{k_i} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{Q_k(x)}{(x-x_{k_i}) Q'_k(x_{k_i})} dx.$$

Заметим, что в записанной сумме от данной функции зависит лишь значение  $y_{k_i}$ , значения же остальных величин зависят лишь от отрезка, по которому осуществляется интегрирование и степени многочлена. Таким образом, эта формула может быть использована для любых функций.

Сделаем замену переменных

$$x = x_k + (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{t}{n}.$$

Обозначим разность  $x_{k+1} - x_k$  через  $h$ . Тогда отрезок  $[x_k; x_{k+1}]$  перейдет в отрезок  $[0; n]$ , а узлами интерполяции будут точки  $0, 1, 2, \dots, n$ . Тогда будем иметь

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{Q_k(x)}{(x-x_{k_i})Q'_k(x_{k_i})} dx = \frac{h}{n} \int_0^n \frac{Q(t)}{(t-i)Q'(i)} dt,$$

так как

$$dx = \frac{h dt}{n};$$

$$\left(x_k + \frac{ht}{n}\right) - \left(x_k + \frac{hi}{n}\right) = \frac{h}{n}(t - i) - i\text{-ый множитель } Q(t).$$



Полученный интеграл называют *коэффициентом Котеса*. Обозначим его через  $H_i^{(n)}$ . Коэффициенты Котеса не зависят ни от функции, ни от интеграла. Поэтому их вычисляют один раз.

Учитывая все выше сказанное, можно записать

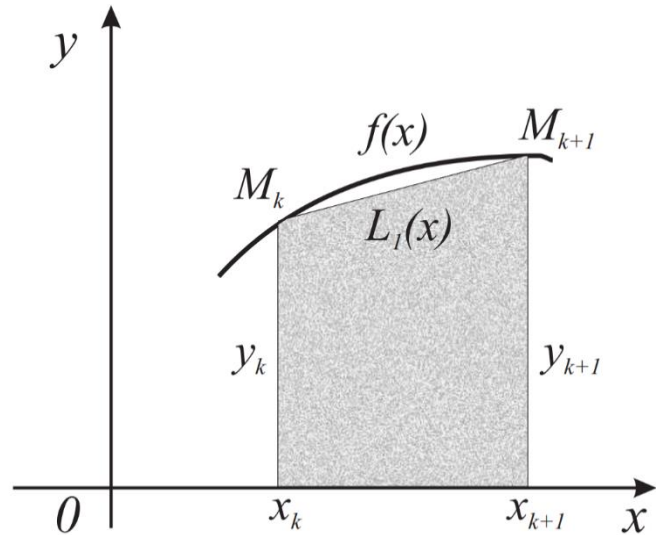
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{n} \sum_{i=0}^n y_{k_i} H_i^{(n)}. \quad (44)$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Котеса*.

Рассмотрим данную формулу для конкретных  $n$ .

## 17. Метод трапеций

Возьмем  $n = 1$ . Тогда на каждом из отрезков разбиения исходную функцию можно заменить многочленом первой степени. В качестве узлов интерполяции возьмем две точки – границы отрезка



Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольной трапеции.

Подсчитаем коэффициенты Котеса

$$H_0^{(1)} = \int_0^1 \frac{(t-0)(t-1)}{(t-0)(-1)} dt = \int_0^1 (1-t) dt = \left( t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$H_1^{(1)} = \int_0^1 \frac{(t-0)(t-1)}{(t-1) \cdot 1} dt = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формуле [\(44\)](#) на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  получаем интеграл

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = h \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) \right),$$

где  $m$  – число отрезков разбиения. Таким образом, имеем следующий алгоритм решения задачи методом трапеций на компьютере:

1. Ввод данных. Вводим границы отрезка  $[a; b]$ , число разбиений  $m$ . Будем рассматривать тот случай, когда функция

$f(x)$  задана аналитически. Тогда для ее вычисления в программе создадим функцию.

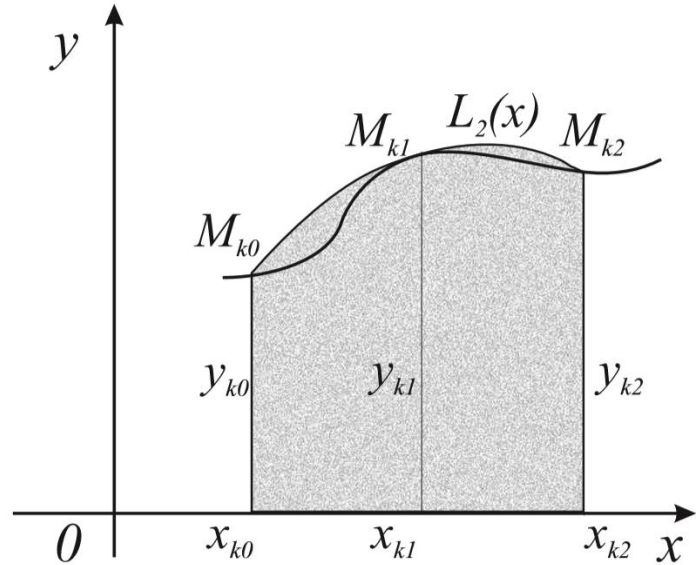
2.Открываем цикл по  $i$  от 1 до  $m - 1$ . За каждое прохождение цикла считаем  $x = a + hi$ , где  $h = \frac{b-a}{m}$ , находим  $f(x)$  и прибавляем к  $S$  (начальное значение  $S$  равно 0).

3.Считаем значения функции на концах отрезка и прибавляем их полусумму к  $S$ , а затем умножаем  $S$  на  $h$ .

4.Вывод результата  $S$ .

## 18. Метод Симпсона

Возьмем  $n = 2$ . Тогда на каждом из отрезков  $[x_k; x_{k+1}]$  функция  $f(x)$  заменяется многочленом второй степени. В качестве узлов интерполяции возьмем три точки: границы отрезка  $[x_k; x_{k+1}]$  и его середину. Геометрически



это означает замену графика подынтегральной функции параболой, проходящей через точки  $M_{k_i}(x_{k_i}; f(x_{k_i}))$ , где  $i$  изменяется от 0 до 2.

Посчитаем коэффициенты Котеса, учитывая, что

$$Q(t) = t(t-1)(t-2),$$

$$Q'(t) = (t-1)(t-2) + t(t-2) + t(t-1).$$

$$H_0^{(2)} = \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t \cdot 2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{3},$$

$$H_1^{(2)} = \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{(t-1) \cdot (-1)} dt = \int_0^2 (-t^2 + 2t) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + t^2\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$H_2^{(2)} = \int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{(t-2) \cdot 2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (t^2 - t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^2 = \frac{1}{3}.$$

Подставляя полученные значения коэффициентов в формулу (44), получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left( \frac{1}{3} f(x_{k_0}) + \frac{4}{3} f(x_{k_1}) + \frac{1}{3} f(x_{k_2}) \right).$$

Или, так как  $x_{k_0} = x_k$ ,  $x_{k_1} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ ,  $x_{k_2} = x_{k+1}$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left( \frac{1}{3} f(x_k) + \frac{4}{3} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_{k+1}) \right).$$



В итоге получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2m} \left( \frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \frac{2}{3} f(x_1) + \right. \\ \left. \frac{4}{3} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{2}{3} f(x_2) + \dots + \frac{1}{3} f(x_m) \right) = \frac{b-a}{m} \left( \frac{1}{6} f(x_0) + \right. \\ \left. \frac{2}{3} f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_1) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_2) + \dots + \frac{1}{6} f(x_m) \right).$$

Полученная формула называется формулой Симпсона.

Алгоритм решения задачи методом Симпсона будет иметь

вид:

1. Ввод данных.

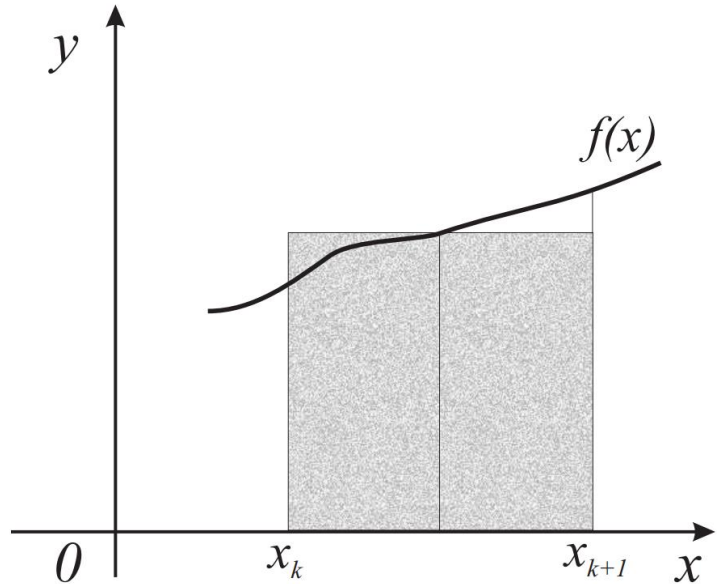
2. В цикле по  $i$  от 1 до  $2m - 1$  считаем следующие величины:  $x = x + \frac{h}{2}$ , где изначально  $x = a$ ; если  $i$  – четное, то  $S = S + \frac{f(x)}{3}$ , если  $i$  – нечетное, то  $S = S + \frac{2f(x)}{3}$ , где начальное значение  $S$  равно 0.

3. Прибавляем к полученной сумме значение выражения  $\frac{1}{6}(f(a) + f(b))$  и все, что получилось, умножаем на  $h$ .

4. Выводим результат – значение переменной  $S$ .

## 19. Метод серединных прямоугольников

Возьмем  $n = 0$ . В этом случае функция заменяется полиномом нулевой степени, т.е. постоянной. Это означает, что график подынтегральной функции заменяется отрезками прямых, параллельных оси  $Ox$ .



Для каждого отрезка  $[x_k; x_{k+1}]$  находим значение функции в его середине, через полученную точку проводим прямую, параллельную оси  $Ox$ , и вместо площади криволинейной трапеции ищем площадь полученного прямоугольника.

Тогда будем иметь

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right).$$

Запишем алгоритм решения задачи по методу серединных прямоугольников:

1. Ввод данных.

2. В цикле от 0 до  $m - 1$  считаем  $x = x + h$ ,  $S = S + h \cdot f(x)$ , где изначально  $x = a - \frac{h}{2}$ ,  $S = 0$ .

3. Вывод результатов.

Вернемся к методу Симпсона. Формулу метода Симпсона можно рассматривать как линейную комбинацию формулы трапеций и формулы срединных прямоугольников с коэффициентами  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  соответственно:

$$\begin{aligned}
 I^{\text{сим}} &= \frac{b-a}{m} \left( \frac{1}{6} f(x_0) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \frac{1}{3} f(x_1) + \frac{2}{3} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{3} f(x_2) + \dots + \frac{1}{6} f(x_m) \right) = \frac{b-a}{m} \left( \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{3} \left( \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) \right) \right) = \frac{2}{3} I^{\text{пр}} + \frac{1}{3} I^{\text{тр}},
 \end{aligned}$$

где  $I^{\text{пр}}$  – интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  подсчитанный по методу  
серединных прямоугольников,  $I^{\text{тр}}$  – интеграл  $\int_a^b f(x) dx$   
вычисленный по методу трапеций.

## **20. Оценка точности решения задачи для формул серединных прямоугольников, трапеций и Симпсона**

### ***1. Метод серединных прямоугольников.***

Ошибка при вычислении всего интеграла складывается из всех величин ошибок на отрезках разбиения. Можно утверждать, что сумма ошибок вычисления на всех отрезках разбиения (ошибки складываются или вычитаются) не превосходит ошибки при вычислении всего интеграла. Поэтому рассмотрим один интервал и оценим погрешность

вычисления интеграла на нем. Для этого нужно сравнить значение интеграла  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$  и значение выражения, которое используется для его вычисления  $h \cdot f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ .

Введем обозначение  $c = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ . Сделаем замену переменных  $x = c + t$ . Тогда будем иметь

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(c+t) dt,$$

$$h \cdot f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = h \cdot f(c).$$



Разложим функцию  $f(c + t)$  в ряд Тейлора (будем предполагать, что требования, накладываемые на функцию  $f(c + t)$  для разложения ее в ряд Тейлора выполнены). Итак,

$$f(c + t) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} t + \frac{f''(c)}{2!} t^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} t^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} t^4.$$

Будем считать, что четвертая производная функции  $f(c + t)$  не настолько велика, чтобы нельзя было считать значение выражения  $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} t^4$  достаточно малым (действительно, в силу нашего выбора,  $t$  – мало, значит,  $t^4$  – величина еще более маленькая).

Тогда можно записать

$$\left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(c+t) dt - h \cdot f(c) \right| \leq \left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( f(c) + \frac{f'(c)}{1!} t + \frac{f''(c)}{2!} t^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} t^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} t^4 \right) dt - h \cdot f(c) \right| \leq \left| \frac{h^3}{24} f''(c) \right| + \frac{h^5}{1920} M,$$

где  $M = \max_{[x_k; x_{k+1}]} |f^{(4)}(\xi)|$ .

Здесь  $\left| \frac{h^3}{24} f''(c) \right|$  – главная ошибка метода срединных прямоугольников,  $\frac{h^5}{1920} M$  – вторичная ошибка метода.

Получим, что если  $\frac{h^5}{1920}M$  мало (как правило это выполняется), то ошибка метода прямоугольников на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  равна  $\left| \frac{h^3}{24} f''(c) \right|$  или

$$\int_a^b f(x) dx = I_m^{\text{пр}} + \frac{h^3}{24} \sum_{k=0}^{m-1} |f''(c_k)|, \quad (45)$$

где  $I_m^{\text{пр}}$  – то, что вычислено по методу срединных прямоугольников при разбиении данного отрезка на  $m$  частей.

## ***2. Метод трапеций.***

Пусть  $c = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ . Разложим функции  $f\left(c - \frac{h}{2}\right)$  и  $f\left(c + \frac{h}{2}\right)$

в ряд Тейлора

$$f\left(c - \frac{h}{2}\right) = f(c) - \frac{f'(c)h}{1! \cdot 2} + \frac{f''(c)}{2!} \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{f^{(3)}(c)}{3!} \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\frac{h}{2}\right)^4,$$

$$f\left(c + \frac{h}{2}\right) = f(c) + \frac{f'(c)h}{1! \cdot 2} + \frac{f''(c)}{2!} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\frac{h}{2}\right)^4.$$

Тогда

$$h \frac{f\left(c-\frac{h}{2}\right)+f\left(c+\frac{h}{2}\right)}{2} = h \cdot f(c) + \frac{h^3}{8} f''(c) + \frac{h^5}{384} f^{(4)}(\xi) \leq h \cdot f(c) + \frac{h^3}{8} f''(c) + \frac{h^5}{384} M,$$

где  $M = \max_{[x_k; x_{k+1}]} |f^{(4)}(\xi)|$ .

Оценим модуль разности точного и вычисленного по методу трапеций интегралов на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(c+t) dt - h \frac{f\left(c-\frac{h}{2}\right) + f\left(c+\frac{h}{2}\right)}{2} \right| \leq \left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( f(c) + \frac{f'(c)}{1!} t + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{f''(c)}{2!} t^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} t^3 + \frac{M}{4!} t^4 \right) dt - h \cdot f(c) - \frac{h^3}{8} f''(c) - \frac{h^5}{384} M \right| \leq \\
& \left| h \cdot f(c) + \frac{2}{3!} h^3 \frac{f''(c)}{2^3} + \frac{2M}{5!2^5} h^5 - h \cdot f(c) - \frac{h^3}{8} f''(c) - \frac{h^5}{384} M \right| \leq \\
& \left| -\frac{h^3}{12} f''(c) - \frac{h^5}{480} M \right| \leq \frac{h^3}{12} |f''(c)| + \frac{h^5}{480} M.
\end{aligned}$$

Здесь  $\frac{h^3}{12} |f''(c)|$  – главная ошибка метода трапеций,  $\frac{h^5}{480} M$  – вторичная ошибка метода.

Таким образом, если  $\frac{h^5}{480}M$  мало, то

$$\int_a^b f(x) dx = I_m^{\text{тр}} - \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{m-1} |f''(c_k)|, \quad (46)$$

т.е. ошибка метода трапеций в два раза больше ошибки метода серединных прямоугольников.

Заметим, что ошибки метода трапеций и метода серединных прямоугольников имеют разные знаки, т.е. если вычислить интеграл разными методами, то истинное значение интеграла будет находиться между ними.

### ***3. Метод Симпсона.***

Если формулу (45) умножить на два и сложить с формулой (46), то главная ошибка пропадет, останется утроенное истинное значение интеграла (если не считать вторичную ошибку, которая мала). Эта комбинация двух методов дает метод Симпсона. Таким образом, метод Симпсона является более точным, его главная ошибка является комбинацией второстепенных ошибок двух рассмотренных выше методов и на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  составляет

$$\frac{\left(\frac{2}{1920}h^5M - \frac{1}{480}h^5M\right)}{3} = -\frac{1}{2880}h^5M.$$



Отсюда имеем

$$\int_a^b f(x) dx = I_m^{\text{сим}} - \frac{m}{2880} h^5 M,$$

где  $m$  – количество разбиений отрезка  $[a; b]$ .

## 21. Вычисление значения определенного интеграла с заранее заданной точностью

### *1. Метод серединных прямоугольников.*

Вычисление интеграла с заранее заданной точностью  $\varepsilon$  означает, что ошибка приближенных вычислений не должна превышать определенного, наперед заданного числа  $\varepsilon$ , т.е. должно выполняться неравенство

$$\frac{h^3}{24} \sum_{k=0}^{m-1} |f''(c_k)| < \varepsilon.$$

Можно записать

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m^{\text{пр}} + \text{ОШ}_m^{\text{пр}},$$

где

$$\text{ОШ}_m^{\text{пр}} = \frac{h^3}{24} \sum_{k=0}^{m-1} |f''(c_k)|.$$

Увеличим число разбиений в два раза. Тогда будем иметь

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_{2m}^{\text{пр}} + \text{ОШ}_{2m}^{\text{пр}},$$

где

$$\text{ОШ}_m^{\text{пр}} = \frac{h_1^3}{24} \sum_{k=0}^{2m-1} |f''(c_k)|, \quad h_1 = 0,5 \cdot h,$$

$h_1, h$  – длины отрезков разбиения.

Далее будем предполагать, что отрезки разбиения взяты столь малыми, что значение второй производной в середине отрезка есть среднее арифметическое между значениями производной в крайних точках, т.е.

$$\sum_{k=0}^{2m-1} |f''(c_k)| = 2 \sum_{k=0}^{m-1} |f''(c_k)|.$$

Можно записать

$$\text{ОШ}_m^{\text{пр}} \approx 4 \cdot \text{ОШ}_{2m}^{\text{пр}}.$$

Тогда будем иметь систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx \approx I_m^{\text{пр}} + \text{ОШ}_m^{\text{пр}} \\ \int_a^b f(x) dx \approx I_{2m}^{\text{пр}} + \text{ОШ}_{2m}^{\text{пр}} \\ \text{ОШ}_m^{\text{пр}} \approx 4 \cdot \text{ОШ}_{2m}^{\text{пр}} \end{cases}$$

Отсюда

$$\text{ОШ}_{2m}^{\text{пр}} \approx \frac{I_{2m}^{\text{пр}} - I_m^{\text{пр}}}{3}.$$

Тогда алгоритм решения задачи по методу серединных прямоугольников с заранее заданной точностью примет вид:

1. Считаем  $I_m^{\text{пр}}$  по алгоритму, описанному ранее.

2. Считаем  $I_{2m}^{\text{пр}}$  по тому же алгоритму.

3. Находим модуль разности полученных в пунктах 1-2 величин и делим его на 3.

4. Сравниваем полученный результат с точностью  $\varepsilon$ . Если полученная величина будет больше  $\varepsilon$ , то увеличиваем число разбиений в два раза и повторяем алгоритм сначала.

## ***2. Метод трапеций.***

Все вышесказанное верно и для метода трапеций.

## ***3. Метод Симпсона.***

По аналогии с методом срединных прямоугольников  
можно записать

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m^{\text{сим}} + \text{ОШ}_m^{\text{сим}},$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_{2m}^{\text{сим}} + \text{ОШ}_{2m}^{\text{сим}},$$

где

$$\text{ОШ}_m^{\text{сим}} = \frac{m}{2880} h^5 M,$$

$$\text{ОШ}_{2m}^{\text{сим}} = \frac{2m}{2880} h_1^5 M, \quad h_1 = 0,5 \cdot h.$$

Таким образом, будем иметь

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx \approx I_m^{\text{СИМ}} + \text{ОШ}_m^{\text{СИМ}} \\ \int_a^b f(x) dx \approx I_{2m}^{\text{СИМ}} + \text{ОШ}_{2m}^{\text{СИМ}} \\ \text{ОШ}_m^{\text{СИМ}} \approx 16 \cdot \text{ОШ}_{2m}^{\text{СИМ}} \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\text{ОШ}_{2m}^{\text{СИМ}} \approx \frac{I_{2m}^{\text{СИМ}} - I_m^{\text{СИМ}}}{15}.$$

Таким образом алгоритм решения задачи по методу Симпсона с наперед заданной точностью  $\varepsilon$  примет вид:

1. Считаем  $I_m^{\text{СИМ}}$  по алгоритму, описанному ранее.
2. Считаем  $I_{2m}^{\text{СИМ}}$  по тому же алгоритму.



3.Находим модуль разности полученных в пунктах 1-2 величин и делим его на 15.

4.Сравниваем полученный результат с точностью  $\varepsilon$ . Если полученная величина будет больше  $\varepsilon$ , то увеличиваем число разбиений в два раза и повторяем алгоритм сначала.

### **Задания для самостоятельной работы**

- I. Напишите программу для вычисления определенных интегралов методами срединных прямоугольников, трапеций и Симпсона с наперед заданной точностью.

II. Используя написанную ранее программу, вычислите определенный интеграл различными методами, сравните полученные результаты и обоснуйте их.

$$1. \int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{2x + \sqrt{x^2 + 0,5}} dx.$$

$$2. \int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x + 0,5)}{2x + \cos(x^2 + 1)} dx.$$

$$3. \int_{0,8}^{1,6} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx.$$

$$4. \int_{1,2}^2 \frac{\lg(x + 2)}{x} dx.$$

$$5. \int_{0,6}^{2,4} \frac{1 + 0,5x^2}{1 + \sqrt{0,8x^2 + 1,4}} dx.$$

$$6. \int_{1,2}^{2,64} \frac{(1 + 1,2x^2)}{0,8 + \sqrt{x^2 + 1,3}} dx.$$

$$7. \int_{0,6}^{1,4} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2 + 1} dx.$$

$$8. \int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x} \cos x^2 dx.$$

$$9. \int_{0,4}^{1,2} (2x + 0,5) \sin x \, dx.$$

$$10. \int_{1,4}^3 x^2 \lg x \, dx.$$

## 22. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

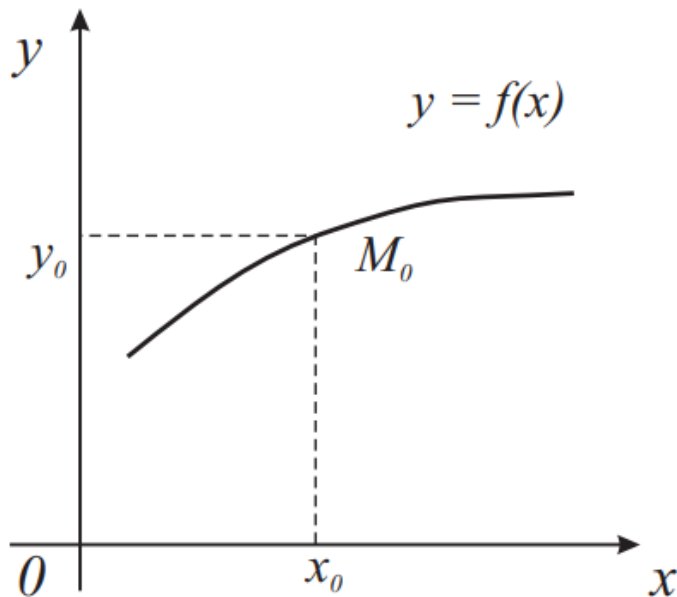
Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (47)$$

Основная задача, связанная с этим уравнением известна как задача Коши: найти решение уравнения ([47](#)) в виде функции  $y(x)$ , удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \quad (48)$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую  $y = f(x)$ , проходящую через заданную точку  $M(x_0, y_0)$  при выполнении условия (47).



Существование и единственность решения уравнения (47) обеспечивается *теоремой Пикара*:

Если функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в некоторой области  $G$ , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по  $y$ :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

то на некотором отрезке  $|x - x_0| \leq h$ , где  $h$  – положительное число, существует и единственное решение уравнения (47), удовлетворяющее начальному условию (48).



Здесь  $M$  – постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от  $a$  и  $b$ . Если  $f(x, y)$  имеет ограниченную в  $G$  производную  $f'_y(x, y)$ , то при  $(x, y) \in G$  можно принять

$$M = \max |f'_y(x, y)|.$$

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные (или специальные) функции. Между тем, весьма часто при решении практических задач эти методы оказываются либо совсем беспомощными, либо их

использование связано с недопустимыми затратами усилий и времени.

По этой причине для решения практических задач созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Весьма условно, в зависимости от формы представления решения, эти методы подразделяются на три основные группы:

1. Аналитические методы, применение которых дает решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2. Графические методы, дающие приближенное решение в виде графика.

3. Численные методы, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Одним из них является метод ломанных Эйлера. Он относится к графическим методам решения дифференциальных уравнений, дающим приближенное решение в виде графика. Кроме того, с его помощью можно найти искомую функцию в числовой (табличной) форме.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений вида (47), принадлежащие второй и третьей группам.

Что же касается дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

для которых задача Коши состоит в нахождении решения  $y = y(x)$ , удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – заданные числа, то их можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Так, например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y').$$

Можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Методы решения систем обыкновенных  
дифференциальных уравнений основываются на  
соответствующих методах решения уравнения ([47](#)).

## 23. Метод Эйлера

В основе метода ломанных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (47) с начальным условием (48). Выбрав достаточно малый шаг  $h$ , построим, начиная с точки  $x_0$ , систему равностоящих точек  $x_i = x_0 + i \cdot h$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Вместо искомой интегральной кривой на отрезке  $[x_0, x_1]$

рассмотрим отрезок касательной к ней в точке  $M_0(x_0, y_0)$

(обозначим ее через  $L_1$ ) с уравнением

$$y = y_0 +$$

$f(x_0, y_0)(x - x_0)$ . При  $x =$

$x_1$  из уравнения

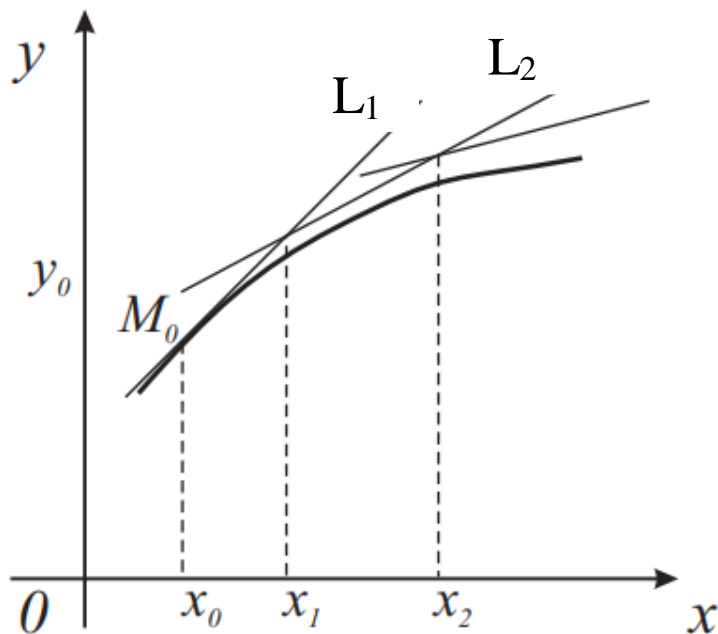
касательной  $L_1$  получаем:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Аналогично, проводя

касательную  $L_2$  к некоторой

интегральной кривой семейства в точке  $M_1(x_1, y_1)$ , получим:





$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

что при  $x = x_2$  дает  $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$ . Таким образом, получение таблицы значений искомой функции  $y(x)$  по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$x_{k+1} = x_k + h,$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, для того чтобы найти решение дифференциального уравнения (47) на отрезке  $[a, b]$  при выполнении условия (48)

с помощью метода ломанных Эйлера на компьютере надо воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Ввод данных:  $x_0, y_0, a, b, n$  (число разбиений отрезка  $[a, b]$ ).

2. Вычисление шага  $h$  метода:  $h = \frac{b-a}{n}$ .

3. Открытие цикла по  $i$  от 1 до  $n$ .

Тело цикла:

(a) Вычисляем  $x_i$ :  $x_i = x_{i-1} + h$ ;

(b) Находим  $y_i$ :  $y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$ .

Для вычисления значений  $f(x, y)$  в программе необходимо создать соответствующую функцию.

4. Вывод результата на экран (набор точек  $(x, y)$ ).

Однако метод ломанных Эйлера обладает малой точностью. Кроме того, он очень часто оказывается неустойчивым – малая ошибка (происходящая от округления, заложенная в исходных данных или связанная с самим методом) увеличивается с ростом  $x$ .

Для вычисления значения  $y_{m+1}$  метод Эйлера использует наклон касательной только в точке  $(x_m, y_m)$ . Это метод можно

усовершенствовать множеством различных способов. Из этих способов рассмотрим два, так называемые *исправленный метод Эйлера* и *модифицированный метод Эйлера*.

В исправленном методе Эйлера находится средний тангенс угла наклона касательной для двух точек:  $(x_m, y_m)$  и  $(x_m + h, y_m + hy'_m)$ , где  $y'_m = f(x_m, y_m)$ . Последняя точка есть та

самая, которая в методе Эйлера обозначалась  $(x_{m+1}, y_{m+1})$ .

Геометрически процесс нахождения точки

$(x_{m+1}, y_{m+1})$  можно

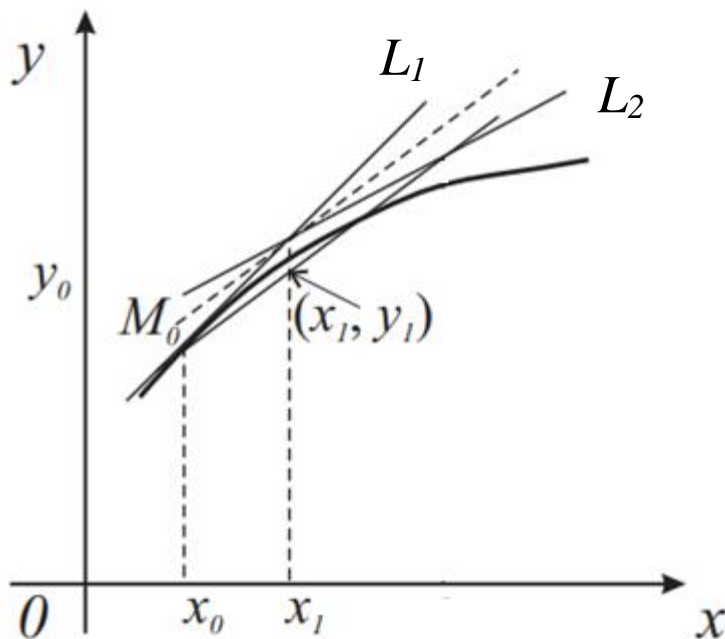
проследить по рисунку.

С помощью метода

Эйлера находится точка

$(x_m + h, y_m + hy'_m)$ ,

лежащая на прямой  $L_1$ .



В этой точке снова вычисляется тангенс угла наклона

касательной, на рисунке этому значению соответствует прямая  $L_2$ . Усреднение двух тангенсов дает прямую  $\bar{L}$  (на рисунке изображена пунктиром). Наконец, через точку  $(x_m, y_m)$  проводим прямую  $L$ , параллельную  $\bar{L}$ . Точка, в которой прямая  $L$  пересечётся с ординатой, восстановленной из  $x = x_{m+1} = x_m + h$ , и будет искомой точкой  $(x_{m+1}, y_{m+1})$ .

Тангенс угла наклона прямой  $\bar{L}$  и прямой  $L$  равен

$$\Phi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2} (f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hy')),$$

где

$$y'_m = f(x_m, y_m).$$

Уравнение прямой  $L$  при этом записывается в виде

$$y = y_m + (x - x_m)\Phi(x_m, y_m, h),$$

так что

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h).$$

Таким образом алгоритм решения дифференциального уравнения (47) на отрезке  $[a, b]$  при выполнении условия (48) исправленным методом Эйлера имеет вид:

1. Ввод данных:  $x_0, y_0, a, b, n$  (число разбиений отрезка  $[a, b]$ ).

2. Вычисление шага  $h$  метода:  $h = \frac{b-a}{n}$

3. Открытие цикла по  $i$  от 1 до  $n$ .

Тело цикла:

(a) Вычисляем  $x_i$ :  $x_i = x_{i-1} + h$ ;

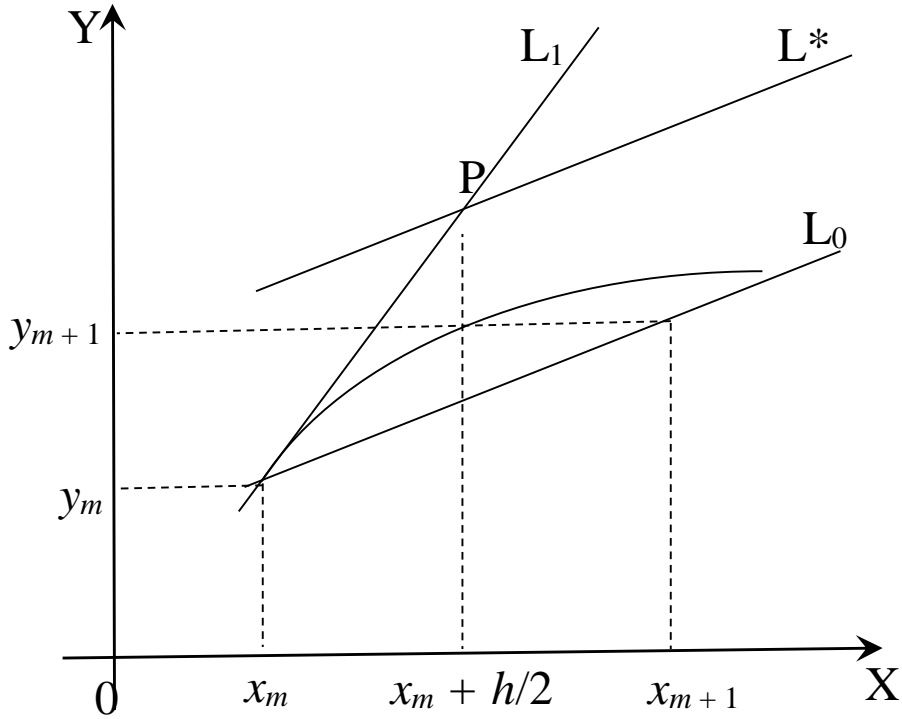
(b) Находим  $y_i$ :

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}h \left( f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})) \right).$$

4. Вывод результата.



В исправленном методе Эйлера усреднялись наклоны касательных. Можно пойти по другому пути и усреднять точки в следующем смысле.



Рассмотрим рисунок. Первоначальное построение точно такое же, как и на предыдущем рисунке: через точку  $(x_m, y_m)$  проведена прямая  $L_1$  с тангенсом угла наклона, равным  $f'(x_m, y_m)$ . Но на этот раз берем точку, лежащую на пересечении прямой и ординаты  $x = x_m + \frac{h}{2}$ . На рисунке эта точка обозначена через  $P$ , а её ордината равна  $y = y_m + \frac{h}{2} y'_m$ . Вычислим тангенс угла наклона касательной в этой точке

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} y'_m\right). \quad (49)$$

Прямая с таким наклоном, проходящая через точку  $P$ , обозначена через  $L^*$ . Вслед за тем, проводим через точку  $(x_m, y_m)$  прямую, параллельную  $L^*$ , и обозначаем ее  $L_0$ . Пересечение этой прямой с ординатой  $x = x_m + h$  и даст искомую точку  $(x_{m+1}, y_{m+1})$ . Уравнение  $L_0$  можно записать в виде

$$y = y_m + (x - x_m)\Phi(x_m, y_m, h),$$

где  $\Phi$  задается формулой [\(49\)](#). Поэтому

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h). \quad (50)$$

Соотношения (49), (50) описывают так называемый модифицированный метод Эйлера.

Алгоритм работы по данному методу имеет вид:

1. Ввод данных.
2. Вычисление шага метода  $h$ .
3. Открытие цикла по  $i$  от 1 до  $n$ .
  - (a) Вычисляем  $x_i$ :  $x_i = x_{i-1} + h$ ;
  - (b) Находим  $y_i$ :

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f \left( x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right).$$

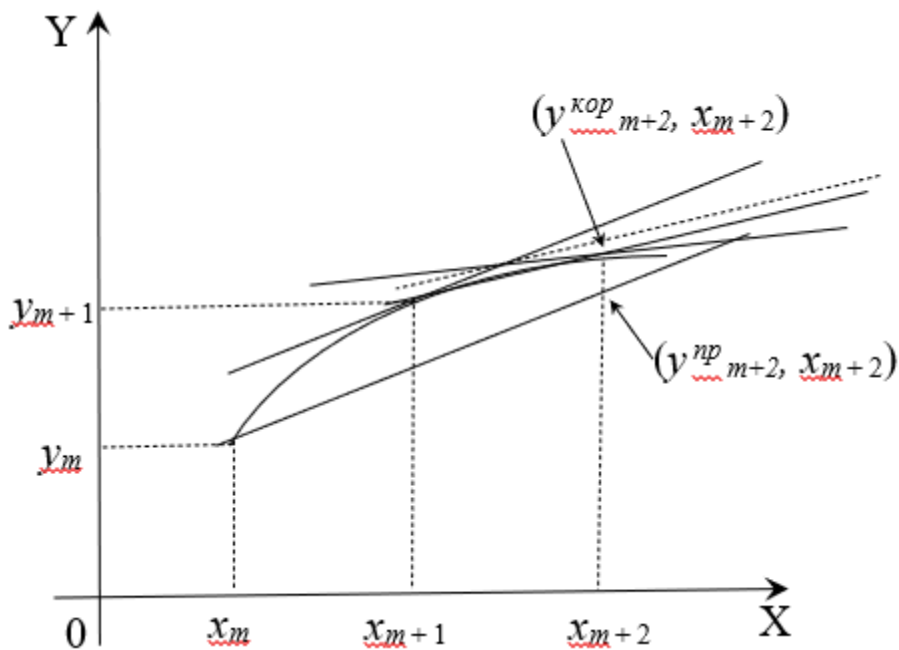
4. Вывод результата.

## 24. Метод прогноза и коррекции

Идея этого метода состоит в следующем: чтобы попасть в точку  $B$  кривой будем двигаться не по касательной к ней в точке  $A$ , а по касательной в какой-то промежуточной точке  $(x, y)$ , при этом, по теореме Лагранжа, ее направление совпадает с направлением секущей  $AB$ .

Так как нам известна точка  $(x, y)$ , но неизвестно про касательную к кривой в этой точке, то будем двигаться из точки  $A$  по прямой, имеющей угол наклона к оси  $Ox$  равный

среднему арифметическому углов наклона касательных в  
точках  $A$  и  $B$  к  
этой же оси.





Алгоритм работы метода состоит из следующих шагов:

1. Прогнозируем примерное значение  $y_{k+1}$ . Для этого движемся из точки  $(x_{k-1}, y_{k-1})$  в направлении касательной в точке  $(x_k, y_k)$  на два шага:

$$y_{k+1}^{\text{пр}} = y_{k-1}^{\text{кор}} + 2hf(x_k, y_k^{\text{кор}}) \quad (51)$$

– формула прогноза.

2. Находим прогнозируемую производную  $f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}})$ .
3. Корректируем значение  $y_{k+1}$ .

Для этого двигаемся из точки  $(x_k, y_k^{\text{кор}})$  на один шаг в направлении, являющимся средним между направлениями касательных в точках  $(x_k, y_k^{\text{кор}})$  и  $(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}})$ :

$$y_{k+1}^{\text{пр}} = y_k^{\text{кор}} + h \frac{f(x_k, y_k^{\text{кор}}) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}})}{2} \quad (52)$$

– формула коррекции.

Из формул [\(51\)](#), [\(52\)](#) видно, что для того, чтобы найти  $y_2$  надо знать  $y_0$  и  $y_1$ . По условию задачи дано лишь  $y_0$ . Поэтому перед тем, как начать работу по методу прогноза-коррекции

надо найти  $y_1$  любым из известных методов решения дифференциальных уравнений (например, методом Эйлера).

Оценим ошибки, получаемые при прогнозе и коррекции:

1. Прогноз:  $y_{k+1}^{\text{пр}} = y_{k-1}^{\text{кор}} + 2hf(x_k, y_k^{\text{кор}})$ .

Разложим в ряд Тейлора  $y_{k-1}$  и  $y_{k+1}$ :

$$y_{k-1} = y(x_k - h) = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2!} h^2 - \frac{y'''(\xi_1)}{3!} h^3, \quad (53)$$

$$y_{k+1} = y(x_k + h) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2!} h^2 + \frac{y'''(\xi_2)}{3!} h^3. \quad (54)$$

Выразим из (53)  $y_k$  и подставим в (54), и получим:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2y'_k h + \frac{h^3}{3!} (y''''(\xi_1) + y''''(\xi_2)).$$

Учитывая, что  $y'_k = f(x_k, y_k)$  получим, что ошибка прогноза равна

$$\text{ОШ}_{\text{пр}} = \frac{h^3}{3!} (y''''(\xi_1) + y''''(\xi_2)).$$

2. Коррекция:

$$y_{k+1}^{\text{пр}} = y_k^{\text{кор}} + h \frac{f(x_k, y_k^{\text{кор}}) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}})}{2}.$$

Введем обозначения:  $y'_k = f(x_k, y_k^{\text{кор}})$ ,  $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{пр}})$  и разложим функции  $y(x_k + \frac{h}{2})$  и  $y(x_{k+1} - \frac{h}{2})$  в ряд Тейлора, получим:

$$y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = y_k + y'_k \frac{h}{2} + \frac{y''_k h^2}{2! \cdot 4} + \frac{y'''(\Theta_1) h^3}{3! \cdot 8},$$

$$y\left(x_{k+1} - \frac{h}{2}\right) = y_{k+1} - y'_{k+1} \frac{h}{2} + \frac{y''_{k+1} h^2}{2! \cdot 4} - \frac{y'''(\Theta_2) h^3}{3! \cdot 8}.$$

Очевидно, что  $x_k + \frac{h}{2} = x_{k+1} - \frac{h}{2}$ , а, значит, можно

записать

$$y_k + y'_k \frac{h}{2} + \frac{y''_k h^2}{2! \cdot 4} + \frac{y'''(\Theta_1) h^3}{3! \cdot 8} = y_{k+1} - y'_{k+1} \frac{h}{2} + \frac{y''_{k+1} h^2}{2! \cdot 4} - \frac{y'''(\Theta_2) h^3}{3! \cdot 8}.$$

Выразим отсюда  $y_{k+1}$  и получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(y'_k + y'_{k+1}) - \frac{h^3}{4 \cdot 2!} y'''(\Theta_3) + \frac{h^3}{8 \cdot 3!} (y'''(\Theta_1) + y'''(\Theta_2)),$$

где  $\frac{h^3}{4 \cdot 2!} y'''(\Theta_3) = \frac{h^3}{4 \cdot 2!} (y''_{k+1} - y''_k)$  по теореме Лагранжа, или

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(y'_k + y'_{k+1}) - \frac{h^3}{8 \cdot 3!} (3! y'''(\Theta_3) - y'''(\Theta_1) - y'''(\Theta_2)).$$

То есть ошибка коррекции равна:

$$\text{ОШ}_{\text{кор}} = -\frac{h^3}{8 \cdot 3!} (3! y'''(\Theta_3) - y'''(\Theta_1) - y'''(\Theta_2)).$$

Таким образом, если третья производная не меняет знака на данном отрезке  $[a; b]$ , то точное решение дифференциального уравнения при использовании метода прогноза-коррекции будет находиться между прогнозируемым и корректируемым значениями.

## 25. Оценка точности методов Эйлера

Вернемся к методу Эйлера, модифицированному и исправленному методам Эйлера. Все эти методы относятся к семейству методов Рунге-Кутты, имеющих следующий вид. Фиксируем некоторые числа:

$$\alpha_2, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_q; \beta_{ij}, \quad 0 < i < j \leq q;$$

последовательно вычисляем

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)),$$

...



$$k_q(h) = h \cdot f \left( x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \dots + \beta_{q, q-1} k_{q-1}(h) \right)$$

и полагаем

$$y(x + h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h) = z(h). \quad (55)$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров  $\alpha_i, p_i, \beta_i$ . Обозначим  $\varphi(h) = y(x + h) - z(h)$ . Будем предполагать, что  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$  при любых функциях  $f(x, y)$ , а  $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$  для некоторой функции  $f(x, y)$ . По формуле Тейлора справедливо равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\Theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad (56)$$

где  $0 < \Theta < 1$ . Величина  $\varphi(h)$  называется *погрешностью метода на шаге*, а  $S$  – *порядком погрешности метода*.

При  $q = 1$  будем иметь

$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 h f(x, y),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (y'(x + h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1),$$

$$\varphi''(h) = y''(x + h).$$

Ясно, что равенство  $\varphi'(0) = 0$  выполняется для любых функций  $f(x, y)$  лишь при условии, что  $p_1 = 1$ . Легко видеть, что при этом значение  $p_1$  из формулы ([55](#)) получается формула

метода Эйлера. Для погрешности этого метода на шаге согласно (56) будем иметь

$$\varphi(h) = \frac{\varphi''(x + \Theta h) \cdot h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай  $q = 2$ , тогда

$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{y}),$$

где  $\bar{x} = x + \alpha_2 h$ ,  $\bar{y} = y + \beta_{21} h f(x, y)$ .

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f, \quad y'' = f'_x + f'_y f. \quad (57)$$

Для краткости через  $y$  и  $f$  обозначены  $y(x)$  и  $f(x, y)$  соответственно.

Вычисляя производные функции  $\varphi(h)$  и подставляя в выражения для  $\varphi(h)$ ,  $\varphi'(h)$ ,  $\varphi''(h)$  значение  $h = 0$ , получим (с учетом соотношений (57)):

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2)f,$$

$$\varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2)f'_x + (1 - 2p_2\beta_{21})f'_y f.$$

Хорошо видно, что требование

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$$

будет выполняться для всех  $f(x, y)$  лишь в том случае, если одновременно будут справедливы следующие три равенства относительно четырех параметров:

$$\begin{aligned}1 - p_1 - p_2 &= 0, \\1 - 2p_1\alpha_2 &= 0, \\1 - 2p_2\beta_{21} &= 0.\end{aligned}\tag{58}$$

Произвольно задавая значения одного из параметров и определяя значения остальных из системы (58), будем получать различные методы Рунге-Кутты с порядком погрешности  $s = 2$ .

Подберем значения параметров для исправленного и модифицированного методов Эйлера.

1. При  $p_1 = \frac{1}{2}$  из (58) получаем  $p_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_{21} = 1$ .

Для этих значений параметров формула (55) принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))}{2},$$

исправленный метод Эйлера.

2. При  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  из формулы (58) получаем  $p_2 = 1$ ,  $\beta_{21} = \frac{1}{2}$ ,  $p_1 = 0$ . Для этих значений параметров формула (55) принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} h \cdot f(x_i, y_i) \right),$$

–модифицированный метод Эйлера.

В случае  $q = 2$  из (56) следует, что главная часть ошибки на шаге при модифицированном и исправленном методах Эйлера есть  $\frac{\varphi'''(0)}{6} h^3$ , то есть пропорциональна третьей степени шага  $h$ , как и в методе прогноза-коррекции.

### **Задания для самостоятельной работы**

- I. Напишите программу для решения дифференциальных уравнений первого порядка методами Эйлера,

исправленным методов Эйлера, модифицированным методом Эйлера, методом прогноза-коррекции.

II. Используя написанную ранее программу, решите дифференциальное уравнение с заданным начальным условием на отрезке. Сравните полученные результаты и обоснуйте их.

$$1. y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1,8) = 2,6, \quad x \in [1,8; 2,8].$$

$$2. y' = x + \cos \frac{y}{3}, \quad y_0(1,6) = 4,6, \quad x \in [1,6; 2,6].$$

$$3. y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0,6) = 0,8, \quad x \in [0,6; 1,6].$$

$$4. y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0,5) = 0,6, \quad x \in [0,5; 1,5].$$

$$5. y' = x + \cos \frac{y}{\pi}, \quad y_0(1,7) = 5,3, \quad x \in [1,7; 2,7].$$



$$6. y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1,8) = 2,6, \quad x \in [1,8; 2,8].$$

$$7. y' = x + \sin \frac{y}{3}, \quad y_0(1,6) = 4,6, \quad x \in [1,6; 2,6].$$

$$8. y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}, \quad y_0(0,6) = 0,8, \quad x \in [0,6; 1,6].$$

$$9. y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}, \quad y_0(0,5) = 0,6, \quad x \in [0,5; 1,5].$$

$$10. y' = x + \sin \frac{y}{\pi}, \quad y_0(1,7) = 5,3, \quad x \in [1,7; 2,7].$$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. В пособии были рассмотрены основные идеи построения вычислительных алгоритмов наиболее эффективных и часто используемых на практике методов.

Авторы надеются, что пособие поможет в освоении численных методов не только студентам педагогических специальностей, но и всем, кто интересуется данной областью математики.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Исаков В.Н. Элементы численных методов. – М.: Академия, 2003.

2.Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Физматлит, 2002.

3.Вержбитский В.М. Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 2001.

4.Вержбитский В.И. Численные методы: линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: 2000, 2000.

5.Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1975.

6.Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.

7.Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П.  
Численные методы: пособие для студентов физико-  
математических специальностей педагогических  
институтов. - М.: Просвещение, 1990.

8.Хемминг Р. Численные методы. - М.: Наука, 1972.

9.Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1982.