

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

А.Ф. ГАЛКИН

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

В четырех частях

Часть 4

КОЛЕБАНИЯ, ВОЛНЫ, ОПТИКА

Владимир 2007

УДК 535.12(075)
ББК 22.343я7
Г16

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой общей физики
Владимирского государственного педагогического университета
Е.Н. Куркутова

Кандидат физико-математических наук,
доцент Владимирского государственного педагогического университета
А.В. Гончаров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Галкин, А. Ф.

Г16 Лекции по физике. В 4 ч. Ч. 4. Колебания, волны, оптика / А. Ф. Галкин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 100 с.
ISBN 5-89368-710-8

Содержат десять лекций, посвященных раскрытию физического смысла основных законов и понятий колебаний, волн, оптики, а также примеры и вопросы для самоконтроля.

Предназначены для студентов 1-го и 2-го курсов, изучающих дисциплину «Физика», технических специальностей всех форм обучения вуза, а также преподавателей.

Табл. 2. Ил. 74. Библиогр.: 9 назв.

УДК 535.12(075)
ББК 22.343я7

ISBN 5-89368-710-8

© Владимирский государственный
университет, 2007

Введение

В первой, второй и третьей частях издания представлены лекции, посвящённые раскрытию физического смысла основных законов и понятий механики, молекулярной физики, термодинамики, электричества и магнетизма. Четвёртая часть продолжает курс лекций и содержит десять лекций, посвящённых колебаниям, волнам и оптике.

В первых четырёх лекциях даётся компактное изложение основ теории колебаний и волн. Обращается внимание на сходство и единство колебательной природы механических и электромагнитных колебаний. В следующих пяти лекциях излагаются основные явления оптики. В конце пособия представлена лекция о разложении Фурье.

Основные понятия, законы, физический смысл для удобства восприятия подчёркнуты. Как и в предыдущих частях, сочетаются ограниченный объём, лаконичность с разумной строгостью выкладок, доказательств. Каждая лекция заканчивается вопросами для самоконтроля. Совершенно необходимо изучение теории сопровождать решением задач. Лекции предназначены студентам, но могут быть полезны и преподавателям.

ВНИМАНИЕ! ПОСОБИЕ ОБЛЕГЧАЕТ РАБОТУ СТУДЕНТУ, НО НЕ ЗАМЕНЯЕТ САМИ ЛЕКЦИИ!

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция № 27

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

План

1. Колебания. Характеристики гармонических колебаний.
2. Свободные (собственные) колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Гармонический осциллятор.
3. Энергия гармонических колебаний.
4. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний. Бие-ния. Метод векторной диаграммы.
5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.
6. Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Частота затухающих колебаний. Изохронность колебаний. Коэффициент, декремент, логарифмический декремент затухания. Добротность колебательной системы.
7. Вынужденные механические колебания. Амплитуда и фаза вынужденных механических колебаний.
8. Механический резонанс. Соотношение между фазами вынуждающей силы и скорости при механическом резонансе.
9. Понятие об автоколебаниях.

1. Колебания. Характеристики гармонических колебаний. Колебания – движение или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Гармонические (или синусоидальные) колебания – разновидность периодических колебаний, которые могут быть записаны в виде

$$x = a \cos \varphi = a \cos (\omega t + \alpha), \quad (1)$$

т.е. x изменяется со временем по закону синуса или косинуса, где a – амплитуда; $\omega t + \alpha = \varphi$ – фаза; α – начальная фаза; ω – циклическая частота; t – время; x – величина, определяющая положение колеблющейся системы.

Амплитуда a – наибольшее отклонение от среднего значения величины, совершающей колебания.

Фаза колебаний φ – изменяющийся аргумент функции, описывающей колебательный процесс (величина $\omega t + \alpha$, стоящая под знаком косинуса в выражении (1)). Фаза характеризует значение изменяющейся величины в данный момент времени. Значение φ в момент времени $t = 0$ называется начальной фазой α .

В качестве примера на рисунке 27.1 представлены математические маятники в крайних положениях с разностью фаз колебаний $\Delta\varphi = 0$ (рис. 27.1, а) и $\Delta\varphi = \pi$ (рис. 27.1, б).

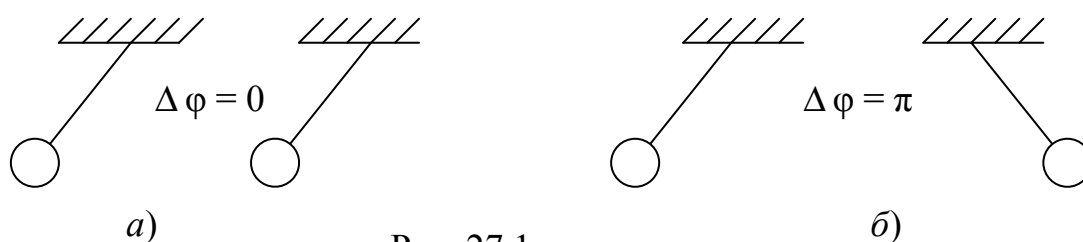


Рис. 27.1

Разность фаз колебаний маятников проявляется различием в положении колеблющихся маятников.

Циклической, или круговой, частотой называется количество колебаний, совершаемое за 2π секунд.

Частотой колебаний ν (или линейной частотой) называется число колебаний в единицу времени. За единицу частоты принимается частота таких колебаний, период которых равен 1 с. Эту единицу называют герцем (Гц).

Промежуток времени, за который совершается одно полное колебание, а фаза колебания получает приращение, равное 2π , называется периодом колебания (рис. 27.2).

Частота ν связана с периодом T соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Связь циклической частоты ω с линейной ν

$$\omega = 2\pi\nu$$

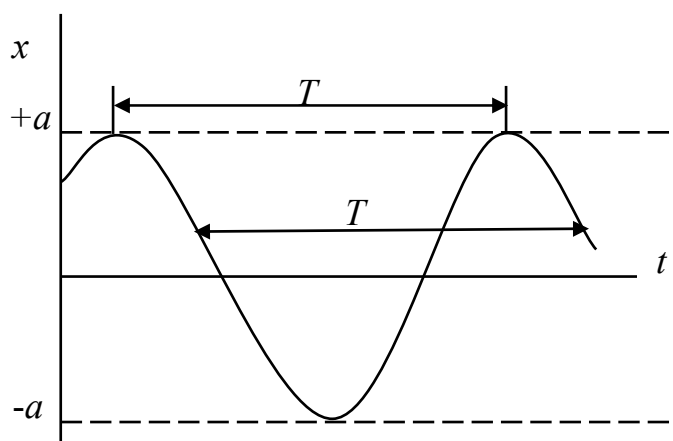


Рис. 27.2

2. Свободные (собственные) колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Гармонический осциллятор. Свободными, или собственными, называются такие колебания, которые происходят в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Рассмотрим колебания груза на пружине, совершаемые на гладкой (силой трения пренебрегают) горизонтальной поверхности (рис. 27.3). Если растянуть пружину на некоторое расстояние x и затем отпустить, то на груз будет действовать упругая сила $F_{\text{упр}} = -kx$, где k – коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью пружины.

Знак «минус» указывает на то, что $F_{\text{упр}}$ направлена в сторону, противоположную направлению растяжения. В проекции на ось X второй закон Ньютона как уравнение движения запишется $m\ddot{x} = F_{\text{упр}}$, или

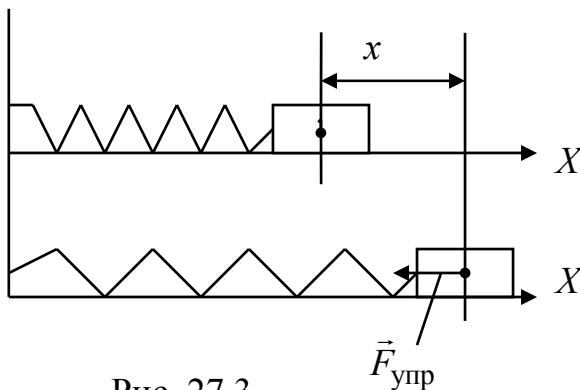


Рис. 27.3

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Поделив обе части уравнения на m

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

и перенеся правую часть в левую, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Обозначив $k/m = \omega_0^2$, получим линейное дифференциальное однородное уравнение второго порядка

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \quad (2)$$

(линейное – так как и сама величина x и ее производная в первой степени; однородное – так как нет свободного члена, не содержащего x ; второго

порядка – так как вторая производная x), где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний груза.

Уравнение (2) решается* подстановкой $x = e^{\lambda t}$. Подставляя последнее в (2) и проводя дифференцирование, получим

$$\frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Это уравнение имеет мнимые корни: $\lambda_1 = i \omega_0$, $\lambda_2 = -i \omega_0$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица).

Общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где c_1 и c_2 – комплексные постоянные.

Подставляя корни, получим

$$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (3)$$

(*Замечание.* Комплексным числом z называется число вида $z = x + iy$, где x , y – вещественные числа; i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Число x называется вещественной частью комплексного числа z . Число y называется мнимой частью z . Иногда мнимой частью числа z называют произведение iy , а величину y – коэффициентом мнимой части).

Выражение вида $e^{i\varphi}$ можно представить в виде комплексного числа с помощью формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Аналогично

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

(так как $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$; $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$).

Положим c_1 и c_2 в виде комплексных постоянных $c_1 = A e^{i\alpha}$, а $c_2 = A e^{-i\alpha}$, где A и α – произвольные постоянные. Из (3) получим

$$x = A e^{i\alpha} e^{i\omega_0 t} + A e^{-i\alpha} e^{-i\omega_0 t} = A e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + A e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}.$$

Обозначив $\omega_0 t + \alpha = \varphi$, получим

$$x = A e^{i\varphi} + A e^{-i\varphi}.$$

* В сокращенном варианте решение можно опустить.

Используя формулы Эйлера, получим
 $x = A(\cos \varphi + i \sin \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi) = 2A \cos \varphi = 2A \cos(\omega_0 t + \alpha) = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$,
 т.е. решение дифференциального уравнения для свободных колебаний

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная круговая частота колебаний; a - амплитуда.

Смещение x изменяется со временем по закону косинуса, т.е. движение системы под действием упругой силы $f = -kx$ представляет собой гармоническое колебание.

Если величины, описывающие колебания некоторой системы периодически изменяются со временем, то для такой системы пользуются термином «осциллятор».

Линейным гармоническим называется осциллятор, движение которого описывается линейным уравнением $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$.

3. Энергия гармонических колебаний. Полная механическая энергия системы, изображенной на рис. 27.3, равна сумме механической и потенциальной энергий.

Продифференцируем по времени выражение (4), получим

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Кинетическая энергия груза (массой пружины пренебрегаем)

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Потенциальная энергия выражается известной формулой $U = \frac{kx^2}{2}$,

подставляя x из (4), получим

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \text{ так как } k = m\omega_0^2.$$

Полная энергия

$$E = E_k + U = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}$$

величина постоянная. В процессе колебаний потенциальная энергия переходит в кинетическую и наоборот, но полная энергия остается неизменной.

4. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний.

Обычно одно и то же тело участвует в нескольких колебаниях. Так, например, звуковые колебания, воспринимаемые нами при слушании оркестра, представляют собой сумму колебаний воздуха, вызываемых каждым музыкальным инструментом в отдельности.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2 . Положим равными, для простоты, амплитуды $a_1 = a_2 = a$ и начальные фазы $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда

$$x = x_1 + x_2 = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t = a (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) .$$

Воспользовавшись формулой суммы косинусов, получим

$$x = 2a \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \quad (5)$$

Биения. Пусть два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Обозначим частоту одного колебания ω , частоту второго $\omega + \Delta\omega$. При этом $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными a . Начальные фазы для упрощения задачи положим равными нулю. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t, \\ x_2 &= a \cos (\omega + \Delta\omega) t. \end{aligned}$$

Сложим эти колебания, воспользовавшись формулой (5), получим

$$x = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right) \cos \omega t \quad (6)$$

Во втором сомножителе (6) пренебрегли $\frac{\Delta\omega}{2}$ по сравнению с ω . Множитель $\cos \frac{\Delta\omega t}{2}$ меняется гораздо медленнее, чем $\cos \omega t$ (так как $\Delta\omega \ll \omega$). Результирующее колебание x можно рассматривать как гармо-

ническое с частотой ω , амплитуда которого меняется по закону $\left|2a \cos \frac{\Delta\omega t}{2}\right|$ (амплитуда биений). Такие колебания называются биениями.

Они представлены на рис. 27.4.

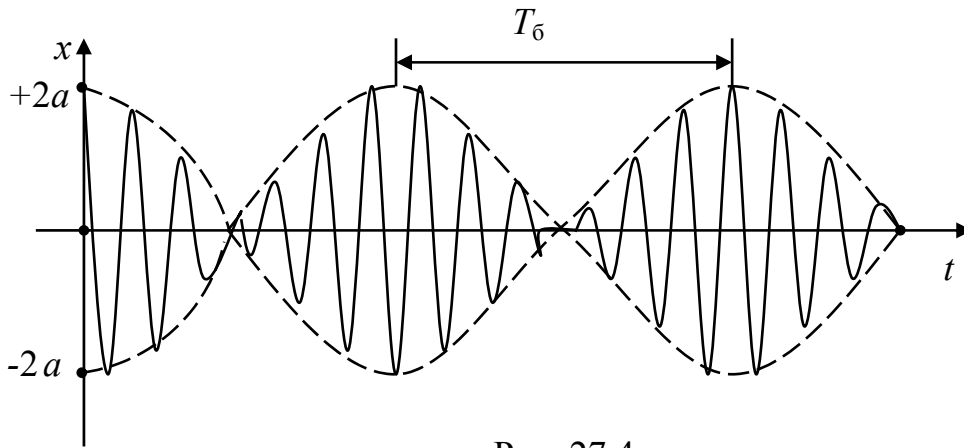


Рис. 27.4

Частота пульсаций амплитуды называется частотой биений. Промежутки времени между соседними моментами времени, когда амплитуда максимальна, называется периодом биений $T_б$. За это время разность фаз изменяется на 2π , т.е.

$$\omega_2 T_б - \omega_1 T_б = 2\pi,$$

$$(\omega + \Delta\omega) T_б - \omega T_б = 2\pi,$$

$$\Delta\omega T_б = 2\pi.$$

Таким образом, период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Метод векторной диаграммы. Колебания изображаются графически в виде векторов на плоскости (рис. 27.5). Вектор-амплитуда \vec{a} вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ против часовой стрелки. Если в момент $t = 0$ вектор \vec{a} образует с осью x угол α , то проекцию вектора \vec{a} на ось x можно записать в виде гармонического закона $x = a \cos(\omega t + \alpha)$.

Следовательно, проекция вектора \vec{a} на ось x будет совершать гармоничес-

где α - разность фаз обоих колебаний. Уравнения (7) представляют уравнения траектории в параметрической форме, где параметр t – время. Решая совместно оба уравнения с целью исключения параметра t , получим (без вывода) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. При $\alpha = 0$ уравнение (8) принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{b}{a}x$$

Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой (рис. 27.7).

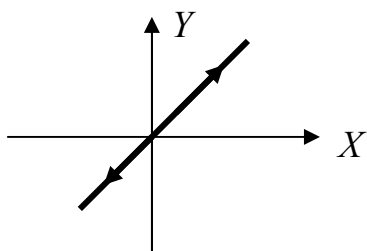


Рис. 27.7

2. Разность фаз $\alpha = \pm\pi$. Уравнение (8) имеет вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Результирующее движение вдоль прямой (рис. 27.8)

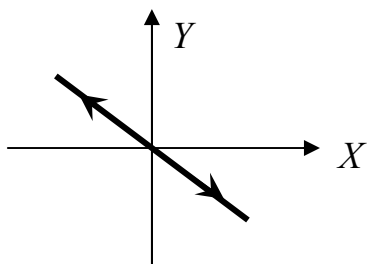


Рис. 27.8

$$y = -\frac{b}{a}x$$

3. При $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ уравнение (8) переходит в

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

т.е. уравнение эллипса, полуоси которого равны a и b (рис. 27.9). При равенстве $a = b$ эллипс вырождается в окружность.

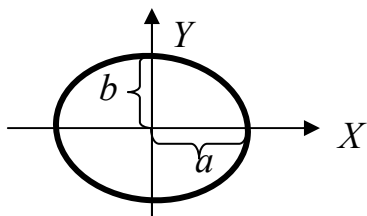


Рис. 27.9

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид достаточно сложных кривых. Представленные на рис. 27.7, 27.8, 27.9 фигуры Лиссажу являются

одними из простейших. В общем случае в зависимости от соотношения частот, амплитуд, разности фаз фигуры достаточно сложные. С помощью фигур Лиссажу, зная частоту одного из складываемых колебаний, можно определить частоту другого колебания.

6. Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Частота затухающих колебаний. Изохронность колебаний. Коэффициент, декремент, логарифмический декремент затухания. Добротность колебательной системы. В любой реальной колебательной системе есть силы сопротивления движению, действие которых приводит к уменьшению амплитуды и энергии колебаний с течением времени. Такие колебания называют затухающими.

В этом случае уравнение движения для системы на рис. 27.3 будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{сопр}} + F_{\text{упр}}.$$

Учитывая, что $F_{\text{упр}} = -kx$, а силу сопротивления, которая обычно пропорциональна скорости, можно записать как $F_{\text{сопр}} = -r \frac{dx}{dt}$, где r – коэффициент сопротивления, т.е. коэффициент пропорциональности между скоростью и силой сопротивления, уравнение движения приобретает вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx.$$

Переносим члены из правой части в левую, поделив уравнение на m и обозначив $\frac{r}{m} = 2\beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим уравнение в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (9)$$

где ω_0^2 – частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (собственная частота системы).

Коэффициент $\beta = \frac{r}{2m}$ характеризующий скорость затухания

колебаний, называется коэффициентом затухания.

Решение уравнения (9) имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \alpha) \quad (10)$$

где a_0 и α – постоянные, определяемые начальными условиями $x(0) = x_0 = a_0 \cos \alpha$; ω_3 – частота затухающих колебаний.

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

График функции (10) показан на рис. 27.10.

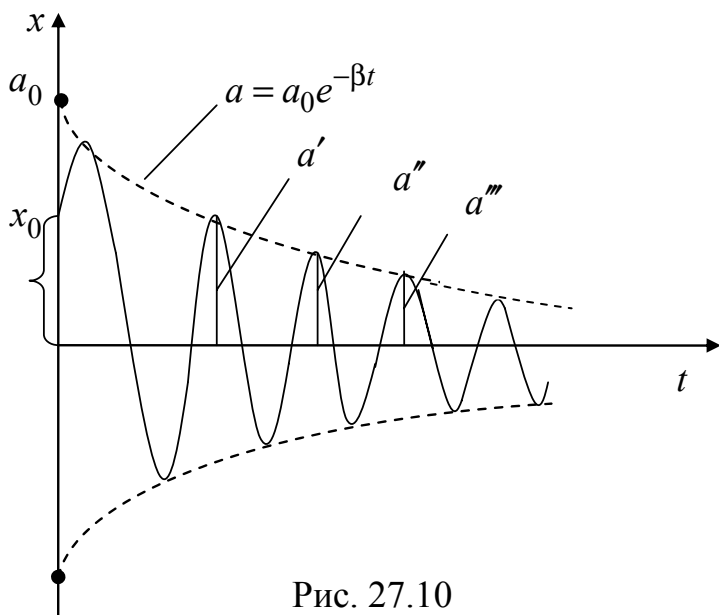


Рис. 27.10

Множитель $a = a_0 e^{-\beta t}$ в уравнении (10) называют амплитудой затухающих колебаний. Такие колебания можно рассматривать как гармонические с частотой ω_3 и уменьшающейся со временем амплитудой $a = a_0 e^{-\beta t}$. Заметим, что независимость частоты (периода) собственных колебаний от амплитуды называется изохронностью. Изохронность характерна для линейных систем. В линейных системах

изохронность практически соблюдается только в области достаточно малых амплитуд.

Другое замечание. Если $\beta > \omega_0$, то процесс называется апериодическим (непериодическим). Выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (рис. 27.11, кривая 1). Кривая 2 получается в том случае, если выведенной из положения равновесия системе сообщить достаточно сильный толчок к положению равновесия.

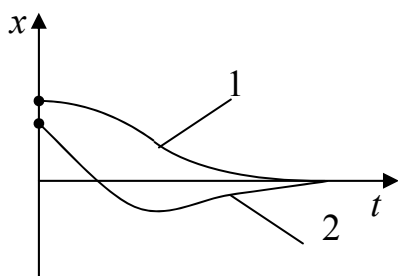


Рис. 27.11

Кроме коэффициента β затухание характеризуют и другими величинами. Найдем отношение амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период

$$\frac{a'}{a''} = \frac{a(t)}{a(t+T)} = \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Это отношение называется декрементом затухания, а его натуральный логарифм – логарифмическим декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \quad (11)$$

где T – период затухающих колебаний. Для выяснения физического смысла λ возьмем некоторое время $t = \tau$, за которое амплитуда уменьшается в e раз (время релаксации). Тогда $a_0 e^{-\beta\tau} = a_0 e^{-1}$, а так как $\beta = \lambda/T$ [из (11)],

то $e^{-\frac{\lambda\tau}{T}} = e^{-1}$. Обозначим $\frac{\tau}{T} = N_e$ - количество колебаний за время τ , то

гда $\lambda N_e = 1$ и $\lambda = \frac{1}{N_e}$, т.е. логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Кроме того, для характеристики колебательной системы часто употребляется величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (12)$$

называемая добротностью колебательной системы (добротностью осциллятора). Добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за то время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

7. Вынужденные механические колебания. Амплитуда и фаза вынужденных механических колебаний. Свободные колебания реальной колебательной системы являются затухающими. Чтобы колебания были незатухающими, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные силами сопротивления. Это можно сделать, воздействуя на систему (см. рис. 27.3) внешней вынуждающей силой, изменяющейся по гармоническому закону $F_{\text{вын}} = F_0 \cos \omega t$, где ω - частота вынуждающей силы. Уравнение движения запишется с учетом всех сил ($F_{\text{упр}}, F_{\text{сопр}}, F_{\text{вын}}$) в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{сопр}} + F_{\text{упр}} + F_{\text{вын}},$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t.$$

Поделив обе части на m и перенеся первые два члена из правой части в левую, получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Обозначив, как и в п. 6 $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (13)$$

Уравнение является неоднородным. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x = x_1 + x_2.$$

Общее решение однородного уравнения (правая часть (13) равна нулю) нам уже известно

$$x_1 = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Слагаемое x_1 играет заметную роль только в начальной стадии процесса (рис. 27.12). С течением времени из-за экспоненциального множителя $e^{-\beta t}$ роль x_1 уменьшается, и по прошествии некоторого времени им можно пренебречь.

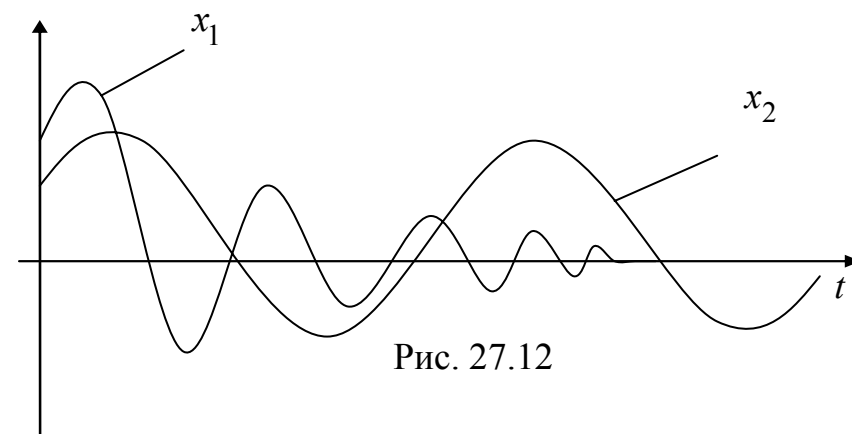


Рис. 27.12

Остается только частное решение неоднородного уравнения (без вывода)

$$x = x_2 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (14)$$

Функция (14) описывает установившиеся вынужденные гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (определенных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания также зависит от частоты вынуждающей силы.

8. Механический резонанс. Соотношение между фазами вынуждающей силы и скорости при механическом резонансе. Зависимость ам-

плитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой.

Чтобы найти резонансную частоту $\omega_{рез}$, нужно найти максимум амплитуды функции (14), т.е. максимум функции

$$a(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (15)$$

или, что то же самое, найти минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе (15). Продифференцировав выражение $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2$ по ω и приравняв к нулю, получим

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2 \omega = 0 .$$

Проведя дальнейшие простые преобразования, получим

$$\omega_{рез} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} ,$$

а так как частота по своему смыслу не может быть отрицательной, то выбираем решение со знаком «+». Итак, резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (16)$$

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты изменения вынуждающей силы в соответствии с выражением (15) представлен на рис. 27.13. При $\omega \rightarrow 0$ все кривые приходят к одному и тому же значению $a(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$. При

$\omega \rightarrow \infty$ $a \rightarrow 0$. Чем меньше β , тем острее максимум.

Происхождение резонансного усиления колебаний можно представить себе следующим образом. Если $\omega \neq \omega_{рез}$, то между вынуждающей силой $\vec{F}_{вын}$ и скоростью \vec{v} существует определенная разность фаз, поэтому в течение некоторой доли каждого периода сила $\vec{F}_{вын}$ направлена противоположно \vec{v} , т.е.

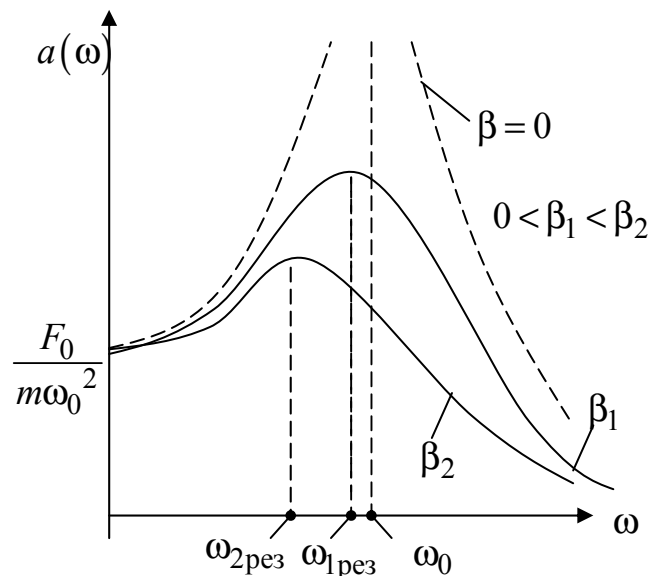


Рис. 27.13

стремится замедлить движение. При резонансе же фазы силы и скорости совпадают, так что сила «подталкивает» движение.

9. Понятие об автоколебаниях. Автоколебания – незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, не обладающего колебательными свойствами. Свойства колебаний определяются самой системой.

Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в такт с ее колебаниями.

Форма, амплитуда и частота колебаний задаются самой системой.

Примером автоколебательной системы могут служить механические часы. Энергия берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза, но ни пружина, ни груз не являются вынуждающей силой, формирующей колебания (внешняя сила здесь не обладает колебательными свойствами). Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей. Другие примеры автоколебательных систем – электрический звонок, скрипка и т.п.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие колебания называются гармоническими? Приведите примеры гармонических колебаний.
2. Дайте определение следующих характеристик гармонического колебания: амплитуды, фазы, начальной фазы, периода, частоты, циклической частоты.
3. Выведите дифференциальное уравнение гармонических колебаний и напишите его решение.
4. Как изменяются со временем кинетическая и потенциальная энергии гармонического колебания? Почему полная энергия гармонического колебания остается постоянной?
5. Выведите дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания и напишите его решение.
6. Что такое логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы?
7. Выведите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и проанализируйте решение.
8. Что такое резонанс? Нарисуйте график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы, когда эта сила является простой гармонической функцией времени.
9. Что такое автоколебания? Приведите примеры автоколебаний.

Лекция № 28

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

План

1. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Волновое уравнение и его решение. Гармонические волны и их характеристики.
2. Фазовая скорость и дисперсия волн. Волновой пакет и групповая скорость.
3. Понятие о когерентности. Интерференция волн. Стоячие волны.
4. Эффект Доплера для звуковых волн.

1. Механизм образования механических волн в упругой среде. Если в каком-либо месте упругой среды (твердой, жидкой или газообразной) возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание будет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью. Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к некоторому моменту времени t называется фронтом волны (волновым фронтом). В зависимости от формы фронта волна может быть сферической, плоской и др. Фаза колебаний на фронте волны в разных точках одна и та же.

Продольные и поперечные волны. Волна называется продольной, если направление смещения частиц среды совпадает с направлением распространения волны.

Продольная волна распространяется в твердых, жидких и газообразных средах.

Волна называется поперечной, если смещение частиц среды перпендикулярно направлению распространения волны. Поперечная механическая волна распространяется только в твердых телах (в средах, обладаю-

щих сопротивлением сдвигу, поэтому в жидкостях и газах такая волна распространиться не может).

Волновое уравнение и его решение. Гармонические волны и их характеристики. Уравнение, позволяющее определить смещение $\xi(x,t)$ любой точки среды с координатой x в любой момент времени t , называется уравнением волны.

Например, уравнение плоской волны, т.е. волны, распространяющейся например, в направлении оси X , имеет вид

$$\xi(x,t) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1)$$

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды через время t , за которое волна распространяется на расстояние $x = vt$ (v – скорость распространения волны).

Расстояние λ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны

$$\lambda = vT$$

Введем величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, которая называется волновым числом.

Если умножить волновое число на единичный вектор направления распространения волны $\frac{\vec{v}}{v}$, то получится вектор, называемый волновым вектором

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{v}}{v}$$

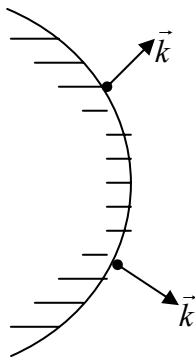


Рис. 28.1

Вектор \vec{k} показывает направление распространения волны в данной точке волнового фронта (рис. 28.1).

Перепишем выражение (1) в виде

$$\xi(x,t) = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right).$$

Преобразуем отношение $\frac{\omega}{v}$

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda} = k. \quad (2)$$

Тогда уравнение волны запишется в виде

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - k x)$$

На рис. 28.2 представлено графическое изображение волны:

- зависимость смещения точек среды от координаты при фиксированном времени (рис. 28.2, а);

- зависимость смещения точек среды от времени при фиксированной координате (рис. 28.2, б).

Уравнение волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

С помощью оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (лапласиана) это уравнение можно записать более кратко

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

В случае плоской волны волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

(Решением этого уравнения является уравнение волны (1)).

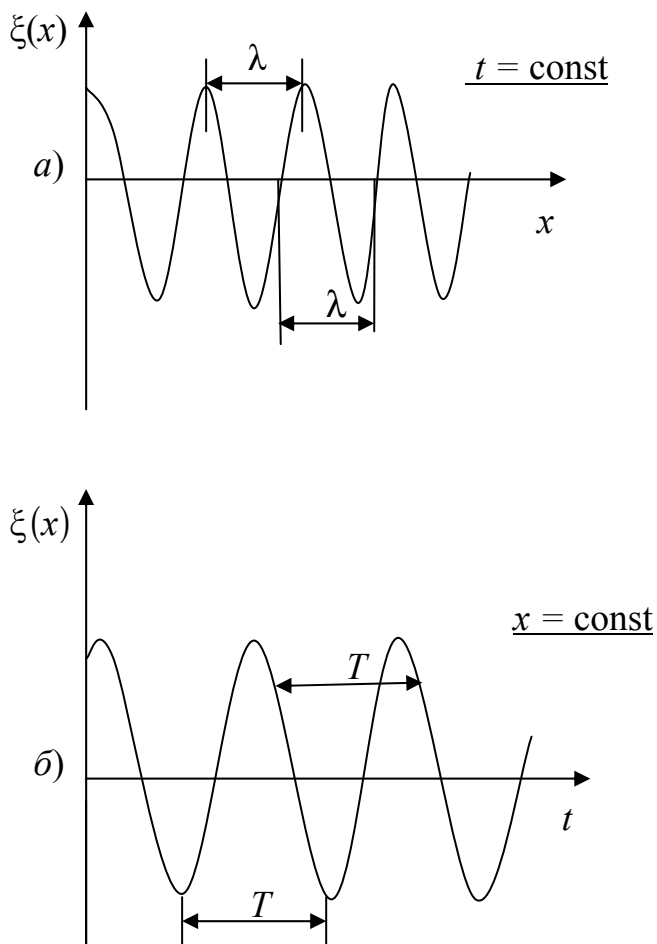


Рис. 28.2

2. Фазовая скорость и дисперсия волн. Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (1):

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \text{const} . \quad (3)$$

Продифференцируем (3), получим

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Значение $\frac{dx}{dt}$ дает скорость, с которой перемещается данное значение фазы.

Таким образом, скорость распространения волны v в уравнении (1) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью. Из выражения (2)

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}} \quad (4)$$

Если фазовая скорость волн в некотором частном интервале постоянна (т.е. v не зависит от ω), то говорят, что дисперсия отсутствует.

Дисперсия – это зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частоты ω . Примером волны без дисперсии является электромагнитная волна в вакууме.

Волновой пакет и групповая скорость. Строго монохроматическая волна вида $\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx)$ представляет собой бесконечную во времени и в пространстве последовательность «горбов» и «впадин», перемещающихся вдоль оси X с фазовой скоростью $v = \frac{\omega}{k}$.

Реальная волна всегда ограничена в пространстве и во времени и поэтому не является строго монохроматической.

Реальную волну, близкую к монохроматической, можно представить в виде суперпозиции (независимого наложения) большого числа волн –

группы волн, мало отличающихся по частоте и занимающих ограниченную область в пространстве.

Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется волновым пакетом (или группой волн).

При фиксированном времени t график функции, описывающей группу волн, или волновой пакет, представлен на рис. 28.3.

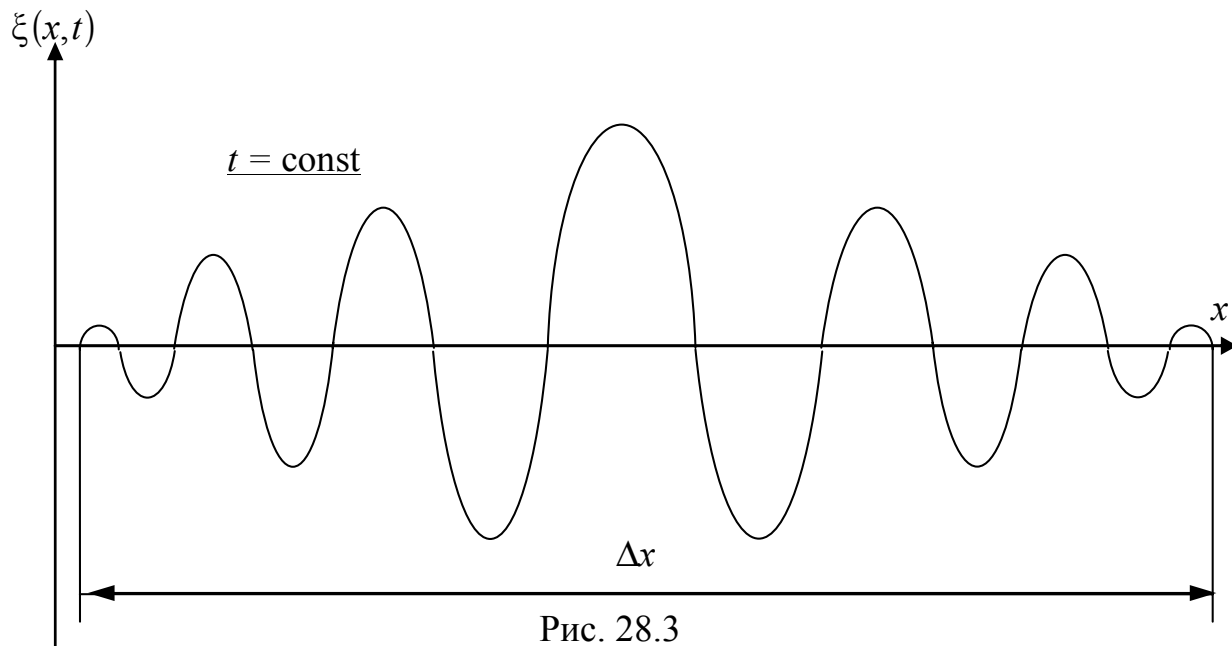


Рис. 28.3

Для пакета имеет место соотношение $\Delta k \Delta x = 2\pi$. Чем меньше Δk (диапазон частот, длин волн), тем больше Δx , и наоборот.

В недиспергирующей среде все волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью v . Очевидно, что в этом случае скорость движения пакета совпадает с фазовой, форма пакета со временем не изменяется. В диспергирующей среде (среде с дисперсией) волновой пакет расплывается, поскольку скорости его монохроматических составляющих отличаются друг от друга. Если дисперсия мала, расплывание волнового пакета происходит не слишком быстро. В этом случае пакету можно приписать скорость u , под которой понимается скорость перемещения огибающей пакета, которую называют групповой скоростью.

На рис. 28.4 показано положение волнового пакета для трех последовательных моментов времени t_1 , t_2 , и t_3 .

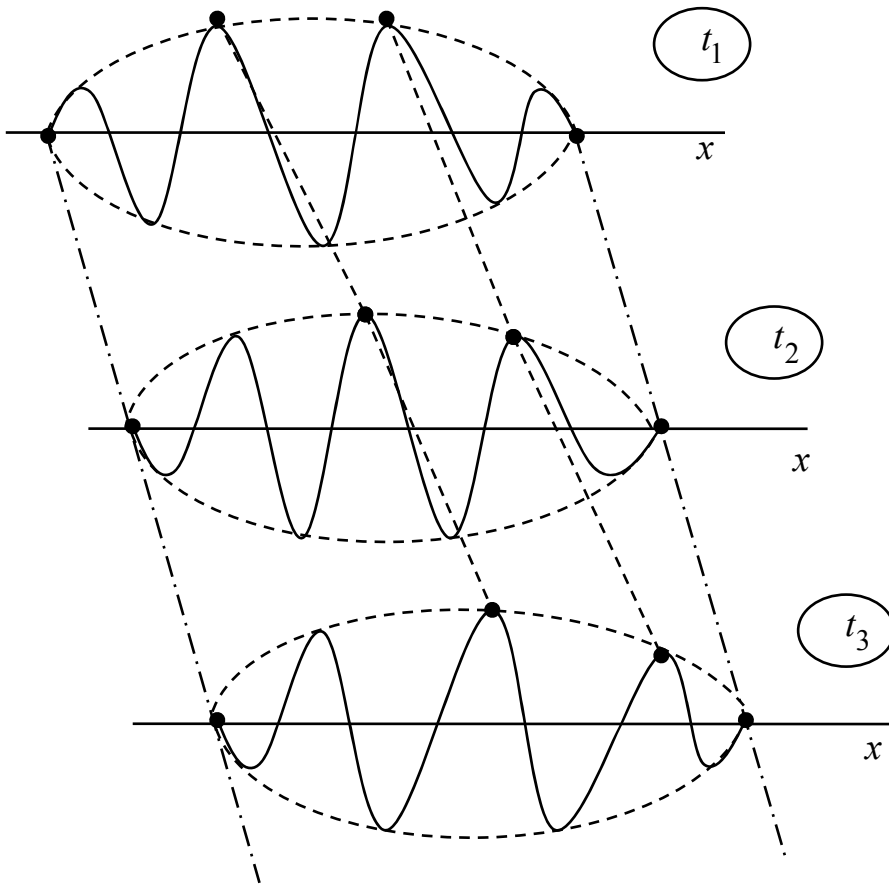


Рис. 28.4

Наклон пунктирных кривых, соединяющих точки одинаковой фазы, характеризует фазовую скорость; наклон штрихпунктирных кривых, соединяющих соответствующие точки огибающей пакета (начала и конца), характеризует групповую скорость пакета. Если при распространении сигнала в виде волнового пакета максимумы и минимумы движутся быстрее, чем огибающая, то это означает, что

фазовая скорость данной группы волн превышает ее групповую скорость (как на рис. 28.4).

Получим формулу для групповой скорости на примере волнового пакета из двух волн и с несколько отличными друг от друга частотами. Пусть уравнения этих двух монохроматических волн имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_m \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 &= \xi_m \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x).\end{aligned}$$

В результате их сложения (наложения) образуется суммарная волна

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_m \cos \frac{td\omega - xdk}{2} \cos(\omega t - kx).$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение монохроматической волны, амплитуда которой меняется по закону

$$A = \left| 2\xi_m \cos \frac{td\omega - xdk}{2} \right|. \quad (5)$$

Нас будет интересовать скорость, с которой перемещается место с максимальной амплитудой – это и будет скорость волнового пакета – групповая скорость. Из выражения (5) следует, что точки, соответствующие, например, максимуму амплитуды (значение \cos равно 1, аргумент равен нулю), движутся по закону

$$td\omega - xdk = 0,$$

откуда $x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)t$. Величина в скобках и есть групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (6)$$

Связь фазовой и групповой скоростей (без вывода):

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

В отсутствие дисперсии $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

3. Понятие о когерентности. Интерференция волн. (coherency – (англ.) согласованность). Когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов (сравните роту солдат, идущих в ногу, и толпу на базаре).

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Получим амплитуду результирующего колебания с помощью метода векторной диаграммы (рис. 28.5.)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta, \quad (7)$$

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если разность фаз δ , возбуждаемых волнами колебаний, остается постоянной во времени, то волны называются когерентными.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга.

Важный случай интерференции - возникновение стоячих волн.

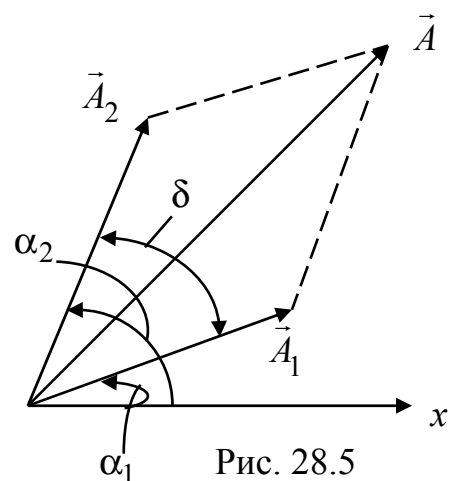


Рис. 28.5

Стоячие волны. При наложении двух встречных плоских волн одинаковой частоты с одинаковой амплитудой возникает колебательный процесс, называемый стоячей волной.

Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Полагая для простоты начальные фазы равными нулю $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и сложив уравнения, получим (воспользовавшись тригонометрической формулой суммы косинусов)

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos(kx) \cos \omega t.$$

Заметим, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, тогда

$$\xi = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t \quad (8)$$

Видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда зависит от x :

$$A(x) = \left| 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|,$$

В точках $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n \pi$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

амплитуда достигает максимального значения. Эти точки называются пучностями стоячей волны

$$x_{\text{пуч}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Точки, где амплитуда обращается в нуль, называются узлами. Их координаты найдем из условия

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Соответственно

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}$$

Стойкая волна для двух моментов времени, отличающихся на полпериода (t и $t + \frac{T}{2}$), изображена на рис. 28.6. Фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π . Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

В стоячей волне в отличие от бегущей отсутствует перенос энергии, поскольку встречные бегущие волны одинаковой амплитуды переносят равную по величине энергию в противоположных направлениях (стоячие электромагнитные волны). Возникают, например, в СВЧ-антеннах, волноводах.

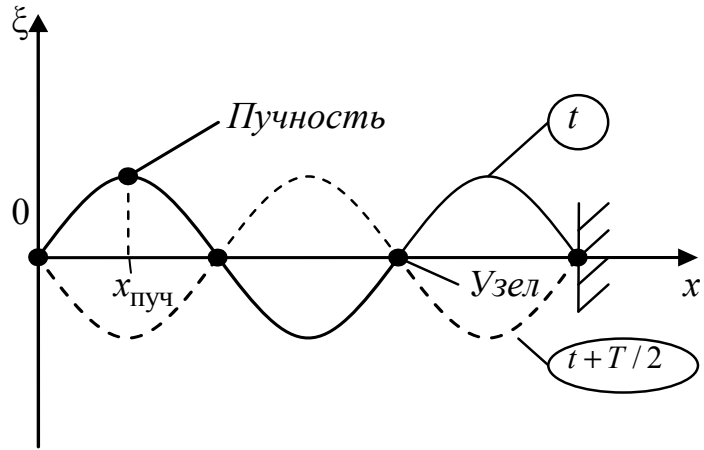


Рис. 28.6

4. Эффект Доплера для звуковых волн. Эффект Доплера – изменение частоты колебаний ω , воспринимаемой наблюдателем при движении источника колебания и наблюдателя относительно друг друга.

Если источник движется к наблюдателю, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{\upsilon}}$$

где ω - частота, воспринимаемая наблюдателем; ω_0 - частота колебаний, испускаемых источником; v – скорость движения источника; υ - скорость распространения волны. $\left(\text{При удалении источника } \omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{v}{\upsilon}} \right)$.

Если речь идет, например, о звуковых волнах, то увеличение частоты (более высокий звук) может быть объяснено бóльшим количеством горбов и впадин звуковой волны, проходящих через плоскость барабанной перепонки уха наблюдателя в единицу времени, что воспринимается как увеличение частоты.

Доплер-эффект используется, в частности, в гидро- и радиолокации для определения скоростей движения судов, самолётов, автомобилей и других объектов.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается волна от колебания? Какие волны называют продольными, какие – поперечными? Приведите примеры.
2. Напишите уравнение плоской волны и соответствующее волновое уравнение.
3. Какие волны называют гармоническими? Охарактеризуйте следующие параметры гармонической волны: амплитуда, длина волны, частота, волновой вектор.
4. Что такое фазовая скорость? Как фазовая скорость связана с циклической частотой и волновым числом?
5. Что называется волновым пакетом и групповой скоростью?
6. Что называется когерентностью? Какие волны называют когерентными?
7. Выведите уравнение стоячей волны, рассматривая наложение двух встречных плоских волн с одинаковыми амплитудами. Что такое узлы, пучности?
8. В чем заключается эффект Доплера?

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

План

1. Дифференциальное уравнение колебаний в контуре Томсона и его решение.
2. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение. Частота и коэффициент затухания электромагнитных колебаний. Логарифмический декремент затухания и добротность колебательного контура.
3. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение. Амплитуда и фаза электромагнитных колебаний. Резонанс в колебательном контуре.
4. Переменный ток.

К читателю! Изучая электромагнитные колебания, обратите внимание на единство колебательной природы различных, внешне непохожих механических и электромагнитных колебаний.

1. Дифференциальное уравнение колебаний в контуре Томсона и его решение. В цепи, содержащей индуктивность и емкость, могут возникать электрические колебания (колебания заряда и напряжения на конденсаторе, колебания силы тока в контуре).

Рассмотрим колебания в идеализированном контуре, не обладающем активным сопротивлением, – контуре Томсона (рис. 29.1).

Колебания в контуре можно вызвать, например, сообщив обкладкам конденсатора C некоторый начальный заряд, присоединив отключенный от индуктивности L конденсатор к источнику напряжения (на рис. 29.1 он не показан). Если отключить источник напряжения и замкнуть на индуктивность конденсатор, то он начнет разряжаться и в контуре потечет ток I .

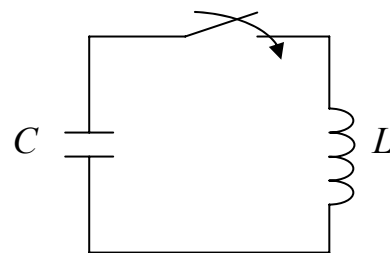


Рис. 29.1

Получим уравнение колебаний заряда в контуре. Запишем второй закон Кирхгофа (напомним его формулировку: «Алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом

контуре»). Напряжение в контуре – это напряжение на конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$, а ЭДС – ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$, где q – заряд на конденсаторе в некоторый момент времени, а $\frac{dI}{dt}$ – производная тока по времени. Тогда

$$U_C = \varepsilon_s ,$$

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} .$$

Перенесем член из правой части уравнения в левую

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 .$$

Разделим уравнение на L

$$\frac{dI}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 . \quad (1)$$

Обозначим $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ и учтем, что $I = \frac{dq}{dt}$, а $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, тогда уравнение

(1) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2)$$

Получим дифференциальное уравнение гармонических незатухающих колебаний, решение которого

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3)$$

Частота ω_0 называется собственной частотой колебательного контура

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} .$$

Выразив собственную круговую частоту ω_0 через период $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, получим формулу для периода колебаний в колебательном контуре без активного сопротивления

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона.

Напряжение на конденсаторе получим, разделив выражение (3) на емкость C :

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

Обозначим $\frac{q_m}{C} = U_m$ (амплитуда напряжения), тогда

$$U_C = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4)$$

Сила тока в контуре $I = \frac{dq}{dt}$. Дифференцируя (3), получим

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

или

$$I = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ - амплитуда силы тока в контуре.

Из сравнения выражений (5) и (4) следует, что ток в контуре опережает напряжение на конденсаторе по фазе на $\pi/2$.

2. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение. Частота и коэффициент затухания электромагнитных колебаний. Логарифмический декремент затухания и добротность колебательного контура. Рассмотрим колебательный контур с активным сопротивлением (рис. 29.2).

Второй закон Кирхгофа с учетом напряжения на активном сопротивлении

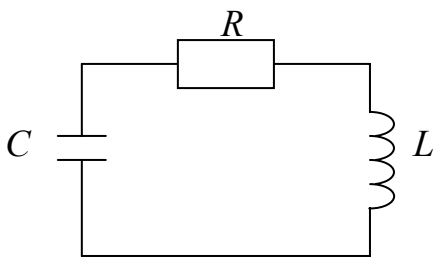


Рис. 29.2

$$U_C + U_R = \varepsilon_s \quad .$$

Подставляя $U_C = \frac{q}{C}$, $U_R = IR$, $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$,

получим

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Разделив левую и правую части на L и перенося

член из правой части в левую, получим:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Обозначая $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, $\frac{R}{L} = 2\beta$, где $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания, а

также учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$, уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

Это дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний.

При условии $\beta^2 < \omega_0^2$ (т.е. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$) решение имеет вид

$$q = q_{m_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ - частота затухающих электромагнитных колебаний; $q_{m_0} e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний; α - начальная фаза.

Поделив (6) на C , получим выражение напряжения на конденсаторе

$$U = U_{m_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (7)$$

График, соответствующий функции (7), показан на рис. 29.3.

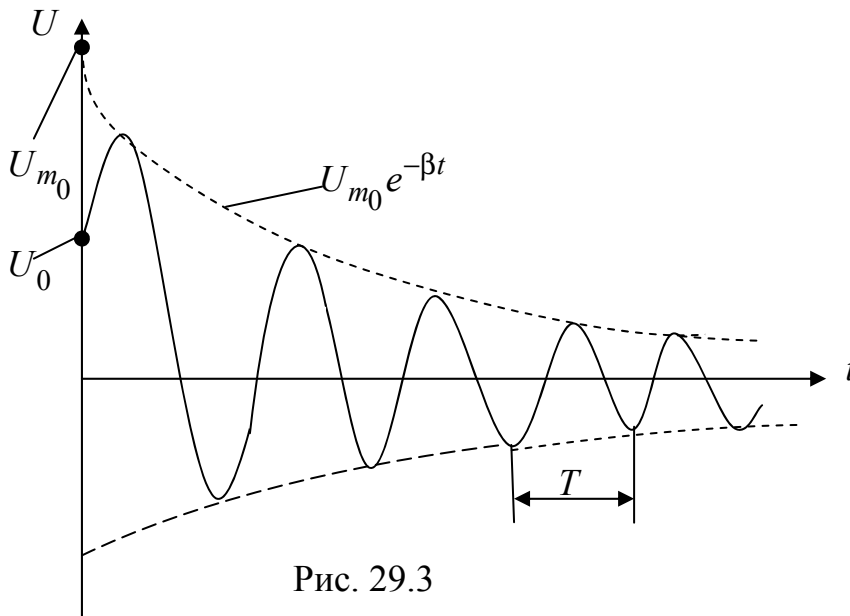


Рис. 29.3

$U_{m_0} e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний напряжения; T - период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Логарифмический декремент затухания определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период.

$$\left[\lambda = \ln \frac{U(t)}{U(t+T)} = \ln \frac{U_{m_0} e^{-\beta t}}{U_{m_0} e^{-\beta(t+T)}} = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega} \right] \quad (8)$$

Добротность Q колебательного контура пропорциональна числу колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз и по определению $Q = \frac{\pi}{\lambda}$.

Подставляя в это выражение значение λ , получили

$$\left[Q = \frac{\pi L \omega}{\pi R} = \frac{L \omega}{R} \right].$$

Из приведенных формул для λ и Q видно, что затухание пропорционально R и обратно пропорционально L и ω .

Нетрудно показать, что коэффициент затухания обратен времени τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, $\beta = \frac{1}{\tau}$. Это время называется временем релаксации.

3. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение. Амплитуда и фаза электромагнитных колебаний. Резонанс в колебательном контуре. Разорвем контур на рис. 29.2 и на образовавшиеся контакты включим источник переменного гармонического напряжения $U = U_m \cos \omega t$ (рис. 29.4).

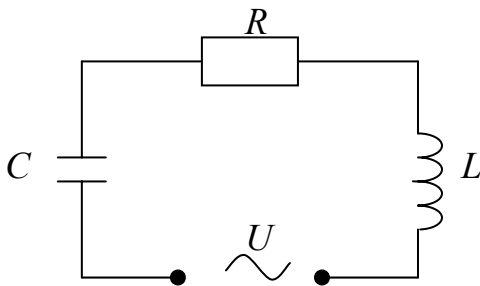


Рис. 29.4

Включение такого напряжения эквивалентно включению в контур гармонической ЭДС. Второй закон Кирхгофа запишется в виде (см. п. 2)

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (8)$$

Проделав преобразования, аналогичные преобразованиям п. 2, получим дифференциальное уравнение вынужденных

электромагнитных колебаний (для заряда q)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi) \quad (9)$$

где q_m - амплитуда заряда на конденсаторе; ψ - разность фаз между колебаниями заряда и внешним напряжением U .

Продифференцируем (9), получим выражение для тока в контуре

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } I_m = \omega q_m,$$

итак $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

где $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением.

Тангенс угла сдвига (без вывода, см. далее в п. 4 рис. 29.7).

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Из этой формулы следует, что ток отстает по фазе от напряжения, когда $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ (индуктивный характер нагрузки), ($\varphi > 0$), и опережает напряжение ($\varphi < 0$) при $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ (емкостной характер нагрузки).

Амплитуда силы тока (без вывода)

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (10)$$

Резонанс в колебательном контуре. Зависимость $I_m(\omega)$ приводит к тому, что при некоторой частоте значение I_m достигает максимума (резонанс). Из формулы (10) следует, что максимум I_m будет при минимальном значении знаменателя, т.е. при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$. Следовательно резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0 . Резонансные кривые $I_m(\omega)$ показаны на рис. 29.5. При $\omega = 0$ $I_m = 0$ (при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может). Максимум при резонансе оказывается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$. Заметим, что резонансные частоты для амплитуд напряжений* на отдельных элементах колебательного контура U_{R_m} , U_{C_m} и U_{L_m} отличаются друг от друга и соответственно равны (без вывода, вывод см. [8])

$$\begin{aligned} \omega_{R_{\text{рез}}} &= \omega_0, \\ \omega_{C_{\text{рез}}} &= \omega_0 \sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2}, \end{aligned}$$

* В сокращенном варианте эту часть п. 3 можно пропустить.

$$\omega_{Lрез} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2}}$$

Чем меньше β , тем ближе резонансные частоты к ω_0 .

Распределение амплитуд напряжений U_{Rm} , U_{Cm} и U_{Lm} в зависимости от частоты ω показано на рис. 29.6.

Явление резонанса в случае электромагнитных колебаний – это возбуждение сильных колебаний при частоте внешнего напряжения, равной или близкой к собственной частоте колебательного контура.

Резонанс используют для выделения из сложного напряжения нужной составляющей.

Чтобы радиоприемник настроить на интересующую нас радиостанцию, необходимо изменением C и L добиться совпадения его собственной частоты с частотой электромагнитных волн, излучаемых радиостанцией.

С явлением резонанса связана и определенная опасность: внешнее напряжение может быть мало, однако напряжения на емкости или индуктивности могут достигать опасного для жизни значения.

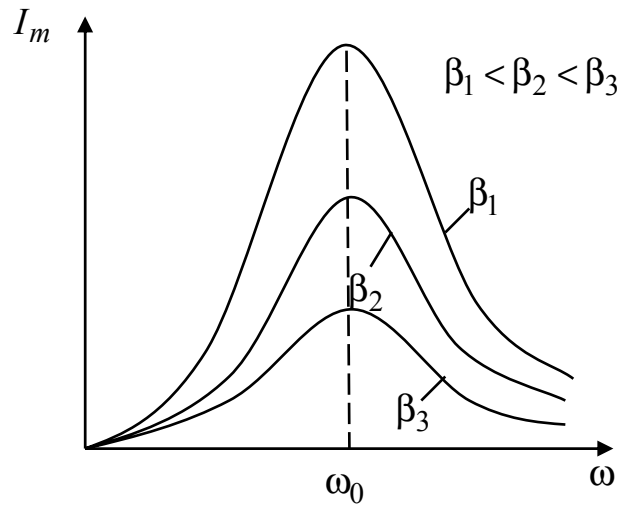


Рис. 29.5

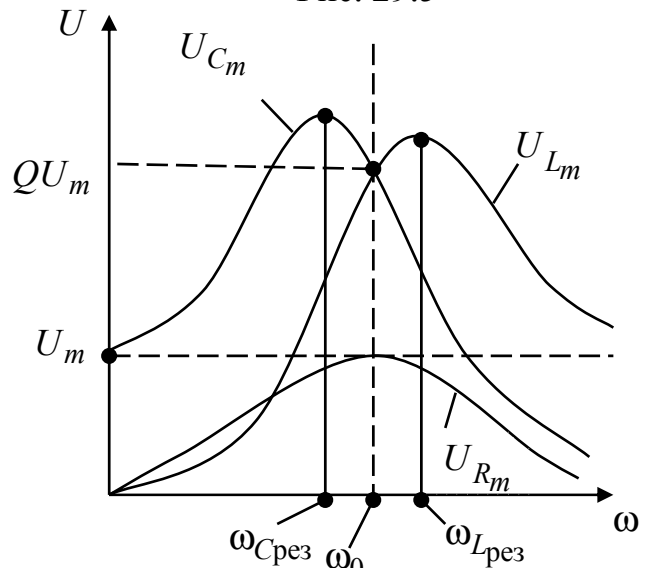


Рис. 29.6

4. Переменный ток. Вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, индуктивность и емкость переменного тока.

Переменный ток можно считать квазистационарным, т.е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как электромагнитное возмущение распространяется по цепи со скоростью, равной скорости света. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются уравнения Кирхгофа и Ома.

Выражение для амплитуды силы тока $I_m(\omega)$ (10) формально можно толковать как закон Ома для амплитудных значений тока и напряжения. Стоящую в знаменателе величину обозначают буквой z

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

и называют полным сопротивлением, или импедансом. Величину, стоящую в круглых скобках, обозначают x

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

и называют реактивным сопротивлением. Величину $x_L = \omega L$ называют

индуктивным сопротивлением, а величину $x_C = \frac{1}{\omega C}$ - емкостным сопро-

тивлением, R - активным сопротивлением. Отметим, что индуктивное сопротивление растет с увеличением частоты, а емкостное - уменьшается. Между активным и реактивным сопротивлениями имеется принципиальное различие. Только в активном сопротивлении электромагнитная энергия преобразуется в джоулеву теплоту.

Вернемся к уравнению (8) для колебательного контура, включающего R , L , C и источник переменного гармонического напряжения (см. рис. 29.4).

Это уравнение можно записать в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t$$

или

$$U_L + U_R + U_C = U_m \cos \omega t,$$

где слева записана сумма напряжений на индуктивности $U_L = L \frac{dI}{dt}$, активном сопротивлении $U_R = RI$ и емкости $U_C = \frac{q}{C}$. Учитывая соотношения

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad I_m = \omega q_m, \quad \varphi = \psi - \frac{\pi}{2} \quad (\text{пп. 1, 2, 3}), \text{ запишем}$$

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m \cos(\omega t - \psi)}{C} = \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega LI_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Из последних трех формул видно, что U_R находится в фазе с током I , U_C отстает по фазе от I на $\frac{\pi}{2}$, а U_L опережает I на $\frac{\pi}{2}$. Все это можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы, изобразив амплитуды напряжений $U_{Rm} = RI_m$, $U_{Cm} = I_m / \omega C$, $U_{Lm} = \omega LI_m$ и их векторную сумму, равную вектору величины U_m (рис. 29.7). (Поскольку U_L и U_C в противофазе, сначала находим разность $U_{Lm} - U_{Cm}$ и вектор этой разности складываем векторно с U_{Rm}).

Из прямоугольного треугольника (треугольника напряжений) этой диаграммы легко получить ранее представленное выражение в п. 3 для тангенса разности фаз φ между током I и приложенным напряжением U .

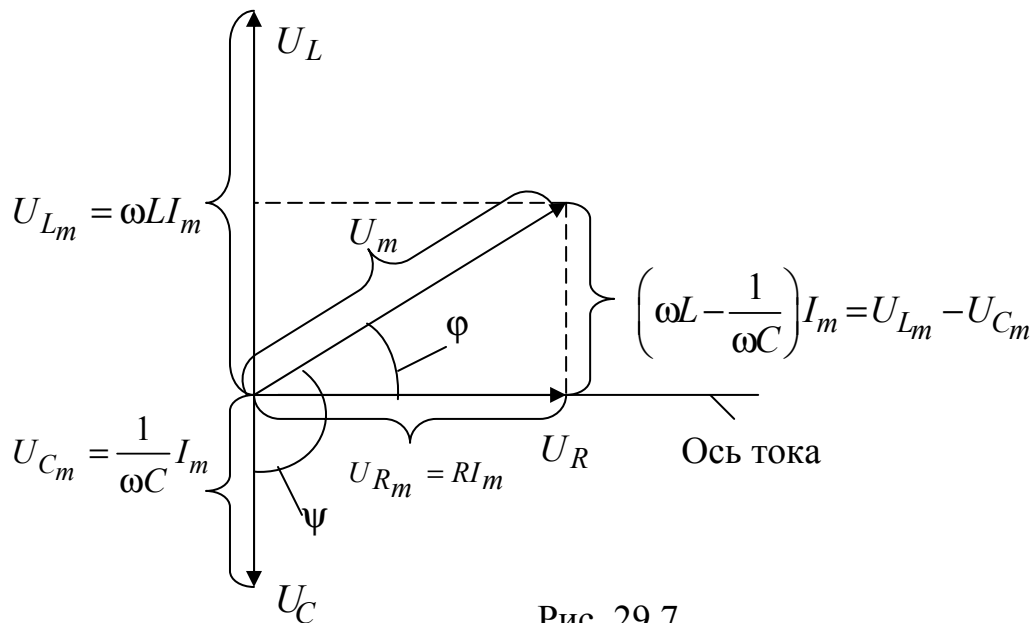


Рис. 29.7

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Векторная диаграмма достаточно наглядна и полезна при решении многих конкретных задач.

Вопросы для самоконтроля

1. Выведите дифференциальное уравнение гармонических незатухающих колебаний в контуре Томсона.
2. Выведите дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний. Какие характеристики затухающих колебаний вы знаете? Каков их смысл?
3. Каким образом возникают вынужденные электромагнитные колебания? Напишите формулу тангенса угла сдвига по фазе между током и приложенным напряжением.
4. Напишите формулы для полного, индуктивного и емкостного сопротивлений.
5. Как построить векторную диаграмму и треугольник напряжений?
6. В чем, по-вашему, состоит единство колебательной природы механических и электромагнитных колебаний?

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

План

1. Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции. Ток смещения.
2. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Электромагнитное поле.
3. Волновые уравнения для электромагнитного поля и их решения. Скорость распространения электромагнитных волн в средах. Основные свойства электромагнитных волн.
4. Энергия и поток энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга.
5. Излучение диполя. Диаграмма направленности.

1. Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции. Ток смещения. Из закона электромагнитной индукции Фарадея следует

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt,$$

где ε_i - ЭДС электромагнитной индукции; $d\Phi/dt$ - скорость изменения магнитного потока. В фарадеевской трактовке при изменении магнитного потока, пронизывающего некоторый проводящий контур, в нем возникают ЭДС и индукционный ток. Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве электрического поля независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля. Электростатическое поле потенциально, его силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах. Электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем, вихревое, его силовые линии замкнуты.

В 1865 г. Максвелл высказал гипотезу о том, что изменение электрического поля должно вызывать образование магнитного поля. В дальнейшем эта гипотеза нашла экспериментальное подтверждение.

Переменное электрическое поле, которое может создавать переменное магнитное поле, Максвелл назвал током смещения. (В смысле эквивалентности току проводимости в отношении способности создавать магнитное поле).

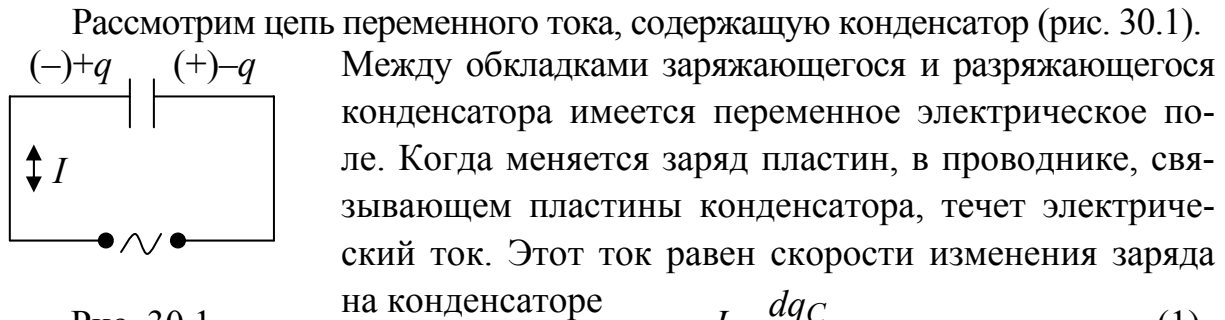


Рис. 30.1

Между обкладками заряжающегося и разряжающегося конденсатора имеется переменное электрическое поле. Когда меняется заряд пластин, в проводнике, связывающем пластины конденсатора, течет электрический ток. Этот ток равен скорости изменения заряда на конденсаторе

$$I = \frac{dq_C}{dt}. \quad (1)$$

Как известно, $q_C = CU_C$ (C - емкость конденсатора; U_C - напряжение на нем), $C = \epsilon\epsilon_0 S/l$ (здесь, кроме известных обозначений, l - расстояние между пластинами конденсатора).

Напряжение на конденсаторе U_C можно представить как произведение напряженности электрического поля внутри конденсатора на расстояние между пластинами, т.е. $U_C = El$, подставляя в (1), получим

$$I = \frac{dq_C}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_C) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon\epsilon_0 S E l}{l}\right) = S d(\epsilon\epsilon_0 E) / dt.$$

Выражение в скобках $\epsilon\epsilon_0 E = D$ – электрическое смещение, т.е.

$$I = S \frac{dD}{dt}.$$

Разделим обе части на S , тогда в левой части будет плотность тока $j = \frac{I}{S}$, а в правой $\frac{dD}{dt}$, т.е. $j = \frac{dD}{dt}$. Так как в общем случае \vec{D} может иметь производные и по координатам, запишем j через частную производную по времени $j = \frac{\partial D}{\partial t}$ или в векторной форме

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Эта величина получила название плотности тока смещения. Ток смещения находится интегрированием.

$$I_{\text{смещ}} = \int_S \vec{j}_{\text{смещ}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (2)$$

При этом еще раз отметим, что никакого тока между пластинами конденсатора нет, а есть переменное электрическое поле. Название «ток смещения» является условным, исторически сложившимся (так назвал Максвелл).

По Максвеллу переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существует ток, равный току в проводящих проводах.

На рис. 30.2 в качестве примера показан случай разрядки конденсатора через проводник, соединяющий обкладки. Ток течет от левой обкладки к правой через соединяющий проводник, поле в конденсаторе ослабляется, вектор \vec{D} убывает со временем; следовательно, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$, т.е. вектор $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ направлен противоположно вектору \vec{D} , а вектор $\vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ имеет такое направление, что как бы «продолжает» направление тока в подводящих проводах.

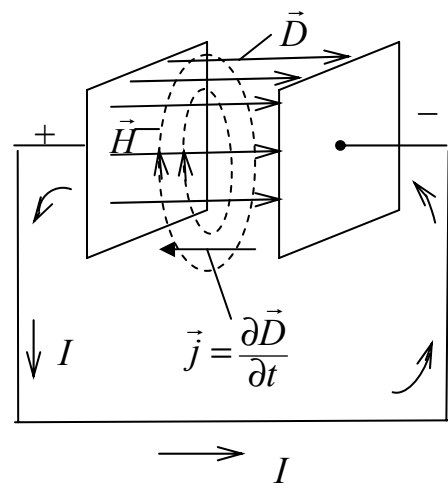


Рис. 30.2

Максвелл ввел понятие полного тока, равного сумме токов проводимости и смещения. Плотность полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3)$$

2. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Электромагнитное поле. В законе электромагнитной индукции (ЭМИ) $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ ЭДС можно представить по определению как циркуляцию поля сторонних сил $\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$ (см. ч. 3, лекция № 20), в данном случае (ЭМИ) сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами, они также не могут быть магнитными силами, потому что, например, магнитная сила Лоренца на неподвижные заряды не

действует. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем, тогда ЭДС $\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}d\vec{l}$.

Магнитный поток по определению $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$. Подставляя в закон ЭМИ,

получим

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}d\vec{S} \quad (4)$$

Это первое уравнение Максвелла.

Интеграл в правой части берется по произвольной поверхности S , опирающейся на контур l (рис. 30.3). (Поскольку в общем случае \vec{B} может быть функцией и координат, то берем частную производную $\frac{\partial}{\partial t}$).

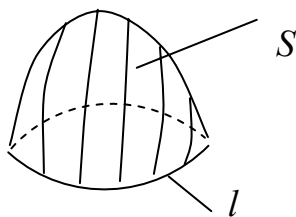


Рис. 30.3

Смысл первого уравнения соответствует максвелловской трактовке явления ЭМИ, т.е. изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

Это уравнение выражает тот факт, что силовые линии магнитного поля не имеют источника (нет «магнитных зарядов») и всегда замкнуты и, что оно имеет вихревой характер, поток вектора магнитной индукции равен нулю.

Третье уравнение Максвелла

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I_{\text{пр}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}d\vec{S} \quad (6)$$

Это обобщенный закон полного тока (см. ч. 3, лекция № 24), который подчеркивает тот факт, что магнитное поле может создаваться не только токами проводимости ($I_{\text{пр}}$), но и переменным электрическим полем («ток смещения» $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}d\vec{S}$).

Четвертое уравнение Максвелла – теорема Гаусса (см. ч. 3, лекция № 18).

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{своб}} \quad (7)$$

Физически это уравнение подчеркивает тот факт, что электрическое поле может создаваться зарядами, т.е. источниками силовых линий электрического поля являются электрические заряды.

Уравнения (4, 5, 6, 7) представляют уравнения Максвелла в интегральной форме.

Уравнения Максвелла подчеркивают тот факт, что электрическое поле может создаваться как зарядами, так и переменным магнитным полем, а магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и переменным электрическим полем. При этом магнитное поле всегда носит вихревой характер, о чем говорит второе уравнение Максвелла. Электрические поля, создаваемые зарядами и переменным магнитным полем, носят различный характер. Силовые линии в первом случае начинаются и кончаются на зарядах (четвертое уравнение Максвелла). А электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем, не имеет источников и носит вихревой характер так же, как магнитное поле (первое уравнение Максвелла).

В вакууме, где нет зарядов и токов, магнитное поле может создаваться только переменным электрическим полем, а электрическое поле - только переменным магнитным полем.

Эту совокупность непрерывно изменяющихся и порождающих друг друга электрического и магнитного полей Максвелл назвал электромагнитным полем.

Кроме четырех рассмотренных уравнений в полную систему уравнений Максвелла входят еще три уравнения, называемых материальными. В них входят характеристики вещества («материи»), такие как диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ и μ , проводимость σ .

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{Связь } \vec{D} \text{ и } \vec{E} \text{ (лекция № 18, ч. 3).}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad \text{Связь } \vec{B} \text{ и } \vec{H} \text{ (лекция № 24, ч. 3).}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{Закон Ома в локальной форме (лекция № 20, ч. 3).}$$

Уравнения Максвелла (4) - (7) можно представить в дифференциальной форме, т.е. в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого используем теоремы Стокса

$$\oint_l \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S} \quad (8)$$

и Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV \quad (9)$$

где \vec{a} - некоторый вектор, в нашем случае \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{D} . (О функции $\text{rot} \vec{a}$ см. примечание к концу пункта).

Первое уравнение Максвелла

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

С другой стороны, используя теорему Стокса, получим

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}.$$

Поскольку равны левые части, равны и правые

$$\int_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S},$$

откуда следует

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

Второе уравнение Максвелла

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

С другой стороны, из теоремы Остроградского – Гаусса

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV,$$

получаем

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (11)$$

Третье уравнение запишем, предварительно выразив токи проводимости через плотность токов проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$:

$$I_{\text{пр}} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S},$$

тогда
$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

с другой стороны,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S},$$

получим

$$\boxed{\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (12)$$

Аналогичный подход для четвертого уравнения дает систему уравнений

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{D} dV, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{cases}$$

(в последнем уравнении мы заменили $\sum q_{\text{своб}} = \int_V \rho dV$, где ρ - объемная плотность заряда), из системы следует

$$\boxed{\text{div} \vec{D} = \rho} \quad (13)$$

Сведем четыре уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах, а также три материальных уравнения в таблицу.

Интегральная форма	Дифференциальная форма
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}$ $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$ $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\text{div} \vec{D} = \rho$
<i>Материальные уравнения</i>	
$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E};$	$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H};$
	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Отметим, что физический смысл уравнений в дифференциальной форме такой же, что и соответствующих уравнений в интегральной форме. Ин-

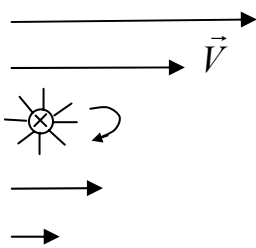
тегрируя уравнения в дифференциальной форме, можно получить $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$.

Примечание. Вихревое электрическое поле характеризуется особой векторной величиной, называемой ротором напряженности поля: $\text{rot}\vec{E}$. Вектор ротора приложен в центре поля перпендикулярно плоскости его силовых линий (в случае круговых линий – в центре окружностей) и направлен относительно них согласно правилу правого винта.

По определению

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Наглядное представление о роторе вектора можно получить, если условно рассмотреть небольшую легкую турбинку, помещенную в данную точку текущей жидкости.



В тех местах, где ротор скорости жидкости \vec{V} отличен от нуля, турбина будет вращаться (рис. 30.4), причем с тем большей скоростью, чем больше проекция ротора \vec{V} на ось турбинки. (Аналогично $\text{rot}\vec{E}$ определяется $\text{rot}\vec{H}$).

Рис. 30.4

3. Волновые уравнения для электромагнитного поля и их решения. Скорость распространения электромагнитных волн в средах. Основные свойства электромагнитных волн. Пусть имеется однородная и изотропная среда вдали от зарядов и токов. Возбудим в какой-либо точке пространства переменное электрическое гармоническое поле $E_y(t)$. (Предположим, $E_x = H_x = 0$. Для простоты рассматриваем этот частный случай).

Из уравнений Максвелла при условии сделанных предположений можно получить волновые уравнения электромагнитного поля

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (14)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}}$ - скорость распространения электромагнитной

ВОЛНЫ.

Процесс распространения электромагнитного поля в пространстве называется электромагнитной волной.

Подставим $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ в выражение для скорости v . Если среда – вакуум, то $\epsilon = 1, \mu = 1$, тогда получим $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, т.е. скорость электромагнитной волны в вакууме равна скорости света в вакууме. Это обстоятельство приводит к выводу, что свет – электромагнитная волна. Решения уравнений (14)

$$\begin{cases} E_y = E_m \sin(\omega t - kx), \\ H_z = H_m \sin(\omega t - kx). \end{cases} \quad (15)$$

Выражения (15) – уравнения электромагнитной волны. Их графическое представление показано на рис. 30.5. Электромагнитная волна является поперечной волной, т.е. колебания векторов \vec{E} и \vec{H} происходят перпендикулярно направлению распространения волны. Векторы \vec{E} и \vec{H} достигают максимума одновременно, но колеблются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

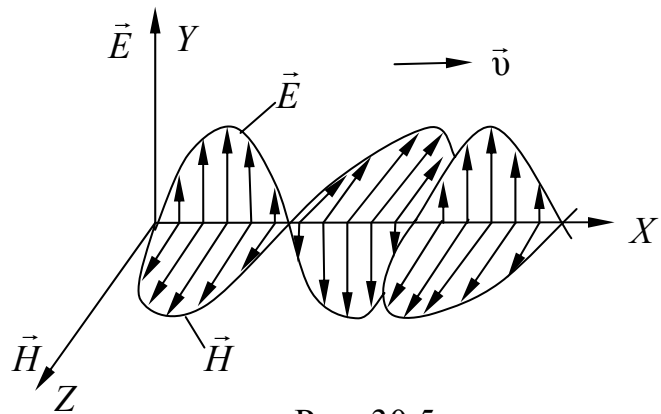


Рис. 30.5

Как показывает опыт, электромагнитные волны проходят через диэлектрики и отражаются от металлов. Для них свойственны такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия (рассмотрим далее в разделе «Оптика»).

Итак, из решения уравнений Максвелла получаются следующие выводы:

- если в какой-либо ограниченной области пространства возникает электромагнитное поле, то оно не остается локализованным в этой области, а распространяется с конечной скоростью, зависящей от свойств среды;
- если электрическое и магнитное поля меняются по простому гармоническому закону, то электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде плоской электромагнитной волны.

4. Энергия и поток энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Поскольку и электрическое, и магнитное поля обладают определенной энергией, то электромагнитная волна имеет определенный запас энер-

гии. Объемная плотность энергии электрического поля $w_э = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$, магнитного поля $w_M = \mu\mu_0 H^2/2$. Можно показать, что вследствие равноценности электрического и магнитного полей $w_э = w_M$ т.е.

$$\epsilon\epsilon_0 E^2/2 = \mu\mu_0 H^2/2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получим

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (16)$$

Существенно то, что электрическое и магнитное поля колеблются в одинаковых фазах. Они одновременно достигают максимума и минимума, но в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Плотность энергии электромагнитного поля складывается из составляющих

$$w = w_э + w_M = \epsilon\epsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2.$$

Представляя $\epsilon\epsilon_0 E^2/2$ как $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E/2$ и $\mu\mu_0 H^2/2$ как $\sqrt{\mu\mu_0} H \sqrt{\mu\mu_0} H/2$, получим $w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E/2 + \sqrt{\mu\mu_0} H \sqrt{\mu\mu_0} H/2$. Умножим и разделим первое слагаемое на $\sqrt{\mu\mu_0} H$, а второе на $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E$, $w = \sqrt{\mu\mu_0} H \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E/2\sqrt{\mu\mu_0} H + \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E \sqrt{\mu\mu_0} H \sqrt{\mu\mu_0} H/2\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E$. Учитывая равенство (16), производим необходимые сокращения и в результате получим

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} E H.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}} = v$ - скорость распространения электромагнитной

волны [см. (14)], то $w = (1/v) E H$. Умножив найденное выражение для w на скорость волны v , получим модуль вектора плотности потока энергии $S = wv = E H$. Векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение \vec{E} и \vec{H} , так как направление вектора $[\vec{E} \times \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен $E H$. Таким образом

$$\boxed{\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]} \quad (17)$$

Вектор \vec{S} называется вектором Пойнтинга (или вектором Умова - Пойнтинга). Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено русским ученым Умовым в 1874 г. Поэтому вектор потока энергии без конкретизации ее физической природы называется вектором Умова. Пойнтингом было получено выражение (17).

Физический смысл вектора Пойнтинга: плотность потока электромагнитной энергии, распространяющейся вместе с волной, - это количество энергии, проходящей за единицу времени через единицу площади воображаемой площадки, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны (рис. 30.6).

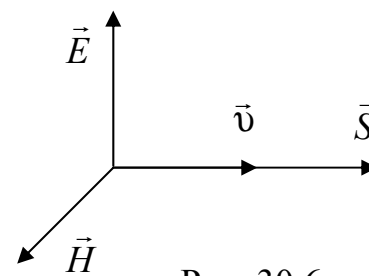


Рис. 30.6

5. Излучение диполя. Диаграмма направленности. Простейшим излучателем электромагнитных волн является электрический диполь, электрический момент которого изменяется во времени по гармоническому закону $\vec{p} = \vec{p}_m \cos \omega t$, где \vec{p}_m - амплитуда вектора \vec{p} . Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося заряда $+Q$ и отрицательного заряда $-Q$, гармонически колеблющегося вдоль направления \vec{p} с частотой ω .

Задача об излучении диполя имеет в теории излучающих систем важное значение, так как реальную излучающую систему (например антенну) можно рассчитывать, рассматривая в некотором приближении как излучение диполя. Кроме того, многие вопросы взаимодействия излучения с веществом можно объяснить на основе классической теории, рассматривая атомы как системы зарядов, в которых электроны совершают гармонические колебания около их положения равновесия, т.е. как диполи с переменным электрическим моментом.

Характер электромагнитного поля диполя зависит от выбора рассматриваемой точки. Особый интерес представляет так называемая волновая зона диполя - точки пространства, отстоящие от диполя на расстоянии r , значительно превышающем длину волны ($r \gg \lambda$), так как в ней картина электромагнитного поля диполя сильно упрощается. Это связано с тем, что в волновой зоне диполя практически остаются только «отпочковавшиеся» от диполя, свободно распространяющиеся поля, в то время как поля, колеблющиеся вместе с диполем и имеющие более сложную структуру, сосредоточены в области расстояний $r \ll \lambda$. (Заметим, что в этой области справедливы те же формулы, что и для постоянных электрического и магнитного полей).

В волновой зоне векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды этих векторов зависят от расстояния r до излучателя и угла ϑ между направлением радиус-вектора и осью диполя и пропорциональны $\frac{1}{r} \sin\vartheta$. Отсюда следует, что интенсивность излучения диполя в волновой зоне

$$I \sim \sin^2 \vartheta / r^2.$$

Зависимость I от ϑ при заданном значении r , приводимая в полярных координатах, называется диаграммой направленности излучения диполя (рис. 30.7).

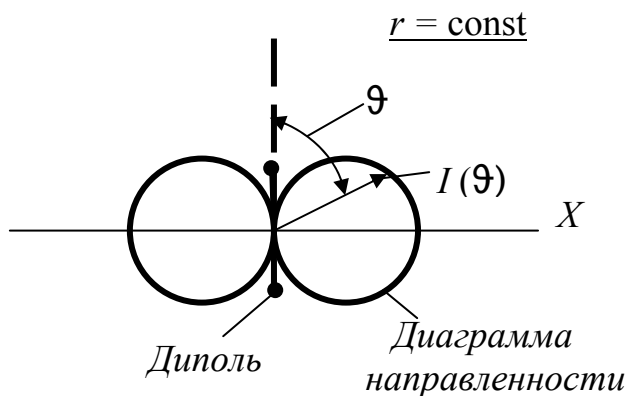


Рис. 30.7

Диполь сильнее всего излучает в направлениях, перпендикулярных его оси, где $\vartheta = \pi/2$ (ось X). Вдоль своей оси ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) диполь не излучает вообще.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции?
2. Что называется током смещения?
3. Напишите систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. В чем состоит физический смысл каждого уравнения?
4. Напишите волновые уравнения для электромагнитного поля и их решения.
5. Перечислите основные свойства электромагнитных волн.
6. Что называется вектором Пойнтинга? Каков его физический смысл?
7. Нарисуйте диаграмму направленности излучения диполя.

ОПТИКА

Лекция № 31

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

План

1. Электромагнитная природа света. Принцип Гюйгенса. Абсолютный показатель преломления. Законы отражения и преломления. Относительный показатель преломления.
2. Полное внутреннее отражение. Световоды.
3. Геометрическая оптика как предельный случай волновой оптики.

1. Электромагнитная природа света. Свет с волновой точки зрения - электромагнитная волна. С одной стороны светового диапазона шкалы электромагнитных волн – рентгеновское излучение (за ультрафиолетовой областью), с другой стороны – микроволновое (СВЧ) излучение (за инфракрасной областью). Что же касается видимого света, то это достаточно узкий интервал длин электромагнитных волн, заключенных примерно между 400 и 800 нм. Они действуют непосредственно на человеческий глаз и вследствие этого указанный интервал играет особую роль для человека.

Принцип Гюйгенса устанавливает способ построения фронта волны в момент $t + \Delta t$ по известному положению в момент t (рис. 31.1).

Каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент времени. Принцип Гюйгенса позволяет достаточно просто в ряде случаев построить волновые фронты и определить направление распространения волн при отражении, преломлении и т.п. (Мы будем использовать этот принцип при изучении темы «Поляризация света»).

Абсолютный показатель преломления. Законы отражения и преломления. Линии, вдоль которых распространяется световая энергия, называются лучами. В изотропных средах направление распространения

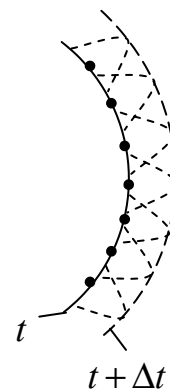


Рис. 31.1

световой энергии совпадает с направлением волнового вектора \vec{k} . (Напомним, что вектор $\vec{k} = k\vec{n}$ равен по модулю волновому числу $k = 2\pi/\lambda$ и имеет направление по нормали к волновой поверхности).

При падении плоской световой волны \vec{k} на на плоскую границу раздела двух однородных и изотропных диэлектриков (рис. 31.2) кроме распространяющейся во втором диэлектрике плоской преломленной волны \vec{k}'' возникает плоская отраженная волна, распространяющаяся в первом диэлектрике \vec{k}' ; \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности раздела. Плоскость, в которой лежат векторы \vec{k} и \vec{n} , называется плоскостью падения волны.

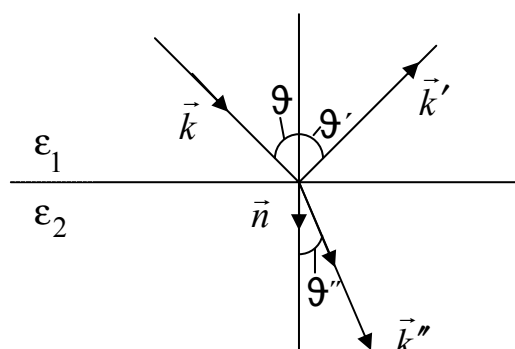


Рис. 31.2

Энергия, которую несет с собой падающий луч, распределяется между отраженным и преломленным лучами. На рис. 31.2 θ , θ' и θ'' - углы падения, отражения и преломления световой волны. Отношение скорости световой волны в вакууме c к фазовой скорости v в некоторой среде называется **абсолютным показателем преломления** этой среды и обозначается n .

$$n = c / v$$

Так как $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}}$ (см. лекцию № 30), а для вакуума $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ и

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \text{ то } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \text{ откуда } n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Для прозрачных веществ можно считать $\mu \approx 1$, тогда

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

Закон отражения света: отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; угол отражения равен углу падения

$$\theta = \theta'$$

Закон преломления: преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью, восстановленной в точке падения; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных веществ и равная отношению показателя преломления второй среды к показателю преломления первой среды

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{n_2}{n_1}$$

Заметим, что отношение абсолютных показателей преломления второй среды к первой называется **относительным показателем преломления** второй среды относительно первой

$$\frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Замечание. Законы отражения и преломления вытекают из так называемого принципа Ферма (французский ученый, XVII век; не путать с теоремой Ферма). Он представляет в геометрической оптике аксиому, именуемую принципом кратчайшего оптического пути (или минимального времени распространения) – утверждение, что луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, вдоль которого время его прохождения меньше, чем вдоль любого из других путей, соединяющих эти точки.

2. Полное внутреннее отражение. Световоды. При переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_1 > n_2$) преломленный луч удаляется от нормали к поверхности раздела сред. Увеличение ϑ сопровождается более быстрым ростом угла преломления ϑ'' и по достижении угла ϑ значения

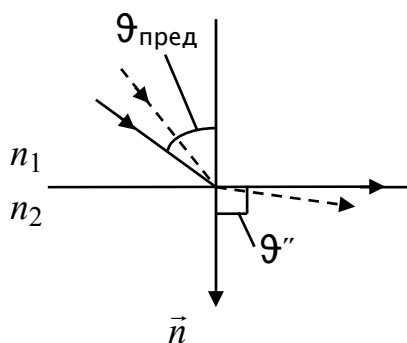


Рис. 31.3

$$\vartheta_{\text{пред}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

угол ϑ'' ставится равным $\pi / 2$. Угол, определяемый (1), называется предельным углом (рис. 31.3).

При углах падения, заключенных в пределах от $\vartheta_{\text{пред}}$ до $\pi / 2$, световая волна

проникает во вторую среду на расстояние порядка длины волны λ и затем возвращаются в первую среду. Это явление называется полным внутренним отражением.

Световоды. Явление полного внутреннего отражения используется в световодах, представляющих собой тонкие нити (волокна) из оптически прозрачного материала. Оптическое волокно состоит из сердцевины и оболочки. Свет, падающий на торец световода (рис. 31.4) под углами α к оси световода, меньше некоторого критического $\alpha_{кр}$, при которых углы ϑ на

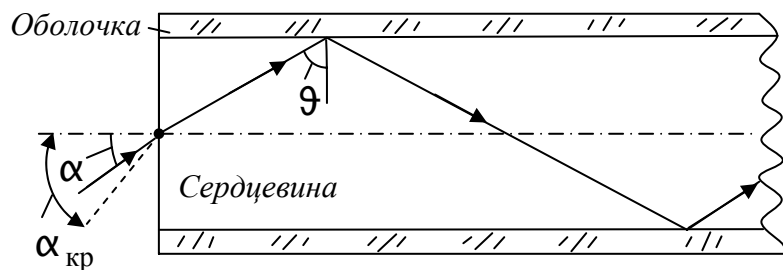


Рис. 31.4

границе сердцевина - оболочка больше предельного, претерпевает на границе раздела сердцевины и оболочки полное отражение и распространяется только по световедущей жиле (сердцевине).

С помощью световодов можно произвольным образом искривлять путь светового пучка. Для передачи изображений применяются, как правило, многожильные световоды. Вопросы передачи световых волн и изображений изучаются в специальном разделе оптики – волоконной оптике.

Световоды применяются, прежде всего, в волоконно-оптических линиях связи.

Примечание. В чем преимущество оптического диапазона по сравнению с радиодиапазоном?

При передаче информации модулированными электромагнитными колебаниями необходимо, чтобы частота модуляции была в 10 – 100 раз меньше несущей частоты. Кроме того, частоты модуляции занимают некоторую полосу частот. Так, для передачи музыкальной программы нужна полоса от 10 Гц до 10 кГц. Поэтому несущая частота не может быть меньше 10^5 Гц. Для передачи одного телевизионного канала требуется полоса частот около 10^7 Гц. Так что для передачи телевизионного изображения нужна несущая частота приблизительно 10^8 Гц. Частота видимого излучения около 10^{15} Гц, поэтому информационная емкость канала связи может быть многократно увеличена. По оптическому кабелю можно вести одновременно десятки тысяч телефонных разговоров, передавать сотни телевизионных программ (теоретически до 10^{13} телефонных разговоров или 10^8

телевизионных программ [9], реально, конечно, много меньше, но все равно эти цифры впечатляют).

4. *Геометрическая оптика как предельный случай волновой оптики.* Распространение света представляет в общем случае волновой процесс. Однако, в частности, в вопросах образования изображения решение можно получить более простым путем с помощью представлений геометрической оптики, в которой распространение света рассматривается на основе представления о световых лучах.

Реально невозможно получить световой луч как прямую линию вследствие явления дифракции. Например, угловое расширение реального светового пучка, пропущенного через диафрагму (отверстие) диаметром D , определяется углом дифракции $\varphi \approx \lambda / D$. Однако угловое отклонение, нарушающее прямолинейность распространения света в однородной среде, может быть весьма мало, если размеры отверстия (или препятствия) велики по сравнению с длиной волны λ ($\lambda \ll D$).

При пользовании законами лучевой оптики нельзя забывать, что они лишь первое приближение к действительности и что без дифракционных явлений не обходится ни один случай распространения света.

Соответствующие оценки влияния расстояния l от освещаемого объекта до экрана при данных λ и D дают соотношение выполнения приближения геометрической оптики [3]

$$\boxed{\frac{D^2}{\lambda l} \gg 1} \quad (2)$$

Примечание. Реальные оптические системы дают удовлетворительное изображение только при определенном ограничении ширины пучков лучей. Любая оптическая система – глаз, фотоаппарат и тому подобное – в конечном счете рисует изображение практически на плоскости (сетчатка глаза, фотопленка и т. п.), объекты же в большинстве случаев трехмерны. Чем уже пучки, тем отчетливее изображение предмета на плоскости. Наличие ограничивающих диафрагм, роль которых может играть, например, оправка линзы, объектива, существенно для всякого оптического инструмента: от величины и положения диафрагм зависит отчетливость изображения. Но при этом должно выполняться соотношение (2).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется абсолютным, относительным показателями преломления?
2. Сформулируйте законы отражения и преломления.
3. В чем заключается явление полного внутреннего отражения?
4. Как устроен световод? Его применение.
5. При каких условиях можно использовать приближение геометрической оптики?

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

План

1. Интерференция света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Временная когерентность. Время и длина когерентности.
2. Пространственная когерентность. Радиус когерентности.
3. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников.
4. Полосы равной толщины и равного наклона.

1. Интерференция света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Временная когерентность. Время и длина когерентности. Интерференция света – пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении когерентных световых волн.

Когерентностью называется согласованное протекание двух или нескольких колебательных или волновых процессов (см. лекцию № 28, п. 3).

Монохроматическое излучение (от греч. *monos* – один, единый и *chroma* – цвет) – электромагнитное излучение одной определенной и строго постоянной частоты. Происхождение термина связано с тем, что различие в частоте световых волн воспринимается человеком как различие в цвете. Отметим, что излучаемый реальным источником свет не может быть строго монохроматичным.

Различают временную и пространственную когерентность.

Временная когерентность характеризует сохранение взаимной когерентности при временном отставании одного из лучей по отношению к другому. Мерой когерентности служит время когерентности $\tau_{\text{ког}}$ – максимально возможное время отставания одного луча по отношению к другому, при котором их взаимная когерентность еще сохраняется.

В идеализированном случае рассматривают интерференцию строго монохроматических волн с постоянной разностью фаз. Однако такие волны бесконечны в пространстве, времени и не существуют в природе. Поэтому интерференция монохроматических волн является лишь первым приближением в изучении интерференции волн от реальных источников.

Выясним роль немонохроматичности волн во временной когерентности.

При рассмотрении интерференции близкий к монохроматическому реальный свет можно представить как набор монохроматических составляющих – волн в интервале частот от ω до $\omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – достаточно малая величина. Пусть волны, соответствующие крайним значениям спектрального интервала (ω ; $\omega + \Delta\omega$), вызывают в данной точке пространства

(например на экране) колебания $A_1 \cos \omega t$ и $A_2 \cos (\omega + \Delta\omega)t$ (начальные фазы для простоты полагаем равными нулю). Если разность фаз составляющих (компонент) крайних частот в этой точке равна π , то это означает, что на «горб» от одной составляющей наложится «впадина» от другой крайней компоненты ($\omega + \Delta\omega$). Интерференционная картина «смажется». Наглядно представить ситуацию можно следующим образом. Наложите ладонь одной руки на ладонь другой, палец на палец, а теперь сместите одну из ладоней на ширину одного пальца, картина интенсивности сгладится.

(Замечание. Рассмотрение промежуточных по частоте компонент между ω и $\omega + \Delta\omega$ не изменит качественной картины).

Итак, время, за которое разность фаз компонент световой волны с верхней и нижней частотой составит порядка π , и будет временем когерентности. Разность фаз этих колебаний $\Delta\varphi = \Delta\omega t$. Время когерентности определится из соотношения $\Delta\omega t_{\text{ког}} \approx \pi$. Так как $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$, то $2\pi\Delta\nu t_{\text{ког}} \approx \pi$. Отсюда $t_{\text{ког}} \approx 1/2\Delta\nu$, пренебрегая в наших оценках «двойкой», получим

$$t_{\text{ког}} \approx \frac{1}{\Delta\nu}$$

От частоты перейдем к длине волны $\nu = c / \lambda$. Продифференцируем последнее выражение: $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ и заменим знак дифференциала d на Δ , полагая изменение λ конечным, но достаточно малым.

$$\text{Модуль } |\Delta\nu| = \left| -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \right| = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Соответственно время когерентности

$$t_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda} \quad (1)$$

где $\Delta\lambda$ – ширина интервала длин интерферирующих волн; чем меньше интервал $\Delta\lambda$, тем больше время когерентности.

Можно сказать, что в тех случаях, когда время фиксирования интерференционной картины $t_{\text{приб}}$ много больше времени когерентности накладываемых волн ($t_{\text{приб}} \gg t_{\text{ког}}$), прибор не зафиксирует интерференции. Если же $t_{\text{приб}} \ll t_{\text{ког}}$, прибор обнаружит четкую интерференционную картину.

Расстояние, на которое перемещается волна за время когерентности, называется длиной когерентности

$$l_{\text{ког}} \approx ct_{\text{ког}}$$

Подставляя (1) в последнюю формулу, получим

$$l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (2)$$

Таким образом, временная когерентность связана со степенью монохроматичности света, которая характеризуется отношением $\lambda / \Delta\lambda$. Чем больше $\lambda / \Delta\lambda$, тем больше и степень монохроматичности, тем больше время и длина когерентности. (О практической роли $l_{\text{ког}}$ далее в п. 4).

2. Пространственная когерентность. Радиус когерентности. Пространственная когерентность волны характеризует наличие взаимной когерентности двух световых лучей, взятых из различных точек по сечению волны.

Мерой пространственной когерентности служит радиус когерентности – наибольший радиус круга, мысленно вырезаемый в поперечном сечении волны, при котором любые два луча, исходящие из различных точек внутри этого круга, еще остаются взаимокogerентными.

Если размеры источника значительно меньше длины световой волны, то всегда получается резкая интерференционная картина (лучи идут, по существу, из одной точки).

В случае источника конечных размеров получаем, по существу, наложение многих интерференционных картин, создаваемых многими парами когерентных источников.

Можно смоделировать излучение от двух участков источника. Закрываем источник света конечных размеров перегородкой с двумя небольшими отверстиями (рис. 32.1). Если оставить одно из отверстий в фиксированном положении, а другое отверстие передвигать, то можно заметить понижение контрастности полос до их практически полного размыва. Пусть расстояние между отверстиями ρ . Рассмотрим излучение в направлении угла φ (волновые векторы \vec{k} и \vec{k}'). Разность хода волн $\Delta = \rho \sin\varphi$. В случае малого угла φ можно заменить $\sin\varphi$ на φ , тогда $\Delta = \rho\varphi$. Соответствующая этой разности хода разность фаз лучей \vec{k} и \vec{k}'

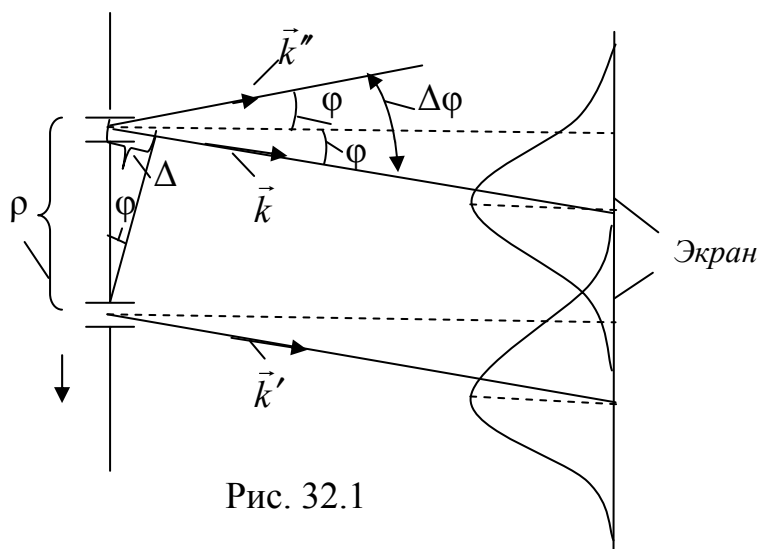


Рис. 32.1

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \rho\varphi.$$

При разности фаз $\approx \pi$ максимумы наложатся на минимумы, интерференционная картина будет размытой, неразличимой. (Заметим, что при малых ρ максимумы наложатся на максимумы, минимумы - на минимумы, картина будет контрастной).

Исходя из вышесказанного, приравняем $\frac{2\pi}{\lambda} \rho\varphi \approx \pi$. Максимальный

угол φ в одну сторону $\varphi = \frac{\lambda}{2\rho}$. Учитывая излучение от одной щели по обе

стороны от нормали к щели (\vec{k} и \vec{k}''), получим $\Delta\varphi = 2\varphi = 2\lambda/2\rho = \lambda/\rho$. Согласно данному в начале пункта определению радиуса когерентности из последнего соотношения получаем радиус когерентности

$$\rho_{\text{ког}} \approx \lambda/\Delta\varphi \quad (3)$$

Соотношение (3) является ограничением размеров источника.

Пример. Имеется некоторый светящийся предмет размером d (рис. 32.2),

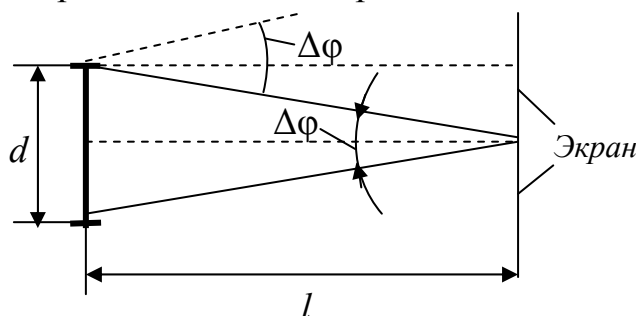


Рис. 32.2

длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, радиус когерентности $\rho = 1$ мм, расстояние до экрана 1 м. Оценить размеры предмета.

Решение

Из рисунка видно, что размеры предмета в силу достаточно большого расстояния

l можно оценить как $d \approx l \Delta\varphi$. Из соотношения (3) $\Delta\varphi \approx \lambda/\rho$, тогда

$$d \approx \frac{\lambda l}{\rho} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{1 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ мм.}$$

То есть размеры предмета должны быть меньше 0,5 мм. Если размеры больше, то для получения интерференционной картины нужно ставить диафрагму.

3. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Произведение геометрической длины пути l световой волны в среде на абсо-

лутный показатель преломления n называется оптической длиной пути (ОДП) L . Для однородной среды $L = n l$, а для неоднородной $L = \int n dl$.

Пусть некоторый источник света S испускает волны в двух направлениях (рис. 32.3). Первый луч проходит через среду с показателем преломления n_1 расстояние l_1 , а второй - через среду с n_2 расстояние l_2 , а остальной путь по обоим направлениям одинаков.

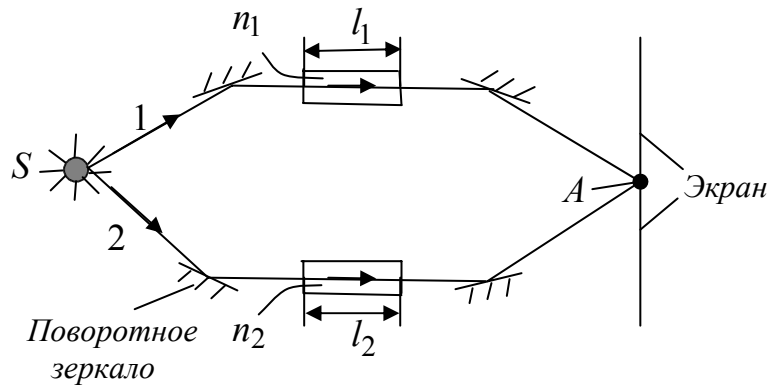


Рис. 32.3

Величина $\Delta = L_2 - L_1 = n_2 l_2 - n_1 l_1$ называется оптической разностью хода интерферирующих волн. Если на оптической разности хода укладывается четное число полуволен $2m \frac{\lambda}{2}$ (целое число длин волн $m\lambda$), т. е.

$$\Delta = m\lambda \quad (4)$$

то колебания, возбужденные в данной точке экрана A обеими волнами, будут приходить в точку A в одинаковой фазе и максимально усилят друг друга (условие (4) – условие максимума интерференции).

Если же на длине Δ укладывается нечетное число полуволен

$$\Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

то колебания будут происходить в противофазе, световые волны в данной точке максимально ослабят друг друга (условие (5) – условие min).

4. Полосы равной толщины и равного наклона. Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от верхней и нижней границ тонкой воздушной прослойки, образованной поверхностями соприкасающихся друг с другом толстой плоскопараллельной стеклянной пластинки и плосковыпуклой линзы с большим радиусом кривизны (рис. 32.4). Интерференция происходит в области, близкой к точке касания пластинки и линзы (на рис. 32.4 лучи показаны для удобства восприятия далеко в стороне от этой области).

Большой радиус кривизны линзы делает поверхности пластинки и линзы, обращенные друг к другу, практически параллельными, тем более что интерференция происходит в области, близкой к точке касания пластинки и линзы.

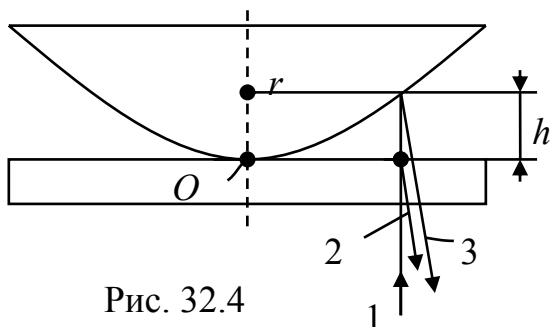


Рис. 32.4

Луч 1, падающий на поверхность прослойки, делится на два луча. Лучи 2 и 3 получаются за счёт отражения соответственно от верхней поверхности пластины и нижней поверхности линзы. Лучи 2 и 3 являются когерентными при малой толщине прослойки h (длина когерентности $l_{\text{ког}}$ должна быть

больше $2h$), поэтому при их сложении будет иметь место интерференция. Поскольку интерференция наблюдается в малой области вблизи точки касания O линзы и плоской стеклянной пластинки, поверхности линзы и пластинки здесь можно считать параллельными, а падающий и отраженный лучи (1, 2, 3) направленными вдоль одной прямой.

На радиусе r от точки касания вдоль окружности толщина прослойки h будет одинаковой, и в этом случае наблюдаются интерференционные полосы равной толщины, имеющие форму колец с центром в точке касания линзы O . Эта интерференционная картина была впервые описана в 1675 г. Ньютоном и называется кольцами Ньютона.

Из рис. 32.4 видно, что оптическая разность хода интерферирующих волн 2 и 3 $\Delta = 2hn + \lambda / 2$. Показатель преломления воздуха $n = 1$. Слагаемое $\lambda / 2$ возникает из-за того, что при отражении от оптически более плотной среды волны 3 (от стекла) оптический ход волны скачком увеличивается на $\lambda / 2$. В том месте воздушного зазора, где выполняется условие $\Delta = 2h + \lambda / 2 = m\lambda$ (условие максимума), ($m = 1, 2, \dots$), наблюдаются светлые кольца, а там, где $\Delta = 2h + \lambda / 2 = (2m + 1) \lambda / 2$ (условие минимума), ($m = 0, 1, 2, \dots$),

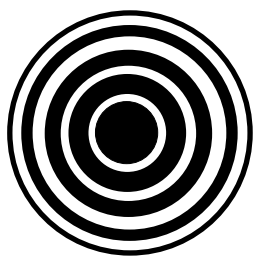


Рис. 32.5

возникают темные кольца. В месте соприкосновения линзы с плоскостью пластины толщина воздушной прослойки практически равна нулю, поэтому разность хода стремится к $\lambda / 2$, выполняется условие минимума, поэтому в центре интерференционной картины темное пятно (рис. 32.5). Интерференционные полосы имеют вид концентрических колец. Таким образом, полосы равной толщины – это интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции когерентных волн от мест с одинаковой толщиной.

от мест с одинаковой толщиной.

Полосы равного наклона – интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами.

Рассмотрим оптическую схему на рис. 32.6. Почти монохроматический свет лазера попадает на рассеивающую линзу, вмонтированную в экран. Расходящийся пучок света частично отражается от передней поверхности плоскопараллельной стеклянной пластины и попадает на экран (лучи 1 – 1'), частично преломляется в пластине и, отражаясь от задней поверхности пластины, снова преломляясь, попадает на экран (лучи 2 – 2'). Если длина

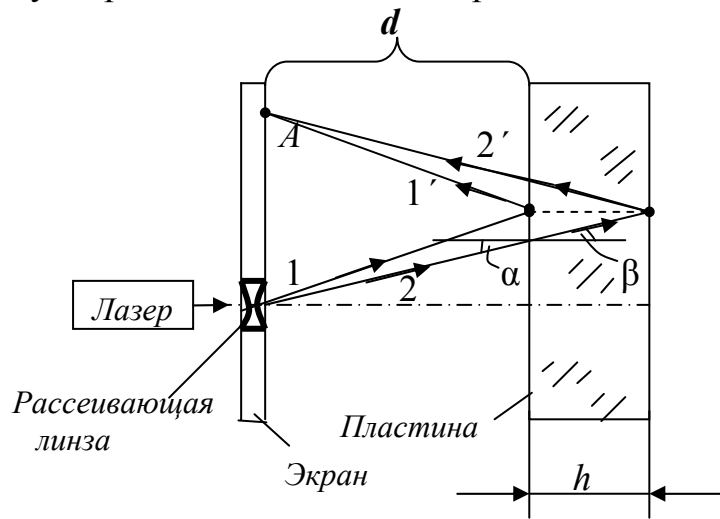


Рис. 32.6

когерентности $l_{\text{ког}} \sim 2hn$, где h – толщина пластины, а n – показатель преломления, то волны пучка, сходящиеся в некоторой точке экрана, например точке A , будут интерферировать. На схеме рис. 32.6 это волны, соответствующие лучам 1 и 2. Поскольку расходящийся от линзы пучок является коническим, то интерференционные полосы будут иметь вид окружностей. А так как интерференционные максимумы (а также минимумы) будут располагаться в местах, соответствующих одинаковому углу падения лучей (одинаковому наклону их к поверхности), то получающаяся картина называется полосами равного наклона.

Не рассматривая применения явления интерференции (см., например, [1]), упомянем её использование для измерения длин световых волн, исследования состояния поверхностей оптических приборов (сферичности, плоскопараллельности и т.п.) для просветления оптики, в интерферометрах, лазерной технике.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит явление интерференции?
2. Что такое когерентность?
3. В чем состоит временная когерентность? Каков смысл времени и длины когерентности?

4. В чем состоит пространственная когерентность? Каков смысл радиуса когерентности?
5. Что называется оптической длиной пути и оптической разностью хода?
6. Каковы условия получения интерференционных максимумов и минимумов при наложении света от двух когерентных источников?
7. Как получаются полосы равной толщины и равного наклона?

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

План

1. Дифракция света. Принцип Гюйгенса - Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. Дифракция Френеля на круглом отверстии и непрозрачном диске.
2. Дифракция Фраунгофера на одной щели.
3. Дифракция Фраунгофера на одномерной дифракционной решетке.
4. Понятие о голографии.

1. Дифракция света. Принцип Гюйгенса - Френеля. Если световая волна распространяется в пространстве, в котором имеются резкие неоднородности, например непрозрачные препятствия, отверстия в непрозрачных экранах и тому подобное, то первоначальное направление распространения света и распределение интенсивности светового потока изменяются.

Явления, связанные с непрямолинейностью распространения световых волн, огибанием волнами препятствий и проникновением в область геометрической тени, называются **дифракцией света**.

Наглядно дифракция прослеживается в том случае, когда длина падающей световой волны λ сравнима с размерами D препятствий или отверстий. Однако явление дифракции можно обнаружить и при достаточно больших размерах неоднородностей, т.е. при $D \gg \lambda$, но в этом случае дифракционные явления проявляются только вблизи границ препятствий (и отверстий) в области, размеры которой сравнимы с длиной волны света, т.е. очень малой.

Точное математическое описание дифракции производится с помощью уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями и представляет очень сложную задачу.

Однако механизм распространения света и основные качественные закономерности дифракции света могут быть установлены с помощью принципа Гюйгенса - Френеля:

- каждая точка поверхности среды, до которой в данный момент времени доходит световая волна, становится источником вторичных волн;
- интенсивность света в какой-либо точке пространства, лежащей за этой поверхностью, может быть рассчитана как результат интерференции этих вторичных волн.

Дифракция Френеля и Фраунгофера. Различают два случая дифракции:

1. Дифракция сферической волны на препятствии (или отверстии), расположенном на конечном расстоянии от источника света, причем точка наблюдения находится на конечном расстоянии от препятствия. Это так называемая дифракция Френеля.
2. Дифракция плоской волны, когда источник и точка наблюдения расположены на бесконечно большом расстоянии от препятствия. В этом случае лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку наблюдения, образуют параллельные пучки. Это дифракция Фраунгофера.

Количественный критерий, позволяющий определить, какой вид дифракции будет иметь место

$$\frac{b^2}{\lambda l} \begin{cases} \ll 1 & \text{дифракция Фраунгофера} \\ \approx 1 & \text{дифракция Френеля} \\ \gg 1 & \text{геометрическая оптика} \end{cases}$$

где b – характерный размер объекта, на котором происходит дифракция (диаметр отверстия, радиус кривизны края препятствия и т.п.); l – расстояние от объекта до экрана; λ – длина волны света (рис. 33.1).

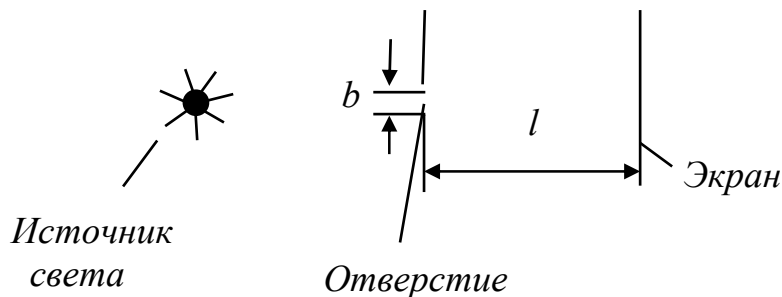


Рис. 33.1

Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. Пусть в некоторый произвольный момент времени фронт сферической волны, распространяющейся из источника S_0 , занимает положение S (рис. 33.2).

В соответствии с принципом Гюйгенса - Френеля интенсивность света в точке P определяется результатом интерференции всех вторичных волн, испущенных точками поверхности S . Для расчета результата интерферен-

ции Френель предложил мысленно разбить поверхность S на кольцевые зоны, которые и называются зонами Френеля. Они построены таким образом, чтобы расстояние от краев соседних зон до точки P отличались на $\lambda/2$. В этом случае колебания, приходящие в точку P от соответствующих частей соседних зон, будут иметь разность хода $\lambda/2$ и находиться в противофазе.

Пронумеруем зоны Френеля, начиная от центральной, индексом m ($m = 1, 2, \dots$) и обозначим амплитуду колебания, возбуждаемого в точке P m -й зоной, A_m . Можно показать, что площади

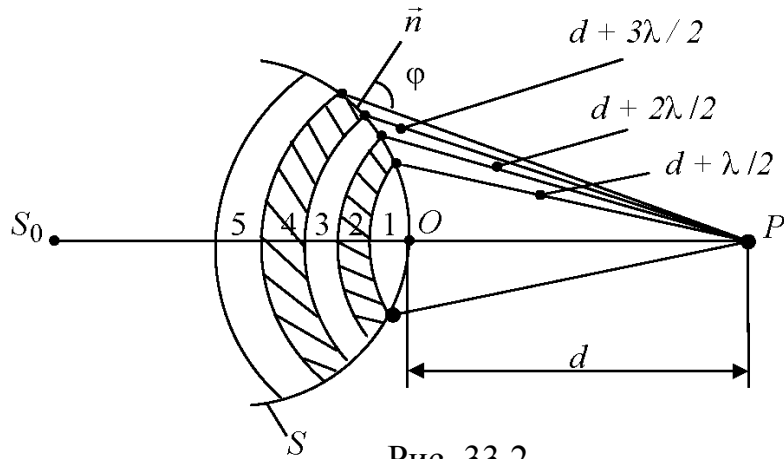


Рис. 33.2

зон Френеля примерно одинаковы [3]. Расстояние от зоны до точки P медленно растет с номером зоны m . Угол ϕ между нормалью \vec{n} к элементам зоны и направлением на точку P также растет с m . Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебания, возбуждаемого m -й зоной в точке P , монотонно убывает, т. е. $A_1 > A_2 > A_3 \dots > A_m > A_{m+1}$. Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на π . Поэтому амплитуда A результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (1)$$

Запишем выражение (1) в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (2)$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно приближенно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобках (2) будут равны нулю, и формула упрощается (число зон достаточно велико, а амплитуда последней зоны ничтожно мала по сравнению с амплитудой первой зоны)

$$A = \frac{A_1}{2}$$

Таким образом, амплитуда, создаваемая в некоторой точке P всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой лишь одной центральной зоной. Так как величина зоны 1 мала (мала длина волны), то, с точки зрения наблюдателя, в точке P свет распространяется от источника S_0 (см. рис. 33.2) к точке P в виде узкого прямолинейного пучка.

Колебания от четных и нечетных зон Френеля находятся в противофазе и, следовательно, взаимно ослабляют друг друга.

Если поставить на пути световой волны пластину, которая перекрывала бы четные или нечетные зоны, то интенсивность волн в точке P резко возрастет (зонная пластинка).

Дифракция Френеля на круглом отверстии. Пусть сферическая волна исходит из источника S_0 , а круглое отверстие оставляет открытым m зон Френеля (рис. 33.3).

Амплитуда колебания в точке P : $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m$, где A_m берется со знаком «плюс», если m – нечетное и со знаком «минус», если m – четное. Предыдущее выражение можно переписать в виде

$$A = \frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \dots \pm \frac{A_m}{2} = \frac{1}{2} A_1 \pm \frac{1}{2} A_m.$$

Если m мало, то A_1 почти не отличается от A_m . Следовательно, при нечетных m амплитуда A в точке P

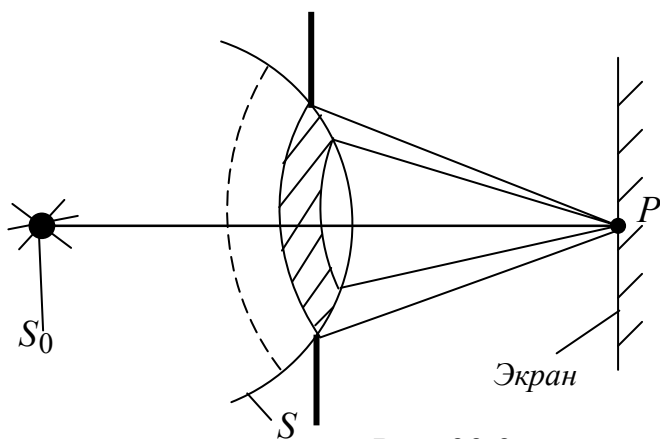


Рис. 33.3

приблизительно равна A_1 , а при четных m – практически равна нулю. При нечетном большом числе открытых зон амплитуда в точке P имеет некоторые промежуточные значения. Следует отметить, что амплитуда колебаний в точке P при небольшом нечетном числе открытых зон в

два раза, а интенсивность света в четыре раза выше, чем в отсутствие преграды (!). Полученный результат с точки зрения геометрической оптики выглядит совершенно неправдоподобно.

Дифракционная картина на экране представляет систему чередующихся темных и светлых колец.

Дифракция Френеля на круглом диске. Пусть диском закрыто m зон (рис. 33.4). Повторяя те же рассуждения, что и в пункте «Метод зон Френеля», можно получить амплитуду в точке P : $A = \frac{A_{m+1}}{2}$.

При небольшом числе закрытых зон амплитуда колебаний и соответствующая интенсивность будут почти такими же, как и при отсутствии диска. Однако даже если m достаточно велико, то амплитуда колебаний в точке P всегда отлична от нуля, т.е. центр

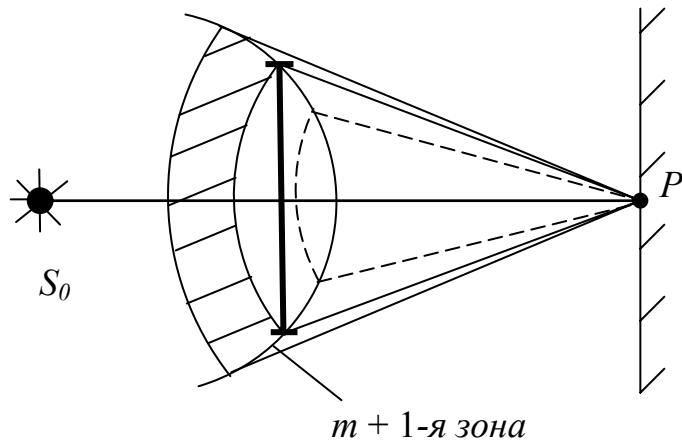


Рис. 33.4

геометрической тени диска всегда будет освещен! При любом m наблюдается светлое пятно – «пятно Пуассона». С увеличением радиуса диска интенсивность центрального максимума падает, так как уменьшается A_{m+1} .

2. Дифракция Фраунгофера на одной щели. Пусть плоская волна падает нормально на непрозрачный экран, в котором имеется бесконечно длинная узкая щель шириной b . Когда фронт волны дойдет до щели, то все ее точки станут согласно принципу Гюйгенса - Френеля источниками вторичных когерентных волн (рис. 33.5).

Падающая световая волна в точке с координатой x в элементе dx вызывает электромагнитное колебание

$$d\xi = dA \cos \omega t.$$

Амплитуда колебания, обусловленного одним таким элементом, пропорциональна его ширине dx , т.е. $dA = C dx$. Константа C определяется из условия, что в направлении, перпендикулярном щели, при $\varphi = 0$ амплитуда волны, посылаемой всей щелью, $A_0 = Cb$, отсюда $C = A_0/b$ (угол φ между нормалью к щели и некоторым произвольным направлением волны после щели). Тогда световое воз-

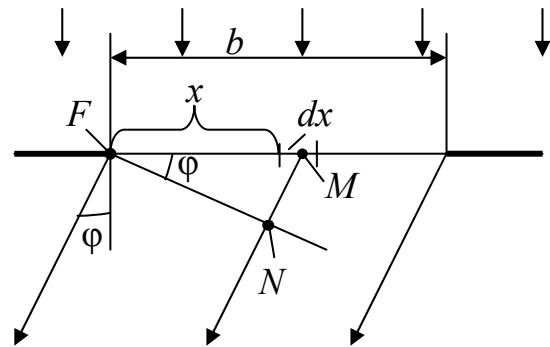


Рис. 33.5

мущение (колебание) в элементе dx $\frac{A_0}{b} dx \cos \omega t$.

Распространение колебаний в пространстве - это волна. В точку N волна от dx (точки M) приходит с запаздыванием по ходу по сравнению с волной от точки F (где фаза равна ωt , как и в точке M с координатой x) в направлении φ $MN = x \sin \varphi$.

Световая волна в точке N $d\xi = \frac{A_0}{b} dx \cos(\omega t - kx \sin \varphi)$, где $k = 2\pi / \lambda$ - волновое число; λ - длина волны.

Результирующая световая волна от всех точек щели в направлении угла φ получается интегрированием по ширине щели

$$\xi = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx.$$

Введем под знак дифференциала $(\omega t - kx \sin \varphi)$ и соответственно, чтобы не изменился результат, разделим на $(-k \sin \varphi)$.

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \int_0^b \cos(\omega t - kx \sin \varphi) d(\omega t - kx \sin \varphi) = -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \sin(\omega t - kx \sin \varphi) \Big|_0^b = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} [\sin(\omega t - kb \sin \varphi) - \sin(\omega t)]. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой разности синусов

$$(\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}), \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-A_0}{bk \sin \varphi} 2 \sin \frac{\omega t - kb \sin \varphi - \omega t}{2} \cos \frac{\omega t - kb \sin \varphi + \omega t}{2} = \frac{-A_0}{bk \sin \varphi} 2 \sin \left(\frac{-kb \sin \varphi}{2} \right) \times \\ &\times \cos \left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя вместо k его значение $2\pi / \lambda$, учтем, что функция \sin нечетная, получим

$$\xi = \underbrace{\left[\frac{A_0}{(\pi b / \lambda) \sin \varphi} \sin((\pi b / \lambda) \sin \varphi) \right]}_{A_\varphi} \cos(\omega t - (\pi b / \lambda) \sin \varphi).$$

Амплитуда световой волны, идущей в направлении φ

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin[(\pi b / \lambda) \sin \varphi]}{(\pi b / \lambda) \sin \varphi}$$

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то интенсивность света под углом φ

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \varphi \right)}{\left(\left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \varphi \right)^2} \quad (3)$$

где I_0 – интенсивность света в направлении $\varphi = 0$ ($I_0 \sim A_0^2$).

A_{φ} (соответственно I_{φ}) обращается в нуль для углов $\left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \varphi = \pi n$

(где $n = 1, 2, 3 \dots$), т.е. для $\sin \varphi = \frac{n\lambda}{b}$ или $b \sin \varphi = n\lambda$ (4)

Получили условие минимумов интенсивности для дифракции на щели (4). Картина распределения интенсивности световой волны I_{φ} в зависимости

от $\sin \varphi$ представлена на рис. 33.6. На экране за щелью образуется ряд чередующихся светлых и темных полос с максимальной по интенсивности светлой полосой в центре.

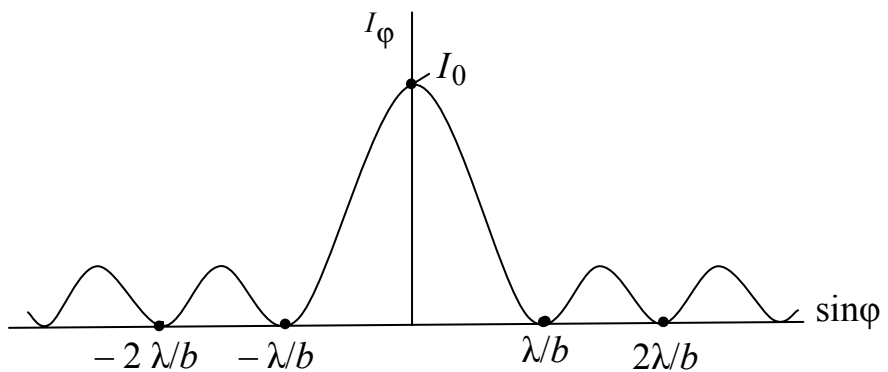


Рис. 33.6

3. Дифракция Фраунгофера на одномерной дифракционной решетке.

Дифракционная решетка представляет собой ряд параллельных щелей одинаковой шириной b , разделенных между собой непрозрачными промежутками шириной a . Сумма $a + b = d$ называется периодом, или постоянной дифракционной решетки (рис. 33.7).

Рассмотрим дифракцию плоской световой волны, падающей нормально на поверхность решетки (рис. 33.7). Поскольку световые волны от каждой щели являются когерентными, необходимо принимать во внимание их взаимную интерференцию от N щелей (многолучевую интерференцию).

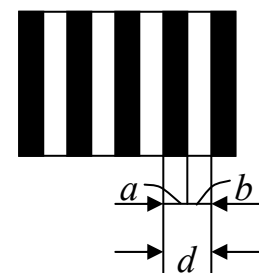
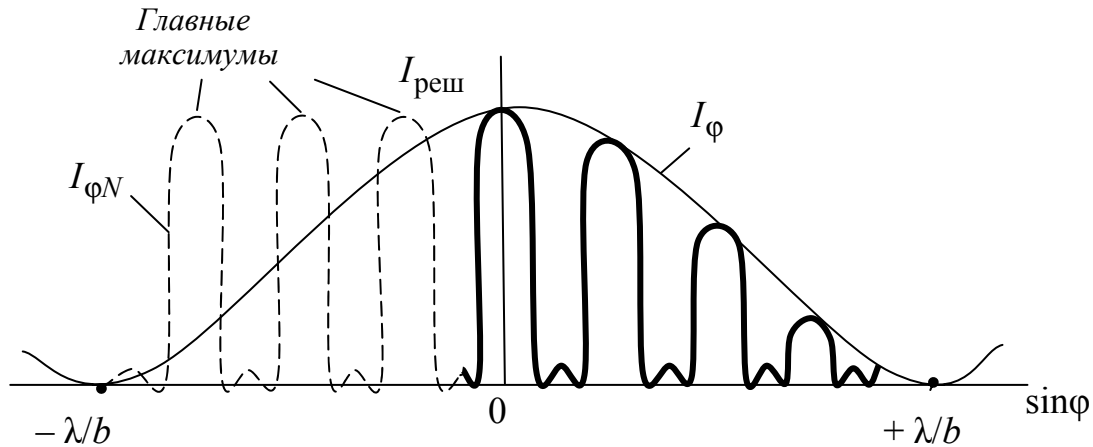
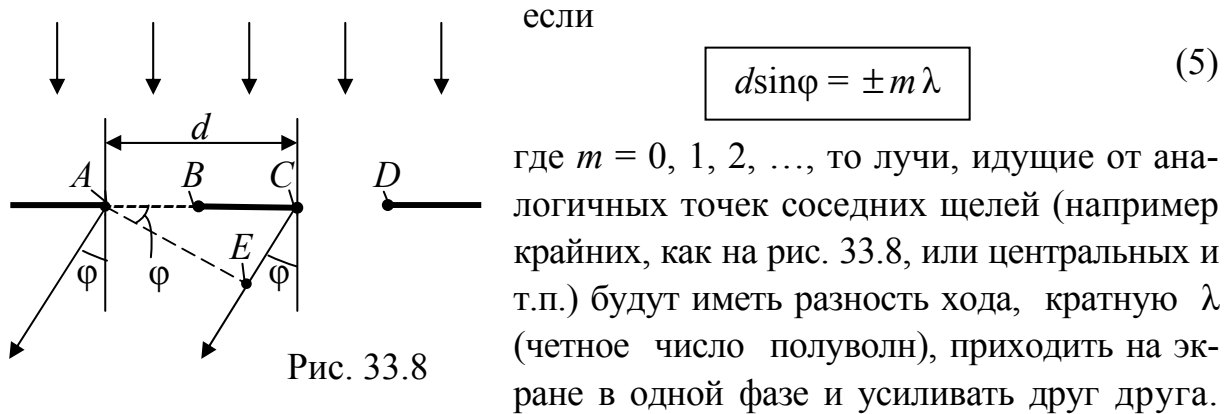


Рис. 33.7

На рис. 33.8 для наглядности показаны только соседние щели AB и CD . Так как щели находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, то разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления φ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки: $\Delta = CE = d \sin \varphi$ (из прямоугольного треугольника ACE). И



В направлении φ , удовлетворяющему условию (5), будут так называемые главные максимумы интенсивности (рис. 33.9). Очевидно, что минимумы интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием (4) (условие минимумов для одной щели $b \sin \varphi = \pm n \lambda$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)) (главные минимумы).

Отметим, что кроме главных минимумов имеются дополнительные минимумы из условия $d \sin \varphi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Количество этих минимумов зависит от количества щелей в дифракционной решетке (для двух щелей – один, для трех – два и т. д.). Так как модуль $\sin \varphi$ не может быть больше единицы, то из условия (5) следует, что число главных максимумов $m \leq d/\lambda$.

Распределение интенсивности света на экране за дифракционной решеткой $I_{\text{реш}}$ (без вывода)

$$I_{\text{реш}} = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2((\pi b / \lambda) \sin \varphi)}{((\pi b / \lambda) \sin \varphi)^2}}_{I_{\varphi}} \underbrace{\frac{\sin^2(N(\pi d / \lambda) \sin \varphi)}{\sin^2((\pi d / \lambda) \sin \varphi)}}_{I_{\varphi N}} \quad (6)$$

Согласно выражению (6) распределение интенсивности при дифракции на решетке определяется произведением двух функций: I_{φ} - распределение интенсивности (3) при дифракции на одной щели (на рис. 33.9 - сплошная линия I_{φ}) и многолучевой интерференции световых волн от всех щелей дифракционной решетки $I_{\varphi N}$ (пунктир). В результате получается распределение $I_{\text{реш}}$ в виде жирной линии на рис 33.9 (кривая интенсивности на щели I_{φ} как бы «зарезает» максимумы $I_{\varphi N}$). Дополнительные минимумы, их количество изображены условно (на рис. 33.9 два дополнительных минимума, значит, число щелей $N = 3$).

Отметим важный момент. Положение главных максимумов зависит от длины волны λ [см. (5)]. Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава света (определения длин волн и интенсивностей его компонентов), т.е. дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор.

Разрешающая сила дифракционной решетки $R = \lambda / \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно. В более подробных курсах показывается, что $R = mN$, где m – порядок спектра; N – число штрихов на дифракционной решетке. (Примечание. Кроме прозрачных дифракционных решеток есть непрозрачные – отражательные, на которых имеются продольные штрихи (аналог непрозрачной части), промежутки между штрихами отражают свет и являются аналогами прозрачных частей (щелей)).

4. Понятие о голографии (от греч. *голос* – весь, *графо* – пишу). Голография – это способ записи волнового поля и его последующего восстановления, основанный на регистрации интерференционной картины. Изобретен английским физиком Д. Габором в 1947 г. (Нобелевская премия за 1971 г.)

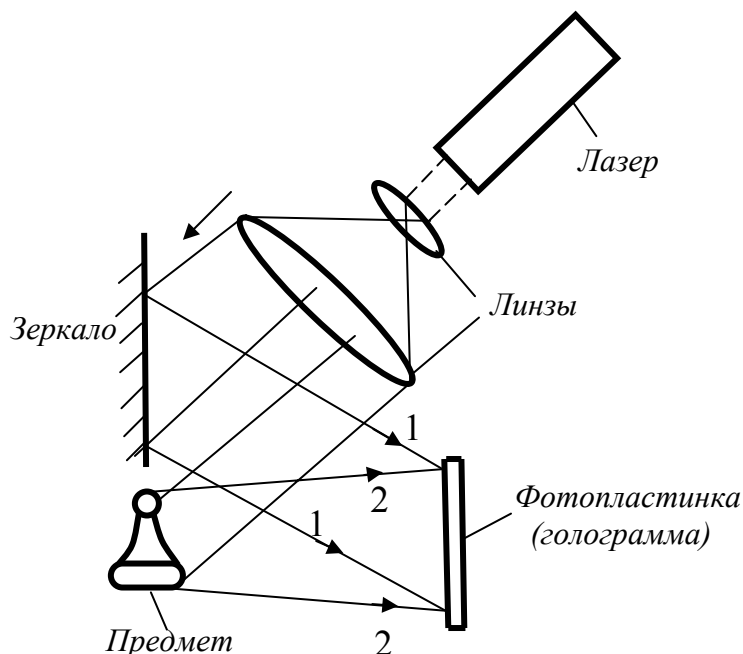


Рис. 33.10

Рассмотрим основы принципа голографии. Испускаемый лазером световой пучок расширяется с помощью системы линз и делится на две части (рис. 33.10). Одна часть отражается зеркалом к фотопластинке (будущей голограмме), образуя опорный пучок 1 - 1 (опорная волна). Вторая часть попадает на пластинку, отразившись от фотографируемого предмета, образуя предметный пучок 2 - 2 (пред-

метная волна). Оба пучка должны быть когерентны. Опорный и предметный пучки, налагаясь друг на друга, образуют интерференционную картину, которая фиксируется фотопластинкой. После проявления фотопластинки и получается голограмма - зарегистрированная на фотопластинке интерференционная картина, образованная при сложении опорной и предметной волн.

Для восстановления изображения голограмму помещают в то самое место, в котором она находилась при фотографировании, и освещают опорным пучком света (рис. 33.11). Часть лазерного пучка, которая освещала предмет при фотографировании, теперь перекрывается перегородкой. В результате дифракции опорной волны на интерференционной структуре голограммы возникает волна, имеющая точно такую же структуру, как волна, отражавшаяся предметом. Эта волна дает мнимое изображение предмета, которое воспринимается глазом наблюдателя. Это изображение объемное, на него можно смотреть из разных положений, создается полная иллюзия существования реального предмета. Наиболее важное применение

ние голографии – запись и хранение информации, а в будущем возможны голографическое кино и телевидение.

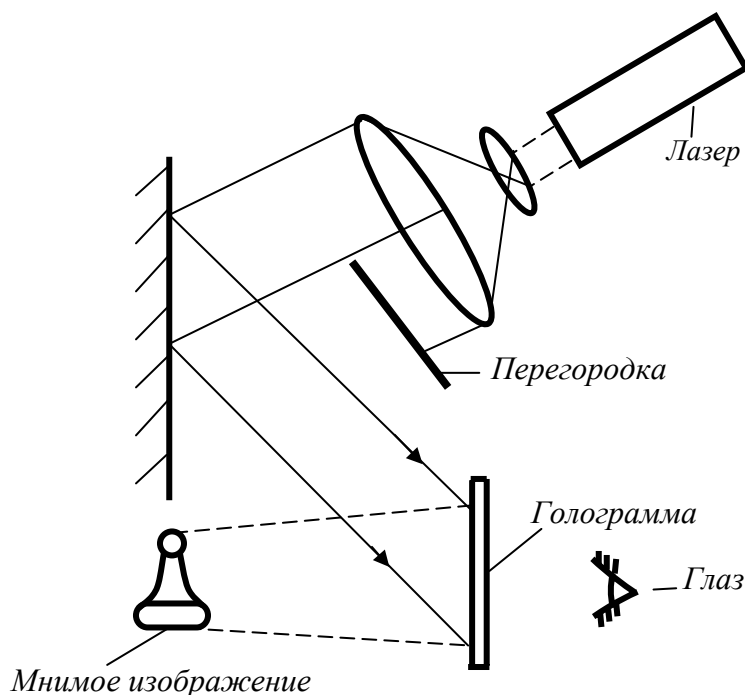


Рис. 33.11

Вопросы для самоконтроля

1. Какое явление называется дифракцией?
2. Сформулируйте принцип Гюйгенса - Френеля.
3. Что такое зона Френеля?
4. Как объяснить образование максимумов и минимумов с помощью принципа Гюйгенса - Френеля?
5. Чем отличается дифракция Фраунгофера от дифракции Френеля?
6. Как объясняется появление «пятна Пуассона»?
7. Выведите формулу распределения интенсивности при дифракции Фраунгофера на одномерной щели.
8. Что представляет собой дифракционная решетка? Каково распределение интенсивности на экране за дифракционной решеткой? Как оно объясняется?
9. Каков принцип голографии? Каковы возможные применения голографии?

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

План

1. Естественный и поляризованный свет. Виды поляризации. Степень поляризации.
2. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера.
3. Поляризация при двойном лучепреломлении. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Оптическая ось кристалла. Волновые поверхности в одноосном кристалле.
4. Поляроиды и поляризационные призмы. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса.
5. Искусственная оптическая анизотропия. Эффект Керра.
6. Вращение плоскости поляризации.

1. Естественный и поляризованный свет. Виды поляризации. Степень поляризации. В естественном свете имеются колебания, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных лучу. Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн) протяженностью примерно 3 м. Одновременно множество атомов излучают электромагнитные волны. Цуги волн, испускаемых атомами, накладываются друг на друга, образуя испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для вектора напряженности электрического поля \vec{E} у каждого цуга ориентирована случайным образом. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений представлены с равной вероятностью. Свет со всеми возможными равновероятными ориентациями вектора \vec{E} называется естественным. (Заметим, что вектор \vec{E} называется световым вектором, так как при действии света на вещество основное значение имеет электрическая составляющая поля волны, действующая на электроны в атомах вещества).

Свет, в котором направление колебаний вектора \vec{E} упорядочено каким-либо образом, называется поляризованным.

Виды поляризации:

1. Если колебания вектора \vec{E} происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, то свет называется плоскополяризованным (или линейнополяризованным). Плоскость, в которой колеблется вектор \vec{E} , называется плоскостью поляризации (или плоскостью колебаний).

2. Если вектор \vec{E} вращается по мере распространения волны в пространстве, а конец этого вектора в пространстве описывает окружность, то свет называется поляризованным по кругу (или циркулярно поляризованным).

3. Если вектор \vec{E} вращается вокруг направления распространения волны (вокруг луча), изменяясь периодически по модулю, при этом вектор \vec{E} описывает эллипс, то свет называется эллиптически поляризованным.

Если смотреть навстречу распространения волны и вектор \vec{E} при этом поворачивается по часовой стрелке, то поляризация называется правой, если против часовой стрелки – левой.

4. Если свет представляет смесь естественного и плоскополяризованного, то он называется частично поляризованным.

Частично поляризованный свет характеризуется степенью поляризации p , которая определяется как

$$p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (1)$$

где I_{\max} и I_{\min} - максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным компонентам вектора \vec{E} . Для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $p = 1$; для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$, соответственно $p = 0$. Для эллиптически поляризованного света понятие «степень поляризации» не применяется.

2. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Если угол падения света на границу раздела двух сред, диэлектриков (например из воздуха на поверхность стеклянной пластинки) отличен от нуля, то отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (на рис. 34.1 обозначены точками), в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (обозначены двусторонними стрелками). Степень поляризации зависит от угла падения.

Закон Брюстера (английский физик): если тангенс угла падения равен показателю преломления второй среды относительно первой

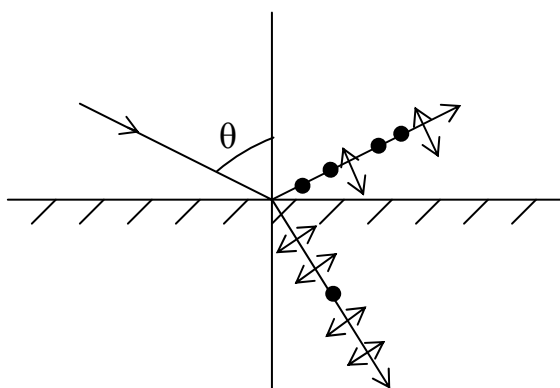


Рис. 34.1

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (2)$$

то отраженный луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения).

Угол $\theta_{\text{Бр}}$ называется углом Брюстера. Преломленный луч поляризован только частично. Отраженный и преломленный лучи при этом взаимно перпендикулярны.

Степень поляризации отраженного и преломленного лучей при различных углах падения можно рассчитать с помощью так называемых формул Френеля (нами в этом издании не рассматриваются).

3. Поляризация при двойном лучепреломлении. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Оптическая ось кристалла. При прохождении света через некоторые кристаллы световой луч разделяется на два луча, распространяющиеся с разными скоростями и в различных направлениях. Это явление получило название двойного лучепреломления.

Кристаллы, обладающие свойствами двойного лучепреломления, могут быть одноосными и двуосными (см. далее). У одноосных кристаллов (таких как кварц, исландский шпат, турмалин) один из лучей подчиняется обычному закону преломления. Этот луч называется обыкновенным и обозначается буквой «*o*». Другой луч не подчиняется закону преломления; он называется необыкновенным и обозначается буквой «*e*» (от англ. *ordinary* – обыкновенный, *extraordinary* – необыкновенный). Необыкновенный луч не лежит, как правило, в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Отношение синусов углов падения и преломления не остается постоянным при изменении угла падения. Даже при нормальном падении света на поверхность кристалла необыкновенный луч отклоняется от первоначального направления (рис. 34.2).

В одноосных кристаллах имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются, не разделяясь и с оди-

наковой скоростью. Это направление называется оптической осью кристалла (отметим, что это направление в кристалле, а не какая-то единственная прямая).

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главным сечением, или главной плоскостью кристалла. Обычно пользуются главным сечением, проходящим через световой луч. Оба луча поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

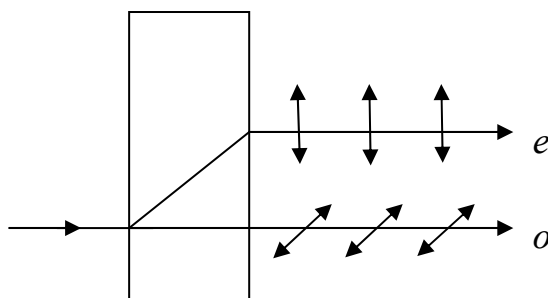


Рис. 34.2

Необыкновенный луч поляризован в плоскости главного сечения, а обыкновенный – перпендикулярно плоскости главного сечения (следовательно, перпендикулярно оптической оси).

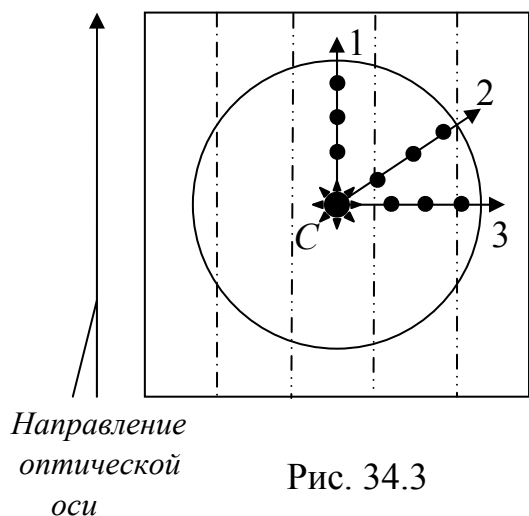
У двуосных кристаллов (таких как слюда, гипс) имеются два направления, в которых свет не разделяется на два луча. В таких кристаллах оба луча необыкновенные (рассматривать не будем).

Замечание. Когерентные лучи, поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, не интерферируют. Поэтому обыкновенный и необыкновенный лучи интерферировать не могут.

Волновые поверхности в одноосном кристалле. Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В таких кристаллах диэлектрическая проницаемость ϵ в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет разные значения ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} . Показатель преломления n связан с ϵ соотношением $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$. Пренебрегая отклонением μ от 1, получим $n = \sqrt{\epsilon}$. Следовательно, из анизотропии ϵ вытекает, что волнам с различным направлением колебаний вектора \vec{E} соответствуют различные значения показателя преломления n , поэтому и скорость световых волн $v = c/n$ в кристалле будет зависеть от направления колебаний вектора \vec{E} .

Пусть точечный источник света S расположен внутри одноосного кристалла (рис. 34.3). Выделим в кристалле плоскость главного сечения и рассмотрим лучи, исходящие из источника в различных направлениях этого сечения. В обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном главному сечению кристалла (колебания изображены точками). Поэтому при любом направлении обыкновенного

луча (1, 2, 3) вектор \vec{E} образует с оптической осью кристалла прямой угол и скорость световой волны будет одна и та же: $v_o = c / \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Волновой по-



верхностью является сфера (если рассмотреть совокупность всех главных плоскостей).

Колебания в необыкновенном луче совершаются в главном сечении, поэтому для разных лучей направления колебаний вектора \vec{E} образуют с оптической осью разные углы (рис. 34.4). Для луча 1 угол прямой, скорость $v_1 = c / \sqrt{\epsilon_{\perp}} = v_o$, для луча 3 угол равен нулю, $v_3 = c / \sqrt{\epsilon_{\parallel}}$, а для луча 2 –

имеет промежуточное значение. Волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения (в пространстве, а на плоскости – эллипс).

В качестве примера построения обыкновенного и необыкновенного лучей рассмотрим преломление плоской волны на границе анизотропной среды (рис. 34.5). Пусть свет падает нормально к преломляющей грани кристалла, а оптическая ось перпендикулярна преломляющей грани кристалла. В точках 1 и 2 построим сферические волновые поверхности, соответствующие обыкновенному лучу, и эллипсоидальные – необыкновенному. Огибающая всех вторичных волн, центры которых лежат в промежутке между точками 1 и 2 для *o*-лучей и *e*-лучей, представляет одну и ту же плоскость (на рис. 34.5 это пунктирная линия). Проводим прямые из точек падения 1 и 2 к точкам касания огибающей плоскости с волновыми поверхностями 1' и 2', получим лучи *o*, *e* в кристалле. Таким образом мы показали, что вдоль оптической оси *o*- и *e*-лучи идут не разделяясь.

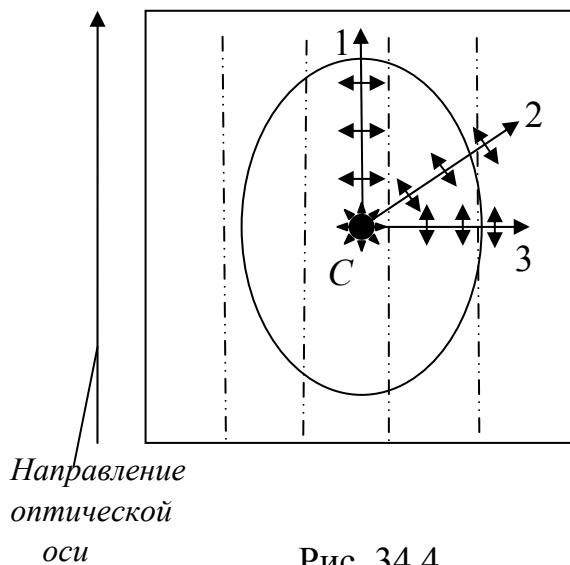


Рис. 34.4

Рассмотрим другой случай, когда оптическая ось составляет косой угол с преломляющей гранью кристалла (рис. 34.6). В этом случае огибающие волновых

поверхностей уже не совпадают. Проведя к точкам касания огибающих с волновыми поверхностями прямые (для необыкновенных *e*-лучей это прямые 1 - 1' и 2 - 2'), получим, что необыкновенный луч заметно отклоняется от нормали к преломляющей грани кристалла. Обыкновенный *o*-луч пойдет вдоль первоначального направления.

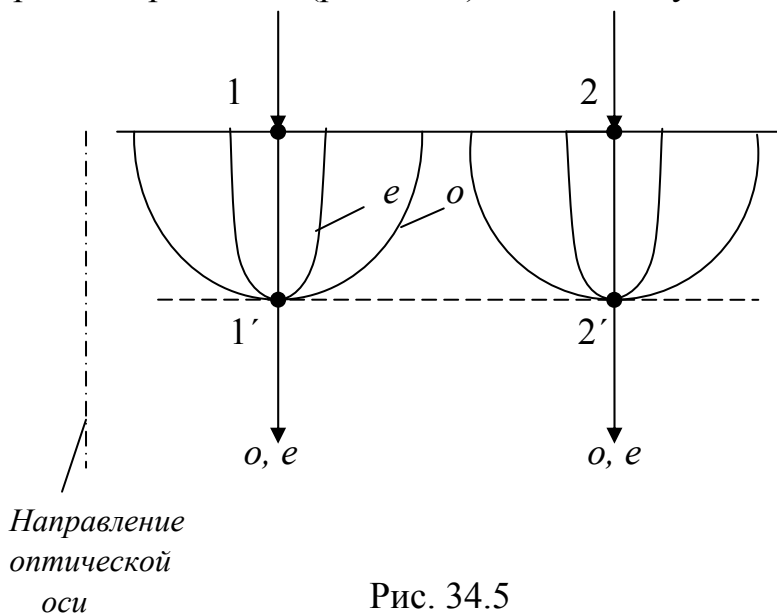


Рис. 34.5

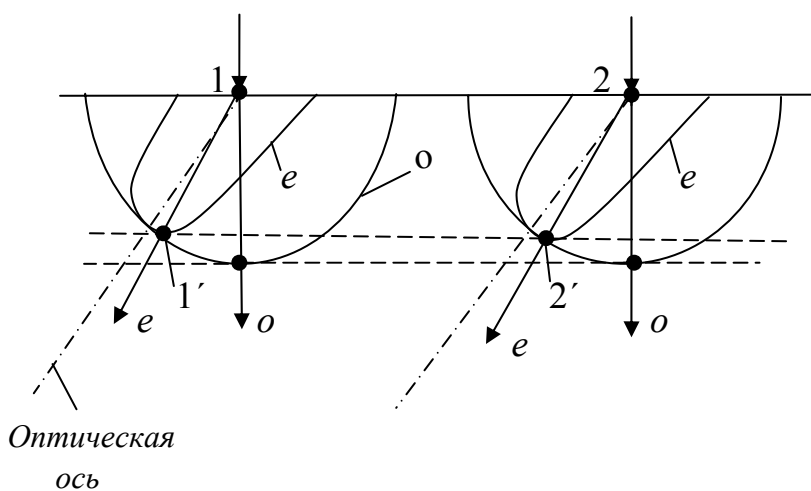


Рис. 34.6

4. Поляриды и поляризационные призмы. Поляризаторы и анализаторы. Поляриод – поляризационный прибор, который представляет собой целлулоидную пленку, в которую вкраплены одинаково ориентированные кристаллы сульфата йодистого хинина. В этих кристаллах обыкновенный луч поглощается на пути примерно в 0,1 мм, так что выходит один луч – необыкновенный (одного направления поляризации – поляризованный свет).

Призма Николя (шотландский ученый, 1768 - 1851) представляет собой призму из исландского шпата (рис. 34.7), которая разрезается и склеивается канадским бальзамом, показатель преломления которого $n = 1,55$, ле-

жит между значениями показателей преломления n_0 и n_e для обыкновенного и необыкновенного лучей: $n_0 > n_{\text{кан.б}} > n_e$. Угол падения для обыкновенного луча подбирается таким, чтобы превышал предельный угол, и обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение. Из кристалла выходит только необыкновенный луч (свет поляризованный), незначительно смещенный параллельно падающему лучу.

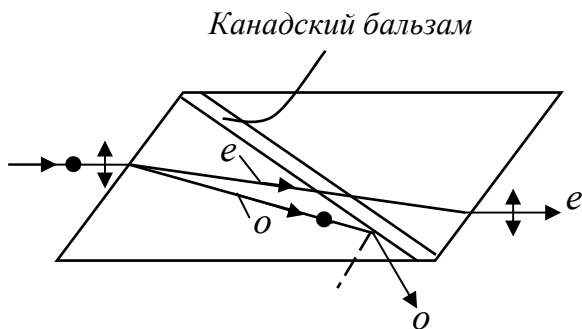


Рис. 34.7

И поляриды, и поляризационные предметы являются поляризаторами — устройствами для получения полностью или частично поляризованного оптического излучения.

Поляризаторы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости поляризатора, и задерживают колебания, перпендикулярные этой плоскости. Если поляризатор используется для определения характера и степени поляризации, то он называется анализатором.

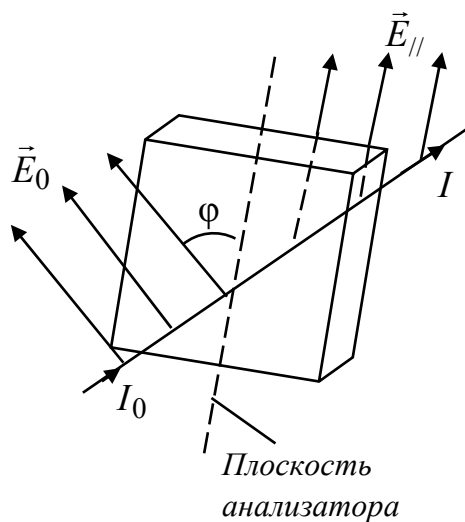


Рис. 34.8

Закон Малюса. Пусть плоскополяризованный свет падает на анализатор, причем направление вектора \vec{E}_0 в световой волне составляет угол φ с плоскостью анализатора (рис. 34.8). Такая волна проходит через анализатор только частично. Колебание с амплитудой \vec{E}_0 можно разложить на два взаимно перпендикулярных колебания с амплитудами $E_{||} = E_0 \cos \varphi$ и $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$. Первое колебание пройдет через поляризатор, второе будет задержано. Отношение интенсивностей прошедшего

I и падающего I_0 света, учитывая, что интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды напряженности, имеет вид

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E_{\parallel}^2}{E_0^2}.$$

Учитывая, что $E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi$, получаем

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

Это соотношение называется законом Малюса: интенсивность прошедшего через анализатор поляризованного света пропорциональна квадрату косинуса угла между плоскостью поляризации падающего света и плоскостью анализатора.

5. Искусственная оптическая анизотропия. Эффект Керра. Обычные прозрачные тела, не обладающие двойным лучепреломлением, под влиянием внешних воздействий могут становиться дупреломляющими. В частности, при сжатии или растяжении направление деформации играет роль оптической оси. Тело становится оптически анизотропным. Опыт показывает, что разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей пропорциональна механическому напряжению σ в данной точке тела: $n_o - n_e = k \sigma$, где k – коэффициент, зависящий от свойств вещества. Если поместить некоторое прозрачное тело, например пластинку из оргстекла, между скрещенными поляризаторами, то пока тело не деформировано, система света не пропускает. Если же пластину подвергнуть сжатию, то свет начинает проходить и наблюдается картина в виде темных и светлых полос в зависимости от напряжения в том или ином месте пластинки. На этом основывается оптический метод исследования напряжений. Изготавливают модель, подвергают ее нагрузке и по наблюдаемой картине судят о распределении внутренних напряжений, что порой значительно упрощает трудоемкую работу по расчету напряжений в новых конструкциях.

Эффект Керра (шотландский физик, 1824 - 1904). Между двумя скрещенными поляризаторами P и P' помещают ячейку Керра (сосуд с жидкостью, обычно нитробензолом), в которую введены пластины конденсатора. При подаче напряжения на них среда становится анизотропной (вещество поляризуется) (рис. 34.9). Оптическая ось - вдоль поля. Проходя через ячейку, свет становится эллиптически поляризованным и частично проходит через второй поляризатор P' . Наиболее важной особенностью эффекта

Керра является его малая инерционность (до 10^{-12} с!), что позволяет использовать его для создания быстродействующих оптических затворов.

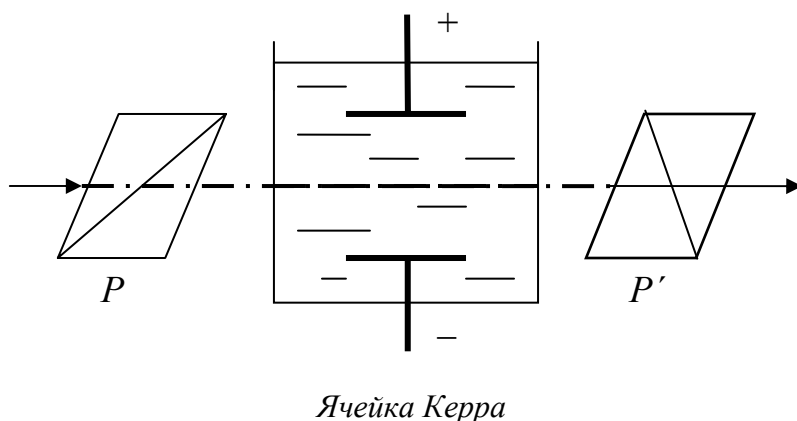


Рис. 34.9

Применяется в быстропротекающих процессах (управление режимом работы лазеров, скоростное фото и киносъемка), оптической локации, оптической телефонии.

6. Вращение плоскости поляризации. Многие вещества, называемые оптически активными, обладают способностью поворачивать плоскость поляризации.

Это кристаллические тела (кварц и другие), чистые жидкости (скипидар и другие) и растворы оптически активных веществ (например водный раствор сахара).

Опыт показывает, что все оптически активные вещества поворачивают плоскость поляризации падающего на них света. Для чистых кристаллов и жидкостей угол поворота плоскости поляризации определяется по формуле

$$\varphi = \alpha d$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = \alpha_0 c d$$

где d – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе; α (α_0) – удельное вращение (или постоянная вращения); c – концентрация раствора. Постоянная α имеет различное значение для разных веществ и, кроме того, сильно зависит от длины волны света. Так, для кварцевой пластинки толщиной 1 мм углы поворота желтого и фиолетового света равны соответственно 20 и 50°.

В зависимости от направления вращения плоскости поляризации оптически активные вещества подразделяют на право- и левовращающие, т.е. вращающие по часовой стрелке или против, если смотреть навстречу световому пучку.

Вращательная способность кварца связана с особенностями кристаллической структуры, расположением частиц в кристаллической решетке (на макроуровне), так как плавленный кварц не обладает оптической активностью. Вращательная способность раствора сахара связана с асимметричным строением сложных молекул активной среды (т.е. на микроуровне).

Измерение угла поворота плоскости поляризации используется для определения концентрации оптически активных веществ, например сахара в растворах (пищевая промышленность) и биологических объектах (кровь).

Отметим, что способность поворачивать плоскость поляризации приобретают даже оптически неактивные вещества, если их поместить в магнитное поле (эффект Фарадея).

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается поляризованный свет от естественного? Каковы виды поляризованного света?
2. В чем смысл закона Брюстера?
3. В чем суть двойного лучепреломления? В чем состоят особенности обыкновенного и необыкновенного лучей? Как объяснить двойное лучепреломление?
4. Что такое оптическая ось кристалла?
5. Объясните закон Малюса для света, прошедшего через два поляризатора.
6. Объясните эффект Керра.
7. С чем связано вращение плоскости поляризации на макро- и микроуровнях? Где применяется?

ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

План

1. Дисперсия света. Методы наблюдения дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсия.
2. Электронная теория дисперсии света.
3. Затруднения электромагнитной теории Максвелла.
4. Поглощение света. Спектр поглощения. Цвета тел.

1. Дисперсия света. Методы наблюдения дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсия. Из опыта известно, что показатель преломления n зависит от длины волны света, т.е. $n(\lambda)$. Явления, обусловленные зависимостью показателя преломления вещества от длины волны λ или частоты ω световой волны, называются дисперсией света.

Наиболее простой метод наблюдения дисперсии – метод скрещенных призм (рис. 35.1). Свет от источника S_0 проходит через щель и попадает через линзу 1 на призму 1. Цветная полоска, получающаяся в результате действия первой призмы, отклоняется второй призмой в разных своих частях различно в зависимости от величины показателя преломления, так что окончательная форма и расположение спектра определяются величиной дисперсии обеих призм (на рис. 35.1 обозначены: Кр. – красный, Ф – фиолетовый части спектра).

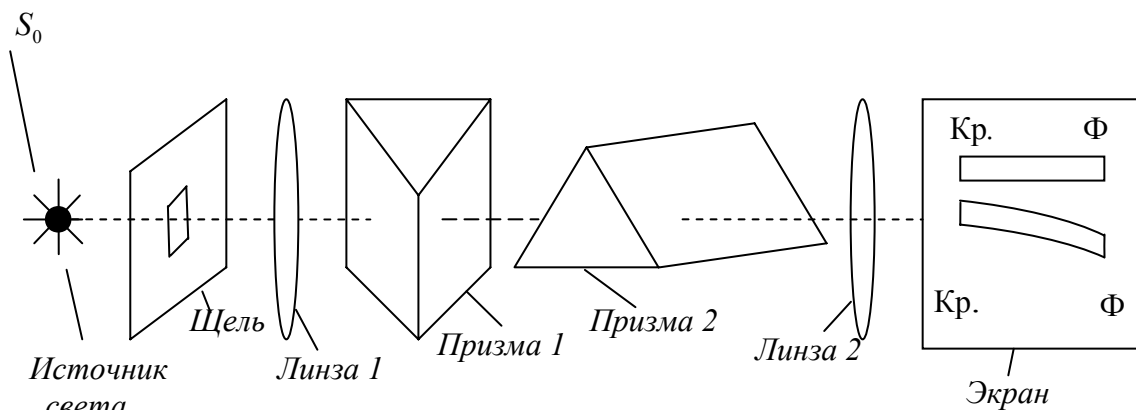


Рис. 35.1

Если показатель преломления увеличивается с частотой, т.е. $dn/d\omega > 0$ (или $dn/d\lambda < 0$), то такую зависимость называют нормальной

дисперсией (рис. 35.2). Если $dn/d\omega < 0$ (или $dn/d\lambda > 0$), дисперсия света называется аномальной (рис. 35.3). Она наблюдается вблизи полос поглощения вещества.

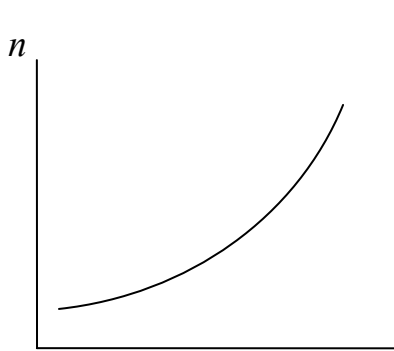


Рис. 35.2

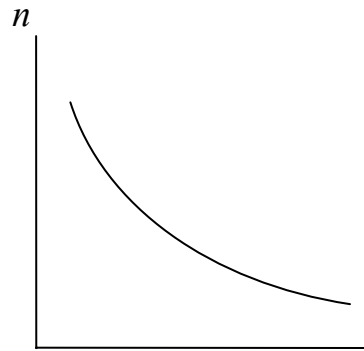


Рис. 35.3

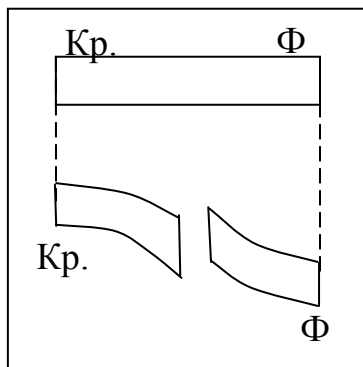


Рис. 35.4

В случае наличия аномальной дисперсии вид спектра, получаемого по методу скрещенных призм на экране (см. рис. 35.1), изображен качественно на рис. 35.4.

2. Электронная теория дисперсии света. Исследуем зависимость диэлектрической проницаемости среды от частоты $\epsilon(\omega)$ световых волн, вызывающих смещение электрических зарядов вещества (а так как $n = \sqrt{\epsilon}$, то получим зависимость $n(\omega)$). Электрическое смещение \vec{D} связано с напряженностью электрического поля \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad (1)$$

а с другой стороны,

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad (2)$$

где \vec{P} - поляризованность (см. ч. 3, лекция № 18 данного издания). Приравнявая (1) и (2), можно выразить ϵ . Предварительно получим выражение для поляризованности \vec{P} .

Под влиянием электрического поля световой волны электрон в атоме смещается из положения равновесия на расстояние \vec{r} , превращая таким образом атом в электрическую систему с электрическим моментом $\vec{p} = e\vec{r}$ (диполь), направленным вдоль поля. (Речь идет о так называемых «оптических» электронах, слабо связанных с ядром). Если в единице объема среды находится N атомов, то электрический момент единицы объема $\vec{P} = Ne\vec{r}$. Величина \vec{P} по определению является поляризованностью.

В одном атоме может быть несколько электронов, взаимодействующих с внешним полем («оптических» электронов), тогда целесообразно записать

$$\vec{P} = N \sum_i e\vec{r}_i . \quad (3)$$

Подставляя это выражение в (2), получим

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + N \sum_i e\vec{r}_i . \quad (4)$$

Далее определим смещение электронов \vec{r} под действием внешнего периодически меняющегося поля $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t + \alpha)$. При прохождении световой волны на каждый оптический электрон действует сила электрического поля волны

$$\vec{F}_{\text{эл}} = e\vec{E}_m \cos(\omega t + \alpha) = e\vec{E}(t).$$

Под воздействием этой силы электроны совершают вынужденные колебания с частотой ω .

Оптические электроны согласно классическим представлениям связаны с остальной частью атома квазиупругой силой $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}$, где k – коэффициент упругости, определяемый свойствами вещества; \vec{r} – смещение электрона из положения равновесия. В такой системе каждый оптический электрон обладает собственной частотой колебаний ω_0 .

Смещение \vec{r} можно найти из уравнения движения (в пренебрежении затуханием колебаний)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{эл}},$$

где m – масса электрона, или

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} + e\vec{E}(t).$$

Разделим обе части на m и перенесем $-k\vec{r}$ в левую часть уравнения.

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}(t).$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, тогда

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}(t).$$

Решение этого уравнения

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний электрона.

Тогда из уравнения (3) поляризованность

$$\vec{P} = N \sum_i \frac{e^2 \vec{E}(t)}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}.$$

Подставляя это выражение в (2) и приравнявая правые части (2) и (1), получим

$$\epsilon \epsilon_0 \vec{E}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + N \sum_i \frac{e^2 \vec{E}(t)}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}.$$

Сократим последнее равенство на $\vec{E}(t)$, разделим обе части на ϵ_0 и получим выражение для диэлектрической проницаемости среды

$$\epsilon = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_i \frac{e^2}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}. \quad (5)$$

Так как $n = \sqrt{\epsilon}$, то

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_i \frac{e^2}{m(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}. \quad (6)$$

Дисперсионная кривая $n(\omega)$, соответствующая выражению (6), качественно представлена на рис. 35.5 в предположении двух оптических электронов у атома.

Дисперсионная кривая распадается на ряд ветвей. Вблизи ω_{0i} (собственные частоты колебаний разных оптических электронов) $n \rightarrow \pm\infty$ (пунк-

тирная кривая). Если учесть реально существующее затухание колебаний, то можно получить более точное выражение для зависимости $n(\omega)$, пригодное и для областей аномальной дисперсии (где n убывает с частотой).

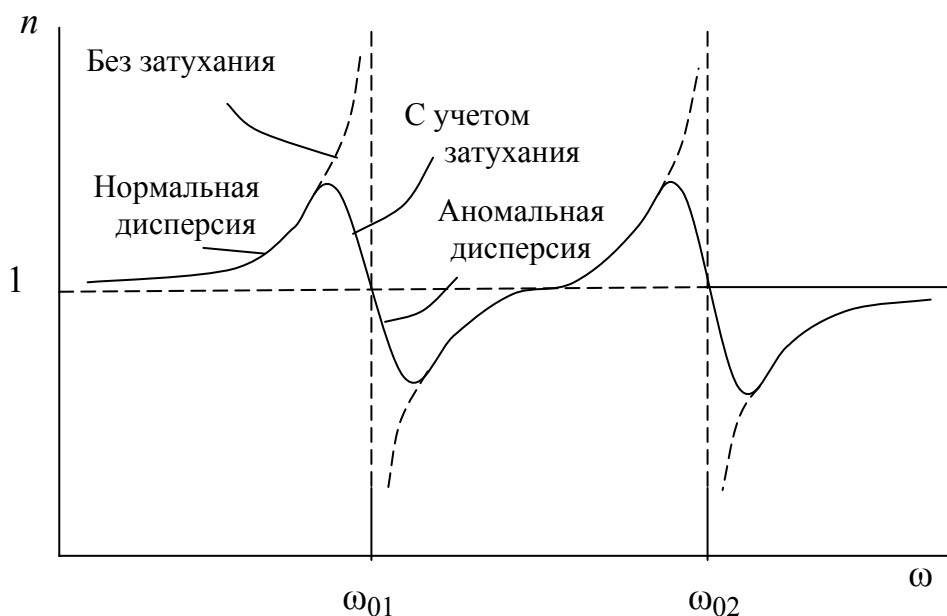


Рис. 35.5

3. Затруднения электромагнитной теории Максвелла

1. Само наличие дисперсии света является одним из фундаментальных затруднений электромагнитной теории Максвелла. С помощью электронной теории дисперсии эта проблема была решена.

2. Соотношение между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью $n = \sqrt{\epsilon}$, вытекающее из теории Максвелла, для ряда газообразных и жидких диэлектриков выполняется достаточно хорошо (см. таблицу).

Вещество	n	$\sqrt{\epsilon}$
Водород	1,000139	1,000139
Азот	1,000299	1,000307
Бензол	1,501	1,511

Однако для многих других тел, например для стекла и таких жидкостей, как вода и спирт, ϵ гораздо больше n^2 . Так, для воды $n^2 = 1,75$, тогда как $\epsilon = 81$ (!?). Дело в том, что дисперсия создается в результате колебаний

не только электронов, но и ионов. Собственные частоты ионов лежат в далекой инфракрасной области и не оказывают существенного влияния на ход дисперсионной кривой в видимой области спектра. Однако они играют главную роль в объяснении отличия значения статической диэлектрической проницаемости от значения в видимом диапазоне. У воды для оптических частот $n = 1,33$, а статическое значение $\sqrt{\epsilon} = 9$. Это различие объясняется колебаниями ионов. Поскольку собственные частоты колебаний ионов ω_0 малы, при малых частотах (в статике) $\omega \rightarrow 0$, в знаменателе выражения (5) стоит малая величина, поэтому $\epsilon \gg 1$. Таким образом разрешается второе затруднение теории Максвелла.

4. Поглощение света. Спектр поглощения. Цвета тел. Опыт показывает, что интенсивность света I при прохождении через вещество убывает по закону Бугера:

$$I = I_0 \exp(-\alpha l) \quad (7)$$

где I_0 - интенсивность света на входе в поглощающий слой; l - толщина слоя; α - постоянная, зависящая от свойств поглощающего слоя, длины волны, и называется коэффициентом поглощения. По своему смыслу эта величина, обратная длине слоя, на котором интенсивность убывает в e раз.

Продифференцируем (7), получим

$$dI = -\alpha I_0 e^{-\alpha l} dl = -\alpha I dl,$$

т.е. убыль интенсивности пропорциональна толщине слоя dl и значению самой интенсивности I , а коэффициентом пропорциональности служит коэффициент поглощения.

Зависимость коэффициента поглощения от длины волны $\alpha(\lambda)$ называется спектром поглощения. Характеры спектра паров веществ и твердых тел, жидкостей качественно отличаются. В парах, например, металлов при невысоком давлении в спектре обнаруживаются резкие узкие максимумы (рис. 35.6), а спектры поглощения твердых тел, жидкостей дают широкие полосы поглощения (плавный ход α , рис. 35.7).

Для прозрачных веществ коэффициент поглощения невелик (для стекла $\alpha \sim 1 \text{ м}^{-1}$). Для металлов $\alpha \sim 10^6 \text{ м}^{-1}$, т.е. приблизительно в миллион раз

больше. Физически это обусловлено наличием свободных электронов. Под действием поля электромагнитной световой волны электроны приходят в движение. Возникают быстропеременные токи, сопровождаемые выделением джоулева тепла, энергия световой волны убывает, превращаясь во внутреннюю энергию металла. (Замечание. Мы не касаемся процесса рассеяния света, что требует отдельного рассмотрения).

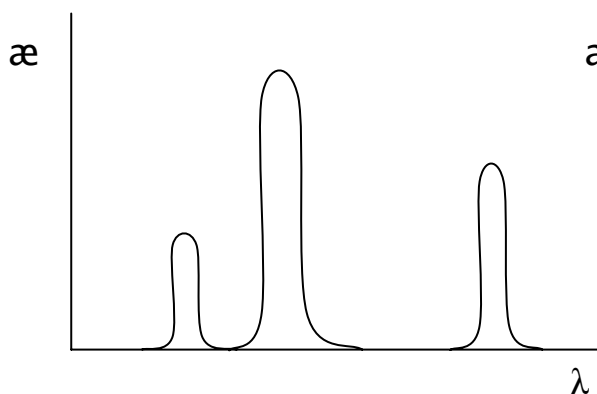


Рис. 35.6

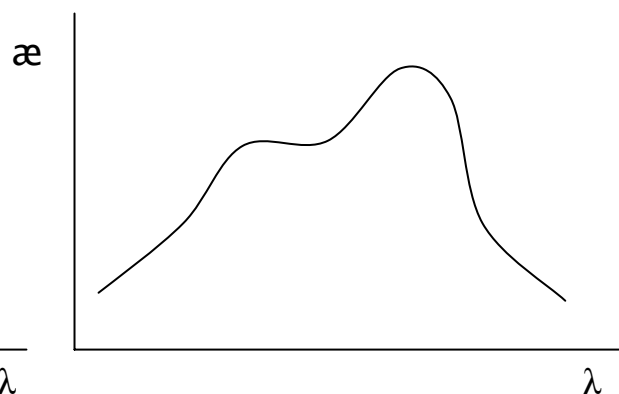


Рис. 35.7

Цвет. Цвет есть результат двух физико-химических явлений: процесса взаимодействия света с молекулами вещества предмета наблюдения и воздействия волн, идущих от вещества, на сетчатку глаза.

Окончание зрительного нерва состоит из палочек, «информирующих» нас об освещенности и форме предметов, и колбочек. Волны светового электромагнитного поля, воспринимаемые колбочками, вызывают то или иное цветовое ощущение. Поглощенный цвет как бы «вычитается» из общего белого цвета. Цвет, таким образом, является результатом избирательного поглощения определенных участков в непрерывном спектре падающего белого цвета. Например, если тело поглощает красные лучи, кажется окрашенным в зеленый цвет; если же тело поглощает синевато-зеленоватые лучи, то оно кажется нашему глазу красным. Рассеянные и поглощенные лучи дополняют друг друга в белом свете, поэтому они называются дополнительными.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается дисперсия света?
2. Какая дисперсия называется нормальной? Аномальной?
3. В чем суть метода скрещенных призм?
4. В чем суть электронной теории дисперсии? Выведите формулу зависимости $n(\omega)$.
5. Каковы затруднения электромагнитной теории Максвелла?
6. Напишите формулу закона Бугера и объясните ее.
7. Что такое спектр поглощения?
8. Как можно физически объяснить поглощение света в металлах?
9. Как цвета тел связаны с их спектрами поглощения?

СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУРЬЕ

Лекция № 36 (дополнительная)

План

1. Спектр и спектрограмма функции.
2. Разложение Фурье. Понятие о гармониках.
3. Спектральное разложение несинусоидального периодического сигнала.

1. Спектр и спектрограмма функции. Слово спектр (от лат. *spectrum*) первоначально было синонимом слова «изображение», но впоследствии спектром стали называть в оптике только цветную картинку, полученную Ньютоном в результате преломления пучка солнечного света призмой. Значительно позднее, в процессе развития учения о колебаниях и волнах слово «спектр» приобрело в науке еще и другой смысл.

Рассмотрим функцию вида

$$f(t) = \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t + \alpha_n), \quad (1)$$

где c_n , ω_n , α_n - константы.

$$(f(t) = c_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + c_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots).$$

N может быть конечным или бесконечным. В первом случае функция (1) обычно называется тригонометрической суммой, во втором - тригонометрическим рядом. Мы будем называть функцию вида (1) тригонометрическим рядом, рассматривая тригонометрическую сумму как частный случай последнего.

Совокупность пар чисел $(\omega_1, c_1^2), (\omega_2, c_2^2) \dots (\omega_n, c_n^2)$ называется спектром функции $f(t)$. Отметим на оси абсцисс точки, соответствующие в некотором масштабе частотам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$. В каждой такой точке восстановим перпендикуляр к оси абсцисс и отложим на нем отрезок, длина которого пропорциональна квадрату амплитуды (по существу, интенсивности) $c_1^2, c_2^2, \dots, c_N^2$ соответствующей синусоидальной слагаемой.

Получающуюся в результате такого построения диаграмму (рис. 36.1) мы будем называть спектрограммой функции $f(t)$. Спектр функции - математическое понятие. Между математическим понятием спектра функции и физическим понятием спектра существует определенная связь. Характер

спектра как, например, реально существующей цветной картинке (спектра в физическом смысле) определяется характером спектра функции (в математическом смысле), описывающей световую волну, падающую на призму или дифракционную решетку. Однако нужно иметь в виду, что задание спектра функции $f(t)$ не эквивалентно заданию самой функции: две функции, имеющие одинаковый спектр, могут различаться фазами компонент. Например, функции $(\cos\omega t + \cos 2\omega t)$ и $(\cos\omega t + \sin 2\omega t)$ имеют одинаковые спектрограммы, но различные осциллограммы.

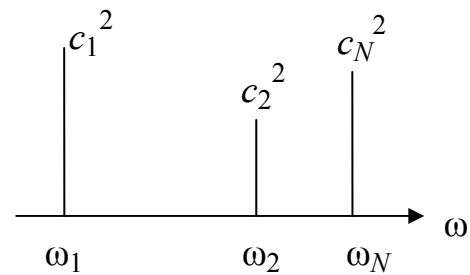


Рис. 36.1

2. Разложение Фурье. Понятие о гармониках. Пусть имеется периодическая функция $f(t)$. Она может быть представлена на всем интервале $-\infty < t < +\infty$ в виде суперпозиции бесконечного множества синусоид, имеющих частоты, кратные $\omega = 2\pi/T$, где T – период функции $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n \omega t + B_n \sin n \omega t) \quad (2)$$

причем коэффициенты A_n, B_n (коэффициенты Фурье периодической функции) даются формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, & B_0 &= 0, \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n \omega t dt, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n \omega t dt, \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, t_0 – произвольно.

(Заметим, что эта процедура называется разложением в ряд Фурье).

Синусоида с частотой $\omega = 2\pi n / T$ при $n = 1$ называется основной, или первой, гармоникой; соответственно при $n = 2, 3, \dots$ получаем вторую, третью и так далее гармоники.

В качестве примера приведем представление прямоугольных периодических колебаний (рис. 36.2) с помощью трех синусоидальных колебаний (гармоник).

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t \right),$$

где ω_0 – циклическая частота прямоугольных колебаний ($\omega_0 = 2\pi/T$). На рис. 36.2 показаны прямоугольные колебания, первые три члена разложения и их сумма. Чем больше членов разложения, тем ближе форма суммы к форме исходных прямоугольных колебаний. Отдельные члены разложения называют еще фурье-компонентами.

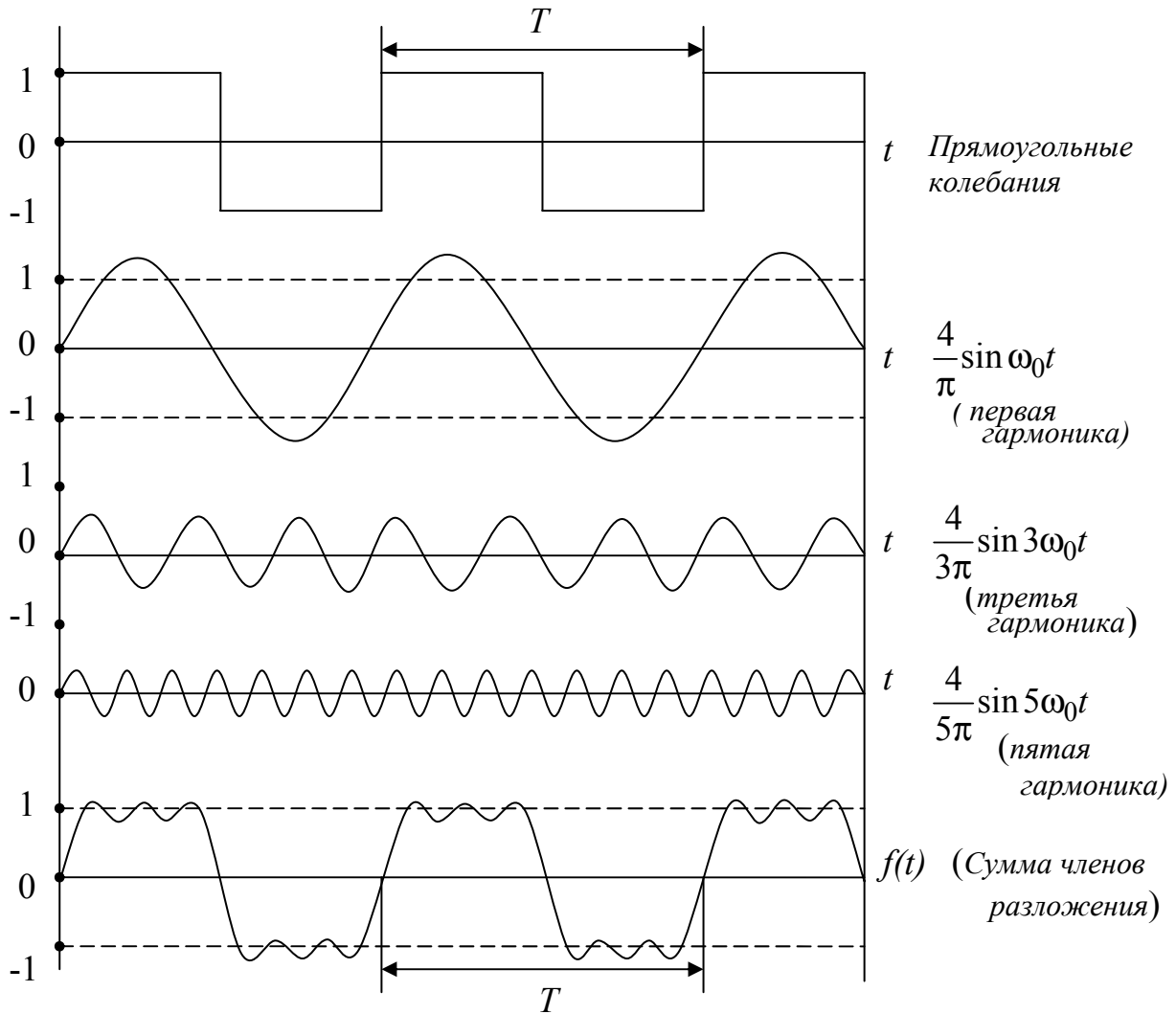


Рис. 36.2

3. Спектральное разложение несинусоидального периодического сигнала. Пусть некоторое тело испытывает периодические прямоугольные толчки силой F . Продолжительность каждого толчка τ , период T (рис. 36.3). Требуется разложить заданное периодическое воздействие на его гармонические компоненты (получить коэффициенты Фурье).

Как следует из формулировки разложения Фурье t_0 можно брать произвольно. В заданной задаче целесообразно принять $t_0 = -\frac{T}{2}$. Воспользовавшись формулами для коэффициентов Фурье, получим (учитывая, что F отлично от 0 в интервале от $-\frac{\tau}{2}$ до $\frac{\tau}{2}$)

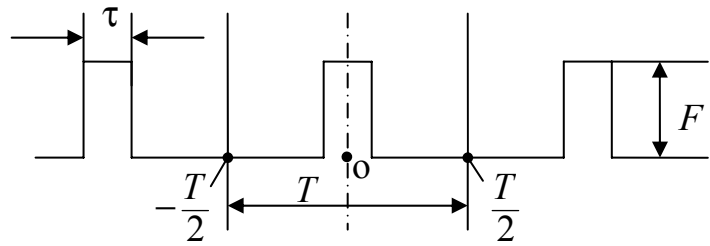


Рис. 36.3

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F dt = \frac{F\tau}{T},$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F \cos n\omega t dt = \frac{2}{Tn\omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F \cos n\omega t d(n\omega t) = \frac{2F}{Tn2\pi/T} \sin n\omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{F}{n\pi} \left(\sin n\omega \frac{\tau}{2} - \sin n\omega \left(-\frac{\tau}{2} \right) \right) = \frac{F}{n\pi} \left(\sin n\omega \frac{\tau}{2} + \sin n\omega \frac{\tau}{2} \right) = \frac{2F}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T},$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F \sin n\omega t dt.$$

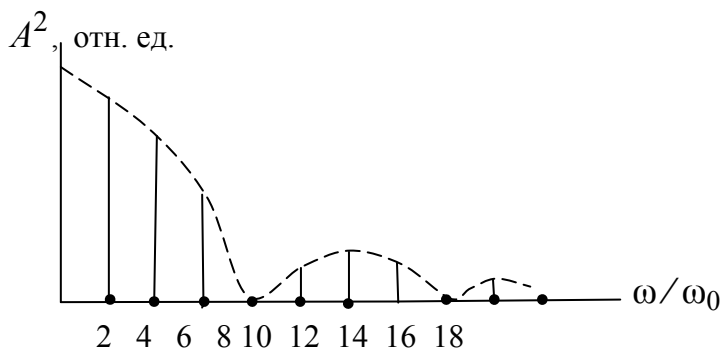


Рис. 36.4

Вычисление последнего интеграла представляем проделать любознательному читателю и убедиться, что $B_n = 0$. Качественная спектрограмма, соответствующая полученному разложению, изображена на рис. 36.4 ($\omega_0 = 2\pi/T$).

На практике принцип разложения Фурье используется для получения спектров различного рода сигналов, излучений и т.п.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется спектром функции? Спектрограммой?
2. Какова суть разложения Фурье?
3. Решите самостоятельно задачу о спектральном разложении несинусоидального периодического сигнала.

Библиографический список

1. *Трофимова, Т. И.* Оптика и атомная физика: законы, проблемы, задачи / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1999. – 288 с. – ISBN 5-06-00390-3.
2. *Иродов, И. Е.* Волновые процессы. Основные законы / И. Е. Иродов – М. – СПб. : Физматлит, 2001. – 256 с. – ISBN 5-93208-031-0.
3. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. В 3 т. Т.2 / И. В. Савельев – М. : Наука, 1978.– 480 с.
4. *Ландсберг, Г. С.* Оптика / Г. С. Ландсберг. – М. : Наука, 1976. – 928 с.
5. *Крауфорд, Ф.* Волны / Ф. Крауфорд. – М. : Наука, 1976. – 528 с.
6. Методические указания для самостоятельной работы студентов по физике. Электричество и оптика / Владим. политехн. ин-т ; сост. : А. Ф. Галкин [и др.] ; под ред. К. И. Пака. – Владимир, 1991. – 72 с.
7. Физика. Программа, методические указания и задачи для студентов-заочников (с примерами решения) / Владим. гос. ун-т ; сост.: А. Ф. Галкин [и др.] ; под ред. А. А. Кулиша. – Владимир, 2002. – 128 с.
8. *Иродов, И. Е.* Электромагнетизм. Основные законы / И. В. Иродов. – М. – СПб. : Физматлит, 2001. – 352 с. – ISBN 5-93208-001-9.
9. *Василевский, А. М.,* Оптическая электроника / А. М. Василевский, М. А. Кропоткин, В. В. Тихонов. – Л. : Энергоатомиздат, 1990. – 176 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	4
Лекция № 27 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	4
Лекция № 28 МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ	19
Лекция № 29 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	29
Лекция № 30 УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	39
ОПТИКА	51
Лекция № 31 РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД	51
Лекция № 32 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА	57
Лекция № 33 ДИФРАКЦИЯ СВЕТА	65
Лекция № 34 ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА	76
Лекция № 35 ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА	86
СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУРЬЕ	94
Лекция № 36 (дополнительная)	94
Библиографический список	98

Учебное издание

ГАЛКИН Аркадий Федорович

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Ч. 4. Колебания, волны, оптика

Подписано в печать 02.04.07.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,81 Тираж 495 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета

600000, Владимир, ул. Горького, 87.