Владимирский государственный университет

ПОМОЩЬ ПЕРВОКУРСНИКАМ
Математика и физика

Учебное пособие

Владимир 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ПОМОЩЬ ПЕРВОКУРСНИКАМ
Математика и физика

Учебное пособие

Владимир 2024

УДК 51:53
ББК 22.1+22.3
П55

Авторы-составители: Ю. К. Кокурина, М. А. Антонова

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Т. В. Прохорова

Кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Владимирского филиала Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
С. В. Никифорова

П55 **ПОМОЩЬ** ПЕРВОКУРСНИКАМ. Математика и физика : учеб. пособие / авт.-сост.: Ю. К. Кокурина, М. А. Антонова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 235 с. – ISBN 978-5-9984-1743-6.

Составлено на основе задач вступительных экзаменов последних 15 лет. Содержит необходимый справочный и теоретический материал, разбор решений типичных примеров и задания для самостоятельного решения. Может быть использовано для подготовки к экзаменам при поступлении в вузы.

Предназначено для самостоятельной подготовки выпускников школ, лицеев, колледжей к вступительным экзаменам, для преподавателей и слушателей подготовительных курсов, а также студентов первых курсов технического профиля. Пособие может быть полезным преподавателям математики и физики при организации занятий корректирующих курсов, а также судентам заочной и дистанционной форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 25. Библиогр.: 20 назв.

УДК 51:53
ББК 22.1+22.3

ISBN 978-5-9984-1743-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

N – множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
R – множество действительных чисел
$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A
$=$ – равно
$\neq$ – не равно
$>$ – больше
$<$ – меньше
$\geq$ – больше или равно
$\leq$ – меньше или равно
$\approx$ – приближённо равно
$\sqrt[n]{}$ – корень n-й степени
$\rightarrow$ – знак следствия
$\leftrightarrow$ – знак равносильности
$\varnothing$ – пустое множество
$\cup$ – знак объединения множеств
$\cap$ – знак пересечения множеств
% – процент
() – круглые скобки
[ ] – квадратные скобки
{ } – фигурные скобки
∞ – бесконечность
' – производная
$\int$ – интеграл

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для абитуриентов, а также студентов первых курсов технических специальностей для повторения школьного материала на занятиях корректирующих курсов, может быть полезно в том числе и для иностранных абитуриентов, желающих расширить и углубить свои знания по математике и физике, приобрести навыки решения типовых задач и самостоятельно оценить уровень своей подготовки относительно основным требованиям, принятым в России.

Задачи, изложенные в пособии, соответствуют минимальным требованиям программы для поступающих в российские вузы и охватывают основные разделы школьного курса.

В пособии приведены краткое описание программы по математике и физике, краткий справочный материал и некоторые примеры заданий. Для части этих заданий дано подробное решение, а для остальных – ответы, что позволит учащимся самостоятельно контролировать правильность выполнения экзаменационных заданий.

Книга может быть полезной слушателям подготовительных отделений

, студентам первых курсов, а также школьным учителям и преподавателям вузов в их повседневной работе.

ПРОГРАММА КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ

Элементарная математика

✓ Арифметика, алгебра и начала анализа

✓ Натуральные числа и нуль. Сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение натуральных чисел. Квадрат и куб натурального числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Четные и нечетные числа.

✓ Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25.

✓ Деление с остатком.

✓ Разложение натурального числа на простые множители. Делитель общий, кратное общее. Делитель общий наибольший, кратное общее наименьшее.

✓ Целые числа. Противоположные числа. Действия над целыми числами.

✓ Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение обыкновенных дробей. Сравнение обыкновенных дробей. Их сложение, вычитание, умножение и деление.

✓ Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Приближенное значение числа. Округление чисел.

✓ Рациональные числа. Действия над рациональными числами.

✓ Иррациональные числа. Действительные числа. Представление действительных чисел в форме десятичных дробей. Числовая прямая. Изображение чисел на числовой прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

✓ Проценты. Пропорции. Основные свойства пропорции. Прямая и обратная пропорциональность.

✓ Степень с натуральным и целым показателем. Свойства степеней с натуральным и целым показателями.

✓ Числовые выражения. Алгебраические выражения. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

✓ Одночлен и многочлен. Действия над многочленами. Разложение многочлена на множители. Тождественные преобразования многочленов.

✓ Алгебраическая дробь. Основное свойство дроби. Действия над алгебраическими дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений.

✓ Корень n-й степени ($n \in N$), его свойства для случаев четного и нечетного значений числа n. Арифметический корень. Свойства арифметических корней.

✓ Степень с рациональным показателем. Свойства степеней с рациональными показателями.

✓ Степень с действительным показателем.

✓ Арифметическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.

✓ Геометрическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.

✓ Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

✓ Уравнения. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Линейные уравнения.

✓ Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения.

✓ Приведенное квадратное уравнение.

✓ Теорема Виета (прямая и обратная).

✓ Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

✓ Биквадратное уравнение. Решение биквадратных уравнений.

✓ Решение рациональных уравнений.

✓ Решение иррациональных уравнений.

✓ Свойства числовых неравенств.

✓ Неравенство с одной переменной. Равносильные неравенства. Решение линейных неравенств вида $ax > b$; $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$; $b < ax < c$; $b \leq ax < c$; $b < ax \leq c$; $b \leq ax \leq c$.

✓ Квадратичное неравенство. Решение квадратичных неравенств.

✓ Решение рациональных неравенств.

✓ Решение уравнений и неравенств, которые содержат переменную под знаком модуля.

✓ Решение систем линейных и квадратных уравнений и неравенств.

✓ Расстояние между двумя точками координатной плоскости. Уравнение окружности.

✓ Единичная окружность. Определения тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Основные тригонометрические тождества.

✓ Синус, косинус, тангенс суммы (разности) двух аргументов (формулы сложения).

✓ Формулы приведения.

✓ Синус, косинус, тангенс двойного аргумента.

✓ Синус, косинус, тангенс половинного аргумента.

✓ Преобразование в произведение сумм $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$.

✓ Арксинус числа *a*.

✓ Арккосинус числа *a*.

✓ Арктангенс числа *a*.

✓ Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

✓ Решение тригонометрических уравнений, которые приводятся к простейшим.

✓ Свойства функции $y = ax + b$ и её график.

✓ Свойства функции $y = k / x$ (где $k \neq 0$) и её график.

✓ Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \sqrt{x}$ и её график.

✓ Свойства функции $y = x^n$ ($n \in R$) и её график.

✓ Свойства функции $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \log_a x$ (где $x > 0$, $a \neq 1$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \sin x$ и её график.

✓ Свойства функции $y = \cos x$ и её график.

✓ Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и её график.

✓ Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

✓ Определение логарифма. Логарифм произведения, степени, частного.

✓ Десятичные логарифмы. Натуральные логарифмы. Формула перехода от одного основания логарифма к другому.

✓ Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы.

✓ Понятие функции. Область определения функции. Область значений функции. Способы задания функции. График функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Чётность и нёчетность функции. Периодичность функции. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум функции.

✓ Производные основных функций. Касательная к графику функции.

✓ Решение задач с параметрами.

Основные умения и навыки

Абитуриент должен ***уметь***:

✓ выполнять арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; округлять с нужной точностью числа и результаты вычислений;

✓ проводить тождественные преобразования многочленов, рациональных выражений и выражений, которые содержат степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;

✓ строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;

✓ решать уравнения, системы уравнений и неравенств первой и второй степеней, уравнения и неравенства, которые приводятся к ним;

✓ решать рациональные уравнения и неравенства;

✓ решать текстовые задачи (включая задачи на проценты) по действиям или методом составления уравнений и их систем;

✓ решать иррациональные уравнения;

✓ решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства, их системы, тригонометрические уравнения;

✓ решать уравнения и неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля;

✓ решать задачи с векторами;

✓ решать задачи на исследование функций и построение их графиков;

✓ решать задачи на нахождение производных функций;

✓ решать задачи на нахождение касательных к графикам функций;

✓ решать уравнения, неравенства и системы с параметрами.

1. АРИФМЕТИКА

1.1. Признаки делимости натуральных чисел

1. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или является четным числом.

2. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначное число, делящееся на 4.

3. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры 000 или образуют трехзначное число, делящееся на 8.

4. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.

5. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.

6. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

7. Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

8. Число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначные числа 25, 50, 75.

9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, равна 0 или делится на 11.

Пример. Найти сумму всех натуральных двузначных чисел, которые при делении на 6 дают в остатке 4.

Решение. Выпишем натуральные числа, которые при делении на 6 дают в остатке 4, выделим двузначные и зачеркнём числа, не являющиеся двузначными: 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, 76, 82, 88, 94. Сумма выделенных чисел равна 780.

Ответ: 780.

1.2. НОД, НОК

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, являющееся делителем всех данных чисел.

Способ нахождения НОД: разложить числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

Способ нахождения НОК: разложить числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Для двух натуральных чисел a и b выполняется равенство

НОД(a;b)·НОК(a;b) = a·b.

<u>*Пример.*</u> Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 540 и 504.

Решение. $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0$; $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$.

НОД(540;504) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0$ = 36; НОК(540;504) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ = = 7560.

Следовательно, $\frac{\text{НОК}}{\text{НОД}} = \frac{7560}{36}$ = 210. *Ответ*: 210.

1.3. Пропорция

Пропорцией называется верное равенство вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $bd \neq 0$

Свойства пропорции.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, ac \neq 0$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, a \neq b, c \neq d$

5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Пример. Числители трёх дробей пропорциональны числам 1, 3, 2, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 5, 3. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{34}{135}\cdot$ Найти наименьшую из дробей.

Решение. Дроби, о которых идёт речь, можно записать так: $a=\frac{1x}{1y};b=\frac{3x}{5y};c=\frac{2x}{3y}$.

После приведения к общему знаменателю: $a=\frac{15x}{15y};b=\frac{9x}{15y};c=\frac{10x}{15y}$.

Ясно, что наименьшей дробью является b. Среднее арифметическое всех дробей равно $\frac{a+b+c}{3}=\frac{34x}{45y}=\frac{34}{135}\cdot$ Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\cdot$ Следовательно, $b=\frac{3x}{5y}=\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}\cdot$ *Ответ*: $\frac{1}{5}$.

1.4. Проценты

Процентом числа называется сотая его часть.

Если число *a n* раз последовательно увеличивать на *p %,* то получится число $a\cdot\left(1+\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

Если число *a n* раз последовательно уменьшать на *p %,* то получится число $a\cdot\left(1-\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

Процент изменения любой величины вычисляется по формуле

$$\frac{(\textit{конечное значение})-(\textit{начальное значение})}{(\textit{начальное значение})}\cdot 100\%.$$

Если результат получится положительным, то величина увеличилась.

Если результат получился отрицательным, то величина уменьшилась.

Пример. Два числа относятся как 4:3. Первое увеличили на 5 %, второе уменьшили на 2 %. На сколько процентов изменилась их сумма?

Решение. Пусть $4x$ и $3x$ – первоначально данные числа. Их сумма равна $\sum_{нач} = 4x + 3x = 7x.$ После изменения чисел сумма стала равняться $\sum_{кон} = (4x + 5\% \cdot 4x) + (3x - 2\% \cdot 3x) = (4x + 0{,}05 \cdot 4x) + (3x - 0{,}02 \cdot 3x) = 7{,}14x.$ Процент изменения суммы равен $\dfrac{\sum_{кон} - \sum_{нач}}{\sum_{нач}} \cdot 100\% = \dfrac{7{,}14x - 7x}{7x} = 2\%.$

Ответ: сумма увеличилась на 2 %.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму первых двадцати натуральных чётных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 6.
2. Найти сумму всех чётных чисел k, каждое из которых делится без остатка на 7 и удовлетворяет условию $-140 \le k < 295$.
3. Найдите частное от деления наименьшего общего кратного чисел 156, 234, 78 на их наибольший общий делитель.
4. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 10 %, а другое уменьшить на 20 %?
5. Числитель дроби уменьшили на 1 %, а знаменатель – на 12 %. На сколько процентов изменилась дробь?

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ЧИСЛОВЫЕ УПРОЩЕНИЯ

2.1. Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot (a + b)$ – куб суммы

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a - b)$ – куб разности

2.2. Свойства степеней

Произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$ n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a и обозначается через a^n $(a \in R, n \in N, n \neq 1)$. При этом a называется основанием, а n − показателем степени. При $n = 1$ просто полагают $a^1 = a$.

Свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}, n \geq m$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

Степенью с отрицательным целым показателем называется число, где $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \in R, a \neq 0, n \in N.$ Нулевую степень числа $a \neq 0$ полагают по определению равной единице: $a^0 = 1, a \neq 0.$

Свойства 1 – 5 степени с натуральным показателем справедливы и для степени с целым показателем.

2.3. Корень *n*-й степени

Корнем n-й степени $(n \in N, n \neq 1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a (т. е. $b^n = a$).

Арифметическим корнем n-й степени $(n \in N, n \neq 1)$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Свойства арифметического корня:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, a \geq 0, n, m, k \in N, n \neq 1$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, a \geq 0, b \geq 0, n \in N, n \neq 1$

3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, a\ge 0, b>0, n\in N, n\ne 1$

4. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m b^n}, a\ge 0, b\ge 0, n,m\in N, n\ne 1, m\ne 1$

5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}, a\ge 0, b>0, n,m\in N, n\ne 1, m\ne 1$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}, a\ge 0, n,m\in N, n\ne 1, m\ne 1$

7. $(\sqrt[n]{a})^n=a, a\ge 0, n\in N, n\ne 1$

8. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|, a\in R, n\in N$

9. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a, a\in R, n\in N$

Степенью с рациональным показателем называется число $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, a>0, m\in Z, n\in N, n\ne 1.$

2.4. Модуль

Алгебраическое определение модуля:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{если} \quad a\ge 0 \\ -a, \text{если} \quad a<0 \end{cases}$$

Геометрическое определение модуля: модуль числа a равен расстоянию на числовой прямой от точки, соответствующей числу a, до начала отсчета 0.

Свойства модуля (здесь везде $a\in R, b\in R$):

1. $|a|\ge 0$
2. $|a|=|-a|$
3. $|a|\ge a$
4. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}, b\ne 0$
6. $|a|^2=a^2$
7. $|a^n|=|a|^n$
8. $|a+b|\le|a|+|b|$
9. $|a|-|b|\le|a-b|$

10. $|a|+|b|=|a+b| \leftrightarrow ab \geq 0$

11. $|a|+|b|=|a-b| \leftrightarrow ab \leq 0$

<u>*Пример*</u>. Дано: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$. Упростить выражение $f(x+2)-f(x+8)$.

Решение.

$$f(x+2)-f(x+8)=\frac{3\cdot(x+2)+2}{(x+2)-5}-\frac{3\cdot(x+8)+2}{(x+8)-5}=\frac{3x+8}{x-3}-\frac{3x+26}{x+3}=\frac{102}{x^2-9}.$$

<u>*Пример*</u>. Дано: $\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t}=2$. Вычислить $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}$.

Решение. Обе части данного уравнения умножим на сопряжённое выражение.

Получим $(\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t})\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})=2\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})$;

$(8-t)-(3-t)=2\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})$. Отсюда $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}=\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\dfrac{5}{2}$.

<u>*Пример*</u>. Вычислить $A=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^3+1-\sqrt{6}}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Решение. Сначала упростим подкоренное выражение.

$(\sqrt{6}+1)^3+1-\sqrt{6}=(\sqrt{6})^3+3\cdot(\sqrt{6})^2+3\cdot\sqrt{6}+1+1-\sqrt{6}=$

$=6\cdot\sqrt{6}+18+3\cdot\sqrt{6}+2-\sqrt{6}=8\cdot\sqrt{6}+20.$

Итак,

$A=\sqrt{8\cdot\sqrt{6}+20}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-\sqrt{(8\cdot\sqrt{6}+20)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=$

$=-\sqrt{(8\cdot\sqrt{6}+20)\cdot(3-2\cdot\sqrt{6}+2)}=-\sqrt{4}=-2.$

Ответ: –2.

<u>*Пример*</u>. Вычислить $A=\dfrac{10}{1-\sqrt{6}}+\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{3}{\sqrt{6}-3}$.

Решение. Числители и знаменатели всех дробей домножим на «сопряжённые выражения». Получим

$$A=\frac{10\cdot(1+\sqrt{6})}{(1-\sqrt{6})\cdot(1+\sqrt{6})}+\frac{2\cdot(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)\cdot(\sqrt{6}+2)}-\frac{3\cdot(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)\cdot(\sqrt{6+3})}=$$

$$= \frac{10 \cdot (1+\sqrt{6})}{1-6} + \frac{2 \cdot (\sqrt{6}+2)}{6-4} - \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+3)}{6-9} =$$
$$= -2 \cdot (1+\sqrt{6}) + (\sqrt{6}+2) + (\sqrt{6}+3) = 3.$$

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Упростить выражение $A = \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3} + \frac{x^2-18x-40}{x^2-x-6} + \frac{x^3+27}{x^2-9}$.

2. Дано: $\sqrt{3-t} - \sqrt{2-t} = 1$. Вычислить $\sqrt{3-t} + \sqrt{2-t}$.

3. Дано: $f(x) = \frac{2x-3}{x-4}$. Упростить выражение $f(x^2) - f(x+2)$.

4. Вычислить $\frac{(2-\sqrt{3})^3 + 4}{\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}}$.

5. Вычислить $\sqrt{(3-\sqrt{5})^3 + 24} \cdot (1+\sqrt{5})$.

3. ПРОГРЕССИИ

3.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, у которой каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же действительным числом *d*, называемым разностью арифметической прогрессии. Т. е. $a_{n+1} = a_n + d \quad (n \in N, d \in R)$.

Формула общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Свойства членов арифметической прогрессии:

1. Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому своих соседних: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

2. Суммы членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от её концов, равны между собой и равны сумме первого и последнего: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

<u>Пример</u>. В арифметической прогрессии сумма пятого и девятого членов равна 36. Найти сумму первых тринадцати членов прогрессии.

Решение. Имеем: $a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d = 2 \cdot (a_1 + 6d) = 36.$

Отсюда $a_1 + 6d = 18.$

Следовательно $S_{13} = \dfrac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d) \cdot 13 = 18 \cdot 13 = 234.$

Ответ: 234.

<u>Пример</u>. В арифметической прогрессии сумма первых шести членов равна 12, разность прогрессии равна –2, последний член равен –19. Найти количество членов прогрессии.

Решение. По условию, $d = -2,$ а также

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5 \cdot (-2)) \cdot 3 = 12.$$

Следовательно $a_1 = 7.$ Затем используем формулу общего члена.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1) \cdot (-2) = -19.$ Отсюда $n = 14$.

Ответ: 14.

<u>Пример</u>. Сумма первых n членов некоторой последовательности задана формулой $S_n = \dfrac{3n^2 - 11n}{4} \cdot$ Найти четвёртый член этой последовательности.

Решение. По определению

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4.$$

Следовательно $a_4 = S_4 - S_3 = \dfrac{3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4}{4} - \dfrac{3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3}{4} = 2{,}5.$

Ответ: 2,5.

3.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел $b_1, b_2 ..., b_n, ...$, у которой каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же действительное число $q \neq 0$, называемое знаменателем геометрической прогрессии. Т. е. $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (n \in N, q \in R, q \neq 0)$.

Формула общего члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Свойства членов геометрической прогрессии:

1. Любой член знакоположительной геометрической прогрессии, кроме первого, равен среднему геометрическому своих соседних:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Любой член произвольной геометрической прогрессии, кроме первого, обладает тем свойством, что $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

2. Произведения членов конечной геометрической прогрессии, равноотстоящих от её концов, равны между собой и равны произведению первого и последнего:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ при $q \neq 1$ и равна $S_n = n \cdot b_1$ при $q = 1$.

Бесконечная геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если $|q| < 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

__Пример__. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 5, а сумма последних двух равна 20. Найти первый член прогрессии.

Решение.

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 5 \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 20. \end{cases}$$

Разделив вторую строку на первую, получим $q^2 = 4$, $q = \pm 2$. Так как по условию прогрессия возрастает, $q = 2$. Из первого уравнения системы получим $b_1 = \frac{5}{1+q} = \frac{5}{3}$. *Ответ*: $\frac{5}{3}$.

<u>*Пример*</u>. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если произведение её первых трёх членов равно 8, а их сумма равна $\frac{19}{3}$.

Решение.

$$\begin{cases} b_1^3 q^3 = 8 \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = \frac{19}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \frac{2}{b_1} \\ b_1 + 2 + \frac{4}{b_1} = \frac{19}{3} \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдём $b_1 = 3$ или $\frac{4}{3}$. С учётом убывания последовательности оставляем первый вариант. *Ответ*: 3.

<u>*Пример*</u>. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$. Найти b_3.

Решение.

$b_3 = S_3 - S_2 = \frac{3^3 + (-1)^4}{3^2} - \frac{3^2 + (-1)^3}{3} = \frac{4}{9}$. *Ответ*: $\frac{4}{9}$.

<u>*Пример*</u>. В геометрической прогрессии, все члены которой отрицательны, произведение первого и седьмого членов равно 81. Найти $A = a_4^2 + a_4 + 12$.

Решение. $a_1 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 q^6 = a_1^2 q^6 = (a_1 q^3)^2 = a_4^2 = 81$.

Отсюда $a_4 = \pm\sqrt{81} = \pm 9$.

Условию задачи удовлетворяет $a_4 = -9$. Следовательно $A = (-9)^2 - 9 + 12 = 84$.

Ответ: 84.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма второго и седьмого равна 3. Найти шестой член прогрессии.

2. Найдите наименьшую из сумм первых *n* членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -157$ и $a_2 = -143$.

3. В арифметической прогрессии известны члены $a_{10} = 3$ и $a_{100} = 543$. Укажите номер *K* члена этой прогрессии, начиная с которого все её члены не меньше 213.

4. В арифметической прогрессии $a_{15} = -19$ и $a_{22} = -14$. Найдите количество положительных членов прогрессии, каждый из которых не больше 21.

5. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 2, а сумма последних двух равна 18. Найти первый член прогрессии.

6. В знакочередующейся геометрической прогрессии первый член равен 2, а сумма третьего и пятого членов равна 180. Найдите второй член прогрессии.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

4.1. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и её графика

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и её графика определяются прежде всего значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

При $a > 0$ график – парабола с ветвями, направленными вверх (рис. 1, а,б,в). При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз (рис. 1, г,д,е). Если $a = 0$, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является прямая, наклонная, если $b \neq 0$, уравнение $ax^2+bx+c=0$ при этом имеет единственный корень, (рис.1, ж); горизонтальная, если $b=0$, причём, если $c \neq 0$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней, (рис.1, з), если $c=0$, линия $y=ax^2+bx+c$ совпадает с осью *OX*, уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет бесконечно много корней (рис. 1, и).

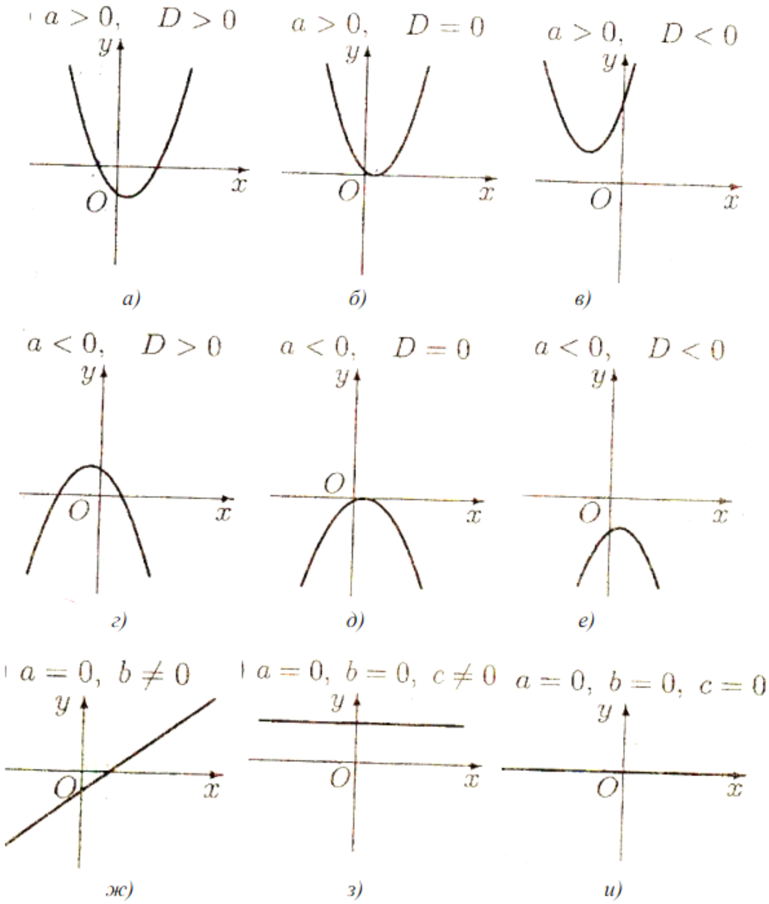


Рис. 1

При $a \neq 0$ линия $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось *OX* в двух точках, квадратный трёхчлен ax^2+bx+c раскладывается на линейные множители, а уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня, если $D>0$, (рис. 1, а, г); линия $y=ax^2+bx+c$ касается оси *OX*, уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один «двойной» корень, а квадратный трёхчлен ax^2+bx+c представляет собой полный квадрат при $D=0$, (рис.1, б,д); линия $y=ax^2+bx+c$ не имеет общих точек с осью *OX*, уравнение не имеет корней вовсе, если $D<0$, (рис. 1, в, е).

При $a \neq 0$ вершина параболы расположена в точке $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.

Пример. Найти все значения параметра *a*, при которых график функции $y = a(a+1)x^2 + 2(a+1)x + 2$ не имеет общих точек с осью *OX*.

Решение. Рассмотрим отдельно случай равенства нулю коэффициента при x^2: $a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = -1$. При $a = 0$ уравнение линии имеет вид $y = 2x + 2$,

Имеется общая с осью *OX* точка (–1, 0). При $a = -1$ уравнение линии имеет вид $y = 2$, линия общих точек с осью *OX* не имеет, следовательно, $a = -1$ – часть ответа.

Если коэффициент при x^2, $a(a+1) \neq 0$, то график функции является параболой и общих точек с осью *OX* он иметь не будет тогда и только тогда, когда дискриминант отрицателен:

$$D < 0 \Leftrightarrow 4(a+1)^2 - 8a(a+1) < 0 \Leftrightarrow 4(a+1)(1-a) < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Объединяя оба результата, получим ответ.

Ответ: $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

Пример. Найти все значения параметра *a*, при которых график функции $y = (a+2)x^2 + 2ax - a$ имеет с осью абсцисс две общие точки.

Решение. График имеет две общие точки с осью OX в случае, когда это парабола и $D > 0$:

$$\begin{cases} a + 2 \neq 0 \\ (2a)^2 - 4(a+2)(-a) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -2 \\ 4a(a+1) > 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

Ответ: $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, \infty)$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=(a+1)x^2+(a-2)x+1$ имеет с осью OX только одну общую точку.

Решение. График будет иметь с осью OX только одну общую точку в одном из двух случаев: график – наклонная прямая или график – парабола, касающаяся оси OX. Для определения параметра получаем систему

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1=0 \\ a-2\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a+1\neq 0 \\ (a-2)^2-4(a+1)\cdot 1=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая подсистема даёт $a=-1$, вторая $a=0$, $a=8$.

Ответ: –1, 0, 8.

4.2. Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$

Обозначим $f(x)=x^2+px+q;\ D=p^2-4q$ – дискриминант.

1. При каких значениях уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни, меньшие данного значения x_0? Ответ на этот вопрос следующий:

$$\begin{cases} D\geq 0 \ \textit{(существование корней)}, \\ -\dfrac{p}{2}<x_0 \ \textit{(абсцисса вершины параболы } y=f(x) \textit{ находится слева от } x_0\textit{)}, \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D\geq 0$ следует писать $D>0$.

2. При каких значениях уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни, большие данного значения x_0? Ответ на этот вопрос следующий:

$$\begin{cases} D\geq 0 \ \textit{(существование корней)}, \\ -\dfrac{p}{2}>x_0 \ \textit{(абсцисса вершины параболы } y=f(x) \textit{ находится слева от } x_0\textit{)}, \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D\geq 0$ следует писать $D>0$.

3. При каких значениях уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, один из которых больше, а другой меньше, чем x_0? Ответ на этот вопрос следующий: $f(x_0) < 0$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+3)x^2 + 4x + 2 - a = 0$ имеет только отрицательные корни.

Решение. Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т. е. $a = -3$.

Тогда получим уравнение $4x + 5 = 0$, корень которого $x = -1{,}25 < 0$, что соответствует условию задачи. Следовательно, $a = -3$ нужно включить в ответ.

Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т. е. $a \neq -3$.

Разделим уравнение на $a + 3$ и введём обозначения:

$$f(x) = x^2 + \frac{4}{a+3} \cdot x + \frac{2-a}{a+3} = 0; \quad p = \frac{4}{a+3}; \quad q = \frac{2-a}{a+3}; \quad x_0 = 0;$$

$D = p^2 - 4q = \dfrac{4a^2 + 4a - 8}{(a+3)^2}$. Нужно решить систему $\begin{cases} D \geq 0 \\ -\dfrac{p}{2} < x_0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{4a^2 + 4a - 8}{(a+3)^2} \geq 0 \\ -\dfrac{2}{a+3} < 0 \\ f(0) = \dfrac{2-a}{a+3} > 0 \end{cases}.$$ Отсюда $a \in (-3;-2] \cup [1;2)$.

Ответ. $[-3;-2] \cup [1;2)$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2 - 6x + a - 8 = 0$ больше, а другой меньше, чем 2.

Решение. Так как уравнение имеет два корня, то коэффициент при x^2 не равен нулю, т. е. $a \neq 0$. Разделим уравнение на a и обозначим: $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{a} \cdot x + \dfrac{a-8}{a} = 0$; $x_0 = 2$. Нужно решить неравенство $f(x_0) = f(2) = 4 - \dfrac{12}{a} + \dfrac{a-8}{a} < 0$. *Ответ.* (0; 4).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=(a+4)x^2+6x+a-4$ имеет с осью абсцисс две общие точки.

2. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=a(4-a)x^2+2ax+1$ не имеет общих точек с осью OX.

3. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=(a+2)x^2+4x+3-a$ имеет с осью OX только одну общую точку.

4. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=a(a+1)x^2+2(a+1)x-a-1$ имеет с осью OX более одной общей точки.

5. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $(a+3)x^2+4x+2-a=0$ больше, а другой меньше, чем –1.

5. УРАВНЕНИЯ

5.1. Квадратные уравнения. Теорема Виета

Квадратным относительно переменной x называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$.

Количество корней квадратного уравнения определяется значением дискриминанта квадратного трехчлена: $D=b^2-4ac$.

Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D=0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета (прямая). Если x_1 и x_2 − корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Теорема Виета (обратная). Если два действительных числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Следствия *из теоремы Виета (разложение квадратного трёхчлена на множители):*

1. Если x_1 и x_2 − корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c = 0$ имеет равные корни $x_1 = x_2$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

3. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, то он не разлагается на множители.

Исследование знаков корней квадратного уравнения

1. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если они существуют, положительны тогда и только тогда, если

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

2. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если они существуют, отрицательны тогда и только тогда, если

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

3. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеют разные знаки тогда и только тогда, если $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$.

4. Один из корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю тогда и только тогда, если $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \neq 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 0. \end{cases}$

5. Оба корня квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0. \end{cases}$

<u>Пример</u>. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2-x-10=0$.

Решение. Легко видеть, что дискриминант уравнения положителен и существуют два различных корня x_1 и x_2. Возможно и непосредственное вычисление суммы $x_1^3+x_2^3$, но проще воспользоваться формулами Виета и тождеством:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1^3-3\cdot(-10)\cdot 1=31.$$

Ответ. 31.

<u>Пример</u>. Найти площадь прямоугольника, длины сторон которого численно равны корням уравнения $\sqrt{2}x^2-17x+3=0$.

Решение. $S=x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=1{,}5\sqrt{2}.$

Ответ. $1{,}5\sqrt{2}$.

<u>Пример</u>. Найти $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2+2x-11=0$.

Решение. По теореме Виета имеем: $x_1+x_2=-1$ и $x_1\cdot x_2=-\dfrac{11}{2}$.

Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=\frac{(x_1+x_2)-2}{x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{-1-2}{-\frac{11}{2}-(-1)+1}=\frac{6}{7}.$$

Ответ. 6/7.

<u>Пример</u>. Найти значения k, при которых корни уравнения $x^2+x+k=0$ связаны соотношением $2x_1+x_2=2$.

Решение. Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -1$, и для определения корней получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$.

Опять используя теорему Виета находим $k = x_1 \cdot x_2 = -12$.

Ответ. –12.

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3 - 4x^2 - 27x + 90 & x - 3 \\
\underline{x^3 - 3x^2} \qquad\qquad\quad & \overline{x^2 - x - 30} \\
-\; -x^2 - 27x + 90 & \\
\underline{-x^2 + 3x} \qquad\; & \\
-\; -30x + 90 & \\
\underline{-30x + 90} & \\
0 &
\end{array}
$$

<u>*Пример*</u>. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1^2 и x_2^2, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + 4x - 7 = 0$.

Решение. По формулам Виета $x_1 \cdot x_2 = -7, x_1 + x_2 = -4$. Пусть искомое уравнение: $x^2 + px + q = 0$. Тогда $q = x_1^2 x_2^2 = (-7)^2 = 49$,

$-p = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4)^2 - 2(-7) = 30$.

Ответ. $x^2 - 30x + 49 = 0$.

Теорема Безу. Если x_1 является корнем некоторого многочлена, то этот многочлен делится на $x - x_1$.

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение $x^3 - 4x^2 - 27x + 90 = 0$.

Решение. Подставляя в данное уравнение числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, найдём первый корень уравнения $x_1 = 3$. По теореме Безу левая часть уравнения делится на $x - 3$. Процесс деления показан ниже.

Приравниваем к нулю то, что получилось в результате деления: $x^2 - x - 30 = 0$ и находим остальные корни $x_2 = -5, x_3 = 6$.

Ответ. 3; –5; 6.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 6x - 2 = 0$.
2. Найти длину средней линии трапеции, длины оснований которой численно равны корням уравнения $\sqrt{3}x^2 - 9x + 5 = 0$.

3. Найти $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - x - 1 = 0$.

4. Найти значения *k,* при которых корни уравнения $x^2 - 5x + k = 0$ связаны соотношением $2x_1 - x_2 = 4$.

5. Решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.

5.2. Рациональные уравнения

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3} = x^2 + 3x - 14$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ): $x - 3 \neq 0$, т. е. $x \neq 3$. Заметим, что значение x = 3 является корнем числителя $x^2 - 2x - 3$. По теореме Безу числитель делится на $x - 3$. Разделив числитель на $x - 3$, получим $x + 1$. Следовательно, уравнение примет вид $x + 1 = x^2 + 3x - 14$. Корни этого уравнения x_1 = 3 ∉ ОДЗ, x_2 = –5 ∈ ОДЗ.

Ответ. –5.

<u>*Пример*</u>. Найти целые корни уравнения $\dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = 2$.

Решение. $3 \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x} = 2$. Обозначим $t = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 1}$. Получим уравнение $3t - \dfrac{1}{t} = 2$. Его корнями являются числа $t_1 = 1, t_2 = -\dfrac{1}{3}$. После обратной замены получим два уравнения:

1) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 1} = 1$ и 2) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - x + 1} = -\dfrac{1}{3}$. Корни этих уравнений: $x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = -1, x_3 = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ. –1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x^2 - 6x + 8$.

2. Найти рациональные корни уравнения $\frac{5x^2-4}{x}+\frac{2x}{5x^2-4}=3$.

3. Найти сумму корней или корень (если он единственный) уравнения

$$\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}}=\frac{4}{\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}}.$$

5.3. Иррациональные уравнения

Схемы решения простейших иррациональных уравнений, содержащих квадратные корни

1. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a$

– при $a<0$ не имеет решений;

– при $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

– при $a>0$ равносильно уравнению $f(x)=a^2$.

2. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$

3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Пример. Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$.

Решение. В области допустимых значений: $x\geq -1$ являются равносильными следующие уравнения: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$,

$\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3}$,

$2x+5=x+1+2\sqrt{3}\sqrt{x+1}+3$,

$x+1=2\sqrt{3}\sqrt{x+1}$,

$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{3})=0$.

В квадрат возводились положительные выражения. Отсюда или $x+1=0, x_1=-1,$ или $\sqrt{x+1}-2\sqrt{3}=0, x_2=11$. Оба значения являются корнями, так как входят в область допустимых значений и нужно только выбрать из них наибольший.

Ответ. 11.

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+5x+1}=5-2x^2-5x$.

Решение. С помощью замены $t = 2x^2 + 5x$ приведём уравнение к виду $\sqrt{t+1}=5-t$. ОДЗ: $t+1\geq 0$. ДУ: $5-t\geq 0$. Возведём уравнение в квадрат.

$t+1=25-10t+t^2; t^2-11t+24=0; t_1=8$ (не удовлетворяет ДУ); $t_2=3$ (удовлетворяет ОДЗ и ДУ). После обратной замены получим: $2x^2+5x=3$, откуда $x_1=-3, x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ. –3; 1/2.

<u>*Пример*</u>. Найти количество различных корней уравнения $\sqrt{\sqrt{11x^2+1}-2x}=x-1$.

Решение. ОДЗ: $\sqrt{11x^2+1}-2x\geq 0$. ДУ: $x-1\geq 0$. Возведём уравнение в квадрат. Получим $\sqrt{11x^2+1}-2x=x^2-2x+1; \sqrt{11x^2+1}=x^2+1$. Ещё раз возведём в квадрат. Получим $11x^2+1=x^4+2x^2+1; x^4-9x^2=0; x^2(x^2-9)=0$. Последнее уравнение имеет три корня 0, 3, –3, из которых лишь $x=3$ удовлетворяет ОДЗ и ДУ.

Ответ. 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $x=4+\sqrt{23-2x}$.
2. Решить уравнение $\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{6-3x}=2-x$.
3. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$.

4. Найти целый корень уравнения $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-2}=x^2-7$.

5. Решить уравнение $\sqrt{5x+3-2x^2}=(3x+1)\cdot\sqrt{3-x}$.

5.4. Уравнения с модулем

Схемы решения простейших уравнений, содержащих модуль:

1. Уравнение вида $|f(x)|=a$

– при $a<0$ не имеет решений;

– при $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

– при $a>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$

2. Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

3. Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$ при условии, что $g(x)\ge 0$.

Иногда полезно использовать равенство $|x|=\sqrt{x^2}$ и соотношения при $a>0$

$$|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a,$$

$|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge a$ или $x\le -a$.

Решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, производится на основе его определения путём перебора вариантов знаков выражения, стоящего под знаком модуля. Уравнение с модулем таким образом заменяется на равносильную систему, не содержащую модулей.

Пример. Найти корень уравнения $|7x-2|-|8+4x|=-7-3x$, принадлежащий промежутку $(-1;\frac{1}{3})$.

Решение. Найдём точки, принадлежащие данному промежутку, в которых имеющиеся модули равны нулю: $7x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}\in(-1;\frac{1}{3})$
,
$8+4x=0 \Rightarrow x=-2\notin(-1;\frac{1}{3})$. Следовательно, данный промежуток можно представить в виде объединения двух промежутков. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x\in\left(-1;\frac{2}{7}\right]$. Тогда $|7x-2|=-7x+2, |8+4x|=8+4x,$ и уравнение примет вид $-7x+2-(8+4x)=-7-3x,$ откуда $x=\frac{1}{8}\in\left(-1;\frac{2}{7}\right]$ является решением данного уравнения.

2) Пусть $x\in\left[\frac{2}{7};\frac{1}{3}\right)$. Тогда $|7x-2|=7x-2, |8+4x|=8+4x,$ и уравнение примет вид $7x-2-(8+4x)=-7-3x,$ откуда $x=\frac{1}{2}\notin\left[\frac{2}{7};\frac{1}{3}\right)$ не является решением данного уравнения.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Пример. Найти корень уравнения $\left|15-|5x+3|\right|=11$, принадлежащий промежутку $(-6;-2]$.

Решение. Ход решения данной задачи:

$15-|5x+3|=11;\ 15-|5x+3|=-11;$

$|5x+3|=4;\quad |5x+3|=26;$

$5x+3=\pm4;\quad 5x+3=\pm26;$

$x_1=\frac{1}{5}; x_2=-\frac{7}{5}.\quad x_3=\frac{23}{5}; x_4=-\frac{29}{5}.$

Ответ. $-\frac{29}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наименьший корень уравнения $(x+2)(|x|-2)=-1$.
2. Найти сумму корней уравнения $|x^2-12|=-4x$.
3. Найти произведение корней уравнения $|x+2|\cdot x^2=16x+32$.
4. Найти сумму корней уравнения $||x-2|+2|=3$.
5. Решить уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$.

6. НЕРАВЕНСТВА

6.1. Рациональные неравенства

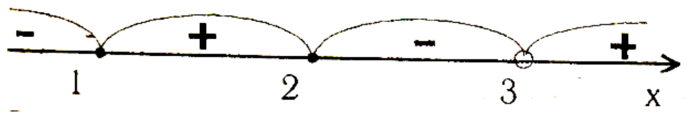
Решать дробно – линейные, а также другие рациональные неравенства можно с помощью интервалов, который объясним на примерах.

<u>*Пример*</u>. Решить неравенство $\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geq 0$.

Решение. Найдём критические точки, которые являются корнями как числителя, так и знаменателя: $x^2-3x+2=0$ имеет корни $x_1=1, x_2=2,$ а корень знаменателя $x_3=3.$

Критические точки отметим на числовой оси (заштриховывая корни числителя, так как неравенство нестрогое, и «вырезая» корни знаменателя) и посмотрим знаки функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$ в каждом полученном интервале.

Из интервала (–∞ ; 1) возьмём, например, точку 0 и вычислим $f(0)=-\dfrac{2}{3}\cdot$ Следовательно, на самом левом интервале ставим знак «–» (минус). Так как $\dfrac{3}{2}\in(1;2)$ и $f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$, то на следующем интервале знак «+» (плюс). Аналогично, подставляем вместо x числа $\frac{5}{2}$ и 6, находим знаки функции $f(x)$ на остальных интервалах:



Так как по условию $f(x) \geq 0$, то выбираем знаки «+».

Ответ. $x \in [1;2] \cup (3;\infty)$.

При решении примеров абитуриенты стараются избегать словарных описаний. Решение примера можно оформить так.

__Пример__. Решить неравенство $\frac{x^2+10x+27}{x+3} < 11.$

Решение.

$$\frac{x^2+10x+27}{x+3} < 11 \Leftrightarrow \frac{x^2+10x+27}{x+3} - 11 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x+3} < 0.$$

Корни числителя $x_1 = -2, x_2 = 3$, а корень знаменателя $x_3 = -3$. Отметим знаки дроби $\frac{x^2-x-6}{x+3}$:

Ответ. $x \in (-\infty;-3) \cup (-2;3)$.

Правило чередования знаков.

Если сомножитель $x - x_0$ стоит в нечётной степени (например, в 1-й, в 3-й, в 5-й и т. д.), то при переходе через точку x_0 знаки чередуются.

Если сомножитель $x - x_0$ стоит в чётной степени (например, в 0-й, во 2-й, в 4-й и т. д.), то при переходе через точку x_0 знаки не чередуются.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наименьшее целое решение неравенства
$$\frac{(x+1)(x^2-4x-5)}{x^4-1} \geq 0.$$

2. Найти число целых решений неравенства
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}.$$

3. Найти сумму целых решений неравенства
$$\frac{5x-31}{(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)} \geq \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

4. Решить двойное неравенство $-1 < \dfrac{x^2+10x+27}{x+3} \leq 11$.

6.2. Иррациональные неравенства

Неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными. Основным методом решения таких неравенств является метод возведения в квадрат. При решении важен учёт ОДЗ. При возведении в квадрат неравенства также можно приобрести побочные решения, но в отличие от уравнения отсечение побочных решений с помощью проверки невозможно и приходится внимательно следить за эквивалентностью совершаемых преобразований. Безнаказанно можно возводить в квадрат лишь неравенства, правая и левая части которых положительны. Решение иррациональных неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

1. $\sqrt{f(x)} < a \quad (a > 0 - \text{\textit{число}}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^2 \end{cases}$

Пример. $\sqrt{\dfrac{5x-2}{x^2-5x+6}} < 3$

Решение. С учётом ОДЗ исходное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 \leq \dfrac{5x-2}{x^2-5x+6} < 9$, что в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{5x-2}{x^2-5x+6} \geq 0 \\ \dfrac{5x-2}{x^2-5x+6} < 9 \end{cases}$$ Найдём корни знаменателей: $x_1 = 2, x_2 = 3.$

Второе из этих неравенств преобразуем к виду

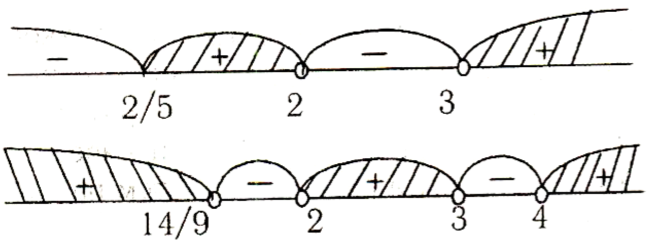
$$\frac{-9x^2+50x-56}{x^2-5x+6} < 0$$ или

$$\frac{9\left(x-\dfrac{14}{9}\right)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0.$$

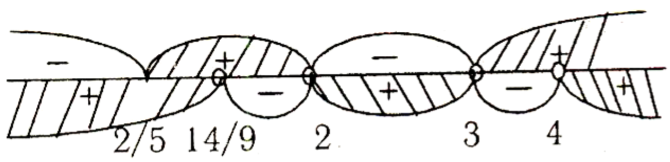
Таким образом, имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{5(x-2/5)}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \\ \dfrac{9(x-14/9)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство методом интервалов.



Перенесём решения неравенств на общий рисунок



Ответ. $\left[\dfrac{2}{5}; \dfrac{14}{9}\right) \cup (4; +\infty).$

2. $\sqrt{f(x)} < \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$

<u>Пример</u>. $\sqrt{\dfrac{3x+10}{x-1}} < \sqrt{5x+6}$

Решение. Перейдём к системе неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x+10}{x-1} \geq 0 \\ 5x+6 \geq 0 \\ \dfrac{3x+10}{x-1} < 5x+6 \end{cases}$

Упростим последнее неравенство:

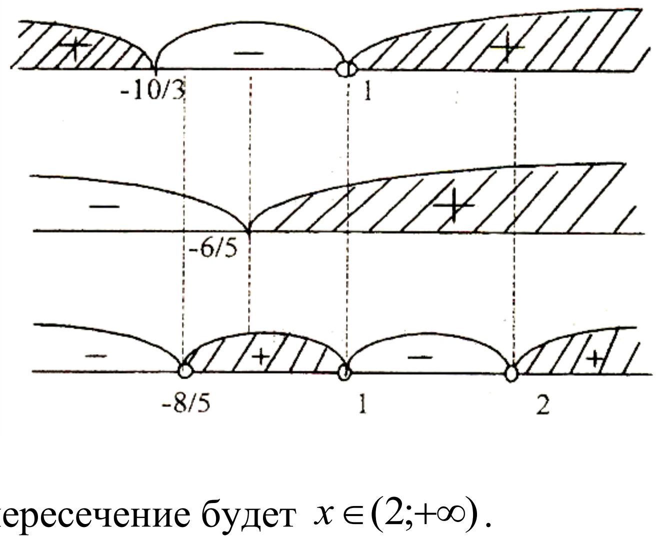
$\dfrac{3x+10}{x-1} - (5x+6) < 0,\quad \dfrac{3x+10-(5x+6)(x-1)}{x-1} < 0,$

$\dfrac{3x+10-(5x^2+6x-5x-6)}{x-1} < 0,\quad \dfrac{-5x^2+2x+16}{x-1} < 0,$

$\dfrac{5x^2-2x-16}{x-1} > 0.$

Корни числителя: $x_1 = 2; x_2 = -\dfrac{8}{5}.$

Получили систему: $\begin{cases} \dfrac{3(x+10/3)}{x-1} \geq 0 \\ 5(x+6/5) \geq 0 \\ \dfrac{5(x-2)(x+8/5)}{x-1} > 0 \end{cases}$



Тройное пересечение будет $x \in (2;+\infty)$.

Ответ. $x \in (2;+\infty)$.

3. $\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) < \varphi^2(x) \end{cases}$ (при φ(x) < 0 нет решений, так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$).

<u>*Пример*</u>. $\sqrt{x^2 - 7x - 18} < x + 3$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 7x - 18 < (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 13x > -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x > -27/13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0 \\ x > -27/13 \end{cases}$$

Ответ. $\left(-\frac{27}{13}; -2\right] \cup [9; +\infty)$.

4. $\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x)$

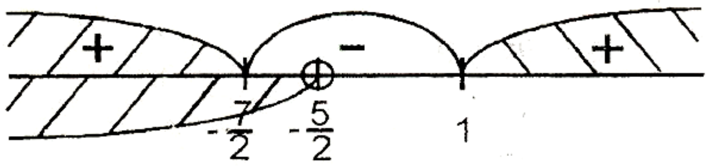
Рассмотрим 2 случая: правая часть положительна или отрицательна. Решение неравенства состоит из объединения решений двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \geq 0 \\ f(x) \geq \varphi^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

<u>*Пример*</u>. $\sqrt{4x^2 + 10x - 14} > 2x + 5$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 4x^2 + 10x - 14 > (2x+5)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 5 < 0 \\ 4x^2 + 10x - 14 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5/2 \\ x < -39/10 \end{cases} \Rightarrow \textit{нет решений} \\ \begin{cases} x < -5/2 \\ 4(x + 7/2)(x - 1) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



Ответ. $(-\infty;-7/2]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1. $\sqrt{\dfrac{2x-2}{4x+3}}<2$.
2. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+1}}\ge\sqrt{x-1}$.
3. $\sqrt{x^2+8x+7}<x+3$.
4. $\sqrt{25+8x}+2x+1>0$.
5. $(x-3)\sqrt{x^2+9}\le x^2-9$.

6.3. Неравенства с модулем

1. Неравенство вида $|f(x)|>a$

– при $a<0$ выполняется для всех значений *x*, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;

– при $a=0$ равносильно неравенству $f(x)\ne 0$;

– при $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)>a \\ f(x)<-a \end{array}\right.$

2. Неравенство вида $|f(x)|\ge a$

– при $a\le 0$ выполняется для всех значений *x*, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;

– при $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)\ge a \\ f(x)\le -a \end{array}\right.$

3. Неравенство вида $|f(x)|<a$

– при $a\le 0$ не имеет решений;

– при $a > 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$

4. Неравенство вида $|f(x)| \le a$

– при $a < 0$ не имеет решений;

– при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

– при $a > 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \le a \\ f(x) \ge -a \end{cases}$

5. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

6. Неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) \le 0 \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \ge g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

7. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

8. Неравенство вида $|f(x)| \le g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \le g(x) \end{cases} \end{array} \right.$

9. Неравенство вида $|f(x)| \le |g(x)|$ равносильно неравенству $(f(x))^2 \le (g(x))^2$.

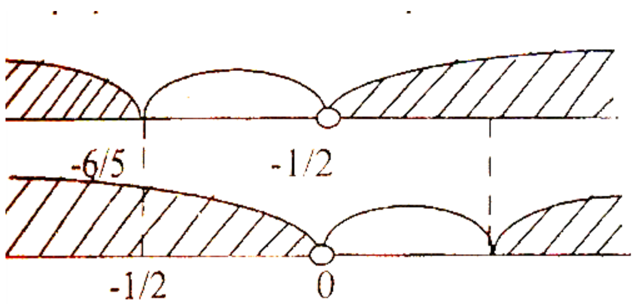
<u>Пример</u>. $\left| \dfrac{x-3}{2x+1} \right| \le 3$

Решение. Перейдём к двойному неравенству:

$$-3 \le \frac{x-3}{2x+1} \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2x+1} \le 3 \\ \dfrac{x-3}{2x+1} \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2x+1} - 3 \le 0 \\ \dfrac{x-3}{2x+1} + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3-3(2x+1)}{2x+1} \le 0 \\ \dfrac{x-3+3(2x+1)}{2x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3-6x-3}{2x+1} \le 0 \\ \dfrac{x-3+6x+3}{2x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5x-6}{2x+1} \le 0 \\ \dfrac{7x}{2x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5(x+6/5)}{2(x+1/2)} \ge 0 \\ \dfrac{7x}{2(x+1/2)} \ge 0 \end{cases}$$

Отсюда легко находим корни числителя и знаменателя и отмечаем на графиках множество решений каждого неравенства. В ответ включаем общую часть.



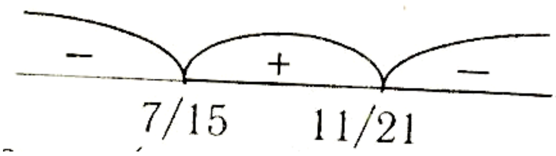
Ответ. $(-\infty; -6/5] \cup [0; +\infty)$.

<u>Пример</u>. $|2-3x| \le 3|3-6x|$

Решение. Возведём обе части неравенства в квадрат, это не нарушит неравенство, так как слева и справа стоят неотрицательные числа.

$$(2-3x)^2 \le 3^2(3-6x)^2 \Leftrightarrow (2-3x)^2-(9-18x)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-3x-(9-18x))(2-3x+(9-18x)) \Leftrightarrow (15x-7)(11-21x) \le 0$$



Ответ. $(-\infty;7/15]\cup[11/21;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти число целых решений неравенства $|10-2x|-2\le 0$.

2. Найти количество целых решений неравенства $x^2+12x+36<5|x+6|$.

3. Найти количество целых решений неравенства $x^3|x^2-8x+7|>0$ на промежутке [0; 6].

4. Найти длину промежутка на числовой оси, который заполняют все решения неравенства $x^2+\sqrt{x^2}<1/4$.

5. Решить неравенство $|4x-1|\ge 3|2x+4|$

6. Решить неравенство $\dfrac{2}{|x+3|}<\dfrac{1}{2x-1}$.

7. ВЕКТОРЫ

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом.

Даны векторы в пространстве: $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$.

Скалярное произведение этих векторов равно:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Длина (или модуль) вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Замечание. Если векторы находятся не в пространстве, а на плоскости (т. е. имеют две координаты), то «третьи слагаемые» в двух вышеприведённых формулах отсутствуют.

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен:

$$\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})>0$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямой, или $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})<0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (или параллельны), если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число k ($k>0$ в случае сонаправленных векторов, и $k<0$ в случае противоположно направленных векторов), при котором $\vec{b}=k\vec{a}$.

<u>Пример</u>. Даны векторы $\vec{a}(3;-2;1)$ и $\vec{b}(-2;4;-3)$. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Решение.

$$\vec{c}=2(3;-2;1)+3(-2;4;-3)=(6;-4;2)+(-6;12;-9)=(0;8;-7).$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-7)^2}=\sqrt{113}.$$

Ответ. $\sqrt{113}$

<u>Пример</u>. При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(-7;2m;4)$ не превосходит длины вектора $\vec{b}(3m;6;-3)$?

Решение. Сначала подсчитаем длины данных векторов:

$|\vec{a}| = \sqrt{49 + 4m^2 + 16} = \sqrt{4m^2 + 65}$; $|\vec{b}| = \sqrt{9m^2 + 36 + 9} = \sqrt{9m^2 + 45}$.

По условию, $|\vec{a}| \le |\vec{b}|$. Следовательно, $\sqrt{4m^2 + 65} \le \sqrt{9m^2 + 45}$; $4m^2 + 65 \le 9m^2 + 45$; $5m^2 - 20 \ge 0$.

Решениями этого неравенства являются $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

<u>*Пример*</u>. Найти угол между векторами $\vec{a}(-3;0;4)$ и $\vec{b}(7;0;-1)$.

Решение.

Так как $\cos\varphi = \dfrac{-3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4(-1)}{\sqrt{9+0+16} \cdot \sqrt{49+0+1}} = \dfrac{-25}{3 \cdot \sqrt{50}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ. $\dfrac{3\pi}{4}$

<u>*Пример*</u>. При каких значениях *p* вектор $\vec{c}(3 - p; p^2 + 6p)$ равен вектору $\vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a}(2;1), \vec{b}(-1;3)$?

Решение. Нужно координаты вектора $\vec{c}$ приравнять к соответствующим координатам вектора $\vec{a} - 2\vec{b} = (4;-5)$ и решить систему

$$\begin{cases} 3 - p = 4 \\ p^2 + 6p = -5 \end{cases}.$$

Эта система имеет единственное решение $p = -1$.

Ответ. –1.

<u>*Пример*</u>. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(\alpha; 6; \beta)$ и $\overrightarrow{BC}(2;-3;5)$. Точки *A, B* и *C* лежат на одной прямой. Найти α + β.

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны, т. е. $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{\beta}{5}$. Отсюда $\alpha = -4, \beta = -10, \alpha + \beta = -14$.

Отвеет. –14.

<u>Пример</u>. Вектор $\vec{p}$ одинаково направлен с вектором $\vec{q}(-5;3;-2)$ и $|\vec{p}|=4\sqrt{38}$. Найти сумму координат вектора $\vec{p}$.

Решение. Из условия следует, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны. Тогда $\vec{p}=k\vec{q}=(-5k;3k;-2k)$. Так как $\vec{p}$ одинаково направлен с вектором $\vec{q}$, то $k>0$.

$$|\vec{p}|=\sqrt{25k^2+9k^2+4k^2}=\sqrt{38k^2}=|k|\cdot\sqrt{38}=k\cdot\sqrt{38}=4\sqrt{38}.$$

Отсюда $k=4, \vec{p}(-20;12;-8)$; сумма координат вектора $\vec{p}=-16$.

Ответ. –16.

<u>Пример</u>. Найти координату вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\vec{a}(3;1)$, в два раза длиннее $\vec{a}$ и имеющего положительную первую координату.

Решение. Пусть искомый вектор $\vec{b}(x;y)$. Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то скалярное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{b})=3x+y=0$. Так как $|\vec{b}|=2\cdot|\vec{a}|$, то $\sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{3^2+1^2}$.

Система $\begin{cases}3x+y=0\\ \sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{10}\end{cases}$ имеет два решения $\begin{cases}x_1=2\\ y_1=-6\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=6\end{cases}$.

Поскольку x-координата должна быть положительной, то условию задачи удовлетворяет лишь первое решение.

Ответ. (2; –6).

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком наименьшем целом значении p угол между векторами $\vec{a}(p-2;1)$ и $\vec{b}(p-1;-2)$ тупой?

2. При каких значениях m угол между векторами $\vec{a}(m;-3;5)$ и $\vec{b}(3;2m;3)$ не превосходит 90º?

3. При каком значении параметра p линейная комбинация $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторов $\vec{a}(p+2;3)$ и $\vec{b}(1;p^2)$ равна вектору $\vec{c}(10;1)$?

4. Найти наибольшее значение параметра p, при котором длина вектора $\vec{a}(3;p-1)$ равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(2;0), B(4;3)$.

5. Даны четыре точки $A(-4;0), B(2;-3), C(-1;1), D(3;2)$. Найти скалярное произведение $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$.

6. Даны векторы $\vec{a}(3;-2), \vec{b}(6;1), \vec{c}(81;6)$. Векторы $(\vec{a} + k\vec{b})$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Найти значение k.

7. Даны вектор $\vec{a}(1;-2;3)$ и точка $A(2;4;5)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OX.

8. Найти скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (2\vec{m} - \vec{n})$, если известно, что $|\vec{m}| = 5, |\vec{n}| = 6$, и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 120º.

9. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси OX угол 135º. Найти координату x вектора $\vec{a}$, если известно, что $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$.

10. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(3;5;-4)$ и $\overrightarrow{BC}(\alpha;\beta;8)$. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найти $\alpha + \beta$.

11. Найти координату вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\vec{b}(-3;4)$, в 2 раза длиннее $\vec{b}$ и имеющего положительную первую координату.

12. Даны три точки $A(1;1), B(-1;0), C(3;1)$. Найти длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

13. Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы на плоскости; $|\vec{b}| = 7, |\vec{a} + \vec{b}| = 12, |\vec{a} - \vec{b}| = 14$. Найти $|\vec{a}|$.

8. МЕТОД КООРДИНАТ

Если на плоскости задана прямоугольная система координат OXY, то каждой точке плоскости поставлена в соответствие пара чисел (x, y), которые называются координатами точки.

Расстояние между двумя точками плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x_3; y_3)$, делящей отрезок *AB* в отношении λ $\left(\frac{AC}{CB} = \lambda > 0\right)$, находим по формулам $x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Эти формулы называются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при λ = 1, т. е. *AC* = *CB*, то они примут вид $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$. В этом случае точка $C(x_3; y_3)$является серединой отрезка *AB*.

Замечание: Если λ = 0, то это означает, что точки *A* и *C* совпадают, если λ < 0, то точка *C* лежит вне отрезка *AB*.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат *OXYZ*, то каждой точке пространства поставлена в соответствие тройка чисел (*x, y, z*), так называемых координат точки. Первая координата называется абсцисса, вторая – ордината, а третья – аппликата.

Расстояние между двумя точками пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x_3; y_3; z_3)$, делящей отрезок *AB* в отношении λ $\left(\frac{AC}{CB} = \lambda > 0\right)$, находим по формулам $x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

Эти формулы называются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при λ = 1, т. е. *AC* = *CB*, то они примут вид $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. В этом случае точка $C(x_3; y_3; z_3)$ является серединой отрезка *AB*.

<u>Пример</u>. Даны точки $A(1;-2), B(-6;-3), C(-2;9)$. Найти расстояние от точки *A* до середины отрезка *BC*.

Решение. Обозначим середину отрезка *BC* через *D*. Тогда по формулам середины отрезка имеем: $D\left(\frac{-6+(-2)}{2}; \frac{-3+9}{2}\right) = D(-4;3)$.

Далее по формуле расстояния между точками вычисляем: $|AD| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Ответ. $5\sqrt{2}$.

<u>Пример</u>. Найти координаты точки *C*, которая делит отрезок *AB* в отношении 2:3, считая от точки *A*, если $A(12;-2), B(7;8)$.

Решение. Мы имеем $\lambda = \frac{2}{3}$, так как $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$. По формулам деления отрезка в данном отношении λ получаем: $x_3 = \dfrac{12 + \frac{2}{3}\cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = 10$,

$$y_3 = \dfrac{-2 + \frac{2}{3}\cdot 8}{1 + \frac{2}{3}} = 2.$$

Мы получили координаты точки $C(10;2)$.

Ответ. (10;2).

<u>Пример</u>. Найти координаты точки *M*, лежащей на оси *OY*, равноудалённой от точек $A(3;1)$ и $B(-1;-5)$.

Решение. Так как точка *M* лежит на оси *OY*, её первая координата равна нулю: $M(0; y_0)$.

$|AM| = \sqrt{(0-3)^2 + (y_0 - 1)^2}$, $|BM| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (y_0 - (-5))^2}$.

Приравнивая правые части, получим уравнение $y_0^2 - 2y_0 + 10 = y_0^2 + 10y_0 + 26$, откуда находим, что $y_0 = -\frac{4}{3}$.

Ответ. *M*(0; –4/3)

<u>Пример</u>. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок *AB*, где $A(3;1), B(-5;3)$.

Решение. Центр окружности O – середина отрезка AB, координаты $x_0 = \dfrac{3+(-5)}{2} = -1, y_0 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

Радиус окружности: $r = \dfrac{1}{2}|AB| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(3-(-5))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$.

Уравнение окружности: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

Ответ. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти расстояние от точки $A(2;-1)$ до середины отрезка BC, где $B(3;4), C(-7;-2)$.
2. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении 3:1, считая от точки A, если $A(3;1), B(-1;9)$.
3. Найти координаты точки M, лежащей на оси OX, равноудалённой от точек $A(-2;1)$ и $B(8;11)$.
4. Найти координаты точки M, лежащей на прямой $y = x$, равноудалённой от точек $A(4;2)$ и $B(6;-4)$.
5. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, где $A(4;1), B(-2;9)$.
6. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(2;1), B(1;-2), C(9;2)$.
7. Укажите уравнение, которое задаёт геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от двух точек $A(1;3)$ и $B(3;1)$.

9. ТРИГОНОМЕТРИЯ

9.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos} \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{ctg^2\alpha}$$

$$ctg^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{tg^2\alpha}$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

Тригонометрические функции двойного, тройного и половинного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^3\alpha} \quad ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^3\alpha}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Прочие формулы кратных углов:

$$\sin 4\alpha = \cos\alpha\left(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha\right),$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1,$$
$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha},$$
$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha},$$
$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha,$$
$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}^4\alpha - 10\operatorname{tg}^2\alpha + 5}{5\operatorname{tg}^4\alpha - 10\operatorname{tg}^2\alpha + 1},$$
$$\operatorname{ctg} 5\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 10\operatorname{ctg}^2\alpha + 5}{5\operatorname{ctg}^4\alpha - 10\operatorname{ctg}^2\alpha + 1},$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 k\alpha = \frac{1-\cos 2k\alpha}{2} \quad \cos^2 k\alpha = \frac{1+\cos 2k\alpha}{2}$$

$$\sin^3 k\alpha = \frac{3\sin k\alpha - \sin 3k\alpha}{4} \quad \cos^3 k\alpha = \frac{3\cos k\alpha - \cos 3k\alpha}{4}$$

Степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \qquad \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{3\cos\alpha + \cos 3\alpha},$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}, \qquad \operatorname{ctg}^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{3\sin\alpha - \sin 3\alpha},$$

$$\sin^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}, \qquad \operatorname{tg}^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3},$$

$$\cos^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{8}, \qquad \operatorname{ctg}^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}.$$

Формулы, что выражают тригонометрические функции через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \quad ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$tg\alpha + ctg\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}) = 2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$$

$$tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = ctg^2\alpha\cos^2\alpha$$

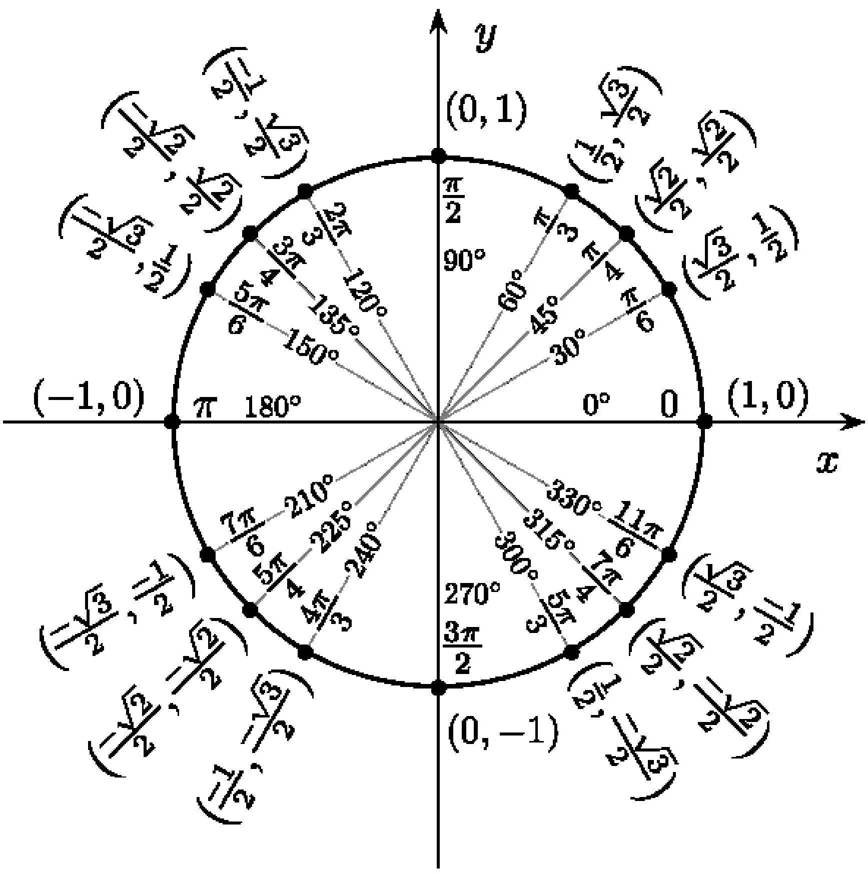
$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $tg\varphi = \frac{b}{a}$

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса для некоторых углов приведены в таблице. («∞» означает, что функция в указанной точке не определена, а в её окрестности стремится к бесконечности).

α	**0° (0 рад)**	**30° (π/6)**	**45° (π/4)**	**60° (π/3)**	**90° (π/2)**	**180° (π)**	**270° (3π/2)**	**360° (2π)**
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
$\mathrm{cosec}\ \alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞

Значения косинуса и синуса на окружности.



Непрерывность:

Синус и косинус – непрерывные функции. Тангенс и секанс имеют точки разрыва ±90º, ±270º, ±450º; котангенс и косеканс – 0º, ±180º, ±360º.

Чётность:

Косинус и секанс – чётные. Остальные четыре функции – нечётные, т. е.:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$,

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$,

$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$.

Периодичность:

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ – периодические с периодом 2π, функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – с периодом π.

Формулы приведения:

Формулами приведения называются формулы следующего вида:

$f(n\pi + \alpha) = \pm f(\alpha)$,

$f(n\pi - \alpha) = \pm f(\alpha)$,

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} + \alpha\right) = \pm g(\alpha),$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} - \alpha\right) = \pm g(\alpha).$$

Здесь f – любая тригонометрическая функция, g – соответствующая ей кофункция (т. е. косинус для синуса, синус для косинуса, тангенс для котангенса, котангенс для тангенса, секанс для косеканса и косеканс для секанса), n – целое число. Перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в заданной координатной четверти при условии, что угол α острый, например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

Некоторые формулы приведения:

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\ \beta$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$
$\mathrm{ctg}\ \beta$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{ctg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{ctg}\ \alpha$

Пример. Вычислить $A=\dfrac{\cos 76^\circ-\cos 16^\circ}{1-2\sin^2 22^\circ}$

Решение. Числитель разложим в произведение, а к знаменателю применим формулу понижения степени. Получим:

$$A=\frac{2\sin 46^\circ \sin(-30^\circ)}{1-2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 44^\circ\right)}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos 44^\circ}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos(90^\circ-46^\circ)}=\frac{-\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ}=-1.$$

Ответ. –1.

Пример. Упростить $\dfrac{\cos 2x}{(ctg^2 x-tg^2 x)\sin^2 2x}$.

Решение.

$$\frac{\cos 2x}{(ctg^2 x-tg^2 x)\sin^2 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{4(\cos^4 x-\sin^4 x)}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{4(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}=\frac{1}{4}.$$

Ответ. ¼.

<u>*Пример*</u>. Упростить выражение $A=\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$.

Решение. Приведём к общему знаменателю, суммы и разности разложим в произведения, затем сократим дроби.

$$A=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha}=\frac{2}{\sin 6\alpha}$$

Ответ. $\frac{2}{\sin 6\alpha}$.

<u>*Пример*</u>. Дано: $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha+4\cos\alpha}=\frac{3}{2}$. Найти $tg\alpha$.

Решение. После перемножения «крест-накрест» получим

$$4\sin\alpha+6\cos\alpha=3\sin\alpha+12\cos\alpha;\quad \sin\alpha=6\cos\alpha;\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=6;$$

$tg\alpha=6.$

Ответ. 6.

<u>*Пример*</u>. Дано: $ctg\frac{\alpha}{2}=3$. Найти $A=\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$. Используя формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла, найдём:

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=0{,}6;\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=0{,}8.$$

Следовательно, $A=\frac{2\cdot 0{,}6+0{,}8}{0{,}6-2\cdot 0{,}8}=-2$.

Ответ. –2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\frac{\cos 15°}{\cos 65°} - \frac{\sin 15°}{\sin 65°}$.

2. Дано: $tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -3$. Найти значение $ctg 2\alpha$.

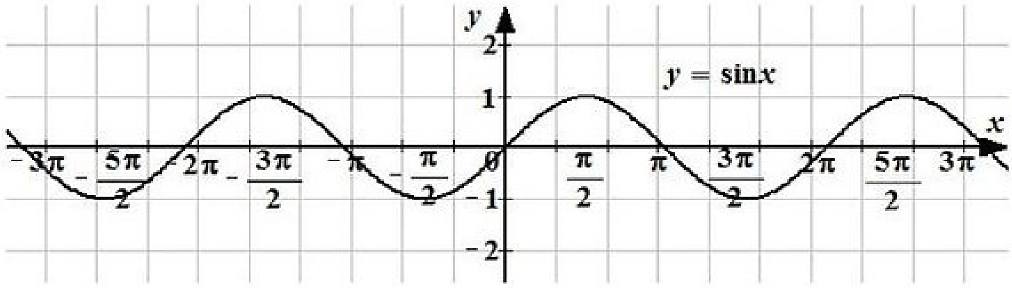
3. Упростить выражение $\cos^2(765° + \beta) - \sin^2(\beta + 405°)$.

4. Вычислите $\sin\alpha$, если
$3\cos^2\alpha + \sqrt{7}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

5. Найти значение $\sin(\varphi + 30°)$, если $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $90° < \varphi < 180°$.

9.2. Графики тригонометрических функций

Построим график функции $y = \sin x$.



Данная линия называется *синусоидой*.

Напоминаю, что «пи» – это иррациональное число: π ≈ 3,14, и в тригонометрии от него в глазах рябит.

Данная функция является периодической **с** периодом 2π. Что это значит? Посмотрим на отрезок $[0;2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

Область определения: $D(f) \in R$, т. е. для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1;1]$. Функция $y = \sin x$ является ограниченной: $-1 \le \sin x \le 1$, т. е., все «игреки» сидят строго в отрезке

$[-1;1]$. Такого не бывает: $\sin x = 1{,}5$ или $\sin x = -2$, точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

Синус – это функция нечётная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то минус терять здесь ни в коем случае нельзя! Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Построим график функции $y = \cos x$.

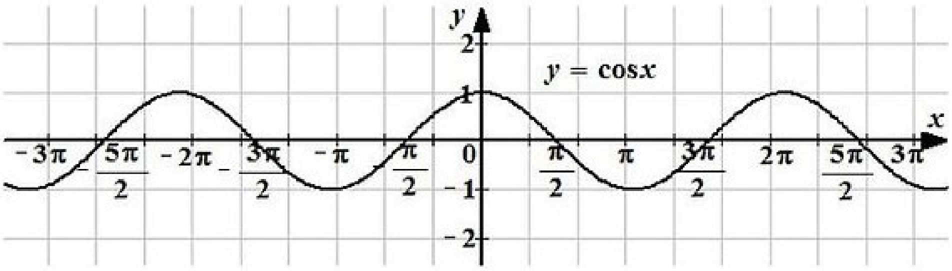
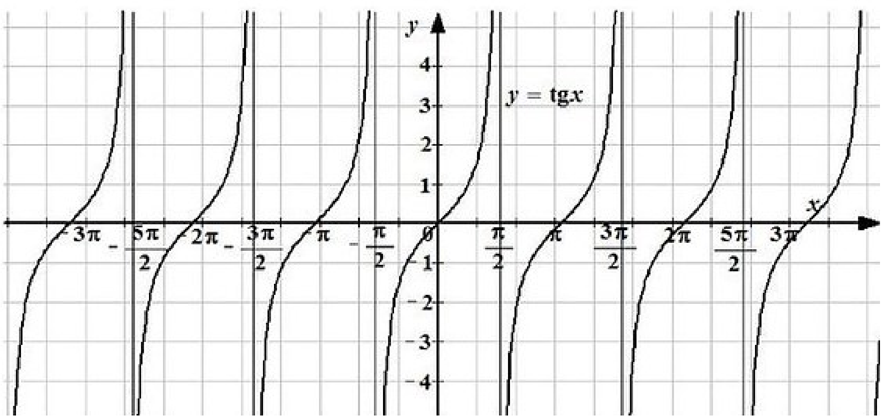


График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево.

Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.

Косинус – это функция чётная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$. Т. е., минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или наоборот, ставить). В отличие от синуса в косинусе минус «бесследно пропадает».

Построим график функции $y = tgx$



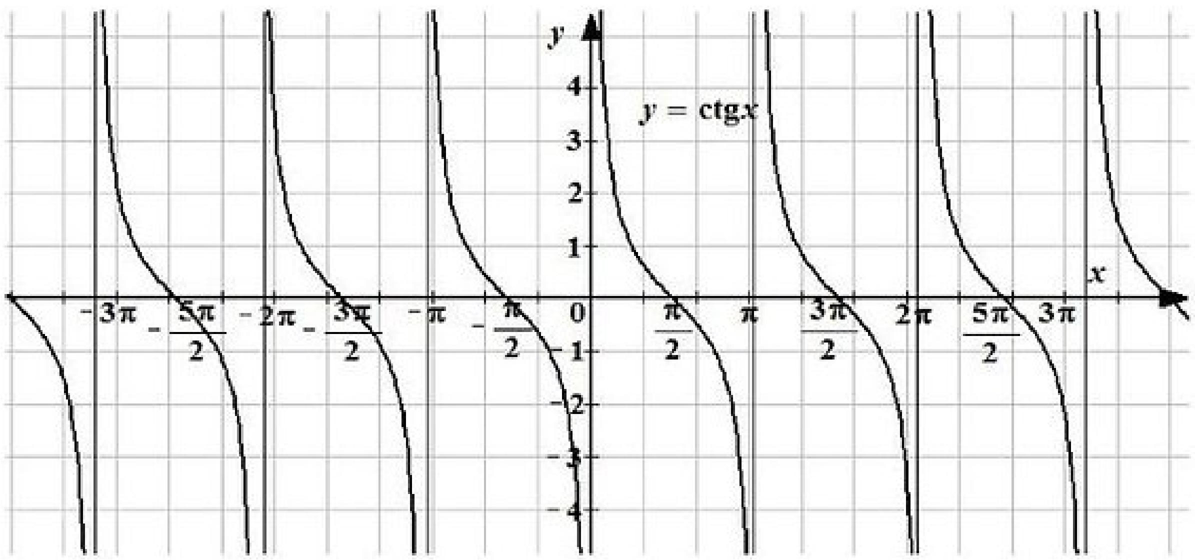
Данная функция является периодической с периодом π. Т. е., достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

Область определения: $D(f)= R \Big/ \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме $...x=-\frac{3\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}...$ и т. д. или коротко: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, где k – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.

Область значений: $E(f)=R$. Функция $y=tgx$ не ограничена.

Тангенс – функция нечётная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $tg(-x)=-tgx$.

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx=\frac{1}{tgx}$. Вот его график:



Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.

Преобразование графиков тригонометрических функций

График функции ***y = f (x + b)*** получается из графика функции *y = f(x)* параллельным переносом на (–*b*) единиц вдоль оси абсцисс. График функции ***y = f (x) + a*** получается из графика функции *y = f(x)* параллельным переносом на (a) единиц вдоль оси ординат.

График функции ***y = f (kx)*** получается из графика функции *y = f(x)* путем его сжатия в *k* раз (при *k* > 1) вдоль оси абсцисс. График функции ***y = f (kx)*** получается из графика функции *y = f(x)* путем его растяжения в k раз (при 0 < k < 1) вдоль оси абсцисс.

График функции ***y = f (kx + b)*** получается из графика функции *y = f(x)* путем его параллельного переноса на **(**–*b*/*k*) единиц вдоль оси абсцисс и путем сжатия в *k* раз (при *k* > 1) или растяжения в *k* раз (при *0f (kx + b) = f (k(x + b/k)).*

Пример. С помощью преобразования графика функции $y = \sin x$ построить $y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2$.

Решение. Приводим функцию к виду шаблона

$-k_1 \cdot f(-k_2 \cdot (x + a)) + b$:

$y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2 = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) - 2$.

Имеем $k_1 = 3, k_2 = \frac{1}{2}, a = -3, b = -2$.

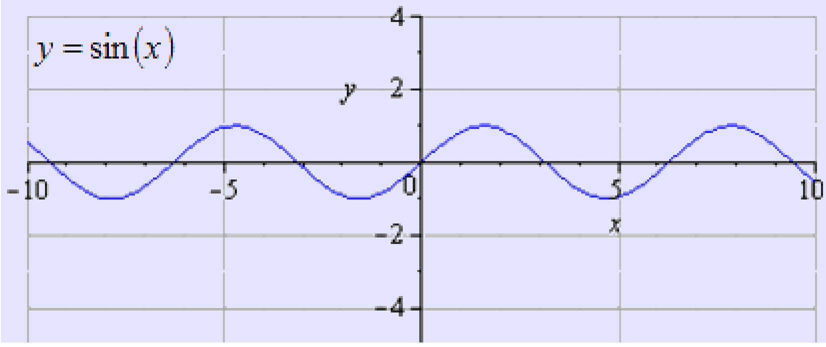
Таким образом, цепочка преобразований графика функции $y = \sin x$ примет вид:

$$y = \sin(x) \to y = 3\sin(x) \to y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \to$$

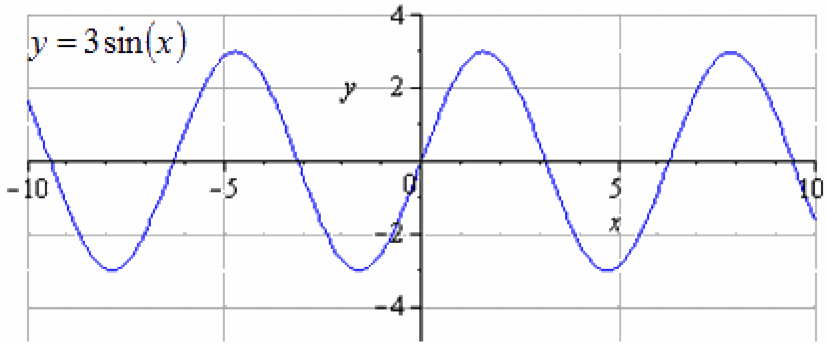
$$\to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) \to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) - 2.$$

Поэтапное преобразование графика синусоиды изображено графическими иллюстрациями.

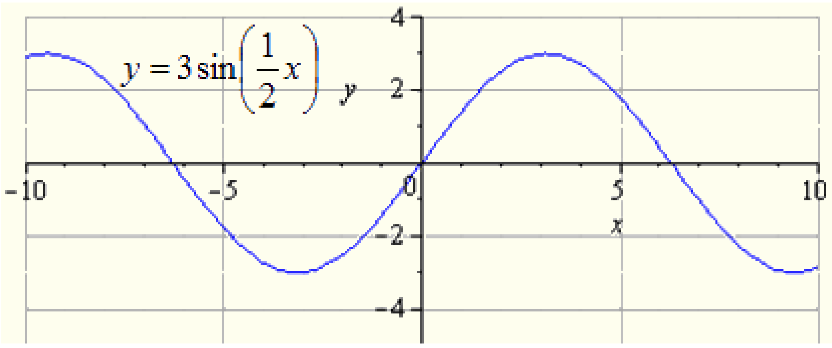
График исходной синусоиды $y = \sin x$.



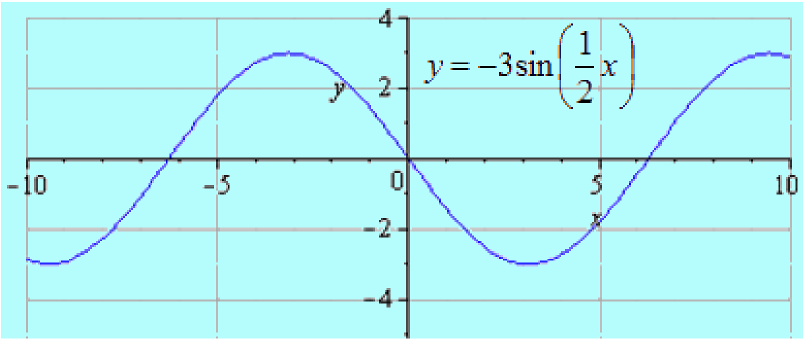
Растягиваем вдоль оси ординат втрое (амплитуда колебаний при этом возрастает в три раза).



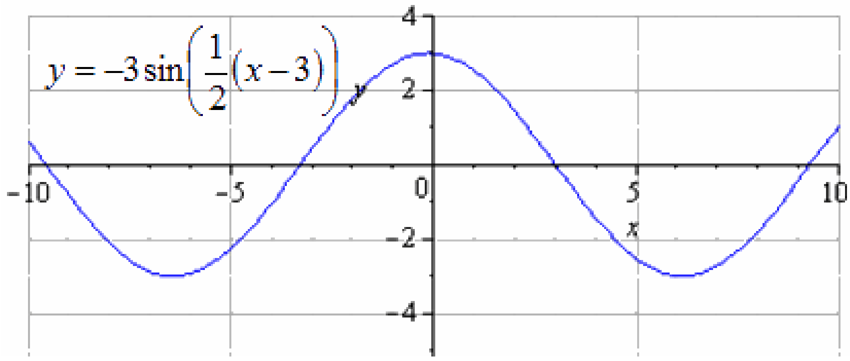
Растягиваем вдоль оси абсцисс вдвое.



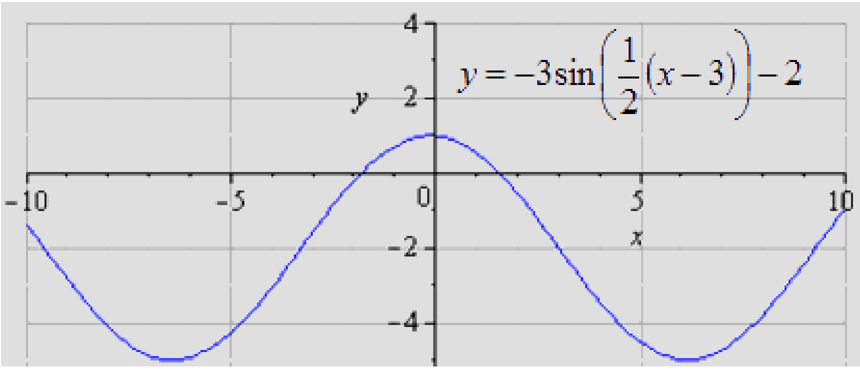
Симметрично отображаем относительно оси абсцисс.



Сдвигаем график вправо на 3 единицы.



Сдвигаем график вниз на 2 единицы.

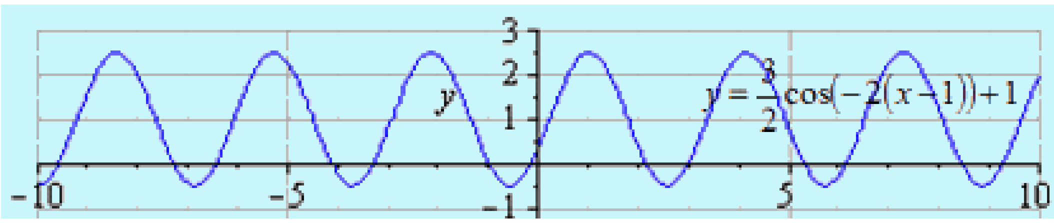


Этим этапом задача преобразования графика тригонометрической функции $y=\sin x$ завершается.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить график функции $y=\frac{3}{2}\cos(2-2x)+1$ преобразованием косинусоиды $y=\cos x$.

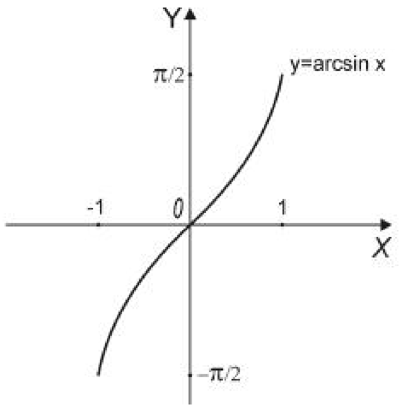
Ответ.



9.3. Обратные тригонометрические функции

Графики обратных тригонометрических функций

Построим график арксинуса $y = \arcsin x$



Перечислим основные свойства функции $y = \arcsin x$:

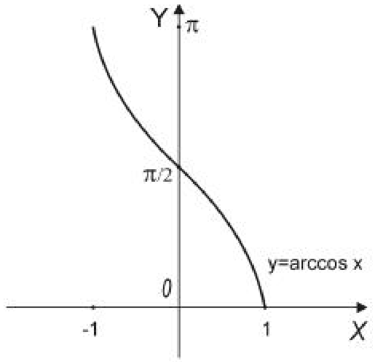
<u>Область определения</u>: $D(f) = [-1;\ 1]$, не существует значений вроде arcsin(–1,5) или arcsin2

Область значений: $E\ (f) = [-\pi/2; \pi/2]$, т. е., функция $y = \arcsin x$ ограничена.

Арксинус – функция нечётная, здесь минус опять же выносится: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

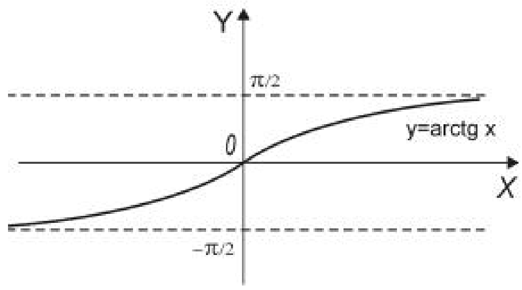
В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\pi/2$ $\arcsin 1 = \pi/2$. Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций.

Построим график $y = \arccos x$.



Очень похоже на арксинус. Арккосинус не является четной или нечетной функцией**,** он как раз «никакой».

Построим график $y = \text{arctg}\ x$.



Всего лишь перевернутая ветка тангенса. Перечислим основные свойства функции : $y = \text{arctg}x$.

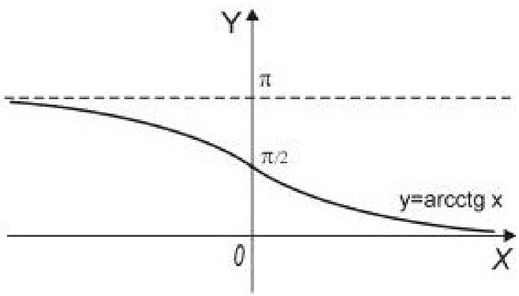
<u>Область определения</u>: $D\ (f) = R$.

Область значений: $E\ (f) = (-\pi/2; \pi/2)$, т. е., функция $y = \text{arctg}x$ ограничена**.**У рассматриваемой функции есть две асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}(arctg\ x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(arctg\ x) = -\frac{\pi}{2}$

Арктангенс – функция нечётная: $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$.

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: $\text{arctg}\ 0 = 0$, $\text{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}$.

К графику арккотангенса $y = \text{arcctg}x$ приходится обращаться значительно реже, но, тем не менее, вот его чертеж:



Арккотангенс, как и арккосинус, не является чётной или нечётной функцией.

9.4. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения.
Уравнения, содержащие косинус – cos *x*.

Уравнение	Решения	
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$	
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
Уравнение	Решения	
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, определяется формулой: $x = \pm \arccos(a) + 2\pi k$, $k \in Z$ (целые числа), при $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие синус – $\sin x$.

Уравнение	Решения	
$\sin x = 0$	$x = \pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
Уравнение	Решения	
$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения $\sin x = a$, где $|a| \le 1$, определяется формулой: $x = (-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k$, $k \in Z$ (целые числа), при $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие тангенс и котангенс – tg x и ctg x

Уравнение	Уравнение	Решения
$\operatorname{tg} x = 0$	–	$x = \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -1$	$\operatorname{ctg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$
Уравнение	Уравнение	Решения
$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$
–	$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения tg $x = a$ определяется формулой:
$x = \operatorname{arctg}(a) + \pi k$, $k \in Z$ (целые числа).

Общий вид решения уравнения ctg $x = a$ определяется формулой:
$x = \operatorname{arcctg}(a) + \pi k$, $k \in Z$ (целые числа).

Методы решения тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше) и *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1. Алгебраический метод. Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

П р и м е р . Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6)-3\sin(\pi/3-x)+1=0.$

Р е ш е н и е . Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

2. Разложение на множители. Этот метод рассмотрим на примерах.

<u>Пример.</u> Решить уравнение: $\sin x+\cos x=1$.

Решение. Перенесём все члены уравнения влево:

$\sin x+\cos x-1=0$,

преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0$, 2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0$,

$x/2 = \pi k$, $\tan(x/2) = 1$,

$x_1 = 2\pi k$; $x/2 = \arctan 1 + \pi n$,

$x/2 = \pi/4 + \pi n$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,

$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$,

$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0$,

1). $\sin x = 0$, 2). $\cos x - \sin x = 0$,

$x_1 = \pi k$; $\tan x = 1$,

$x_2 = \pi/4 + \pi n$,

<u>*Пример.*</u> Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Решение. $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$,

$2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x$,

$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0$,

$\cos 4x \cdot 2\sin 3x \cdot \sin x = 0$,

1) $\cos 4x = 0$, 2) $\sin 3x = 0$, 3) $\sin x = 0$,

$4x = \pi/2 + \pi k$, $3x = \pi n$, $x_3 = \pi m$.

$x_1 = \pi/8 + \pi k/4$; $x_2 = \pi n/3$;

3. Приведение к однородному уравнению. Уравнение называется *однородным относительно* <u>*sin*</u> *и* <u>*cos*</u>, *если все его члены одной и той же степени относительно* <u>*sin*</u> *и* <u>*cos*</u> *одного и того же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan.

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение. $3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{tg}\,x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $\mathrm{tg}\,x = -1$, 2) $\mathrm{tg}\,x = -3$,

$x_1 = -\pi/4 + \pi k$; $x_2 = -\arctan 3 + \pi n$.

4. Переход к половинному углу. Рассмотрим этот метод на примере:

$$11\sin x - 2\cos x = 10,$$

$$22\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 10\sin^2\frac{x}{2} + 10\cos^2\frac{x}{2},$$

$$4\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 11\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 6 = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} = \frac{11 \pm 5}{8}.$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 2 \qquad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{3}{4},$$

$$x = 2\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. Введение вспомогательного угла. Рассмотрим уравнение вида: $a\sin x + b\cos x = c$, где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как cos φ и sin φ (здесь φ – так называемый *вспомогательный угол*), и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C,$$

или $$\sin(x + \varphi) = C,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

П р и м е р . Решить уравнение: $\sqrt{3}\,\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Р е ш е н и е . Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. Преобразование произведения в сумму. Здесь используются соответствующие формулы.

<u>*Пример.*</u> Решить уравнение: $2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.

Решение. Преобразуем левую часть в сумму:

$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x$,

$\cos 8x = 0$,

$8x = \pi/2 + \pi k$,

$x = \pi/16 + \pi k/8$.

7. Универсальная подстановка. Рассмотрим этот метод на примере.

<u>*Пример.*</u> Решить уравнение: $3 \sin x - 4 \cos x = \mathbf{3}$.

Р е ш е н и е . Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m+1)\pi$, тогда

$$3\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} - 4\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 3,$$

$$6\tan(x/2) - 4 + 4\tan^2(x/2) = 3 + 3\tan^2(x/2),$$

$$\tan^2(x/2) + 6\tan(x/2) - 7 = 0,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

1а). $\tan(x/2) = -7$, $x_1 = -2\arctan 7 + 2\pi k$;

1б). $\tan(x/2) = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

2). $x = (2m+1)\pi$, тогда

$$3\sin[(2m+1)\pi] - 4\cos[(2m+1)\pi] = 4 \neq 3.$$

Таким образом, решение даёт только первый случай.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти среднее арифметическое корней уравнения $\cos^2 x - \sin x\cos x = 1$, принадлежащих отрезку $[-200°;270°]$.

2. Найти сумму корней уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2 x = 0{,}25$, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{6};2\pi\right]$.

3. Найти сумму корней уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}tgx$, принадлежащих отрезку $[-270°;90°]$.

4. Найти количество корней уравнения $3\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

5. Решить уравнение $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 1$ двумя способами – с помощью перехода к половинному аргументу и с помощью введения вспомогательного угла.

6. Найти сумму корней уравнения $\sin 3x\sin 5x = \sin x\sin 7x$, принадлежащих отрезку $[0°;90°]$.

7. Найти все корни уравнения $\frac{\sin 4x}{\cos 5x}+1=0$, принадлежащие отрезку $[45°;180°]$.

9.5. Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства

Неизвестные переменные (величины углов): x

Множество целых чисел: Z

Целые числа: n

Множество действительных чисел: R

Действительные числа: a

Тригонометрические функции: sin x, cos x, tg x (допускается tan x), ctg x (допускается cot x)

Обратные тригонометрические функции: arcsin a, arccos a, arctg a (допускается arctan a), arcctg a (допускается arccot a).

1. Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим неравенством*.

2. К *простейшим тригонометрически неравенствам* относятся следующие 16 неравенств:

$\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$,

$\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$,

$\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \leq a$,

$\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$.

Здесь x является неизвестной переменной, a может быть любым действительным числом.

Неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$

Неравенство $\sin x > a$

3. При $a \geq 1$ неравенство $\sin x > a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$

4. При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число: $x \in R$

5. При $-1 \leq a < 1$ решение неравенства $\sin x > a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 1).

Неравенство $\sin x \geq a$

6. При $a > 1$ неравенство $\sin x \geq a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$

7. При $a \leq -1$ решением неравенства $\sin x \geq a$ является любое действительное число: $x \in R$

8. Случай $a = 1$: $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$

9. При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\sin x \geq a$ включает граничные углы и имеет вид $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 1).

Неравенство $\sin x < a$

10. При $a > 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число: $x \in R$

11. При $a \leq -1$ у неравенства $\sin x < a$ решений нет: $x \in \emptyset$

12. При $-1 < a \leq 1$ решение неравенства $\sin x < a$ лежит в интервале $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 2).

Неравенство $\sin x \leq a$

13. При $a \geq 1$ решением неравенства $\sin x \leq a$ является любое действительное число: $x \in R$

14. При $a < -1$ неравенства $\sin x \leq a$ решений не имеет: $x \in \emptyset$

15. Случай $a = -1$: $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$

16. При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\sin x \leq a$ находится в интервале $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 3).

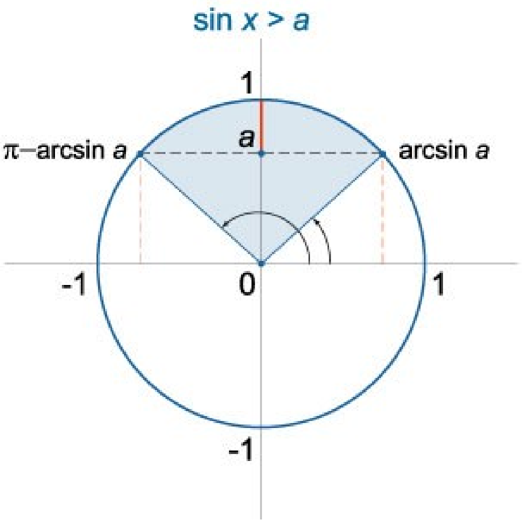


Рис. 2

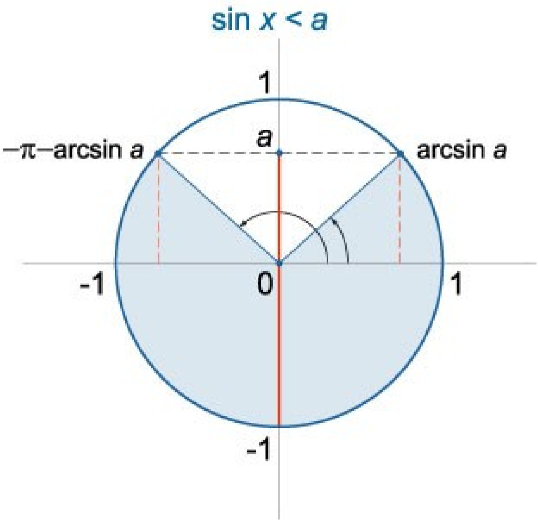


Рис. 3

Неравенства вида $\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$

Неравенство $\cos x > a$

17. При $a \geq 1$ неравенство $\cos x > a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$

18. При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число: $x \in R$

19. При $-1 \le a < 1$ решение неравенства $\cos x > a$ имеет вид $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (рис. 3).

Неравенство $\cos x \ge a$

20. При $a > 1$ неравенство $\cos x \ge a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$.

21. При $a \le -1$ решением неравенства $\cos x \ge a$ является любое действительное число: $x \in R$.

22. Случай $a = 1$: $x = 2\pi n,\ n \in Z$

23. При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\cos x \ge a$ выражается формулой

$-\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (рис. 4).

Неравенство $\cos x < a$

24. При $a > 1$ неравенство $\cos x < a$ справедливо при любом действительном значении x: $x \in R$

25. При $a \le -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$

26. При $-1 < a \le 1$ решение неравенства $\cos x < a$ записывается в виде $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (рис. 4).

Неравенство $\cos x \le a$

27. При $a \ge 1$ решением неравенства $\cos x \le a$ является любое действительное число: $x \in R$.

28. При $a < -1$ неравенство $\cos x \le a$ не имеет решений: $x \in \emptyset$.

29. Случай $a = -1$: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

30. При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\cos x \le a$ записывается как $\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (рис. 5).

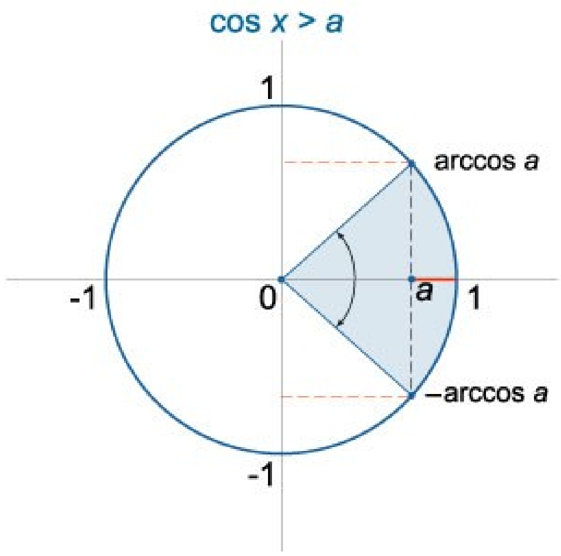


Рис. 4

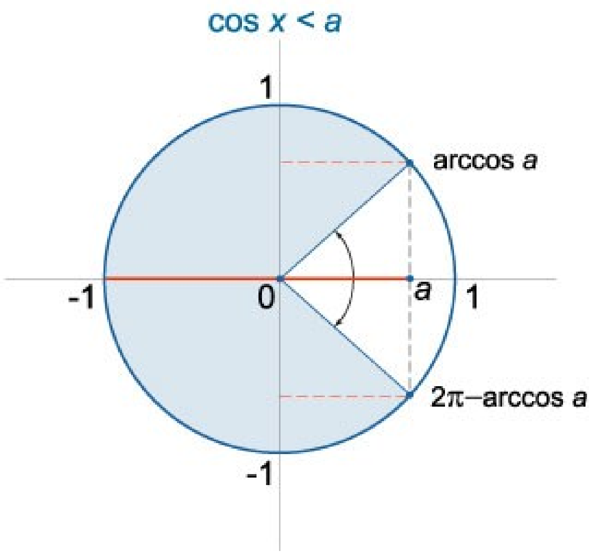


Рис. 5

Неравенства вида tg x > a, tg x ≥ a, tg x < a, tg x ≤ a

Неравенство tg x > a

31. При любом действительном значении a решение строгого неравенства tg $x > a$ имеет вид arctg $a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 6).

Неравенство tg x ≥ a

32. Для любого значения a решение неравенства tg $x \geq a$ выражается в виде arctg $a + \pi n \leq x < \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 6).

Неравенство tg x < a

33. Для любого значения a решение неравенства tg $x < a$ записывается в виде $-\pi/2 + \pi n < x <$ arctg $a + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 7).

Неравенство tg x ≤ a

34. При любом a неравенство tg $x \leq a$ имеет следующее решение: $-\pi/2 + \pi n < x \leq$ arctg $a + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 7).

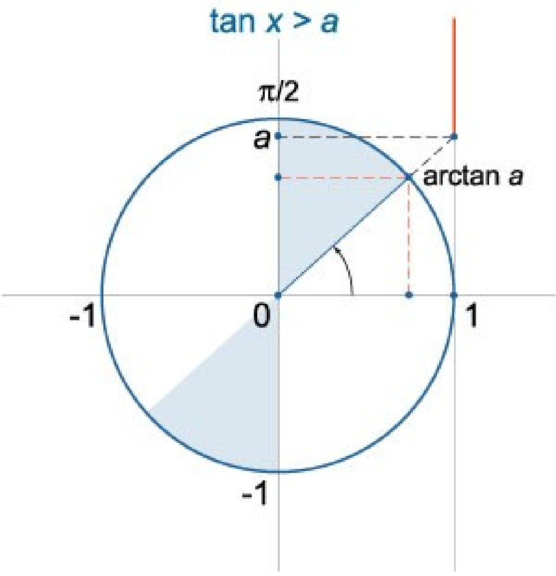


Рис. 6

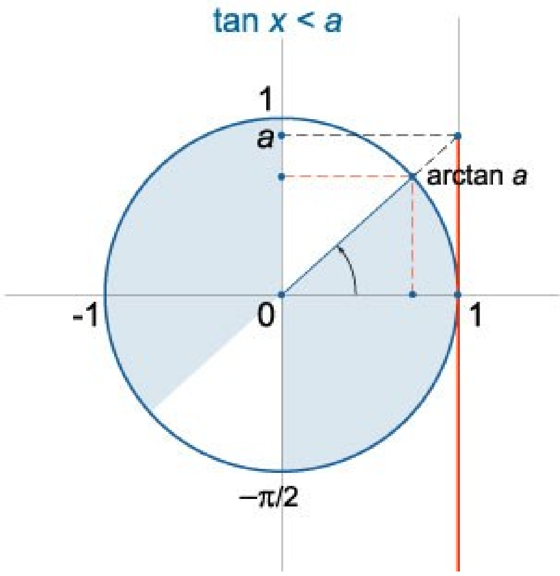


Рис. 7

Неравенства вида ctg $x > a$, ctg $x \geq a$, ctg $x < a$, ctg $x \leq a$

Неравенство ctg x > a

35. При любом a решение неравенства ctg $x > a$ имеет вид $\pi n < x <$ arcctg $a + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 8).

Неравенство ctg x ≥ a

36. Нестрогое неравенство ctg $x \geq a$ имеет аналогичное решение $\pi n < x \leq$ arcctg $a + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 8).

Неравенство ctg x < a

37. Для любого значения a решение неравенства ctg $x < a$ лежит в открытом интервале arcctg $a + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 9).

Неравенство ctg x ≤ a

38. При любом a решение нестрогого неравенства ctg $x \leq a$ находится в полуоткрытом интервале arccot $a + \pi n \leq x < \pi + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 9).

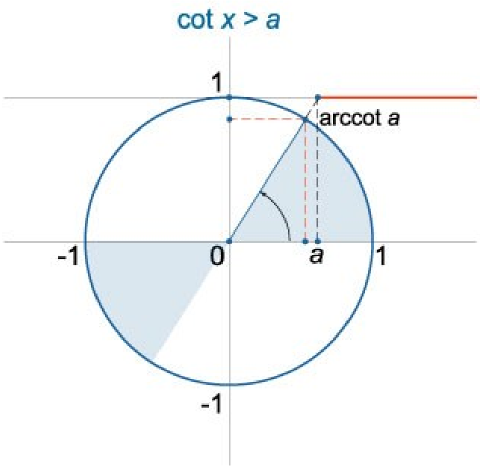


Рис. 8

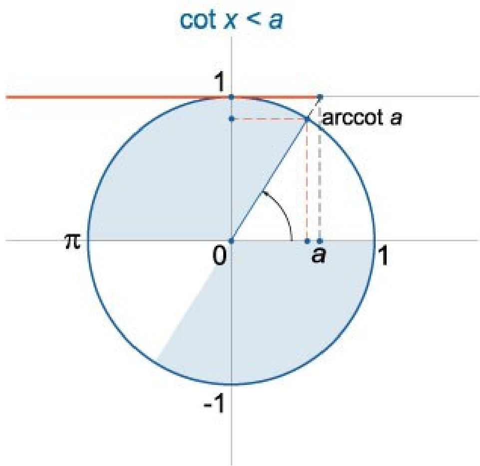


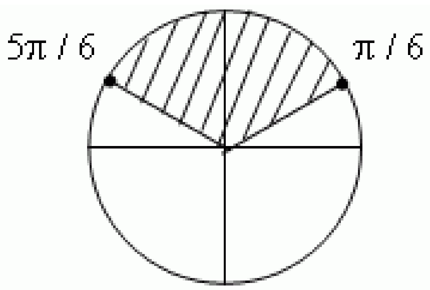
Рис. 9

<u>*Пример.*</u> Решить неравенство: sin $x > 0{,}5$.

Решение.

<u>*Пример.*</u>

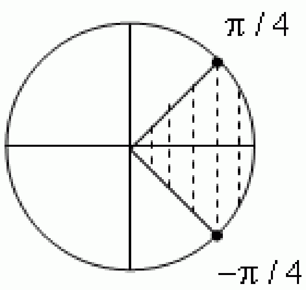
$\pi / 6 + 2\pi n < x < 5\pi / 6 + 2\pi n$.



. Решить неравенство: $\cos x > \sqrt{2} / 2$.

Решение.

$-\pi / 4 + 2\pi n < x < \pi / 4 + 2\pi n$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

2. Решить неравенство: $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

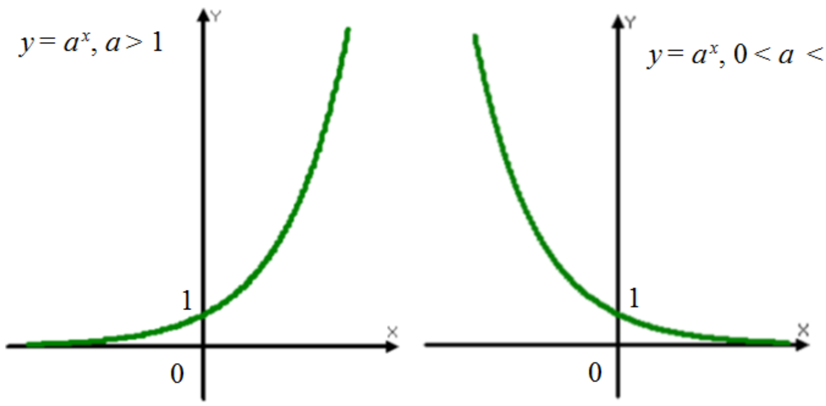
Что такое показательная функция?

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$.

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

Графиком показательной функции является *экспонента*:

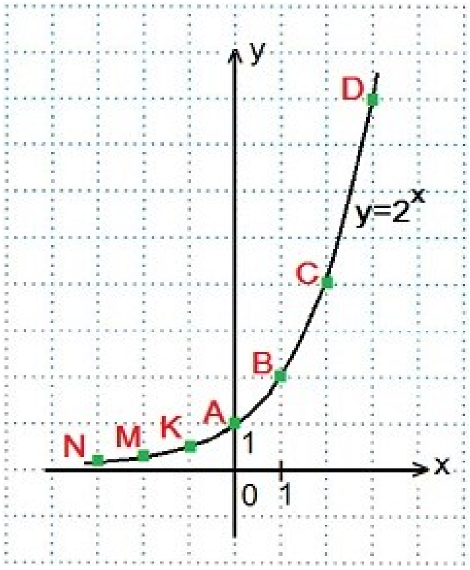


Графики показательных функций (экспоненты).

Справедливы все свойства степенной функции:

- $a^0 = 1$ Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.

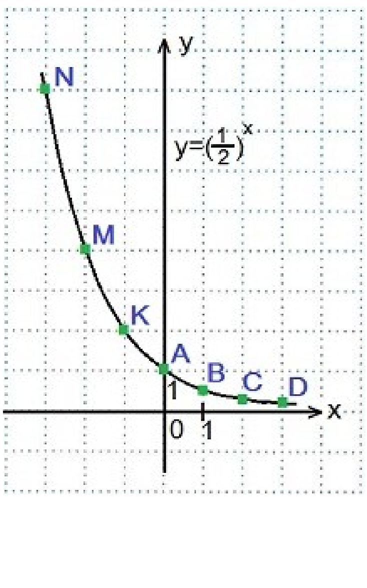
- $a^1 = a$ Любое число в первой степени равно самому себе.
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.
- $a^x : a^y = a^{x-y}$ При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.
- $(a^x)^y = a^{xy}$ При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y$ При возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый из множителей.
- $(a/b)^x = a^x/b^y$ При возведении дроби в степень возводят в эту степень и числитель и знаменатель дроби.
- $a^{-x} = 1/a^x$
- $(a/b)^{-x} = (b/a)^x$.



Пример. Построить график функции $y = 2^x$. Найдем значения функции при x = 0, x = ± 1, x = ± 2, x = ± 3.

$x = 0$, $y = 2^0 = 1$; Точка A.
$x = 1$, $y = 2^1 = 2$; Точка B.
$x = 2$, $y = 2^2 = 4$; Точка C.
$x = 3$, $y = 2^3 = 8$; Точка D.
$x = -1$, $y = 2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$; Точка K.
$x = -2$, $y = 2^{-2} = 1/4 = 0{,}25$; Точка M.
$x = -3$, $y = 2^{-3} = 1/8 = 0{,}125$; Точка N.

Большему значению аргумента $\boldsymbol{x}$ соответствует и большее значение функции $\boldsymbol{y}$. Функция $y = 2^x$ возрастает на всей области определения $D(\boldsymbol{y}) = R$, так как основание функции 2 > 1.



Пример. Построить график функции $y = (1/2)^x$. Найдем значения функции при $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$.

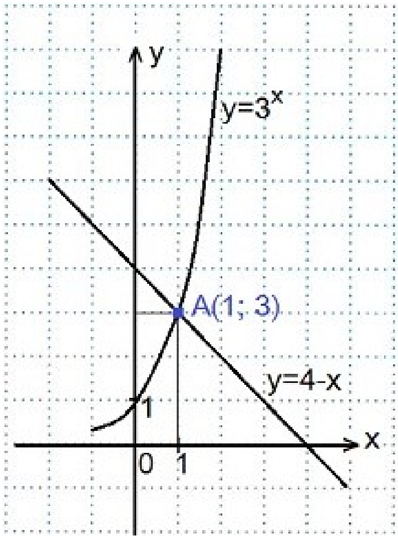
$x = 0$, $y = (1/2)^0 = 1$; Точка A.
$x = 1$, $y = (1/2)^1 = 1/2 = 0{,}5$; Точка B.
$x = 2$, $y = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$; Точка C.
$x = 3$, $y = (1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125$; Точка D.

$x = -1$, $y = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$; Точка K.

$x = -2$, $y = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$; Точка M.

$x = -3$, $y = (1/2)^{-3} = 2^3 = 8$; Точка N.

Большему значению аргумента **x** соответствует меньшее значение функции **y**. Функция $y = (1/2)^x$ убывает на всей своей области определения: $D(y) = R$, так как основание функции $0 < (1/2) < 1$.



Пример. Найти область значений функции $y = (1/3)^x + 1$.

Решение: $0 < (1/3)^x < +\infty$, тогда, прибавляя ко всем частям двойного неравенства число **1**, получаем:

$0 + \mathbf{1} < (1/3)^x + \mathbf{1} < +\infty + \mathbf{1}$;

$1 < (1/3)^x + 1 < +\infty$.

Ответ: $E(y) = (1; +\infty)$.

Пример. Решить графически уравнение $3^x = 4 - x$.

В одной координатной плоскости построим графики функций: $y = 3^x$ и $y = 4 - x$.

Графики пересеклись в точке A(1; 3).

Ответ: 1.

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных уравнений* требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему:

> **Теорема 1.** Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример. Решить простейшее показательное уравнение $3^{2x-1} = 81$.

Решение: Число 81 представим в виде степени числа 3:

$3^{2x-1} = 3^4$; приравняем показатели степеней с одинаковыми основаниями:

$2x - 1 = 4$; решаем простейшее линейное уравнение:

$2x = 4 + 1$;

$2x = 5$ |:2;

$x = 2{,}5$ – это *ответ.*

Пример. Решите уравнение: $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x} - 88 = 0$

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку: $t = 2^x$

Уравнение тогда принимает вид:

$2t^2 - 5t - 88 = 0.$

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 729 = 27^2 > 0.$$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = -5,5. \end{array}\right.$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \end{array}\right.$$

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3.$$

С учетом сказанного в теореме 1 переходим к эквивалентному уравнению: $x = 3$. Это и будет являться ответом к заданию.

Ответ: $x = 3$.

Пример. Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

Решение: обе части исходного уравнения можно поделить на $0,2^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример. Решите уравнение:

$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$.

Решение: упрощаем уравнение до элементарного путем равносильных преобразований с использованием приведенных в начале статьи правил деления и умножения степеней:

$$49 \cdot 3^x \cdot 7^x = 49 \cdot 4^x \Leftrightarrow$$
$$21^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Деление обеих частей уравнения на 4^x, как и в предыдущем примере, является равносильным преобразованием, поскольку данное выражение не равно нулю ни при каких значениях x.

Ответ: $x = 0$.

Пример. Решите уравнение:

$18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$.

Решение: упрощаем уравнение путем равносильных преобразований, имея в виду везде, что показательная функция строго больше нуля при любом значении x и используя правила вычисления произведения и частного степеней, приведенные в начале статьи:

$$2^x \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow$$
$$2^x(3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 0, \\ 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9, \\ 3^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится <u>только</u> в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных неравенств* требуется знание следующей теоремы:

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример. Решить простейшее показательное неравенство $4^{5-2x} < 0{,}25$.

Решение: Представим правую часть в виде: 0,25 = ($^{25}/_{100}$) = ($^{1}/_{4}$) = = 4^{-1};

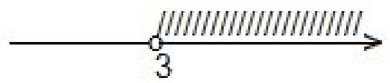
$4^{5-2x} < 4^{-1}$; функция $y = 4^x$ с основанием 4 > 1 возрастает на *R*, поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:

$5 - 2x < -1$;

$-2x < -1 - 5$;

$-2x < -6$ |:(-2) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняют на противоположный:

$x > 3$.



Ответ: (3; + ∞).

<u>*Пример.*</u> Решите неравенство:

$$2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} - 3^{2x^2-6x+3} \geqslant 0.$$

Решение:

$$2 \cdot 2^{2x^2-6x+2} + 2^{x^2-3x+1} \cdot 3^{x^2-3x+1} - 3 \cdot 3^{2x^2-6x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

Делим обе части неравенства на выражение:

$$3^{2x^2-6x+2}.$$

Оно всегда больше нуля (из-за положительности показательной функции), поэтому знак неравенства изменять не нужно. Получаем:

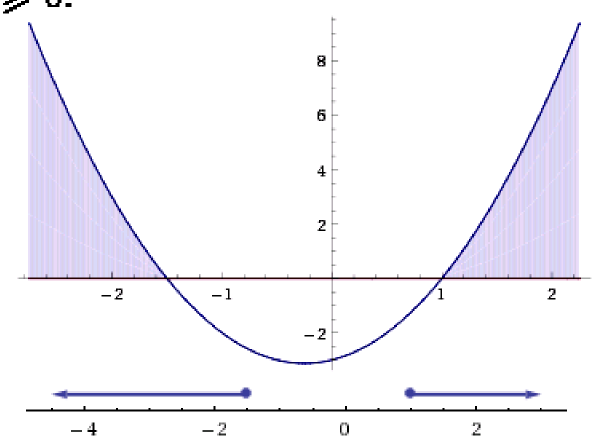
$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-6x+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} - 3 \geqslant 0.$$

Воспользуемся заменой переменной:

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1}.$$

Исходное уравнение тогда принимает вид:

$$2t^2 + t - 3 \geqslant 0.$$



Итак, неравенству удовлетворяют значения t, находящиеся в промежутке:

$$t \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

Переходя к обратной подстановке получаем, что исходное неравенство распадается на два случая:

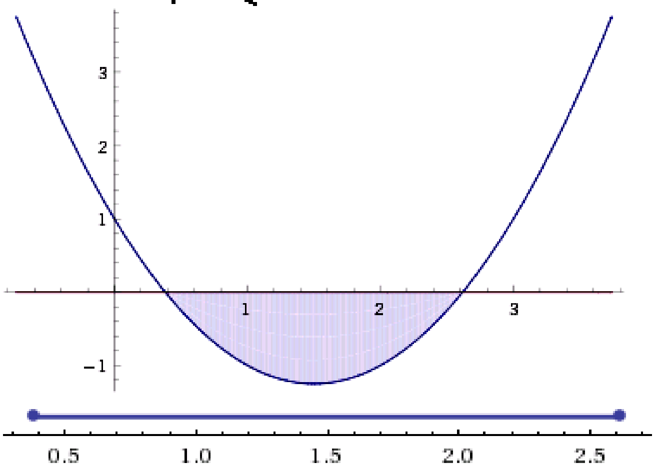
$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \leqslant -\frac{3}{2}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant 1 \end{array}\right.$$

Первое неравенство решений не имеет в силу положительности показательной функции. Решаем второе:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

Поскольку основание степени в данном случае оказалось меньше единицы, но больше нуля, равносильным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x^2 - 3x + 1 \leqslant 0.$$



Итак, окончательный *ответ:* $x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область значений функции $y = 3^{x+1} - 5$.
2. Решить графически уравнение $0{,}5^x = x + 3$.
3. Решить уравнение $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = 11\sqrt{3}$
4. Решить уравнение $16^x + 6 \cdot 4^x = 16$

5. Решить уравнение $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$

6. Решить уравнение $(5+2\sqrt{6})^x + (5-2\sqrt{6})^x = 10$

7. Решить неравенство $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16$

8. Найти число целых решений неравенства $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6} < \left(tg^2\frac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6}$

9. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2^{-x}-4}}{x^2+5x} \leq 0$

10. Решить неравенство $\frac{3^x-2^x}{x-3} \leq 0$

11. ЛОГАРИФМЫ

11.1. Свойства логарифмов. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) – это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad \log_a a^x = x$$

Пример:

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$.

$\log_7 49 = 2$, так как $7^2 = 49$.

$\log_5 1/5 = -1$, так как $5^{-1} = 1/5$.

Десятичный логарифм – логарифм с основанием 10, который обозначается как lg.

$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$

Натуральный логарифм – логарифм с основанием e, обозначается ln.

Свойства логарифма:

$a^{\log_a b} = b$	$\log_a b^m = m \log_a b$	
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_{a^n} b^n = \log_a b$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$

$8^{2\log_8 3} = (8^{2\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$

Логарифм произведения – это сумма логарифмов:

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_3 8{,}1 + \log_3 10 = \log_3 (8{,}1*10) = \log_3 81 = 4$

Логарифм частного – это разность логарифмов:

$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$

$9^{\log_5 50}/9^{\log_5 2} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма.

Показатель степени логарифмируемого числа: $\log_a b^{\mathrm{m}} = m\log_a b$

Показатель степени основания логарифма: $\log_{a^n} b = 1/n*\log_a b$

$\log_{a^n} b^m = m/n*\log_a b$, в частности если $m = n$, мы получаем формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например: $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$.

Переход к новому основанию:

$\log_a b = \log_c \mathrm{b}/\log_c a$, частности, если $c = b$, то $\log_a b = \log_c b/\log_c a$, и тогда:

$\log_a b = 1/\log_b a$

$\log_{0,8} 3*\log_3 1{,}25 = \log_{0,8} 3*\log_{0,8} 1{,}25/\log_{0,8} 3 = \log_{0,8} 1{,}25 = \log_{4/5} 5/4 = -1$

<u>*Пример.*</u> Найдите значение выражения $\log_{27} 81 + \log_{27} 9$.

Решение. Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\log_{27} 81 + \log_{27} 9 = \log_{3^3} 81 + \log_{3^3} 9 = \frac{1}{3}\log_3 81 + \frac{1}{3}\log_3 9 =$$

$$= \frac{1}{3}\log_3 3^4 + \frac{1}{3}\log_3 3^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Ответ: 2.

<u>*Пример*</u>. Вычислить значение выражения $16^{\log_{32} 3 + \log_2 \sqrt[4]{3}}$.

Решение.

$$16^{\log_{81} 3 + \log_2 \sqrt[4]{3}} = 16^{\log_{3^4} 3} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}\log_2 3} = (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ: 6.

<u>*Пример.*</u> Вычислите значение выражения $\dfrac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \dfrac{5\log_2 9}{\log_{64} 2}$.

Решение: Так как $\log_{32} 2 = \dfrac{1}{5}$, $\log_{64} 2 = \dfrac{1}{6}$,

то $\dfrac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \dfrac{5\log_2 9}{\log_{64} 2} = 30\log_2 18 - 30\log_2 9 = 30\log_2 \dfrac{18}{9} = 30\log_2 2 = 30$.

Ответ: 30.

<u>*Пример*</u>. Вычислите значение выражения $\log_{a^3 b^4} \sqrt[3]{a^2 b}$, если $\log_a b = \dfrac{1}{4}$.

Решение. В данном выражение перейдем к основанию *a*:

$$\log_{a^3 b^4} \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{\log_a \sqrt[3]{a^2 b}}{\log_a a^3 b^4} = \frac{2/3 + (1/3)\log_a b}{3 + 4\log_a b}.$$

Подставив в полученное выражение $\log_a b = \frac{1}{4}$, получим

$$\log_{a^3 b^4} \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

Ответ: 0,1875.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 243$

2. Найти значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$

3. Найти $\log_a (a^2 b^3)$, если $\log_a b = -2$

4. Вычислить $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{10+2\cdot\sqrt{21}}\right)$

5. Вычислить $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$

11.2. Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где $\boldsymbol{a}$ любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием **a**.

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают $\boldsymbol{R+}$. Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию a.

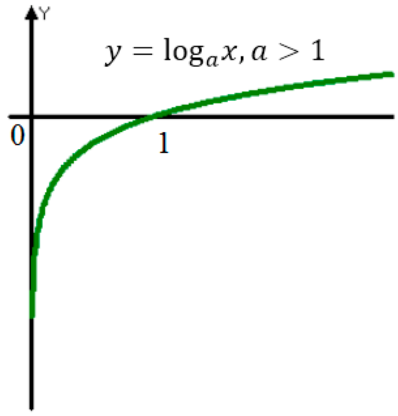
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции $a > 1$, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство $0 < a$.

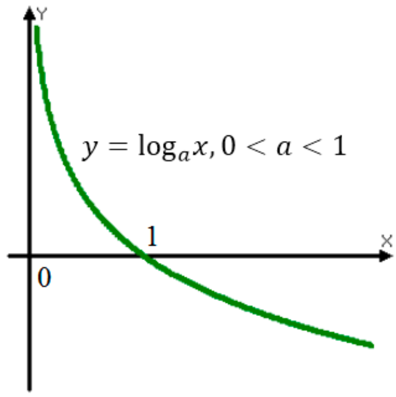
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1; 0).

5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при $x > 1$, и отрицательной при $0 < x < 1$.

6. Убывающая логарифмическая функция, будет отрицательной при $x > 1$, и положительной при $0 < x < 1$:



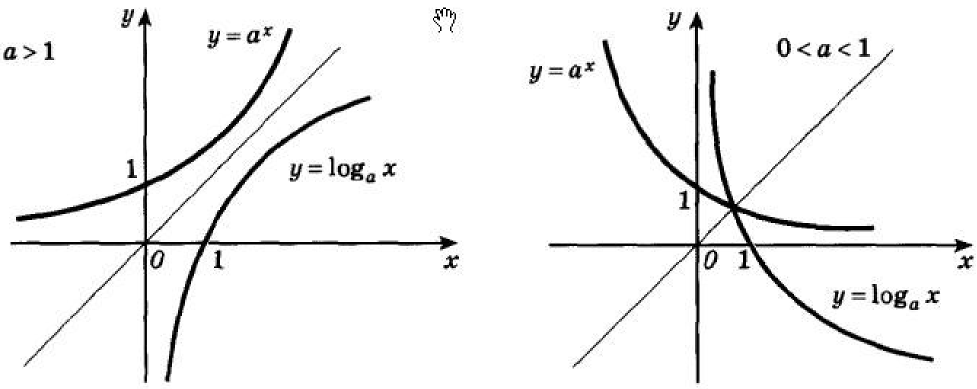
На следующем рисунке представлен график убывающей логарифмической функции – ($0 < a < 1$):



7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вид.

8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Если построить в одной оси координат показательную и логарифмическую функции с одинаковыми основаниями, то графики этих функций будут симметричны относительно прямой $y = x$. Данное утверждение показано на следующем рисунке.



Изложенное выше утверждение будет справедливо, как для возрастающих, так и для убывающих логарифмических и показательных функций.

*Приме*р. Найти область определения логарифмической функции $f(x) = \log_8(4 - 5x)$.

Исходя из свойств логарифмической функции, областью определения является все множество положительных вещественных чисел $R+$. Тогда заданная функция будет определена для таких x, при которых $4 - 5x > 0$. Решаем это неравенство и получаем $x < 0{,}8$.

Таким образом, получается, что областью определения функции $f(x) = \log_8(4 - 5x)$ будет являться промежуток $(-\infty; 0{,}8)$.

Ответ: $(-\infty; 0{,}8)$.

Пример. Найти функцию, обратную функции $y = 3^{x-2} - 2$.

Построить графики обеих функций в одной системе координат.

Решение: Найдем функцию, обратную данной:

$x = 3^{y-2} - 2,$

$3^{y-2} = x + 2,$

$\log_3 3^{y-2} = \log_3(x + 2),$

$(y - 2)\log_3 3 = \log_3(x + 2),$

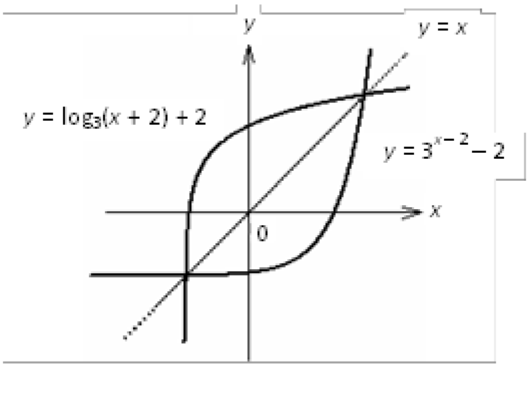
$y - 2 = \log_3(x + 2),$

$y = \log_3(x + 2) + 2.$

Построим графики функций:

а) строим график функции $y = 3^{x-2} - 2$; график функции $y = 3^x$ переносим параллельно на две единицы вправо по оси OX и на две единицы вниз по оси Oy;

б) график обратной функции $y = \log_3(x + 2) + 2$ симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму целых значений функции $y = \log_2(3 + \sin 4x)$.

2. Найти сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln\left(\lg\left(\frac{6}{|x-1|}\right)\right)$.

3. Укажите уравнение окружности с центром пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 6 - x$ и радиусом $r = 2$. Сделайте чертёж.

11.3. Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется *логарифмическим уравнением*.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$.

Утверждение 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, уравнение (1) при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$.

Пример. Решить уравнение $\log_2 x = 3$

Решение: Используя утверждение 1, получим $x = 2^3$ или $x = 8$

Ответ: $x = 8$.

Следующие утверждения используются при решении логарифмических уравнений.

Утверждение 2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильно одной из систем (очевидно, выбирается та система, неравенство которой решается проще)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Утверждение 3. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем

$$\begin{matrix} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{matrix} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Нужно подчеркнуть, что в процессе решения логарифмических уравнений часто используются преобразования, которые изменяют область допустимых значений (*ОДЗ*) исходного уравнения. Следовательно, могут появиться "чужие" решения или могут быть потеряны решения. Например, уравнения

$f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

или

$\log_a [f(x) \cdot g(x)] = b$ и $\log_a f(x) + \log_a g(x) = b$

вообще говоря, неравносильны (*ОДЗ* уравнений справа уже).

Следовательно, при решении логарифмических уравнений полезно использовать равносильные преобразования. В противном случае, проверка полученных решений является составной частью решения. Более того, необходимо учитывать и преобразования, которые могут привести к потере корней.

Приведем основные способы решения логарифмических уранений.

I. Использование определения логарифма

<u>*Пример 1.*</u> Решить уравнения:

a) $\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3$, c) $\log_{(x-2)}9 = 2$,

b) $\log_3 \dfrac{x-3}{x+3} = 1$ d) $\log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$.

Решения: a) Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b. Таким образом, $\log_a b = c \leftrightarrow b = a^c$ и, следовательно,

$5 + 3\log_2(x - 3) = 2^3$

или

$3\log_2(x - 3) = 8 - 5$, $\log_2(x - 3) = 1$.

Опять используя определение, получим

$x - 3 = 2^1$, $x = 5$.

Проверка полученного корня является неотъемлемой частью решения этого уравнения:

$\log_2(5 + 3\log_2(5 - 3)) = \log_2(5 + 3\log_2 2) = \log_2(5 + 3) = \log_2 8 = 3.$

Получим истинное равенство 3 = 3 и, следовательно, $x = 5$ есть решение исходного уравнения.

б) Аналогично примеру а), получим уравнение

$$\frac{x-3}{x+3}=3,$$

откуда следует линейное уравнение $x - 3 = 3(x + 3)$ с решением $x = -6$. Сделаем проверку и убедимся, что $x = -6$ является корнем исходного уравнения.

в) Аналогично примеру а), получим уравнение

$(x - 2)^2 = 9$.

Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ с решениями $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$. После проверки остается лишь $x = 5$.

г) Используя определение логарифма, получим уравнение

$(2x^2 - 8x + 15) = (2x + 1)^2$

или, после элементарных преобразований,

$x^2 + 6x\text{-}7 = 0$,

откуда $x_1 = -7$ и $x_2 = 1$. После проверки остается $x = 1$.

II. Использование свойств логарифма

Пример 2. Решить уравнения:

a) $\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$,

b) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -{}^1/_2$

c) $\log_2 x + \log_3 x = 1$,

d) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$,

e) $16^{\log_4(1 - 2x)} = 5x^2 - 5$.

Решения. а) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$ которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения)

$$\begin{cases} x>0 \\ x+3>0 \\ x+24>0 \end{cases}$$

Используя свойства логарифмов, получим

$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24) \leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x\cdot(x+3) = \log_3(x+24) \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x(x+3) = x+24 \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-24=0 \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-6 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \leftrightarrow x=4$$

b) Используя свойства, получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{2},$$

откуда, используя определение логарифма, получим

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

или

$$x^2 - 4x + 1 = {}^1/_2(x^2 - 6x + 5),$$

откуда получаем уравнение

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

с решениями $x_1 = -1$ и $x = 3$. После проверки остается лишь $x = -1$.

c) *ОДЗ* уравнения: $x \in (0; +\infty)$. Используя свойства, получим уравнение

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1$$

$$\log_2 x\left(1+\frac{1}{\log_2 3}\right) = 1,$$

$$\log_2 x(1 + \log_3 2) = 1,$$

откуда $\log_2 x = \dfrac{1}{1+\log_3 2}$ или $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_3 6}$ или $\log_2 x = \log_6 3$.

Следовательно, $x = 2^{\log_6 3}$.

d) *ОДЗ* уравнения – множество $(2;4) \cup (4; +\infty)$ определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} x-2>0 \\ (x-4)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Используя свойства (учитывая замечание), получим равносильное уравнение

$$2\log_3(x - 2) + 2\log_3|x - 4| = 0$$

или $\log_3(x - 2) + \log_3|x - 4| = 0$.

Получим равносильное уравнение

$\log_3(x-2)|x-4| = 0$ $(x-2)|x-4| = 1$.

Поскольку в *ОДЗ* $x-2 = |x-2|$ уравнение можно записать следующим образом

$|x-2||x-4| = 1$ или $|x^2-6x+8| = 1$

последнее уравнение (см. свойства модуля) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=1, \\ x^2-6x+8=-1, \end{array}\right.$$

откуда получим: $x_1 = 3, x_2 = 3+\sqrt{2}, x_3 = 3-\sqrt{2}$, где $x_3 \notin$ *ОДЗ*. Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x_1 = 3$ и $x_2 = 3+\sqrt{2}$.

e) Поскольку $16^{\log_4(1-2x)} = 4^{2\log_4(1-2x)} = (4^{\log_4(1-2x)})^2$

используя свойства, получим, что в *ОДЗ* ($x \in (-\infty;-1)$) уравнение равносильно уравнению

$(1-2x)^2 = 5x^2-5$

или

$x^2+4x-6 = 0$,

откуда следует: $x_1 = -2-\sqrt{10}$ и $x_2 = -2+\sqrt{10}$. Последнее значение x не входит в *ОДЗ*, остается единственное решение $x = -2-\sqrt{10}$.

III. Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравнение можно свести к алгебрическому уравнению относительно новой переменной. Например, уравнение $F(\log_a x) = 0$, где $F(x)$ – алгебраическая рациональная функция, посредством подстановки $\log_a x = t$ сводится к алгебраическому уравнению относительно t, $R(t) = 0$.

<u>*Пример 3.*</u> Решить уравнения:

a) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ c) $\lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14$

b) $\log_2^2(x-1)^2 - 3\log_2(x-1) - 1 = 0$ d) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$

*Решения***.** a) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение

$t^2 - 3t + 2 = 0$,

решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} lgx = 1, \\ lgx = 2, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в *ОДЗ*.

b) *ОДЗ* уравнения – множество (1;+∞). Поскольку $\log_2^2(x-1)^2 = \left[\log_2(x-1)^2\right]^2 = (2\log_2|x-1|)^2 = (2\log_2(x-1))^2 = 4[\log_2(x-1)]^2$, подстановкой $t = \log_2(x-1)$ получим квадратное уравнение

$4t^2 - 3t - 1 = 0$,

решениями которого являются $t_1 = -1/4$ и $t_2 = 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1) = -\dfrac{1}{4} \\ \log_2(x-1) = 1\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1 = 2^{-1/4} \\ x-1 = 2^1\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x = 3\end{array}\right.$$

c) *ОДЗ* уравнения – множество (0; + ∞). Так как

$\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + \lg x)^2 = (2 + \lg x)^2$,

$\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2$,

подстановкой $t = \lg x$ сведем исходное уравнение к квадратному уравнению

$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 + t = 14$

или

$2t^2 + 7t - 9 = 0$

откуда $t_1 = -{}^9/_2$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $x_1 = 10^{-9/2}$ и $x_2 = 10$.

d) *ОДЗ* уравнения – множество (0; 1) ∪ (1; + ∞).

$$x^{\lg 5} = x^{\frac{\log_5 5}{\log_x 10}} = (x^{\log_x 5})^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\lg x}$$

Поскольку уравнение примет вид $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ или $2\cdot 5^{\lg x} = 50$, откуда $5^{\lg x} = 25$ или $5^{\lg x} = 5^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

IV. Уравнения, содержащие выражения вида $f(x)^{\log_a 9(x)}$

<u>*Пример4.*</u> Решить уравнения:

$a)\ (x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2),\qquad b)\ 5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10.$

Решения. a) *ОДЗ* уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 \neq 1 \end{cases}$$

Получим множество $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. В *ОДЗ* обе части уравнения положительны, поэтому, логарифмируя обе части уравнения (например, по основанию 2), получим равносильное уравнение

$\log_2(x + 2) \cdot \log_2(x + 2) = \log_2(4 \cdot (x + 2))$.

или, используя свойства логарифма,

$\log_2(x + 2) \cdot \log_2(x + 2) = \log_2 4 + \log_2(x + 2)$.

Обозначив $\log_2(x + 2) = t$, получим квадратное уравнение
$t^2 - t - 2 = 0$
решениями которого являются $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) = -1 \\ \log_2(x+2) = 2 \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x + 2 = \dfrac{1}{2} \\ x + 2 = 4 \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$$

Оба корня входят в *ОДЗ*.

b) *ОДЗ* уравнения – множество (0; 1) ∪ (1; + ∞).

$$5^{\log_2 x} = 5^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2}} = (5^{\log_5 x})^{\frac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5}$$

уравнение примет вид $x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10$ или $x^{\log_2 5} = 5$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, получим

$$\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5$$

или $\log_2 x = 1$, откуда $x = 2$.

V. Некоторые специальные методы

<u>*Пример5.*</u> Решить уравнения

a) $2^x = 9 - \log_3 x$;

b) $x\log_3^2(x-1) + 4(x-1)\log_3(x-1) - 16 = 0$;

c) $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 2x - x^2$;

d) $\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3$

e) $|\log_2(3x - 1) - \log_2 3| = |\log_2(5 - 2x) - 1|$;

f) $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

Решения. а) Заметим, что $x = 3$ есть корень данного уравнения: $2^3 = 9 - \log_3 3$, $8 = 9 - 1$, $8 = 8$. Других решений уравнение не имеет, так как левая часть уравнения представляет строго возрастающую функцию, а правая часть – строго убывающую функцию. Графики таких функций имеют не более одной точки пересечения и, следовательно, поскольку $x = 3$ является решением, следует, что других решений нет.

b) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (1; +\infty)$. Обозначив $\log_3(x-1) = t$ получим квадратное уравнение относительно t

$$xt^2 + 4(x-1)t - 16 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $\Delta = [4(x-1)]^2 + 4x\cdot 16 = 16x^2 + 32x + 16 = 16(x+1)^2$, а корни

$$t_1 = \frac{-4(x-1)-4(x+1)}{2x} = -4 \text{ и } t_2 = \frac{-4(x-1)+4(x+1)}{2x} = \frac{4}{x}.$$

Таким образом, получена совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x-1) = -4 \\ \log_3(x-1) = \dfrac{4}{x} \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получим $x = 1\frac{1}{81}$, а второе уравнение решается аналогично предыдущему примеру: заметив, что $x = 4$ есть корень уравнения, доказывается, что других корней нет. Следовательно, корнями исходного уравнения являются $x = 1\frac{1}{81}$ и $x = 4$.

c) *ОДЗ* уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

откуда следует $x \in (0; +\infty)$. Используя свойство логарифма, получим равносильное уравнение

$$\log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2x - x^2.$$

Поскольку $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$, а знак равенства достигается лишь при $x = 1$, то левая часть уравнения $\log_2 \frac{x^2+1}{x} \geq 1.$ В то же время правая часть уравнения принимает максимальное значение 1 при $x = 1$ (вершина параболы $y = 2x - x^2$ находится в точке (1; 1)). Следовательно, уравнение имеет решения только если

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2+1}{x} = 2, \\ 2x - x^2 = 2, \end{cases}$$ откуда $x = 1$.

d) Получим

$$\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x^2)\log_4(16x) = \left(\log_4 x^3\right)^2, \\ \log_4 x^3 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_4 16 + \log_4 x) = \left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2, \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2\log_2 x)(2 + \frac{1}{2}\log_2 x) = \frac{9}{4}\log_2^2 x, \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2 x - 2 = 0, \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ 5t^2 - 18t - 8 = 0, \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{2}{5}, \\ t_2 = 4, \end{array}\right. \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ \log_2 x = 4, \end{array}\right. \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \\ x = 16, \end{array}\right. \\ x \ge 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

e) Используя свойства логарифмов и свойства модуля, получим

$$|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1| \Leftrightarrow \left|\log_2 \frac{3x-1}{3}\right| = \left|\log_2 \frac{5-2x}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} - \log_2 \frac{5-2x}{x}\right) \cdot \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} + \log_2 \frac{5-2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{2}{5-2x}\right) = 0, \\ \log_2\left(\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{5-2x}{2}\right) = 0, \end{array}\right. \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2(3x-1) = 3(5-2x), \\ (3x-1)(5-2x) = 6, \end{array}\right. \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{17}{12}, \\ x = 1,\ x = \frac{11}{6}, \end{array}\right. \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6}\right\}.$$

f) Поскольку функция $f(x) = 6x - x^2 - 5$ достигает своего максимума 4 при $x = 3$, следует, что

$\log_2(6x - x^2 - 5) \le 2.$

Правая часть уравнения $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2$ и, следовательно, 2 – это наименьшее ее значение (достигается при $x = 3$). Таким образом, уравнение имеет решение лишь в случае, если одновременно $\log_2(6x - x^2 - 5) = 2$ и $x^2 - 6x + 11 = 2$, т. е., если $x = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $\log_3(2x-1)=2$
2. Решить уравнение $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$
3. Решить уравнение $\log_2\log_3\log_4(x-1)=0$
4. Решить уравнение $\log_2^2(x^2)=2\log_2 x$
5. Решить уравнение $\lg^2(x^2)-\lg(x^4)=0$
6. Решить уравнение $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$
7. Решить уравнение $25^{\log_2 x}-6\cdot 5^{\log_2 x}+5=0$
8. Решить уравнение $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$
9. Решить уравнение $(4x)^{\log_4(2x)}=2x^2$
10. Решить уравнение $\log_5(x+2)=4-x$
11. Найти целый корень уравнения $\log_2(3-|x|)=\sqrt{2x+3}$

11.4. Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании называется *логарифмическим неравенством*.

В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a>1$, то неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0<a<1$, то неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Подчеркнём, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака $>$ может фигурировать любой из знаков $\geq$, $<$, $\leq$. В этом случае утверждения 1-3 соответственно преобразуются.

Пример 1**.** Решить неравенства

a) $\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8)$;

b) $\log_{0,2}(5 - x) > \log_{0,2} \dfrac{2}{x - 2}$;

c) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0$;

d) $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5 - x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4 - x)$;

e) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

Решение. a) Используя утверждение 1, получим

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x+8) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x \geq x + 8 \\ x + 8 > 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ x > -8 \end{cases} \quad \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 4 \end{array}\right. \\ x > -8 \end{cases} \leftrightarrow \; x \in (-8;-2] \cup [4;+\infty)$$

Ответ: $x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty)$.

b) Основание логарифма число между нулем и единицей, поэтому, используя утверждение 2, получим

$$\log_{0,2}(5 - x) > \log_{0,2} \frac{2}{x-2} \;\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x < \dfrac{2}{x-2}, \\ 5 - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5-x)(x-2) - 2}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x - x^2 - 12}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x-3)(x-4)}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ 4 < x < 5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in (2;3) \cup (4;5).$$

Ответ: $x \in (2;3) \cup (4;5)$

c) Запишем $0 = \log_2 1$ и, используя утверждение 1, получим
$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > \log_2 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > 1.$$
Запишем $1 = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$ и, используя утверждение 2, получим
$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_8 x < \dfrac{1}{3}, \\ \log_8 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 8^{\frac{1}{3}}, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow\; 1 < x < 2.$$
Ответ: $x \in (1;2)$

d) Используя утверждение 3, получим
$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x < 4-x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in (3;\,4), \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow x \in (3;\,4).$$
Решение первой системы совокупности:
$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x, \\ 4-x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} - 1 > 0, \\ 5 > 4, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-3} > 0, \\ x \in \mathbb{R}, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$
Решение второй системы совокупности:
$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x+2}{x-3}, \\ \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x, \\ 5-x < 4-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ \dfrac{5}{x-3} < 0, \\ x < 5, \\ 5 < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ x < 3, \\ x < 5, \\ x \in \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow\; x \in \emptyset.$$
Ответ: $x \in (3;\,4)$

e) Запишем $1 = \log_{2x}2x$, и используем утверждение 3 (учитывая, что знак > заменен на знак <).
$$log_{2x}(x^2-5x+6) < log_{2x}2x \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2-5x+6 < 2x, \\ x^2-5x+6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2-5x+6 > 2x, \\ 2x > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1;2) \cup (3;6), \\ x \in \left(0;\, {}^{1}\!/_{2}\right), \end{array}\right. \; x \in (0;\, {}^{1}\!/_{2}) \cup (1;2) \cup (3;6).$$
Решение первой системы совокупности:

$$\begin{cases} x > {}^1/_2, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > {}^1/_2, \\ 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \end{cases} \quad x \in (1;2) \cup (3;6).$$

Решение второй системы совокупности:

$$\begin{cases} 0 < x < {}^1/_2, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < {}^1/_2, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;{}^1/_2).$$

Ответ: $x \in (0;{}^1/_2) \cup (1;2) \cup (3;6)$.

<u>*Пример 2*</u>**.** Решить неравенство $\log^2_{1/2} x + \log_{1/2} x - 2 \geq 0$

Решение: обозначив $t = \log_{\frac{1}{2}} x$, получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 \geq 0$, откуда $t \leq -2$ или $t \geq 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 0 < x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;\frac{1}{2}] \cup [4;+\infty).$$

Ответ: $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right] \cup [4;+\infty)$

В случае логарифмических неравенств, которые не имеют вид неравенств, входящих в утверждения 1-3, определяется *ОДЗ* и с помощью равносильных преобразований исходные неравенства сводятся к неравенствам, которые решаются с помощью утверждений 1-3.

<u>*Пример 3.*</u> Решить неравенства

a) $\lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4$; c) $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \dfrac{1}{2}$;

b) $\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leq \dfrac{5}{2}$; d) $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$.

Решение. а) *ОДЗ* неравенства – множество $(5; +\infty)$. Используя свойство логарифма, получим неравенство

$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4$.

Используя утверждение 1, получим

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) < 4, \\ \end{cases}$$

$$(x-2)(x-5) > 0.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \Leftrightarrow x \in (1;2) \cup (5;6)$$

и, учитывая *ОДЗ*, получим $x \in (5;6)$.

Ответ: $x \in (5;6)$.

b) Определим *ОДЗ* неравенства

$$\begin{cases} 3x > 0, \\ 9x > 0, \\ 9x \neq 1, \\ 3x^2 > 0, \\ 3x^2 \neq 1, \\ 9x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{9}, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty).$$

Приведя все логарифмы к основанию 3, получим

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x} + \frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Используя свойство логарифма, получим

$$\frac{1 + \log_3 x}{2 + \log_3 x} + \frac{2 + 2\log_3 x}{1 + 2\log_3 x} \leq \frac{5}{2}.$$

Обозначив $\log_3 x = t$, решим полученное неравенство методом интервалов

$$\frac{1+t}{2+t} + \frac{2+2t}{1+2t} - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+t)(1+2t) + 2(2+2t)(2+t) - 5(2+t)(1+2t)}{2(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 7t}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup [0; +\infty).$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \leq -\dfrac{7}{2}, \\ -2 < \log_3 x < -\dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x \geq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{3^7}}, \\ \dfrac{1}{9} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

откуда, учитывая *ОДЗ*, получим множество решений исходного неравенства:

$$x \in (0; \frac{1}{27\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty).$$

Это и есть *ответ.*

c) Определим *ОДЗ* неравенства

$$\begin{cases} \sqrt{4x+5}-1>0, \\ \sqrt{4x+5}+11>0, \\ \sqrt{4x+5}+11 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x \geq -\frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$$

Поскольку $\log_2(\sqrt{4x+5}+11)=\log_2(1+(\sqrt{4x+5}+10))>\log_2 1=0$, неравенство равносильно следующему:

$$2\log_2(\sqrt{4x+5}-1)>\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$$

откуда следует

$$(\sqrt{4x+5}-1)^2>\sqrt{4x+5}+11.$$

Обозначив $t=\sqrt{4x+5}$, $t \geq 0$, получим квадратное неравенство $(t-1)^2>t+11$, или $t^2-3t-10>0$, откуда $t<-2$ или $t>5$. Поскольку $t \geq 0$, остается $t>5$ или $\sqrt{4x+5}>5 \Leftrightarrow x>5$.

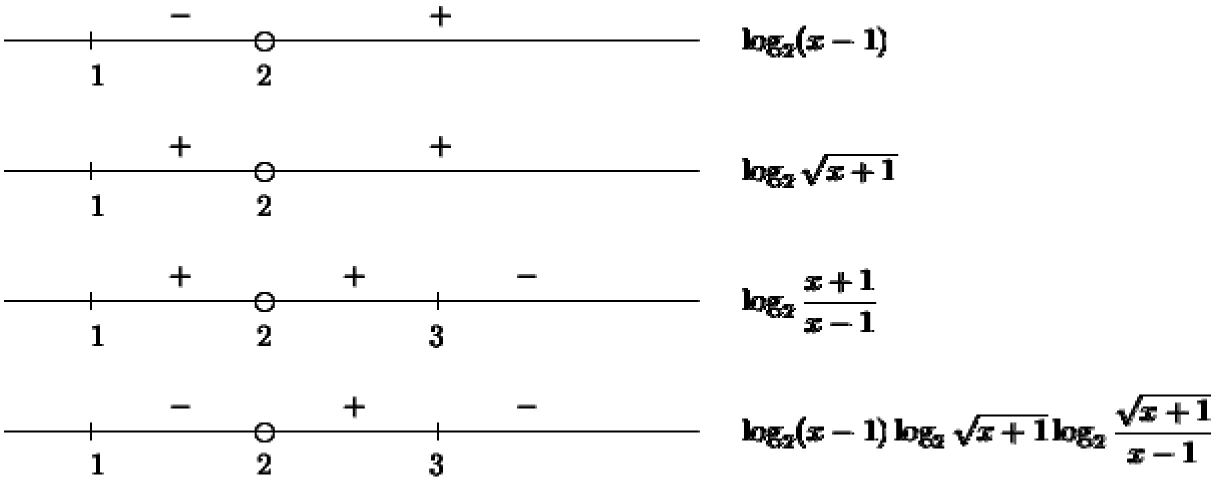
Учитывая *ОДЗ*, получим *ответ:* $x \in (5; +\infty)$.

d) *ОДЗ* неравенства есть множество $(1; 2) \cup (2; +\infty)$. Используя обобщенный метод интервалов, получим

$$\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{\log_2\sqrt{x+1}-\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}}<0 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}<0.$$

Так как в *ОДЗ* $\log_2(x-1)>0$ при $x>2$ и $\log_2(x-1)<0$ при $1<x<2$, следует, что $\log_2\sqrt{x+1}>0$ для любого x из *ОДЗ,* при $x \in (1;2) \cup (2;3)$ и $\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}<0$ при $x>3$, значит,



получим *ответ* $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство $\log_{0,5}\dfrac{5x-3}{x+2}>1$.

2. Решить неравенство $\log_{20}\sqrt{x}+\log_{20}\sqrt{x+1}\le\log_{20}\sqrt{2x+6}$.

3. Решить неравенство $\log_{0,3}\log_{6}\dfrac{x^2+x}{x+4}<0$.

4. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(x-5)}{\sqrt{9x-x^2}}\ge 0$.

5. Решить неравенство $\dfrac{x-4}{\log_2(x-2)}\le 0$.

6. Решить неравенство $\dfrac{|x|-4}{1+\log_3 x}\le 0$.

7. Решить неравенство $\sqrt{\log_3\dfrac{5x-3}{x+4}}<1$.

8. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_2(4-x)}}{\log_2(2x-1)}\ge 0$.

9. Найти сумму всех целых решений неравенства $\sqrt[4]{8-x}\cdot\log_{1/2}\left(2-\dfrac{x}{6}\right)\ge 0$.

10. Найти число целых решений неравенства $\log_{0,5}|x-3|>-2$.

11. Решить неравенство $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

12. ПРОИЗВОДНЫЕ

12.1. Нахождение производных

Производная функции − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*.

Рассмотрим функцию *f(x)*, область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x_0. Тогда функция

$f(x)$ является *дифференцируемой* в точке x_0, и ее *производная* определяется формулой

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для производной используются обозначения:

$$f'(x)=y'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

Таблица производных:

1. $c'=0,\ c=\mathrm{const}$
2. $(x^n)'=nx^{n-1}$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
4. $(e^x)'=e^x$
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$
17. $(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$
18. $(\mathrm{th}\,x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19. $(\mathrm{th}\,x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Формулы дифференцирования, производные основных элементарных функций:

$$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$
$$(\sqrt[\alpha]{u})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[\alpha]{u^{\alpha-1}}} \cdot u'$$
$$(a^{u})' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$$
$$(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$$
$$(\log_a |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$
$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$
$$(\lg |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$$
$$(\mathrm{Sin}(u))' = \mathrm{Cos}(u) \cdot u'$$
$$(\mathrm{Cos}(u))' = -\mathrm{Sin}(u) \cdot u'$$
$$(\mathrm{tg}(u))' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2(u)} \cdot u'$$
$$(\mathrm{ctg}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{Sin}^2(u)} \cdot u'$$
$$(\arcsin(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$
$$(\arccos(u))' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$
$$(\mathrm{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$
$$(\mathrm{arcctg}(u))' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$$
$$(\mathrm{sh}(u))' = \mathrm{ch}(u) \cdot u'$$
$$(\mathrm{ch}(u))' = \mathrm{sh}(u) \cdot u'$$
$$(\mathrm{th}(u))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)} \cdot u'$$
$$(\mathrm{cth}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2(u)} \cdot u'$$
$$\left(\mathrm{th}\alpha = \frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha},\ \mathrm{cth}\alpha = \frac{\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}\right)$$

Общие формулы дифференцирования:

$$C' = 0$$
$$(Cu)' = Cu'$$
$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
$$\left[\begin{array}{l} x = x(t),\ y = y(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} y = y(u),\ u = u(x) \\ y'_x = y'_u \cdot u'_x \end{array}\right.$$
$$y' = y \cdot (\ln |y|)'$$
$$\left[\begin{array}{l} y = y(x),\ x = x(y) \\ y'_x = \dfrac{1}{x'_y} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} y = u^{x} \\ y' = u' \cdot v \cdot u^{v-1} + v' \cdot u^{v} \ln u \end{array}\right.$$

<u>*Пример.*</u> Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x} + tg4x - e^{7x}$.

Решение:

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (tg4x)' - \left(e^{7x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} + \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' - e^{7x} \cdot (7x)' =$$

[redacted]

Пример. Найти производную функции $y = 4^x \cdot \arcsin x$.

Решение:

[redacted]

Пример. Найти производную функции $y = \dfrac{\ln x}{x^5}$.

Решение:

[redacted]

Пример. Найти производную функции $y = \ln\sqrt{\cos x^5}$.

Решение:

$$y' = (\ln\sqrt{\cos x^5})' = \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \left(\sqrt{\cos x^5}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot \left(\cos x^5\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot (-\sin x^5) \cdot \left(x^5\right)' = -\frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot \sin x^5 \cdot 5x^4 =$$

$$= \frac{-5x^4 \cdot \sin x^5}{2 \cdot \cos x^5} = -\frac{5}{2} \cdot x^4 \cdot tgx^5 \;\bullet$$

Пример. Найти производную функции $y = x^{\cos x}$

Решение: прологарифмируем заданную функцию $\ln y = \ln x^{\cos x}$.

По свойству логарифма степени имеем: $\ln y = \cos x \cdot \ln x$. Согласно формуле сложного дифференцирования и производной произведения можно записать

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

После домножения обеих частей последнего равенства на y окончательно получим:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right) \cdot x^{\cos x}$$

. Заметим, что без предварительного логарифмирования производную заданной функции найти невозможно.

Пример. Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$.

Сначала находим производную:

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$

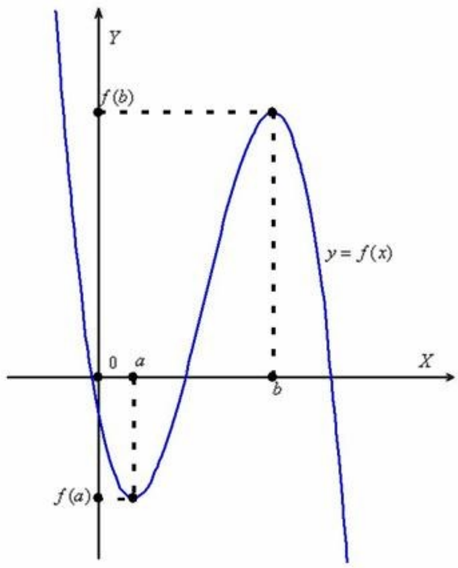
На втором шаге вычислим значение производной в точке $x = 5$:

$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$

Ответ: 33.

12.2. Нахождение критических точек и промежутков монотонности функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Упрощённо полагаем, что она *непрерывна* на всей числовой прямой:



Функция *возрастает* на интервале, если для любых двух точек этого интервала, связанных отношением $x_2 > x_1$, справедливо неравенство

$f(x_2) > f(x_1)$. Т. е., большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и её график идёт «снизу-вверх». Демонстрационная функция $y = f(x)$ растёт на интервале $(a; b)$.

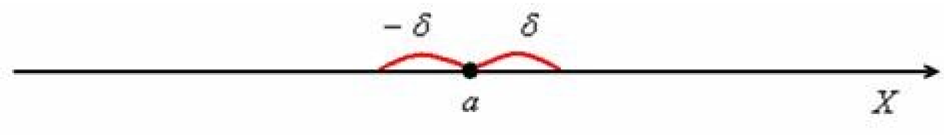
Аналогично, функция *убывает* на интервале, если для любых двух точек данного интервала, таких, что $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Т. е., большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, и её график идёт «сверху вниз». Наша функция $y = f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$.

Если функция возрастает или убывает на интервале, то её называют *строго монотонной* на данном интервале. Что такое монотонность? Понимайте в буквальном смысле – однообразие.

Также можно определить *неубывающую* функцию (смягчённое условие $f(x_2) \geq f(x_1)$ в первом определении) и *невозрастающую* функцию (смягчённое условие $f(x_2) \leq f(x_1)$ во 2-ом определении). Неубывающую или невозрастающую функцию на интервале называют монотонной функцией на данном интервале.

Окрестностью точки называют интервал, который содержит данную точку, при этом для удобства интервал часто полагают симметричным.

Пример: точка оси абсцисс $x = a$ и её симметричная δ – окрестность:



Точка x_0 называется *точкой максимума*, если *существует* её окрестность, такая, что *для всех* значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. В нашем конкретном примере это точка b.

Точка x_0 называется *точкой минимума*, если *существует* её окрестность, такая, что *для всех* значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. На чертеже – точка «a».

Точки a, b называют *точками экстремума* функции.

– значение $f(b)$ называют *максимумом* функции;

– значение $f(a)$ называют *минимумом* функции.

Общее название – *экстремумы* функции.

Пожалуйста, будьте аккуратны в словах!

Точки экстремума – это «иксовые» значения.

Экстремумы – «игрековые» значения.

Сколько может быть экстремумов у функции?

Ни одного, 1, 2, 3, … и т. д. до бесконечности. Например, у синуса бесконечно много минимумов и максимумов.

ВАЖНО! Термин «максимум функции» не тождественен термину «максимальное значение функции». Аналогично, «минимум функции» – не то же самое, что «минимальное значение функции».

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Данная точка называется *критической*, если в ней производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует. Критическая точка может быть точкой экстремума. А может и не быть.

Первое достаточное условие экстремума:

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в данной точке функция достигает максимума;

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в данной точке функция достигает минимума.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

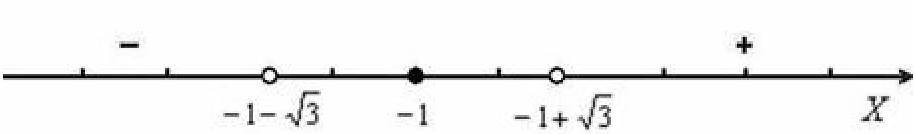
$f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$.

Решение: найдём область определения данной функции: $D(f) = (-\infty, -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$, знание которой очень важно учитывать в нашей задаче:

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 2x - 2))' = \frac{1}{x^2 + 2x - 2} \cdot (x^2 + 2x - 2)' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 2} = 0$$

У нас есть корень $x = -1$ и крайние точки области определения: $x = -1-\sqrt{3},\ x = -1+\sqrt{3}$.

Определяем знаки производной *только на интервалах области определения функции:*



Функция убывает на интервале $(-\infty, -1-\sqrt{3})$ и возрастает на интервале $(-1+\sqrt{3}; +\infty)$. Точки экстремума (и, понятно, экстремумы) отсутствуют. Значение $x = -1$ осталось не при делах, так как на интервале $(-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$ попросту нет графика функции $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$.

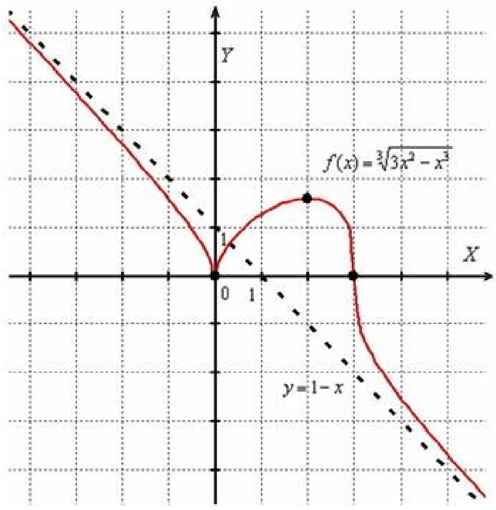
Ответ: функция убывает на интервале $(-\infty, -1-\sqrt{3})$ и возрастает на $(-1+\sqrt{3}; +\infty)$, экстремумы отсутствуют.

Пример. Найти точки экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$

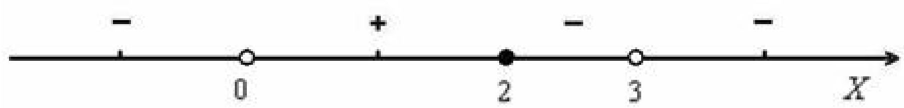
Решение: функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

Найдём критические точки:

[redacted]



Таким образом, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ – критические точки. Почему значения $x = 0$, $x = 3$, обращающие знаменатель производной в ноль, следует отнести к критическим точкам? А дело в том, что сама функция в них определена! Определим знаки производной на полученных интервалах:



Функция возрастает на интервале (0; 2) и убывает на $(-\infty;0) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$.

В точке $x = 0$ функция достигает минимума: $f(0)=\sqrt[3]{3\cdot 0^2-0^3}=0$. В точке $x = 2$ функция достигает максимума: $f(2)=\sqrt[3]{3\cdot 2^2-2^3}=\sqrt[3]{12-8}=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$.

В точке x = 3 нет экстремума.

Ответ: $x = 0$ – точка минимума, $x = 2$ – точка максимума.

Давайте посмотрим на график данной функции:

В точке $x = 0$ – классическое *остриё*, направленное вниз, при $x = 2$ – «нормальный» максимум. В точках $x = 0$, $x = 3$ функция не дифференцируема, однако в них существуют бесконечные производные и вертикальные касательные.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x \ln x$

Решение: Область определения: $(0; +\infty)$.

Найдём критические точки:

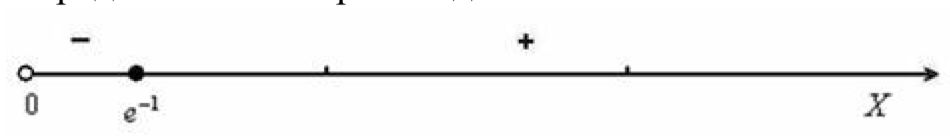
[redacted]

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} \approx 0{,}37$ – критическая точка.

Определим знаки производной:



Ответ: функция убывает на интервале (0; e^{-1}) и возрастает на интервале (e^{+1}; + ∞). В точке $x = e^{-1}$ функция достигает минимума:

$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -\, e^{-1}$

Задачи для самостоятельного решения

1) Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ в точке $x = -4$.

2) Найти интервал убывания функции $y = 5x^2 + 20x - 11 - 20\ln(x+1)$.

3) Найти значение функции $y = x^3 - 11x - 5 + \dfrac{4}{x}$ в точке максимума.

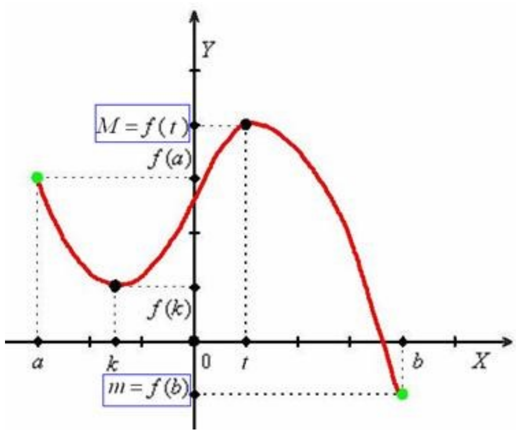
4) Найти количество точек экстремума функции $y = 0{,}6x^5 - 1{,}5x^4 + x^3 + 4$.

5) Найти точку минимума функции $y = 3x^5 - 125x^3 + 7$.

6) Найти сумму значений функции $y = 0{,}25x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 10$ во всех точках экстремумов.

12.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Важно! Как уже заострялось внимание в предыдущем пункте об экстремумах функции, *наибольшее значение функции* и *наименьшее значение функции* – НЕ ТО ЖЕ САМОЕ, что *максимум функции* и *минимум функции*.



Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная на отрезке [a; b] функция достигает своей *точной верхней грани M* и своей *точной нижней грани* **m**.

Число М также называют *максимальным значением функции на отрезке* и обозначают через $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, а число m – *минимальным значением функции на отрезке* с пометкой $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

В нашем случае:

$$\max_{[a;b]} f(x) = f(t) = M$$

$$\min_{[a;b]} f(x) = f(b) = m$$

Приведём алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

1) Находим значения функции в *критических точках*, которые принадлежат данному отрезку.

2) Вычисляем значения функции на концах отрезка.

3) Среди найденных в 1-ом и 2-ом пунктах значений функции выбираем самое маленькое и самое большое число, записываем ответ.

<u>Пример.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке [-1; 2]

Решение:

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0$$

Полученное квадратное уравнение имеет два действительных корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – критические точки.

Нас не интересует, есть в них максимумы/минимумы или нет.

Первая критическая точка принадлежит данному отрезку: $x_1 = 1 \in [-1; 2]$. А вот вторая – нет: $x_2 = 3 \notin [-1; 2]$, поэтому про неё сразу забываем.

Вычислим значение функции в нужной точке:

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = \mathbf{11}$$

Итоговый результат выделили жирным цветом, при оформлении задания в тетради его удобно обвести в кружок простым карандашом или пометить как-то по-другому.

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = \mathbf{-29}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = \mathbf{7}$$

Результаты опять каким-либо образом выделяем.

3) Дело сделано, среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1) = 11, \quad \min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -29$

Критическое значение $x_1 = 1$ на поверку оказалось точкой максимума, но об этом нас никто не спрашивал. Впрочем, для саморазвития можете устно подмечать такие факты.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5, \quad [-2;1]$

Решение:

1) Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$f'(x) = (3x^4 - 12x^2 + 5)' = 3 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 2x + 0 = 12x(x^2 - 2) = 0$

Критических точек тут три:

$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$

Первые две точки принадлежат нашему отрезку:

$x_1 = -\sqrt{2} \in [-2;1]$

$x_2 = 0 \in [-2;1]$

Но третья оказывается «вне игры»: $x_3 = \sqrt{2} \notin [-2;1]$

(надеюсь, все сумели сосчитать $-\sqrt{2} \approx -1{,}41,\ \sqrt{2} \approx 1{,}41$)

Вычислим значения функции в подходящих точках:

$f(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^4 - 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 5 = 12 - 24 + 5 = \mathbf{-7}$

$f(0) = 3 \cdot 0^4 - 12 \cdot 0^2 + 5 = \mathbf{5}$

Не забываем выделять результаты.

2) Вычислим значения функции на концах отрезка:
$f(-2) = 3 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^2 + 5 = 48 - 48 + 5 = \mathbf{5}$

$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2 + 5 = 3 - 12 + 5 = \mathbf{-4}$

Среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее значения. Максимальное значение («пятёрка») достигается сразу в двух точках, и это необходимо указать в завершающей записи:

Ответ: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = f(0) = 5, \quad \min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-\sqrt{2}) = -7$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 3x^2 - 2x^3$ на отрезке [-2; 4].

2. Для функции $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ найти сумму наибольшего и наименьшего значений на отрезке [1; 6].

3. Найти величину M + 15m, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5 + 24x + 9x^2 - 2x^3$ на отрезке [-2; 4].

12.4. Полное исследование функции

Исследование функции можно разбить на 5 – 6 пунктов:

1) Область определения.

2) Чётность/нечётность, периодичность функции.

3) Точки пересечения графика функции с координатными осями. Интервалы знакопостоянства.

4) Возрастание, убывание и экстремумы функции.

5) Выпуклость, вогнутость и перегибы графика.

6) Асимптоты графика функции.

7) Дополнительные точки и график по результатам исследования.

Естественно – если ваш преподаватель подробно разобрал другой алгоритм и требует строго придерживаться его лекций, то придётся внести некоторые коррективы в решение.

Пример. Исследовать функцию и построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4}$$

Решение: 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, D(f) = R.

2) Чётность/нечётность, периодичность функции.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{(-x)^4}{4} = -x^3 - \frac{x^4}{4}, \quad f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x),$$

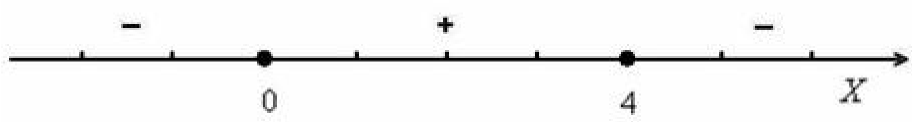
значит, данная функция не является чётной или нечётной.

Функция непериодическая.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции. График $f(x)$ проходит через начало координат.

С осью $OX: f(x) = x^3 - \frac{x^4}{4} = x^3 \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0$, $x = 0,\ x = 4$

Определим знаки $f(x)$:



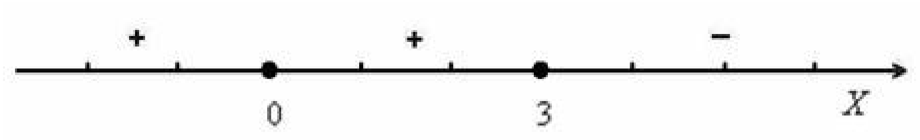
$f(x) > 0$, если $x \in (0; 4)$, $f(x) < 0$, если $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)' = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x) = 0$$

$x = 0$, $x = 3$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty\ ; 0) \cup (0; 3)$ и убывает на $(3; +\infty)$.

В точке $x = 3$ функция достигает максимума: $f(3) = 27 - \frac{81}{4} = 6\frac{3}{4}$

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x) = 0$$

$x = 0$, $x = 2$ – критические точки.

Определим знаки $f''(x)$:

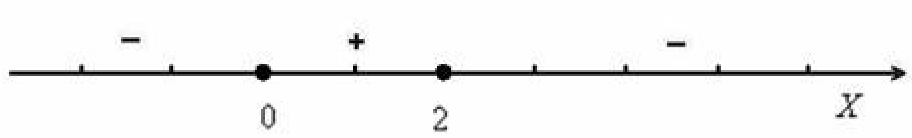


График функции является выпуклым на $(-\infty\ ; 0) \cup (2; +\infty)$ и вогнутым на $(0; 2)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика.

$f(0) = 0$, $f(2) = 8 - 4 = 4$

6) Асимптоты графика, поведение функции на бесконечности.

Так как функция непрерывна на R, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-\frac{x^4}{4}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-\frac{x^3}{4}\right)=\mp\infty$$

, значит, наклонные асимптоты также отсутствуют.

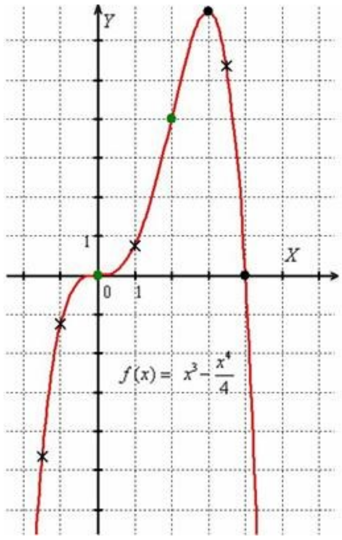
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)=-\infty$$

, функция не ограничена снизу.

7) Найдем дополнительные точки:

x	$-1{,}5$	-1	1	$3{,}5$	$4{,}5$
$f(x)$	$-4{,}6$	$-1{,}3$	$0{,}7$	$5{,}4$	$-11{,}4$

Выполним чертёж:



<u>Пример</u> Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и на основании результатов исследования построить её график.

$$y=f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$$

Решение: 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки x = 0, область определения: D (f) = R\{0}.

2) Чётность/нечётность, периодичность функции.

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\frac{-x^3+4}{x^2}$$

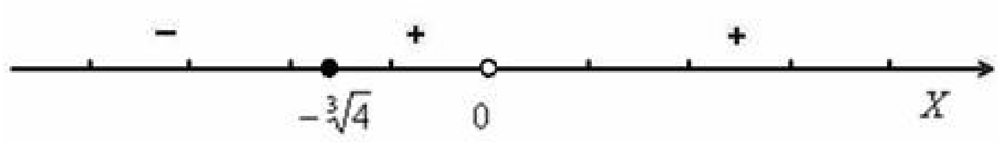
$f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x)$, значит, данная функция не является четной или нечетной. Очевидно, что функция непериодическая.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции не пересекает ось OY ($x \neq 0$).

С осью $OX: f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6$

Методом интервалов определим знаки $f(x)$:



$f(x)$, если $x \in (-\sqrt[3]{4}; 0) \cup (0; +\infty)$; $f(x)$, если $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4})$.

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

В рассматриваемом примере числитель почленно делится на знаменатель, что очень выгодно для дифференцирования:

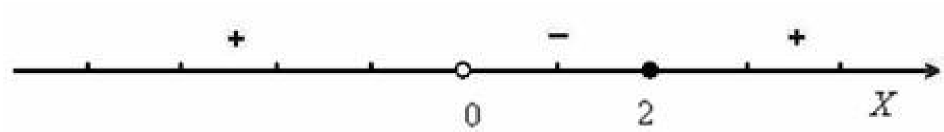
$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(x + \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' + 4\cdot(x^{-2})' = 1 + 4\cdot(-2)\cdot x^{-3} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3} = 0$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$x = 2$ – критическая точка.

Определим знаки f ′ (x):



$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает на $(0; 2)$

В точке $x = 2$ функция достигает минимума: $f(2) = \dfrac{8+4}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$f''(x) = \left(1 - \dfrac{8}{x^3}\right)' = (1)' - 8\cdot(x^{-3})' = 0 - 8\cdot(-3)\cdot x^{-4} = \dfrac{24}{x^4} > 0$, значит, график функции является вогнутым на всей области определения.

Точки перегиба отсутствуют.

6) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

а) С помощью односторонних пределов исследуем поведение функции вблизи подозрительной точки, где явно должна быть вертикальная асимптота:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right) = \frac{4}{(-0)^2} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right) = \frac{4}{(+0)^2} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

Действительно, функции терпит бесконечный разрыв в точке $x = 0$, а прямая $x = 0$ (ось OY) является вертикальной асимптотой графика $f(x)$.

б) Проверим, существуют ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\overset{\to 0}{\frac{4}{x^3}}\right) = 1$$

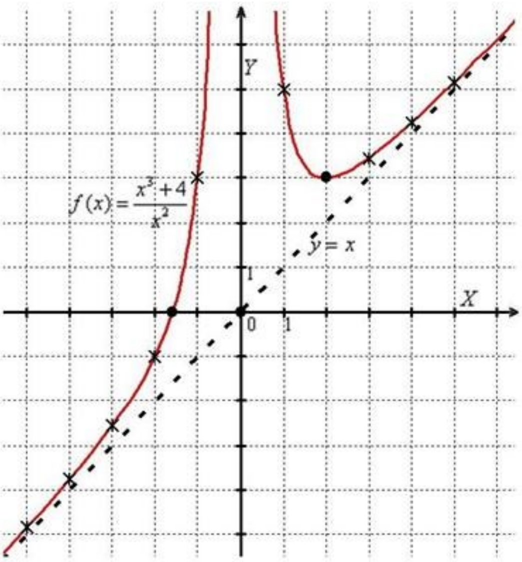
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

Да, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $f(x)$, если $x \to \pm\infty$.

6) Добросовестно посчитаем несколько дополнительных точек, поскольку из исследования нам известны только две точки.

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0,5	3	4	5
$f(x)$	-4,8	-3,8	-2,6	-1,0	3,0	15,5	16,5	3,4	4,3	5,2

Выполним чертёж:



Пример. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить её график.

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$$

Решение: 1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, D(f) = R.

2) Чётность/нечётность, периодичность функции.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+3}=\frac{x^2}{x^2+3}=f(x)$$

f (–x) = f (x) значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.

Очевидно, что функция непериодическая.

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции проходит через начало координат.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}>0$$ на всей области определения.

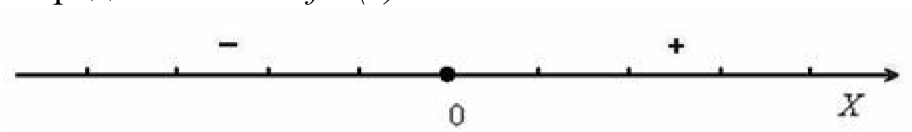
4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x^2+3)-x^2\cdot(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot(x^2+3-x^2)}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}=0$$

$x = 0$ – критическая точка.

Определим знаки *f ′ (x):*



$f(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 0)$.

В точке $x = 0$ функция достигает минимума: f (0) = 0.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=6\cdot\left(\frac{x}{(x^2+3)^2}\right)'=6\cdot\frac{(x)'\cdot(x^2+3)^2-x\cdot((x^2+3)^2)'}{(x^2+3)^4}=6\cdot\frac{(x^2+3)^2-x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}=$$

$$=6\cdot\frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3}=\frac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3}=0$$

$x = \pm 1$ – критические точки.

Определим знаки f ′ (x):

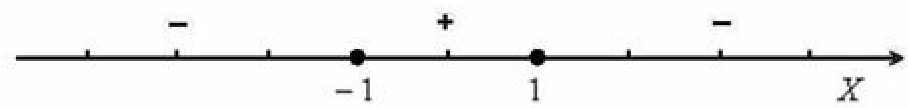


График f (x) является выпуклым на (–∞ ; – 1) ∪ (1; + ∞) и вогнутым на (-1; 1).

В обеих критических точках существуют перегибы графика:

$$f(\pm 1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

6) Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

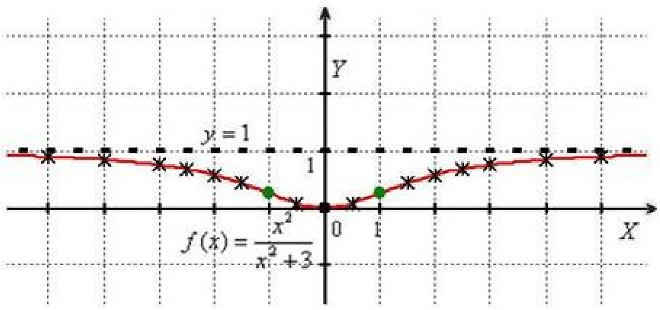
Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}^{\to 0}} = 1$$

Прямая y = 1 является горизонтальной асимптотой для графика *f (x)* при x → ± ∞ .

7) Найдем дополнительные точки и выполним чертёж:

x	0,5	1,5	2	2,5	3	4	5	6
$f(x)$	0,08	0,43	0,57	0,68	0,75	0,84	0,89	0,92



Задачи для самостоятельного решения

Методами дифференциального исчисления исследовать и построить графики следующих функций:

а) $y = \frac{3x^2-6x}{x-1}$ е) $y = \frac{1}{x^2-6x+5}$

б) $y = x \cdot \ln x$ ж) $y = \sqrt{4x^2+7}$

в) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$ з) $y = \frac{x}{x^2-1}$

г) $y = \frac{x}{x^2+1}$ и) $y = x^2 \cdot e^x$

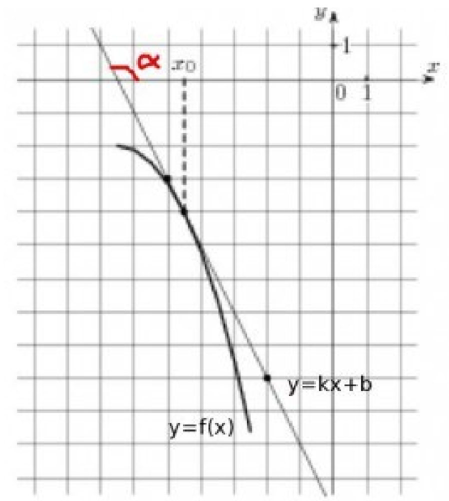
д) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$ к) $y = \frac{2x-1}{x^2}$

12.5. Касательные

Геометрический смысл производной.

Тангенс угла наклона касательной (угловой коэффициент наклона касательной), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен производной функции $y = f(x)$ в этой точке: $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$

Заметим, что угол α – это угол между прямой и положительным направлением оси OX:



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$,

где x_0 – абсцисса точки касания,

$f(x_0)$ – значение функции $y = f(x)$ в точке касания,

$f'(x_0)$ – значение производной функции $y = f(x)$ в точке касания.

Задачи, связанные с определением того, является ли прямая $y = kx + b$ касательной к графику функции $y = f(x)$. Можно указать два способа решения таких задач.

1. Находим общие точки графиков, т. е. решаем уравнение $f(x) = kx + b$, а затем для каждого из его решений вычисляем $f'(x_0)$. В тех случаях, когда $f'(x_0) = k$, имеет место касание, в других – пересечение.

2. Находим корни уравнения $f'(x_0) = k$ и для каждого из них проверяем, выполняется ли равенство $f(x) = kx + b$. При его выполнении получаем абсциссы точек касания.

Обобщая оба способа, заметим, что для того чтобы прямая $y = kx + b$ была касательной к графику функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно существование хотя бы одного числа x_0, для которого выполняется система $\begin{cases} f'(x_0) = k, \\ kx_0 + b = f(x_0). \end{cases}$

<u>*Пример.*</u> При каких значениях b прямая $y = 3x + b$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$?

Решение: Записав условие касания $\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = 3, \\ 3x_0 + b = \sqrt{x_0}, \end{cases}$ получим $\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{36}, \\ b = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$

Ответ: $b = \dfrac{1}{12}$.

<u>*Пример.*</u> Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \dfrac{4}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение: Находим

$y' = 6x^2 - 6x + 4 - \dfrac{8}{x^3}$, $\quad y(2) = 8,\ y'(2) = 15.$

Следовательно, уравнение касательной можно записать в виде $y = 8 + 15\,(x - 2)$, или после упрощения $y = 15x - 22$.

Ответ: $y = 15x - 22$.

<u>*Пример.*</u> Написать уравнение всех касательных к графику функции $y = x^3 - 2x + 7$, параллельных прямой $y = x$.

Решение. Так как касательная должна быть параллельна прямой $y = x$, то ее угловой коэффициент, равный $y'(x_0)$, где x_0 – абсцисса точки касания, совпадает с угловым коэффициентом данной прямой, т. е. $y'(x_0) = 1$. Отсюда $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$. Далее составляем уравнение касательной для каждой точки.

Ответ: $y = x + 5$, $y = x + 9$.

<u>*Пример.*</u> Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке М(3; – 2).

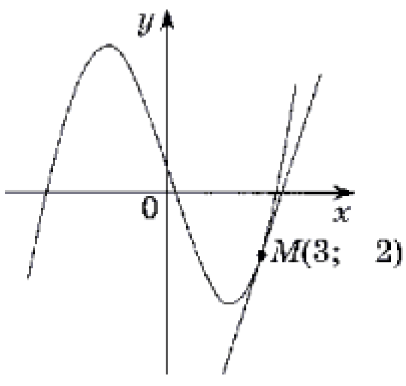


Рис. 10

Решение. Точка М(3; – 2) является точкой касания, так как $f(3) = \dfrac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$ (рис. 10).

$x_0 = 3$ – абсцисса точки касания.

$f(3) = -2$. $f'(x) = x^2 - 4$, $f'(3) = 5$.

$y = -2 + 5(x - 3)$, $y = 5x - 17$ – уравнение касательной.

Ответ: y = 5x – 17

Пример. Напишите уравнения всех касательных к графику функции

$y = -x^2 - 4x + 2$, проходящих через точку М(– 3; 6).

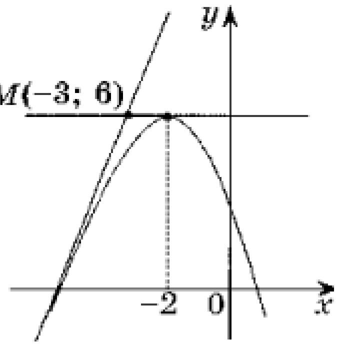


Рис. 11

Решение: Точка М(– 3; 6) не является точкой касания, так как $f(-3) \neq 6$ (рис. 11).

x_0 – абсцисса точки касания.

$f(x_0) = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2.$

$f'(x) = -2x - 4, f'(x_0) = -2x_0 - 4.$

$y = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2 - 2(x_0 + 2)(x - x_0)$ – уравнение касательной.

Касательная проходит через точку М (–3; 6), следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$6 = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2 - 2(x_0 + 2)(-3 - x_0),$

$(x_0)^2 + 6x_0 + 8 = 0 \rightarrow (x_0)_1 = -4, (x_0)_2 = -2.$

Если $x_0 = -4$, то уравнение касательной имеет вид $y = 4x + 18$.

Если $x_0 = -2$, то уравнение касательной имеет вид $y = 6$.

Ответ: $y = 4x + 18$ и $y = 6$.

Пример. Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $f_1(x) = x^2 + x + 1$ и $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$.

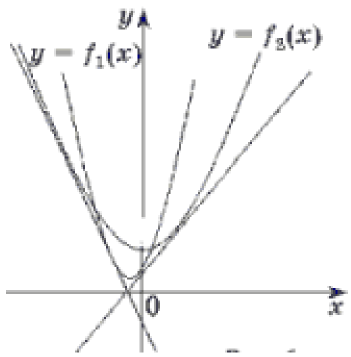


Рис. 12

Решение: Задача сводится к отысканию абсцисс точек касания общих касательных, т. е. к решению ключевой задачи 1 в общем виде, составлению системы уравнений и последующему ее решению (рис. 12).

1. Пусть а – абсцисса точки касания, лежащей на графике функции $y = x^2 + x + 1$.

2. $f(a) = a^2 + a + 1.$

3. $f'(a) = 2a + 1.$

4. $y = a^2 + a + 1 + (2a + 1)(x - a) = (2a + 1)x + 1 - a^2.$

1. Пусть с – абсцисса точки касания, лежащей на графике функции $y = \frac{1}{2}(x^2 + 3).$

2. $f(c) = \frac{1}{2}(c^2 + 3).$

3. $f'(c) = c.$

4. $y = \frac{1}{2}(c^2 + 3) + c(x - c) = cx + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2.$

Так как касательные общие, то

$$\begin{cases} 2a + 1 = c, \\ 1 - a^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + 1, \\ 1 - a^2 = \frac{3}{2} - 2a^2 - 2a - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 0,\ c_1 = 1 \\ a_2 = -2,\ c_2 = -3. \end{array} \right.$$

Итак, $y = x + 1$ и $y = -3x - 3$ – общие касательные.

Ответ: y = x + 1 и y = –3*x* – 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях *a* прямая $y = ax + 2$ является касательной к графику функции $y = \ln x$?

2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 - 12x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

3. Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^3$ и касательной, проведенной к этому графику через точку P(0; 16).

4. Напишите уравнение всех общих касательных к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2x^2 - x + 0{,}5$.

5. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = -\frac{7}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

6. Прямая y = 15 – 7x является касательной к графику функции $y = \frac{5}{x^2} - 17x$. Найти сумму координат точки касания.

7. К графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{4}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ проведена касательная. Найти абсциссу точки касательной, у которой ордината равна 8.

12.6. Физический смысл производной функции

Пусть материальная точка движется неравномерно и прямолинейно согласно закону $s = s(t)$ (или $x = x(t)$), где t – время, s (или x) – путь.

Имеем физический смысл производной: $v(t) = s'(t)$ (или $v(t) = x'(t)$), т. е. скорость прямолинейного неравномерного движения соответствует производной от пути по времени.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения и, конечно, значение 0. Если скорость на каком-либо промежутке времени (t_1; t_2) положительна, то точка движется в положительном направлении, т. е. координата растет с течением времени, а если $v(t)$ отрицательна, то координата $x(t)$ убывает.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t. А производная этой функции называется ускорением движения: $a = v'(t)$.

Коротко говорят: производная от скорости по времени есть ускорение.

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x – расстояние от точки отсчеёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение:

Найдем закон изменения скорости:

$v(t) = x'(t) = 12t - 48$.

При $t = 9$ с имеем:

$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с.

Ответ: 60.

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Решение:

Найдем закон изменения скорости:

$v(t) = x'(t) = 2t - 13$ м/с.

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение:

$2t - 13 = 3 \Leftrightarrow 2t = 16 \Leftrightarrow t = 8$ с.

Ответ: 8.

Задачи для самостоятельного решения

1. Материальная точка движется по оси ОХ по закону $x(t) = -\dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + 5t$ (x – координата в метрах, t – время в секундах). Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

2. Две точки движутся по оси ОХ по законам движения $x_1(t) = \dfrac{t^3}{3} + 8$ и $x_2(t) = t^2 + 3t - 7$ (x – координата, t – время). Определите промежуток времени, в течение которого скорость первой точки меньше скорости второй.

3. Материальная точка движется по оси ОХ по закону $x(t) = -\dfrac{t^3}{6} + 2t^2 - 5$ (x – координата в метрах, t – время в секундах). Найти момент времени, когда ускорение равно нулю.

4. Ускорение движения точки вдоль оси ОХ имеет вид $x = at^2 + bt + c$. В момент времени $t = 1$ сек. скорость точки равна 7 см/сек. При $t = 4$ сек. абсцисса точки $x = 49$ см, а скорость точки равна 25 см/сек. Найти значение $a - b + c$.

13. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Определение. *Параметром* называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

Какие основные типы задач с параметрами?

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Наиболее массовый класс задач с параметром – задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$.

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и а принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и а и заканчиваем решение.

Пример. При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ уравнение $|\boldsymbol{x} + \mathbf{2}| = \boldsymbol{ax}$ не имеет решений?

Решение 1: для каждого значения параметра $\boldsymbol{a}$ решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 2 = ax, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -(x + 2) = ax, \\ x + 2 < 0, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} (a - 1)x = 2, \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a + 1)x = -2, \\ x < -2. \end{cases}$$

Первая система имеет одно решение $x = \frac{2}{a-1}$ при $\frac{2}{a-1} \geqslant -2,$ т. е. при $\boldsymbol{a} \leq \mathbf{0}$ или $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x = -\frac{2}{a+1}$, если $-\frac{2}{a+1} < -2,$ т. е. при $-\mathbf{1} < \boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ и не имеет решений при остальных значениях параметра.

Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет одно решение $x = \frac{2}{a-1}$ при $a \leq -1,$ $\boldsymbol{a} \leq -\mathbf{1},$ $\boldsymbol{a} = \mathbf{0},$ $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$; два решения $x = \frac{2}{a-1}$ и $x = -\frac{2}{a+1}$ при $-1 < a < 0.$ Анализируя полученный результат, определяем значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} \leq \mathbf{1}$.

Решение 2: приведем еще один вариант использования графических представлений для решения задач с параметрами.

Как известно, число решений уравнения $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{g(x)}$ совпадает с количеством точек пересечения графиков функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g(x)}$, построенных в одной системе координат. Рассмотрим графики функций $\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{2}|$ и $\boldsymbol{y} = \mathbf{a}\boldsymbol{x}$ (рис. 13). График первой функции не зависит от параметра $\boldsymbol{a}$; график второй функции (правой части уравнения) принадлежит семейству прямых, проходящих через начало координат, – «подвижный» график. Поэтому искомые значения параметра $\boldsymbol{a}$ соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции **у = |*x* + 2|**.

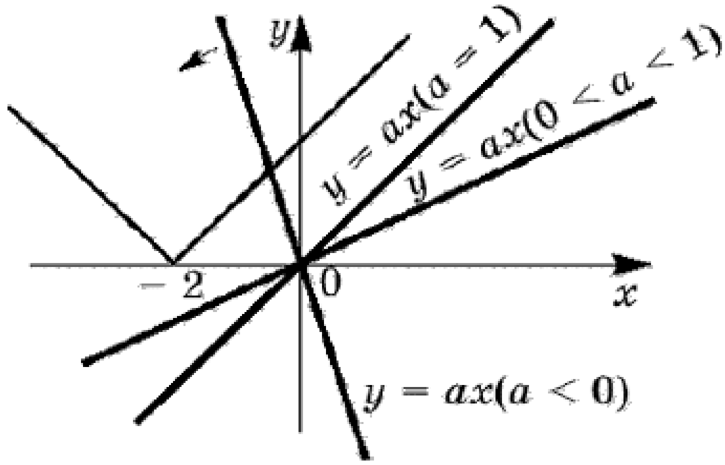


Рис. 13

При изменении параметра ***a*** от – ∞ до + ∞ прямая у = *а*х поворачивается, начиная от «вертикального» положения «слева» от оси координат, против часовой стрелки вокруг начала координат. Очевидно, что при $\boldsymbol{a \le 0}$ прямая $\boldsymbol{y = ax}$ пересекает по крайней мере один раз «неподвижный» график **у = |*x* + 2|**; при дальнейшем возрастании параметра ***a*** до момента $\boldsymbol{a = 1}$ (включительно) прямая не имеет общих точек с «неподвижным» графиком; при $\boldsymbol{a > 1}$ у графиков снова появляется общая точка. Поэтому исходное уравнение не имеет решений при $\boldsymbol{0 < a \le 1}$.

Пример. При каких значениях параметра *а* уравнение

$(a – 1)x^2 + 2x + a – 1 = 0$ имеет ровно один корень?

Решение:

При $a = 1$ уравнение имеет вид $2x = 0$ и, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Если $a \neq 1$, то данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при тех значениях параметра, при которых дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю, получаем уравнение относительно параметра *а*

$4a^2 – 8a = 0$,

откуда $a = 0$ или $a = 2$.

Ответ: уравнение имеет единственный корень при $a \in \{0; 1; 2\}$.

Пример. При каком значении параметра a корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$

удовлетворяют условию $5x_1 + 3x_2 = 23$?

Решение: запишем теорему Виета для данного уравнения $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$

К первому уравнению добавим условие из задачи и получим систему

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 = 23 \end{cases}$ Решением данной системы $x_1 = 7, x_2 = -4$ являются корни искомого уравнения. По второму условию теоремы Виета находим параметр: $a = x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-4) = -28$.

Ответ: $a = -28$.

Пример. При каких значениях параметра a неравенство $(5-a)x^2 + (3a-15)x - 6a < 0$ выполняется на всей числовой оси?

Решение: рассмотрим два случая:

1) Если $5 - a \neq 0$, то левая часть неравенства является квадратным трёхчленом. Рассмотрим квадратичную функцию $y = (5-a)x^2 + (3a-15)x - 6a$, которая будет всюду отрицательной, если

$$\begin{cases} D < 0 \\ 5 - a < 0 \end{cases}$$

Вычислим дискриминант $D = (3(a-5))^2 - 4(5-a)(-6a) = -15(a-5)(a+3)$ и запишем данную систему $\begin{cases} -15(a-5)(a+3) < 0 \\ a - 5 > 0 \end{cases}$

Она равносильна системе $\begin{cases} a + 3 > 0 \\ a - 5 > 0 \end{cases}$, решение которой $a \in (5; +\infty)$.

2) Если $5 - a = 0$, то при $a = 5$ неравенство примет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 30 < 0$, которое справедливо всегда. Итак, $a = 5$ тоже является решением задачи.

Ответ: $a \in [5; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении параметра a корни уравнения $3x^2+7x+a=0$ связаны соотношением $10x_1+3x_2=0$?

2. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+ax+a+3>0$ выполняется для любых x?

3. При каких значениях параметра a уравнение $(2a+1)x^2+2(a-1)x+(a+1)=0$ имеет различные отрицательные корни?

4. При каких значениях параметра a уравнение $(2-a)x^2+2(a+1)x+a+3=0$ имеет два различных положительных корня, сумма которых меньше, чем 3/4?

5. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|2|x|-4\right|=a-4$ имеет 1, 2 или 3 корня.

6. Найти все значения параметра a, при которых функция $y=-\dfrac{x^3}{3}+(a+2)x^2-4x+3$ имеет две точки экстремума.

7. Указать целое значение параметра a (если оно единственное) или сумму целых значений из промежутка (0;9), при которых уравнение $(\sqrt{x-3}-2)\cdot(x-a)=0$ имеет единственное решение.

8. Найти наименьшее целое неотрицательное значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases} |x+1|<3 \\ x^2-a^2\ge 0 \end{cases}$ не имеет решений.

9. Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором абсцисса всех общих точек графиков функций $f(x)=\dfrac{6a}{x}$ и $g(x)=\dfrac{51}{x^2+x}$ положительна.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Тема	Ответы
1	1) 2780 2) 2464 3) 6 4) произведение уменьшилось на 12 % 5) дробь увеличилась на 12,5 %
2	1) x + 2 2) 1 3) $-\frac{5(x+1)}{x^2-4}$ 4) 15 5) 16
3	1) -3 2) -960 3) 45 4)30 5) ½ 6) -6
4	1) $(-5;-4)\cup(-4;5)$ 2) $[0;2)$ 3) $-1;\pm2$ 4) $[-1;0)\cup(0;\infty)$ 5) $(-\infty;-3)$
5	1) 40 2) $1{,}5\sqrt{3}$ 3) 7 4) 6 5) 2;-4 6) 6 7) 1; -4/5 8) -1 9) 7 10) -1; 2 11) -2; 0 12) -3 13) 0; 3 14) -3 15) -8 16) -8 17) 4 18) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$
6	1) 0 2) 4 3) 16 4) $(-6;-5)\cup[-2;3]$ 5) $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$ 6) [1;2] 7) (-1;1] 8) $(-2;+\infty)$ 9) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$ 10) 3 11) 8 12) 5 13) $\sqrt{2}-1$ 14) $\left[-\frac{13}{2};-\frac{11}{10}\right]$ 15) $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3}\right)$
7	1) 1 2) $(-\infty;5]$ 3) 2 4) 3 5) 16 6) 4 7) $3\sqrt{10}$ 8) -1 9) -2 10) -16 11) (8;6) 12) $\sqrt{5}$ 13) 11
8	1) $2\sqrt{5}$ 2) (0;7) 3) (9;0) 4) (-4;-4) 5) $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ 6) $(x-6)^2+(y+2)^2=25$ 7) $x-y=0$
9	1) 2 2) $\frac{3}{4}$ 3) $-\sin 2\beta$ 4) $-\frac{3}{4}$ 5) $\frac{3-\sqrt{13}}{8}$ 7) 18º 8) $\frac{17\pi}{6}$ 9) -180º 10) 4 11) $\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n;\ -\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}\pi n, n\in Z$ или $-\frac{\pi}{15}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$ 12) 135º 13) 70º;110º;150º 14) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$ 15) $[-\pi+4\pi n;4\pi n], n\in Z$
10	1) $E(y)=(-5;+\infty)$ 2) $x=-1$ 3) 3/2 4) ½ 5) 1; -1; 0 6) -1; 1 7) $(-\infty;0{,}5]$ 8) 4 9) $(-5;-2]$ 10) $[0;3)$

11	1) 30 2) 8 3) -4 4) 4 5) 4 6) 3 7) 10 8) $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ 9) 5 10) -3 11) 65 12) 1; $\sqrt{2}$ 13) $\pm 1; \pm 10$ 14) 3;9 15) 1;2 16) 25;1/5 17) 1;2 18) 3 19) -1 20) $\left(\frac{3}{5};\frac{8}{9}\right)$ 21) $(0;3]$ 22) $(-4;-3)\cup(8;\infty)$ 23) $[6;9)$ 24) $(3;4]$ 25) $\left(\frac{1}{3};4\right]$ 26) $\left[\frac{7}{4};\frac{15}{2}\right)$ 27) $(1;3]$ 28) 21 29) 6 30) (-3; -1)
12	1) 0 2) (-1;0) 3) 7 4) 0 5) 5 6) 10 7) 14 8) $\frac{25}{8}$ 9) -3 10) e^{-3} 11) $y=24x+33$ 12) (2;-2) и (-4;52) 13) $y=-3x, y=x$ 14) 14 15) 21 16) 2 17) 5 18) $[0;3)$ 19) 4 20) -1
13	1) -10 2) $(0;\infty)$ 3) (-5;-1) 4) $\left(-\frac{14}{5};-\frac{5}{2}\right)$ 5) $\{4\}\cup[8;\infty)$ 6) $(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$ 7) 10 8) 4 9) 8

ПРОГРАММА КУРСА ПО ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА

Кинематика. Механическое движение. Система отсчета. Траектория. Путь и перемещение. Скорость и ускорение. Равномерное и равноускоренное прямолинейное движение. Относительность движения. Сложение скоростей. Графическое представление движения. Свободное падение тел. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Центростремительное ускорение.

Динамика. Первый закон Ньютона. Масса. Сила. Второй закон Ньютона. Сложение сил. Третий закон Ньютона. Сила упругости. Закон Гука. Силы трения покоя и скольжения. Гравитационная сила. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела. Искусственные спутники. Невесомость. Первая космическая скорость.

Законы сохранения в механике. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение. Механическая работа. Кинетическая и потенциальная энергии. Закон сохранения энергии в механике. Мощность. Коэффициент полезного действия механизмов.

Статика. Виды равновесия. Момент силы. Правило моментов. Центр масс. Простые механизмы.

Жидкости и газы. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Сообщающиеся сосуды. Принцип устройства гидравлического пресса. Атмосферное давление. Сила Архимеда для жидкостей и газов. Условия плавания тел.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Основы молекулярно-кинетической теории. Опытное обоснование основных положений молекулярно-кинетической теории. Масса и размер молекул. Число Авогадро. Броуновское движение. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Температура и ее измерение. Абсолютная температурная шкала. Измерение скоростей молекул. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона). Изопроцессы.

Термодинамика. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Теплоемкость вещества. Работа в термодинамике. Закон сохранения энергии в тепловых процессах (первый закон термодинамики). Применение первого закона термодинамики к различным процессам. Адиабатный процесс. Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

Жидкости и твердые тела. Испарение и конденсация. Насыщенные и ненасыщенные пары. Кипение жидкостей. Зависимость температуры кипения от давления. Влажность воздуха. Кристаллические и аморфные тела. Свойства твердых тел. Упругие деформации.

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Электростатика. Электрический заряд. Взаимодействие заряженных тел. Закон Кулона. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Электрическое поле точечного заряда. Принцип суперпозиции электрических полей. Работа электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал и разность потенциалов. Потенциальная энергия системы дискретных точечных зарядов. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Проводники в электрическом поле. Диэлектрики в электрическом поле. Диэлектрическая проницаемость. Электроемкость. Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора. Энергия электрического поля.

Законы постоянного тока. Электрический ток. Сила тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Последовательное и параллельное соединение проводников. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Работа и мощность тока. Электрический ток в различных средах. Электронная проводимость металлов. Зависимость сопротивления от температуры. Законы электролиза. Электрический ток в газах. Самостоятельный и несамостоятельный разряд. Понятие о плазме. Полупроводники, электропроводность полупроводников и ее зависимость от температуры. Собственная и примесная проводимость полупроводников. Полупроводниковый диод. Транзистор.

Магнитное поле. Электромагнитная индукция. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Индукция магнитного поля. Принцип суперпозиции магнитных полей. Закон Ампера. Сила Лоренца. Магнитные свойства вещества. Магнитная проницаемость. Ферромагнетизм. Электромагнитная индукция. Магнитный поток. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. Явление самоиндукции. Индуктивность. Энергия магнитного поля.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Механические колебания и волны. Гармонические колебания. Амплитуда, период и частота колебаний. Математический маятник. Период колебаний математического маятника. Колебания груза на пружине. Превращение энергии при гармонических колебаниях. Вынужденные колебания. Резонанс. Распространение механических волн в упругих средах. Скорость распространения. Длина волны. Поперечные и продольные волны. Звуковые волны. Скорость звука. Громкость звука и высота тона.

Электромагнитные колебания и волны. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Собственная частота колебаний в контуре. Вынужденные электрические колебания. Переменный электрический ток. Генератор переменного тока. Действующие значения силы тока и напряжения. Активное, емкостное и индуктивное сопротивления. Резонанс в электрической цепи. Трансформатор. Передача электроэнергии. Электромагнитные волны. Скорость их распространения. Излучение и прием электромагнитных волн. Принципы радиосвязи. Свойства электромагнитных волн.

ОПТИКА

Геометрическая оптика. Прямолинейное распространение света. Законы отражения и преломления света. Показатель преломления. Полное отражение. Предельный угол полного внутреннего отражения.

Простейшие оптические приборы. Зеркало. Построение изображений в зеркале. Плоскопараллельная пластинка. Смещение лучей света в плоскопараллельной пластинке. Призма. Ход лучей в призме. Собирающая и рассеивающая линзы. Формула тонкой линзы. Построение изображений в линзах. Фотоаппарат. Очки.

Волновая оптика. Скорость света и ее опытное определение. Дисперсия. Спектральный анализ. Шкала электромагнитных волн. Интерференция света и ее применение в технике. Дифракция света. Дифракционная решетка. Поперечность световых волн. Поляризация света.

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА АТОМА И ЯДРА

Световые кванты. Формула Планка. Кванты света. Фотоэффект и его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Применение фотоэффекта в технике. Световое давление. Опыты П.Н. Лебедева.

Атом и атомное ядро. Опыт Резерфорда по рассеянию α-частиц. Планетарная модель атома. Постулаты Бора. Испускание в поглощение света атомом. Лазеры. Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц. Радиоактивность. Изотопы. Альфа-, бета–и гамма – излучения. Протоны и нейтроны. Энергия связи атомных ядер. Дефект масс. Ядерные реакции. Деление ядер урана. Ядерный реактор. Термоядерные реакции.

Основные умения и навыки

Абитуриент должен

уметь:

решать задачи:

- на применение кинематических законов поступательного и вращательного движений, закона сложения скоростей, на определение периода, частоты, на связь угловой и линейной скорости, на определение центростремительного ускорения при равномерном движении точки по окружности, на применение законов Ньютона, Гука, всемирного тяготения, сохранения импульса и механической энергии, Архимеда; на расчет работы и мощности, на движение тел под действием сил (тяжести, упругости, трения); на определение периода, частоты и фазы колебаний, периода колебаний математического и пружинного маятников, скорости распространения и длины волны;
- на расчет количества вещества, средней квадратичной скорости и средней кинетической энергии теплового движения молекул, параметров состояния идеального газа (давления, объема, температуры, абсолютной и относительной влажности) с использованием основного уравнения молекулярно-кинетической теории и уравнения Клапейрона-Менделеева; на расчет работы, количества теплоты, изменения внутренней энергии одноатомного идеального газа при изотермическом, изохорном, изобарном процессах с использованием первого закона термодинамики, на применение уравнения теплового баланса при переходе вещества из одного агрегатного состояния в

другое; на определение коэффициента полезного действия тепловых двигателей;

- на применение закона сохранения заряда и закона Кулона; на расчет напряженности и потенциала электростатического поля; на применение принципа суперпозиции для напряженности и потенциала электростатического поля; на определение напряжения, работы сил электростатического поля, связи напряжения и напряженности однородного электростатического поля, электроемкости конденсатора, энергии электростатического поля конденсатора;
- на расчет электрических цепей с использованием формулы для электрического сопротивления, закона Ома для однородного участка цепи и для полной цепи и закономерностей последовательного и параллельного соединения резисторов; на расчет работы и мощности электрического тока, на применение закона Джоуля-Ленца; на определение коэффициента полезного действия источника тока;
- на определение силы Ампера, силы Лоренца; на применение принципа суперпозиции для магнитных полей; на расчет характеристик движения заряженной частицы в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции; на расчет магнитного потока; на применение закона электромагнитной индукции и правила Ленца, на определение энергии магнитного поля, электродвижущей силы самоиндукции и индуктивности катушки;
- на определение периода, частоты и энергии свободных электромагнитных колебаний в колебательном контуре;
- на применение формул, связывающих длину волны с частотой и скоростью ее распространения; на применение законов отражения и преломления света, формулы тонкой линзы; на использование условий максимума и минимума интерференции, формулы дифракционной решетки;
- на вычисление частоты и длины волны при переходе электрона в атоме из одного энергетического состояния в другое; уравнения Эйнштейна для внешнего фотоэффекта;
- на определение продуктов ядерных реакций; на применение закона радиоактивного распада и правил смещения при α-, β-распадах.

владеть:

- навыками практического применения законов физики

Методика решения задач по физике

Приступая к решению задачи, следует придерживаться определённой последовательности действий:

1. Необходимо внимательно прочитать условие задачи. После прочтения условия должно быть ясно: что дано (какой процесс и т. п.), какие величины известны, какие величины необходимо найти. Следует различать выражения типа: «во сколько раз одна величина больше (меньше) другой» и «на сколько одна величина больше (меньше) другой», учитывать, что иногда предполагается, косвенным образом, знание о значении той или иной величины. Например, если в условиях задачи газ – воздух, то известным является его молярная масса, известны фундаментальные постоянные: скорость света в вакууме и т. п.

2. Осознав, что условие задачи понято, следует переходить к краткой записи условия задачи под рубрикой «Дано:…». Вводятся общеупотребительные обозначения физических величин и записываются их значения. В условиях чётко должна быть указана особенность рассматриваемого процесса или явления, например: изобарный процесс – $p = const$, начальная скорость $\vartheta_н$ больше конечной скорости тела $\vartheta_к$ – $\vartheta_н > \vartheta_к$, гармонические колебания с начальной фазой, равной нулю, – $X = X_m \cdot \cos\omega_0 t$, частота падающего света υ выше красной границы фотоэффекта – $\upsilon > \upsilon_{кр}$ и т. д.

3. На следующем этапе изображается траектория движения тела или изопроцесс и т. д., соответствующие условию задачи. На рисунке представляются только те элементы, которые необходимы для раскрытия физической сути задачи. Например, если в условиях задачи тело брошено под углом к горизонту, то изображается траектория движения тела, которая является, как известно, частью параболы, если заряженная частица движется в электростатическом поле плоского конденсатора, то, как правило, следует изобразить силовые линии такого поля и т. д.

4. На основании условий задачи, в соответствии с рисунком, вводятся и изображаются система координат, силы, действующие на тело, части объема тела, направления токов, распределения напряжений и т. д.

5. После совершения предварительных действий приступают к анализу задачи, к поиску путей определения искомых величин. Первый этап такого анализа, по нашему мнению, должен завершиться выдвижением основного метода (идеи) решения задачи. Это могут быть, например, 2-й закон Ньютона, тот или иной закон сохранения, принцип суперпозиции, уравнение Эйнштейна для фотоэффекта и т. д. На втором этапе необходимо реализовывать основную идею решения задачи: записывать соответствующие соотношения, уравнения применительно к условиям данной задачи и проводить математические выкладки. Если удалось получить решение, то искомая величина выражается через известные из условия задачи величины в алгебраической форме. Затем подставляются в формулу численные значения величин и получается ответ в единицах системы СИ.

6. В заключении проводится проверка правильности полученного решения. Размерности правой и левой частей алгебраической формы решения должны совпадать. Численное значение полученной величины должно быть правдоподобным.

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Механическое движение – это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Кинематика изучает механическое движение без выяснения его причин. Основные понятия кинематики: перемещение, скорость и ускорение тела.

Материальная точка – это простейшая модель тела, в которой формой и размерами тела в данной задаче можно пренебречь. Материальную точку используют

– при поступательном движении тела;

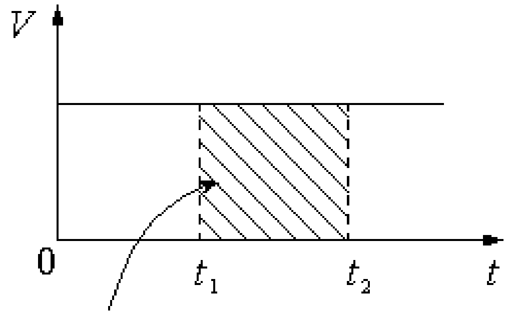
– при движении тела по окружности, когда размеры тела малы по сравнению с ее радиусом,

Система отсчета – это условно неподвижное тело отсчета, связанная с ним система координат и часы.

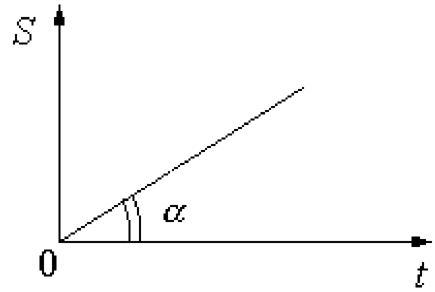
Равномерное прямолинейное движение

$$V = \frac{S}{t} = const\,; \qquad a = 0\,;$$

где S – путь, пройденный телом за время t, V – скорость тела, a – ускорение тела.



S_{12} – путь, пройденный телом за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, равен площади прямоугольника

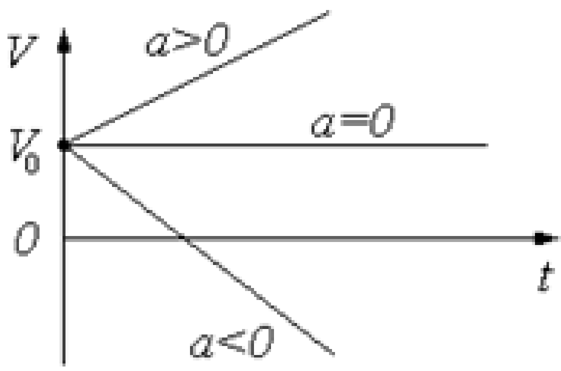


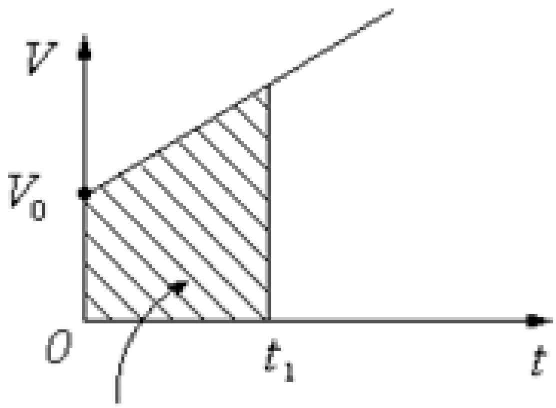
$V = \mathrm{tg}\,\alpha$ – скорость тела

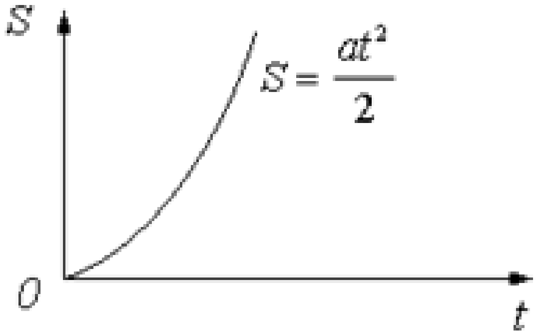
Равноускоренное прямолинейное движение

a = const; $a > 0$ – равноускоренное прямолинейное движение; $a < 0$ – равнозамедленное прямолинейное движение; $V = V_0 + at$; $S = V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$; $V_K^2 - V_0^2 = 2aS$, где V_K – конечная скорость тела, V_0 – начальная скорость тела.

S_1 – путь, пройденный телом за время t_1, равен площади трапеции.

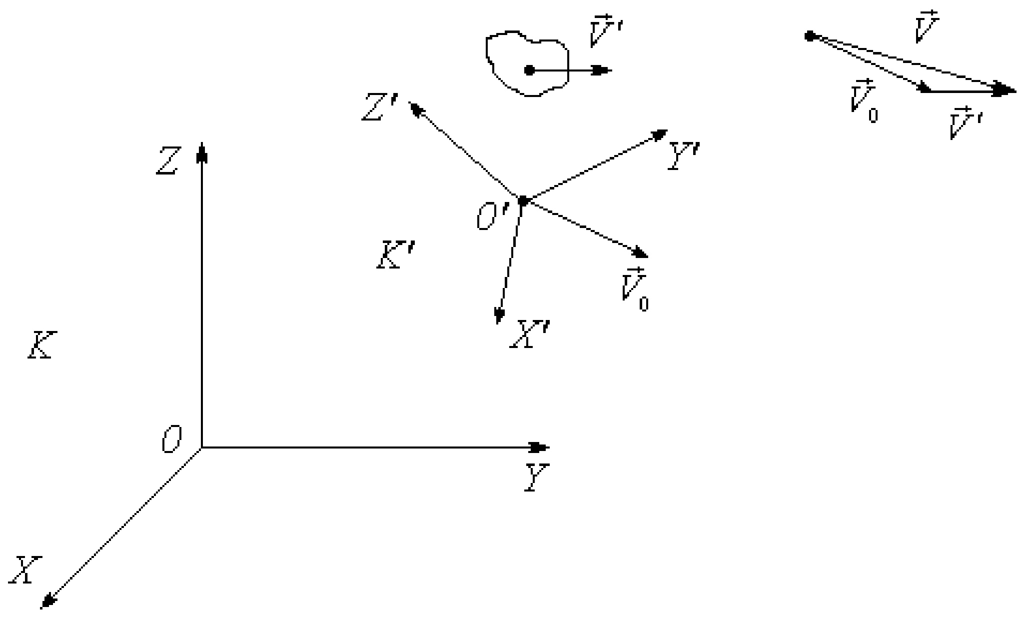






Сложение скоростей

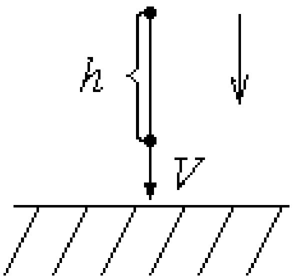
Скорость тела $\overline{V}$ относительно неподвижной системы отсчета равна сумме скоростей: скорости движущейся системы отсчета $\overline{V}_0$ и скорости тела $\overline{V}'$ относительно движущейся системы отсчета. $\overline{V} = \overline{V}_0 + \overline{V}'$



K – неподвижная система отсчета, K' – движущаяся система отсчета.

Свободное падение тел

Свободное падение тел вблизи поверхности Земли происходит с одинаковым ускорением $\bar{g}$, направленным вертикально вниз. Ускорение $\bar{g}$ называется ускорением свободного падения (g = 9,81 м/с^2).

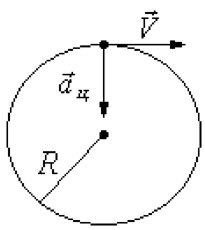


$$h = \frac{gt^2}{2},$$

$$V = g \cdot t,$$

где h – расстояние, пройденное телом, отпущенным с начальной скоростью, равной нулю, за время t; V – скорость тела в конце этого расстояния.

Равномерное движение по окружности



При равномерном движении по окружности тело движется с ускорением, которое называется центростремительным $\bar{a}_ц$ и направлено к центру окружности. Скорость $\bar{V}$ тела остается неизменной по модулю. Изменяется направление скорости.

$$V = const, \quad a_ц = \frac{V^2}{R},$$

$$V = \omega \cdot R, \quad a_ц = \omega^2 R,$$

где ω – угловая скорость тела, R – радиус окружности.

<u>*Пример 1.*</u>

Автобус движется со скоростью 54 км/ч. На каком расстоянии от остановки необходимо тормозить, чтобы ускорение равнялось –1,2 м/с^2? Чему равно время торможения?

Дано:
$V_0 = 54$ км/ч
$V_K = 0$
$a = -1{,}2$ м/с^2

$S - ?$
$t_T - ?$

Решение:

Движение автобуса равнозамедленное. Для определения расстояния торможения воспользуемся формулой: $V_K^2 - V_0^2 = 2aS$. Отсюда получим:

$$S = \frac{V_K^2 - V_0^2}{2a} = \frac{0 - (54\ \text{км/ч})^2}{-2 \cdot 1{,}2\ \text{м/с}^2} = 93{,}75\ \text{м}.$$

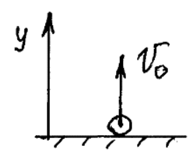
Для определения времени торможения используем соотношение: $V_K = V_0 + at$. Отсюда получим:

$$t_T = \frac{V_K - V_0}{a} = \frac{0 - 54\ \text{км/ч}}{-1{,}2\ \text{м/с}^2} = 12{,}5\ \text{с}.$$

Ответ: $S = 93{,}75$ м; $t_T = 12{,}5$ с.

Пример 2.

Тело брошено вертикально вверх со скоростью V_0. Определить высоту подъема и время полета.



Решение. Выбираем модель тела – материальная точка. Выбираем систему отсчета, связанную с Землей. Одну из осей направим вертикально вверх.

В процессе полета на тело действует постоянная сила mg, направленная вертикально вниз. Поэтому проекция ускорения тела на вертикальную ось будет постоянна в течение всего времени полета $a_y = -g$. Это равноускоренное движение.

Проекция начальной скорости на вертикальную ось равна $V_{0y} = +V_0$. Проекции скорости и ускорения на другие оси равны нулю. Их можно не рассматривать, так как по ним нет движения. Т. е., это прямолинейное движение.

Проекция скорости тела уменьшается в течение всего времени полета. На участке подъема она положительная, в верхней точке равна нулю, а на участке падения отрицательная. Т. е., и подъем, и падение тела – это одно равноускоренное движение с ускорением $a_y = -g$. Можно рассматривать или все движение, или любые его отдельные участки.

По формулам равноускоренного движения находим

– высоту подъема

$$0 - V_0^2 = -2g \cdot (h - 0) \qquad h = \frac{V_0^2}{2g}$$

– полное время полета

$$0 = 0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad\qquad t = \frac{2V_0}{g}$$

(решение $t = 0$ не имеет физического смысла)

– скорость падения

$$V = V_0 + at = V_0 - g \cdot \frac{2V_0}{g} = -V_0$$

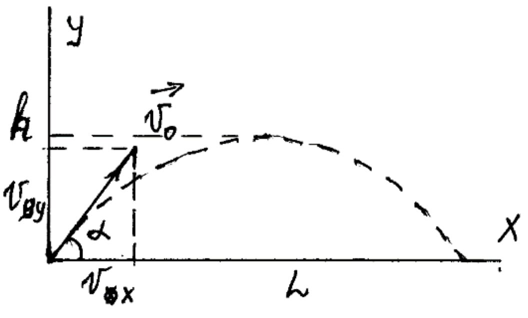
Скорость падения по модулю равна скорости бросания. Знак минус говорит о том, что тело движется вниз – в отрицательном направлении относительно оси y.

Если ось координат направить вниз, то проекции ускорения и скорости поменяют знаки. Ускорение будет все время положительным, а скорость будет все время возрастать. На участке подъема проекция скорости будет отрицательна, а на участке падения – положительна.

Пример 3.

Тело брошено под углом **α** к горизонту со скоростью $\boldsymbol{V}_0$. Определить высоту подъема, время полета и дальность полета.

Решение. На тело действует постоянная сила, направленная вертикально вниз. Поэтому ускорение тела постоянно по величине и по направлению. В неподвижной системе отсчета тело движется по параболе. Это равноускоренное криволинейное движение.



Так как нам нужно определить высоту и дальность полета, то направляем одну из осей вертикально, а вторую – горизонтально.

Находим проекции начальной скорости и ускорения на оси координат

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha \quad a_x = 0 \qquad\qquad V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha \quad a_y = -g$$

Сложное движение тела по параболе заменяем **движением проекций** тела по осям координат. По вертикальной оси – это равноускоренное прямолинейное движение, а по горизонтальной оси – равномерное прямолинейное движение. Эти движения можно рассматривать независимо.

Еще раз отметим, что при координатном способе описания движения мы рассматриваем движение не тела, а его проекций. Высоту подъема и время полета находим по движению вертикальной проекции, а дальность полета – по движению горизонтальной проекции:

–высота подъема

$$0 - V_0^2 \sin^2 \alpha = -2g \cdot (h - 0) \qquad h = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

–время полета

$$0 = 0 + V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$$

–дальность полета

$$L = V_{0x} t = V_0 \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Из полученных формул следует, что высота подъема и время полета будут максимальны при угле бросания 90^0, а дальность полета – при угле 45^0.

Задачи для самостоятельного решения

1. Зависимость координаты тела от времени описывается уравнением $x = 8t - t^2$, где все величины выражены в СИ. В какой момент времени скорость тела равна нулю?

2. Координата тела меняется со временем по закону $x = 10 - 4t$. Чему равно перемещение тела за 5 с после начала движения?

3. За 2,5 с прямолинейного равноускоренного движения, тело прошло 40 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите начальную скорость тела.

4. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью 40 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 80 км/ч. Определите среднюю скорость движения автомобиля.

5. Найти среднюю скорость тела, если первую четверть пути оно двигалось со скоростью $\upsilon_1 = 7$ м/с, а оставшуюся часть пути – со скоростью $\upsilon_2 = 4$ м/с.

6. Каким будет тормозной путь автомобиля, двигающего со скоростью 72 км/ч, если он тормозит с ускорением 5 м/с^2?

7. Автомобиль движется прямолинейно и равноускорено. За время $t = 2$ мин скорость автомобиля увеличилась с $\upsilon_1 = 2$ м/с до $\upsilon_2 = 14$ м/с. Какой путь s пройдет автомобиль за это время?

8. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 9$ м/с. Через какое время t от момента броска скорость тела уменьшится в три раза?

9. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью υ0 = 9 м/с. На какой высоте h скорость тела уменьшится в три раза?

10. Стрела, выпущенная из лука вертикально вверх, упала на землю через $t = 6$ с. На какую максимальную высоту h поднялась стрела?

11. Мяч брошен вертикально вверх с высоты $h = 25$ м и начальной скоростью υ0 = 20 м/с. Через какое время t он достигнет земной поверхности?

12. С башни имеющий высоту $h = 25$м, горизонтально брошен камень с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. На каком расстоянии s_x от основания башни он упадёт на землю?

13. Тело бросили горизонтально с высоты h = 20 м. При какой скорости υ0 бросания дальность полета по горизонтали будет sx = 60м?

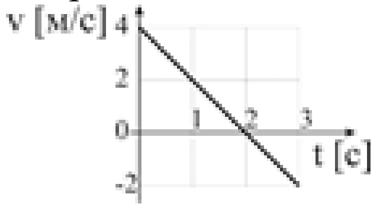
14. Камень брошен с горы горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с. Через какое время t его скорость будет направлена под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту?

15. Камень, брошенный с крыши дома горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0 = 15$ м/с, упал на землю под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту. Какова высота h дома?

16. Камень брошен под углом 30^0 к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Через какое время t камень первый раз окажется на высоте h = 1м?

17. Диск радиусом 20 см равномерно вращается вокруг своей оси. Скорость точки, находящейся на расстоянии 15 см от центра диска, равна 1,5 м/с. Найти скорость крайних точек диска.

18. Материальная точка движется прямолинейно. Путь, пройденный материальной точкой за t = 3 секунды равен



1.2. Динамика

Первый закон Ньютона. Существуют системы отсчета, относительно которых тело, не взаимодействующее с другими телами, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Системы отсчета, относительно которых тело, не взаимодействующее с другими телами, движется равномерно прямолинейно или сохраняет состояние покоя, называются инерциальными.

Второй закон Ньютона. Произведение массы тела на его ускорение относительно инерциальной системы отсчета равно силе, действующей на данное тело со стороны других тел.

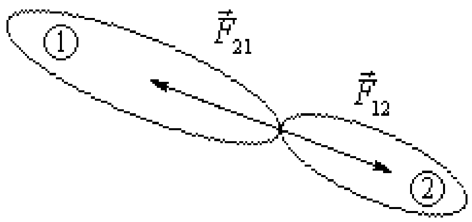
$$m \cdot \bar{a} = \bar{F},$$

где m – масса тела, $\bar{a}$ – ускорение, $\bar{F}$ – сила, действующая на тело или равнодействующая нескольких сил.

Другие формы уравнения второго закона Ньютона:

$$m \cdot \frac{d\bar{V}}{\mathrm{dt}} = \bar{F}\ ; \quad \frac{d\bar{P}}{\mathrm{dt}} = \bar{F} \quad \left(\bar{P} = m\bar{V}\right).$$

Третий закон Ньютона. Два тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине (по модулю) и противоположными по направлению:

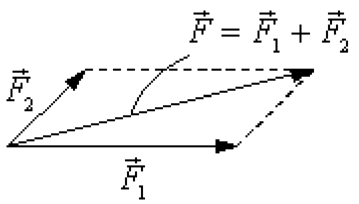


$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12},$$

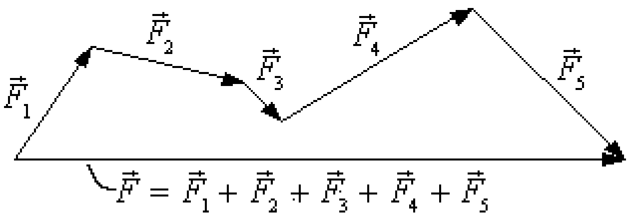
$$F_{21} = F_{12},$$

где $\bar{F}_{21}$ – сила, действующая на первое тело со стороны второго; $\bar{F}_{12}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого. Сила $\bar{F}_{21}$ приложена к первому телу, сила $\bar{F}_{12}$ приложена ко второму телу.

Сложение сил. Сложение сил осуществляется по правилу параллелограмма или по правилу многоугольника.

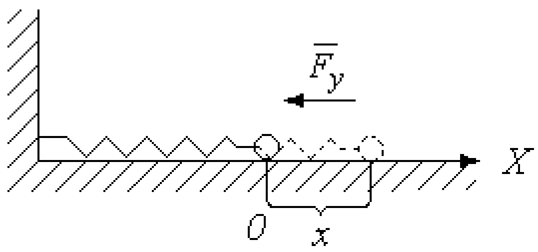


Правило параллелограмма



Правило многоугольника

Силы упругости. Закон Гука. Силы, возникающие при деформации твердого тела, называются силами упругости. Силы упругости всегда направлены в сторону, противоположную смещению части твердого тела. Простейшая модель, характеризующая силы упругости, – шарик (материальная точка), закрепленный на пружине, с возможностью совершения одномерных перемещений.



Р. Гук установил, что при малых деформациях силы упругости пропорциональны удлинению тела.

Для модели шарика, закрепленного на пружине, закон Гука имеет вид:

$$F_У = -kx,$$

где x – смещение шарика из положения равновесия, $F_У$ – сила упругости, k – жесткость пружины.

Трение скольжения. Коэффициент трения. Сила, возникающая при скольжении одного тела по поверхности другого, называется силой трения скольжения.

Законы трения скольжения: 1) сила трения скольжения не зависит от скорости скольжения, 2) сила трения скольжения не зависит от величины площади соприкосновения тел, 3) сила трения скольжения $F_{ТР}$ пропорциональна силе нормального давления F_n одного тела на другое:

$$F_{ТР} = \mu \cdot Fn,$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Гравитационные силы. Закон всемирного тяготения. Тела создают в пространстве гравитационное поле. В гравитационном поле на любое тело действует гравитационная сила, отвечающая гравитационному взаимодействию тел.

Формулировка закона всемирного тяготения: два тела (два шара, две материальные точки, шар и материальная точка) притягивают друг друга с силой F_T, пропорциональной произведению масс этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между телами.

$$F_T = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

где F_T – сила гравитационного притяжения, G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы тел, r – расстояние между телами.

Гравитационные силы направлены вдоль линии, «соединяющей» тела.

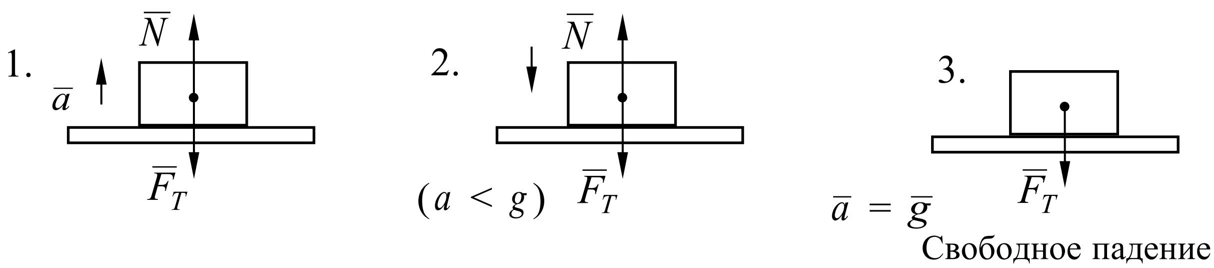
Величина гравитационной постоянной: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$.

Сила тяжести. Вес тела. Сила, с которой Земля действует на тела вблизи поверхности Земли, называется силой тяжести. Сила тяжести $\overline{F}_T$ для любого тела массы m направлена вертикально вниз и равна:

$\overline{F}_T = m\overline{g}$, где $\overline{g}$ – ускорение свободного падения.

Сила $\overline{P}$, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного взаимодействия с Землей, называется весом тела.

Движение тела, расположенного на опоре (например, пол кабины лифта), под действием силы тяжести и силы реакции опоры $\overline{N}$ с ускорением $\overline{a}$ иллюстрируется тремя рисунками:



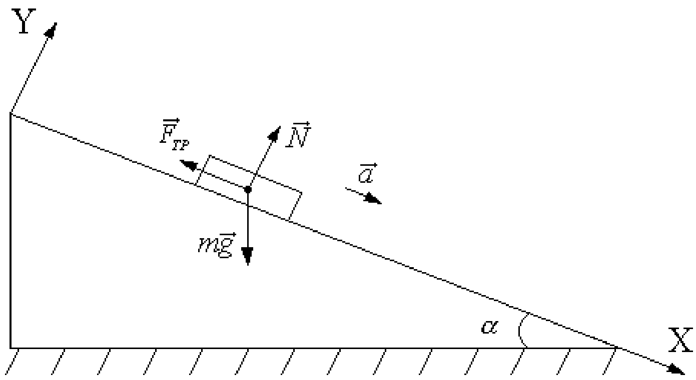
$ma = N - \mathrm{F_T}$ $-ma = N - \mathrm{F_T}$ $-mg = N - F_T$

$P > F_T$ $\mathrm{P} < F_T$ $\mathrm{P} = 0$

По третьему закону Ньютона $\overline{P} = -\overline{N}$, поэтому в первом случае вес тела больше силы тяжести, во втором случае вес тела меньше силы тяжести, в третьем случае вес тела равен нулю.

Пример 4

Тело соскользнуло с наклонной плоскости, составляющей угол в 25° с горизонтом, за 2 секунды. Найти ускорение, с которым соскальзывало тело, коэффициент трения тела о плоскость, если длина наклонной плоскости 2 м.



Решение:

Введем систему координат и изобразим силы, действующие на тело, как показано на рисунке:

Уравнение второго закона Ньютона для тела массой m, соскальзывающего с наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$, имеет вид:

$$m \cdot \vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{Tp} + \vec{N}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_{Tp}$ – сила трения, $\vec{N}$ – сила реакции опоры.

Рассмотрим проекции уравнения второго закона Ньютона на осях X и Y.

Проекция на ось X: $ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$ (2)

Проекция на ось Y: $0 = N - mg\cos\alpha$ (3)

Известно, что сила трения определяется выражением

$$F_{TP} = \mu \cdot N, \qquad (4)$$

так как по третьему закону Ньютона модуль силы нормального давления тела на плоскость равен модулю силы реакции опоры.

Из соотношений (2) – (4) получим:

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha, \qquad (5)$$

Сокращая на m, имеем выражение:

$$a = g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha, \qquad (6)$$

Это уравнение содержит два искомых неизвестных. Чтобы их найти, необходимо еще одно соотношение. Его мы получим, используя условия задачи, и то, что движение тела равноускоренное с начальной скоростью, равной нулю:

$$L = \frac{a\tau^2}{2} \qquad (7)$$

Из (6) и (7) для ускорения a и коэффициента трения μ получим:

$$a = \frac{2L}{\tau^2} = \frac{2 \cdot 2}{4}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

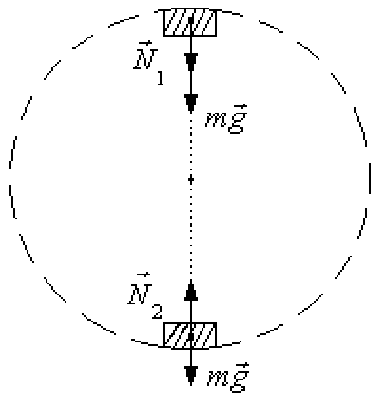
$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2L}{\tau^2 \cdot g \cdot \cos\alpha} = 0{,}35$$

Ответ: a = 1 м/с^2, μ = 0,35.

<u>Пример 5.</u>

Определить вес летчика в верхней и нижней точках петли Нестерова, если скорость самолета 300 км/ч, радиус петли 250 м, масса летчика 80 кг.

Решение:



Самолет движется с постоянной по модулю скоростью по окружности. Поэтому по второму закону Ньютона имеем:

$$m \cdot \bar{a}_Ц = m\bar{g} + \bar{N},$$

где $\bar{a}_Ц$ – центростремительное ускорение летчика, направленное к центру петли Нестерова; $m\bar{g}$ – сила тяжести, действующая на летчика; N – сила реакции опоры.

По третьему закону Ньютона вес летчика в любой точке петли Нестерова равен: $P = N$.

В верхней точке петли Нестерова (см. рис.) из второго закона Ньютона в проекциях на ось, направленную к центру окружности, следует:

$$\frac{mV^2}{r} = mg + N_1 = mg + P_1.$$

Отсюда, вес летчика в верхней точке равен:

$$P_1 = m\left(\frac{V^2}{r} - g\right) = 80\left(\frac{6944}{250} - 9{,}81\right) = 1437\ \text{Н}.$$

В нижней точке петли Нестерова (см. рисунок) из второго закона Ньютона в проекциях на ось, направленную к центру окружности, следует:

$$\frac{mV^2}{r} = -mg + N_2 = -mg + P_2 .$$

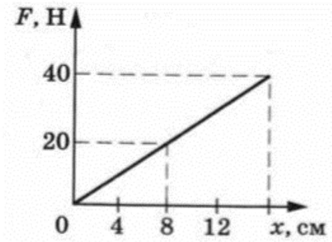
Отсюда вес летчика в нижней точке равен:

$$P_2 = m\left(\frac{V^2}{r} + g\right) = 80\left(\frac{6944}{250} + 9{,}81\right) = 3007 \text{ Н}.$$

Ответ: P_1 = 1437 Н, P_2 = 3007 Н.

Задачи для самостоятельного решения

1. На рисунке представлен график зависимости модуля силы упругости от удлинения пружины. Чему равна жесткость пружины?



2. Два маленьких шарика с одинаковыми массами m, расстояние между которыми r, притягиваются друг к другу с гравитационными силами, равными по модулю 0,9 пН. Каков модуль сил гравитационного притяжения двух других шариков, если масса одного 4m, масса другого m/2, а расстояние между их центрами r/3?

3. Тело массой m = 5 кг движется по горизонтальному столу под действием силы F = 40 Н, направленной под углом $\alpha = 30^0$ к плоскости стола вверх. Коэффициент трения между телом и поверхностью стола равен μ = 0,4. С каким ускорением движется тело?

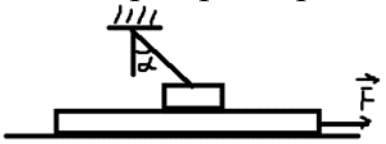
4. Брусок массой 2 кг движется поступательно по горизонтальной поверхности по действием постоянной силы F, направленной под углом 30^0 к горизонту. Коэффициент трения между бруском и плоскостью 0,2. Модуль силы трения, действующей на брусок, равен 2,8 Н. Найти модуль силы F.

5. Брусок массой 300 г соединен с грузом массой 200 г невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. Бру-

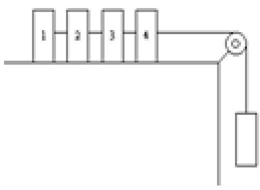
сок скользит без трения по неподвижной наклонной плоскости, составляющий угол 30^0 с горизонтом. Чему равно ускорение грузов?

6. Шарик, закрепленный на легкой нерастяжимой нити длиной 60 см, равномерно движется по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. При этом нить образует угол 60^0 с вертикалью. Определите модуль скорости шарика.

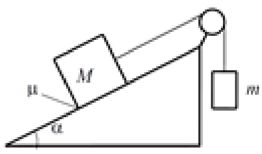
7. Брусок массой 1 кг, привязанный к потолку легкой нитью, опирается на массивную горизонтальную доску. Под действием горизонтальной силы F доска движется поступательно вправо с постоянной скоростью. Брусок при этом неподвижен, а нить образует с вертикалью угол 30^0. Найдите F, если коэффициент трения бруска по доске 0,2. Трением доски по опоре пренебречь.



8. На гладкой горизонтальной плоскости лежат четыре связанных нитью равных груза массой m = 2 кг каждый. На нити, прикреплённой к данным грузам и перекинутой через неподвижный блок, подвешен такой же груз. С каким ускорением движется эта система и какова сила натяжения между третьим и четвёртым грузами?

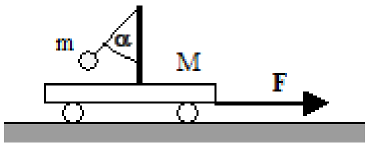


9. Грузы массами M = 1 кг и m связаны лёгкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок, по которому нить может скользить без трения. Груз массой M находиться на шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α = 30°, а коэффициент трения груза о плоскость μ = 0,3. Чему равно максимальное значение массы m, при котором система грузов ещё не выходит из первоначального состояния покоя?



10. Определить, какой угол α с вертикалью составляет нить с грузом массы m = 190 г, подвешенным на тележке массы M = 1 кг, дви-

жущейся под действием горизонтальной силы F = 10 Н. Трением пренебречь.



11. Автомобиль массы m, движется по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны R = 50 м, со скоростью υ = 54 км/ч. Какова масса m автомобиля, если, проезжая середину моста, он давит на мост с силой Fд = 4,4 кН?

12. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Луны в 3,7 раза меньше радиуса Земли. Найдите ускорение свободного падения на поверхности Луны.

1.3. Законы сохранения в механике

Импульс тела. Закон сохранения импульса. Произведение массы m тела на его скорость $\overline{V}$ называется импульсом тела $\overline{p}$: $\overline{p} = m\overline{V}$.

Импульс системы тел $\overline{P}$ равен сумме импульсов тел, входящих в систему:

$$\overline{P} = \overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \cdots + \overline{p}_N.$$

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой.

Формулировка закона сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел сохраняется, т. е. $\overline{P} = const$.

Механическая работа. Мощность. Кинетическая энергия. Механической работой A силы $\overline{F}$ на малом перемещении $\Delta\overline{r}$ тела называется скалярное произведение: $A = \overline{F} \cdot \Delta\overline{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$, где α – угол между вектором $\overline{F}$ и вектором $\Delta\overline{r}$.

Работа положительна, если $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Работа отрицательна, если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$.

Работа равна нулю, если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Величина работы в единицу времени называется мощностью N:

$$N = \frac{dA}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{V}\ .$$

При движении со скоростью $\overline{V}$ тело массой m обладает кинетической энергией E_K: $E_K = \dfrac{mV^2}{2}$.

Если результирующая сила, действующая на тело, совершает работу A, то $A = E_{K2} - E_{K1}$, где E_{K1} – начальная кинетическая энергия, E_{K2} – конечная кинетическая энергия.

Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике. Силы, работа в поле которых по любому замкнутому контуру равна нулю, называются консервативными. К консервативным силам относятся: сила тяжести, сила гравитационного притяжения, сила упругости, сила электростатического взаимодействия.

В поле консервативных сил тела обладают потенциальной энергией $E_П$, величина которой зависит от положения тела.

Выражение для потенциальной энергии в поле сил тяжести имеет вид:

$$E_П = mgh,$$

где h – высота поднятия тела.

При действии упругих сил (груз на пружине) выражение для потенциальной энергии имеет вид: $E_П = \dfrac{k\,x^2}{2}$, где k – жесткость пружины, x – смещение груза из положения равновесия.

Если в поле консервативных сил тело перемещается, то работа A консервативной силы равна убыли потенциальной энергии тела:

$$A = E_{П1} - E_{П2},$$

где $E_{П1}$ – начальная потенциальная энергия тела, $E_{П2}$ – конечная потенциальная энергия тела.

Сумма кинетической и потенциальной энергии тела E называется полной механической энергией тела: $E = E_К + E_П$.

Формулировка закона сохранения механической энергии: *в поле консервативных сил полная механическая энергия системы тел сохраняется.*

Для одного тела выражение закона сохранения механической энергии имеет вид:

$$E_{K1}+E_{П1}=E_{K2}+E_{П2}.$$

Пример 6.

Пуля массой 10 г подлетает к доске толщиной 4 см со скоростью 600 м/с и, пробив доску, вылетает из нее со скоростью 400 м/с. Найти силу сопротивления материала доски, считая ее постоянной.

Решение:

Работа силы сопротивления равна изменению кинетической энергии пули: $A=\Delta E_K$. Раскрывая это выражение, получим:

$$-F_C\cdot d=\frac{mV_K^2}{2}-\frac{mV_H^2}{2}.$$

Отсюда для силы сопротивления материала доски получим:

$$F_C=\frac{m}{2d}\left(V_H^2-V_K^2\right)=\frac{1\cdot10^{-2}}{2\cdot4\cdot10^{-2}}\left(36\cdot10^4-16\cdot10^4\right)=25\cdot10^3 \text{ Н.}$$

Ответ: F_C = 25 кН.

Пример 7.

Тело массой 1 кг брошено с башни горизонтально со скоростью 20 м/с. Определить кинетическую энергию тела в конце четвертой секунды.

Решение:

В поле силы тяжести полная механическая энергия тела сохраняется. За время τ тело опустится на расстояние $h=\frac{g\tau^2}{2}$ и его потенциальная энергия уменьшится на величину *mgh*. На такую же величину, следовательно, возрастет кинетическая энергия. Поэтому:

$$E_K=\frac{mV_0^2}{2}+mgh=\frac{mV_0^2}{2}+mg\frac{g\tau^2}{2}=\frac{m}{2}\left(V_0^2+g^2\cdot\tau^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(400+1540\right)=970 \text{ Дж}$$

Ответ: E_K = 970 Дж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пуля летит горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 150$ м/с, пробивает стоящий на гладкой горизонтальной поверхности брусок и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $\upsilon_1 = 50$ м/с. С какой скоростью υ_2 начнёт двигаться брусок, если его масса в 10 раз больше массы пули?

2. Ядро, летевшее в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, разорвалось на два осколка массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг. Меньший осколок продолжает лететь в том же направлении, что и всё ядро до разрыва, со скоростью $\upsilon_2 = 30$ м/с. Каков модуль скорости большего осколка υ_1?

3. Пушка, стоящая на гладкой горизонтальной площадке, стреляет под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Масса снаряда $m = 20$ кг, его начальная скорость $\upsilon с = 200$ м/с. Какую скорость $\upsilon п$ приобретает пушка при выстреле, если ее масса $M = 500$ кг?

4. Тело массой $m = 0{,}2$ кг бросают вертикально вверх. В начальный момент времени оно обладает кинетической энергией $Eко = 40$ Дж. Определить время движения тела до наивысшей точки подъёма. Сопротивлением воздуха пренебречь.

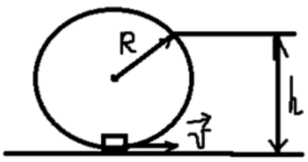
5. Камень массы $m = 300$ г брошен с башни горизонтально с некоторой скоростью. Спустя время $t = 1$ с скорость камня составила с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Найти кинетическую энергию камня в этот момент.

6. Сани массой $m = 60$ кг, скатившись с горы, проехали по горизонтальному участку дороги путь $s = 20$ м и остановились. Вычислить модуль работы силы трения на этом участке, если коэффициент трения полозьев о снег равен $\mu = 0{,}02$.

7. Тело, брошенное с высоты $H = 5$ м вертикально вниз со скоростью $\upsilon 0 = 20$ м/с, погрузилось в грунт на глубину $h = 20$ см. Найти работу силы сопротивления грунта по модулю, если масса тела $m = 2$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

8. Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия на угол 60^0 и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару. Она пробивает его и продолжает двигаться горизонтально. Определите изменение скорости пули в результате

попадания в шар, если он, продолжая двигаться в прежнем направлении отклонится на угол 39^0.



9. Небольшая шайба после толчка приобретает скорость 2 м/с и скользит по внутренней поверхности гладкого закрепленного кольца радиусом 0,14 м. На какой высоте шайба отрывается от кольца и начинает свободно падать?

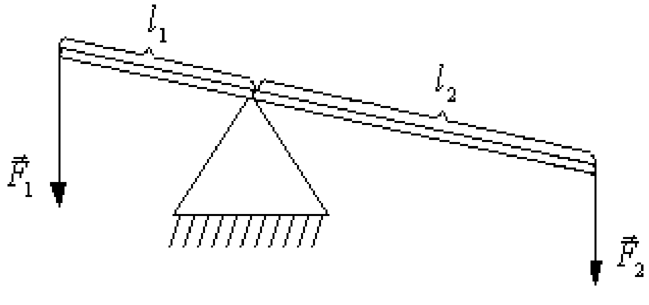
10. Шайба массой m начинает движение по желобу АВ и точки А из состояния покоя. Точка А расположена выше точки В на высоте Н = 6 м. В процессе движения по желобу механическая энергия шайбы из-за трения уменьшилась на ΔE = 2 Дж. В точке В шайба вылетает из желоба под углом 15^0 к горизонту и падает на землю в точке Д, находящейся на одной горизонтали с точкой В. ВД = 4 м. Найти массу шайбы.

1.4. Статика

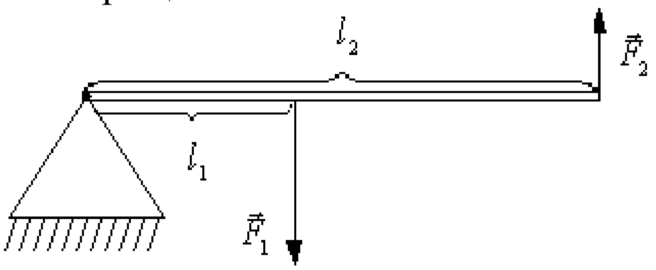
Момент силы. Условие равновесия рычага. Момент силы M относительно оси – это физическая величина, численно равная произведению силы F на плечо d: $M = F \cdot d$.

Плечом силы F называется кратчайшее расстояние (длина перпендикуляра) от оси вращения тела до линии действия силы (см. рисунок). Если сила $\vec{F}$ не лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, то ее необходимо разложить на две составляющие: лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к ней, а для вычисления момента силы необходимо использовать составляющую, лежащую в этой плоскости.

Рычаг первого рода: точки приложения сил лежат по обе стороны от оси вращения:



Рычаг второго рода: точки приложения сил лежат по одну сторону от оси вращения:



Равновесие любого рычага наступает при равенстве моментов сил, поворачивающих рычаг в противоположные стороны:

$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$.

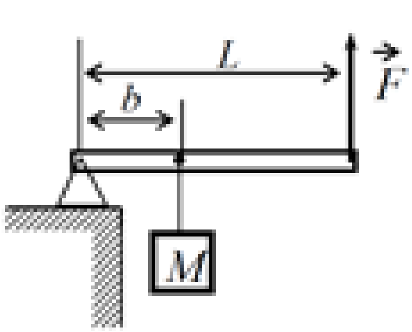
Задачи для самостоятельного решения

1. Льдина плавает в воде, выдаваясь над её поверхностью на Vн = 50 м^3. Каков объём всей льдины V? Плотность льда ρл = 900 кг/м^3, плотность воды ρв = 1000 кг/м^3.

2. Бревно, имеющее длину l = 3,5 м и диаметр D = 30 см, плавает в воде. Какова максимальная масса m человека, который может стоять на бревне, не замочив ноги? Плотность дерева ρд = 0,7·103 кг/м^3, плотность воды ρв = 10^3 кг/м^3.

3. Груз удерживают на месте с помощью рычага, приложив вертикальную силу F = 400 Н. Рычаг состоит из шарнира и однородного стержня массой m = 20 кг и длиной L = 4 м. Расстояние от оси шарнира до точки подвеса груза равно b = 1 м. Чему равна масса груза M?

4. На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, имеющих плотности ρ_1 = 400 кг/м^3 и $\rho_2 = 2*\rho_1$, плавает однородный шар. Какой должна быть плотность шарика, чтобы выше границы раздела жидкостей была одна четверть его объёма?



5. Лестница опирается на вертикальную стену и пол. Найдите минимальный угол (в градусах) между лестницей и полом, при котором лестница не будет скользить. Коэффициент трения о пол $\mu_1 = 0{,}5$, о стену – $\mu_2 = 0{,}2$.

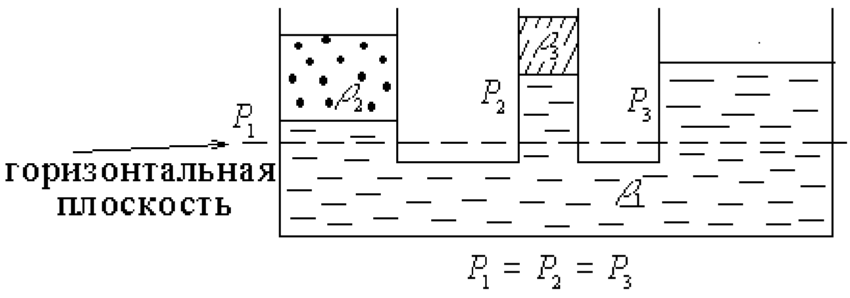
1.5. Жидкости и газы

Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Давление – это физическая величина, численно равная отношению нормальной составляющей $\Delta F_{\perp}$ силы $\Delta\overline{F}$, действующей на поверхность, к величине площади ΔS этой поверхности, т. е.

$$p = \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta S}.$$

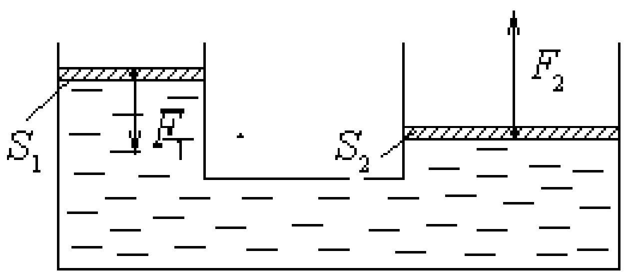
Формулировка закона Паскаля: в равновесии жидкость и газ передают давление, вызванное поверхностными силами, по всем направлениям без изменения.

Сообщающиеся сосуды. Принцип устройства гидравлического пресса. Формулировка закона сообщающихся сосудов: в сообщающихся сосудах в однородной жидкости во всех точках любой горизонтальной плоскости давление одинаково.



Если в сообщающиеся сосуды налита только одна жидкость, то поверхность этой жидкости устанавливается на одном уровне.

Гидравлический пресс состоит из двух сообщающихся сосудов (как правило, цилиндров), площадь поперечного сечения S_1 одного сосуда значительно меньше площади поперечного сечения S_2 другого сосуда. Сосуды заполнены минеральным маслом и закрыты поршнями.



По закону Паскаля давление под поршнями одинаково: $P_1 = P_2$.

Следовательно, $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ и $F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$, т. е. при работе гидравлического пресса получается «выигрыш» в силе во столько раз, во сколько площадь поперечного сечения второго сосуда больше, чем площадь поперечного сечения первого сосуда.

Архимедова сила для жидкостей и газов. Условие плавания тел на поверхности жидкости. Определение силы Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (или газ) действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости (газа), вытесненной телом.

$$F_A = \rho_Ж \cdot V_0 \cdot g,$$

где F_A – сила Архимеда; V_0 – объем тела (части тела), погруженного в жидкость (газ), $\rho_ж$ – плотность жидкости (газа).

На тело, погруженное в жидкость, действует кроме силы Архимеда, сила тяжести, направленная вертикально вниз. Соотношение величин этих двух сил определяет условия плавания тел. Возможны три случая:

1) Сила тяжести F_T больше силы Архимеда F_A, при этом плотность тела ρ_T больше плотности жидкости $\rho_Ж$. Равнодействующая этих двух сил направлена вертикально вниз, и тело тонет.

2) Сила тяжести F_T равна силе Архимеда F_A ($\rho_T = \rho_Ж$). Равнодействующая этих двух сил равна нулю, и тело находится в состоянии безразличного равновесия на любой глубине.

3) Плотность тела ρ_T меньше плотности жидкости $\rho_Ж$. Тело плавает на поверхности жидкости. Условие плавания тела в этом случае:

$$F_A = F_T \text{ или } \rho_Ж \cdot V_0 \cdot g = \rho_T \cdot V \cdot g,$$

где V – объем тела.

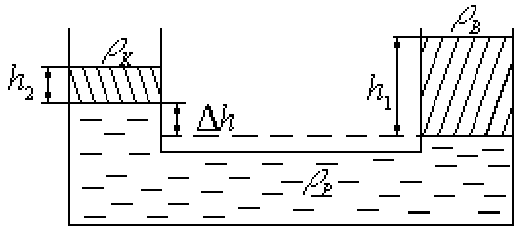
<u>Пример 8</u>

В сообщающиеся сосуды налита ртуть, а поверх нее в один сосуд налит столб воды высотой 0,8 м, а в другой – столб керосина высотой 0,2 м. Определить разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути 13,6 г/см^3, плотность воды 1,0 г/см^3, плотность керосина 0,8 г/см^3.

Решение:

По закону сообщающихся сосудов давление в левом сосуде $P_Л$ равно давлению в правом сосуде $P_П$ на уровне, отделяющем ртуть от столба воды (на рисунке показан пунктиром).

$P_Л = P_П$.



Давление в левом сосуде на этом уровне складывается из давления столба керосина высотой h_2 и дав ления столба ртути высотой Δh. Давление в правом сосуде равно давлению столба воды. Отсюда следует:

$\rho_К \cdot g \cdot h_2 + \rho_Р \cdot g \cdot \Delta h = \rho_В \cdot g \cdot h_1$.

Далее, для Δh получается:

$$\Delta h = \frac{\rho_В \cdot h_1 - \rho_К \cdot h_2}{\rho_Р} = \frac{1 \cdot 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}2}{13{,}6} = 4{,}7 \text{ см}.$$

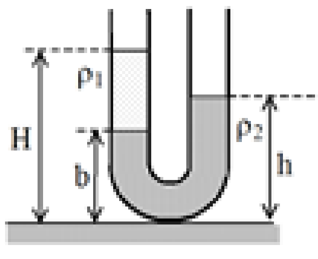
Ответ: Δh = 4,7 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. В цилиндрический сосуд налиты ртуть, вода и керосин. Определить общее давление, которое оказывают жидкости на дно сосуда, если объёмы всех жидкостей равны, а верхний край керосина находится на высоте H = 12 см от дна сосуда. Плотность ртути $\rho_{рт}$ = 13600 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность керосина ρк = 800 кг/м^3.

2. Шар, до половины погружённый в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной 1/3 действующей на него силы тяжести. Найти плотность шара ρш. Плотность воды ρв = 10^3 кг/м^3.

3. В широкую U-образную трубку с вертикальными прямыми коленами налиты неизвестная жидкость плотностью ρ1 и вода плотностью ρ_2 = 1000 кг/м^3. На рисунке соответствующие высоты равны b = 10 см, h = 24 см, H = 30 см. Чему равна плотность жидкости ρ1?



2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Абсолютная температурная шкала. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа связывает между собой макропараметры системы и среднее значение микропараметра: $P \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \bar{\varepsilon}$, где P – давление, V – объем, N – число молекул, $\bar{\varepsilon}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа.

Температура – один из макропараметров молекулярной системы. Физический смысл имеет абсолютная температура, которая является мерой средней кинетической энергии молекул. Для идеального газа средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы пропорциональна величине абсолютной температуры T: $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$, где k – постоянная Больцмана.

Абсолютная температура измеряется по шкале Кельвина и связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением: $T = t + 273°C$.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона).

Уравнением состояния идеального газа называется уравнение, связывающее основные макропараметры газовой системы:

$$P \cdot V = \frac{m}{\mu} RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная, m – масса газа, μ – молярная масса.

Если воспользоваться обозначениями: $\rho = \frac{m}{V}$, $n = \frac{N}{V}$, где ρ – плотность газа, n – концентрация молекул газа, то из уравнения состояния идеального газа получим формулы:

$$P = \frac{\rho \cdot R \cdot T}{\mu};$$

$$P = n \cdot k \cdot T.$$

Изотермический, изохорный и изобарный процессы. Изотермический процесс (закон Бойля – Мариотта) проходит при постоянной температуре (T = *const*). Из уравнения состояния идеального газа для изотермического процесса следует:

$P \cdot V = const$, или $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$.

Изохорный процесс (закон Шарля) проходит при постоянном объеме (V = *const*). Из уравнения состояния идеального газа для изохорного процесса следует:

$\frac{P}{T} = const$, или $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$.

Давление при изохорном процессе изменяется по формуле:

$P = P_0(1 + \alpha \cdot t)$,

где P_0 – давление газа при температуре 0°C, $\alpha = \frac{1}{273}\text{K}^{-1}$ – температурный коэффициент давления газа.

Изобарный процесс (закон Гей – Люссака) проходит при постоянном давлении ($P = const$). Из уравнения состояния идеального газа для изобарного процесса следует:

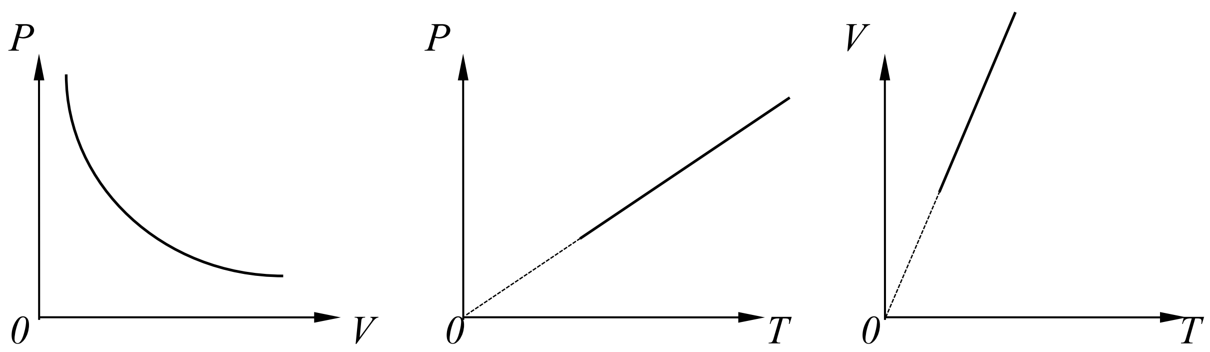
$\frac{V}{T} = const$, или $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Объем при изобарном процессе изменяется по формуле:

$V = V_0(1 + \alpha \cdot t)$,

где V_0 – объем газа при температуре 0°C, $\alpha = \frac{1}{273}\text{K}^{-1}$ – температурный коэффициент объемного расширения.

Характерные графики для изотермического процесса – на P-V-диаграмме, для изохорного – на P-T-диаграмме, для изобарного процесса – на V-T-диаграмме представлены на рисунках соответственно.



Пример 1.

Давление одноатомного идеального газа равно 1,0 мПа, концентрация молекул 10^{18} м$^{-3}$. Найти среднюю кинетическую энергию одной молекулы и температуру газа.

Решение:

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа следует: $P = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon}$. Поэтому для $\bar{\varepsilon}$ получим: $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}\frac{P}{n} = \frac{3}{2}\frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}}{10^{18}} = 1{,}5 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Температура газа определяется из соотношения:

$$T = \frac{2}{3}\frac{\bar{\varepsilon}}{k} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-21}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 72{,}5\ \text{К}.$$

Ответ: $\bar{\varepsilon} = 1{,}5 \cdot 10^{-21}$ Дж; T = 72,5 К.

Пример 2.

В баллоне объемом 20 л находится 1,0 кг углекислого газа при температуре 17°С. Найти концентрацию молекул углекислого газа и давление газа.

Решение:

Из уравнения состояния идеального газа: $PV = \frac{m}{\mu} RT$, формулы $P = n \cdot k \cdot T$ и соотношения $T = t + 273°\text{C}$ для концентрации n и давления P получим выражения:

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{mR}{\mu \cdot V \cdot k} = \frac{1{,}0 \cdot 8{,}314}{44 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 6{,}85 \cdot 10^{26}\ \text{м}^{-3}$$

$$P = n \cdot k \cdot T = n \cdot k \cdot (t + 273°\text{C}) = 6{,}85 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 = 2{,}74 \cdot 10^{6}\ \text{Па}.$$

Ответ: $n = 6{,}85 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$; $P = 2{,}74 \cdot 10^{6}$ Па.

Задачи для самостоятельного решения

1. Средняя кинетическая энергия теплового движения молекул гелия уменьшилась в 4 раза. Определить конечную температуру газа, если его начальная температура газа равна 900 К.

2. Каково давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность 1,35 кг/м^3?

3. В баллоне вместимостью 10 л находится газ при температуре 27 °С. Вследствие утечки газа давление газа снизилось на 4,2 кПа. Какое число молекул вышло из баллона, если температура осталась неизменной?

4. В изохорном процессе давление идеального газа увеличивается на Δp = 50 кПа. На сколько увеличивается при этом температура газа ΔT, если первоначальное давление было p_1 = 200 кПа, а первоначальная температура газа равна T_1 = 300 К? Масса газа остаётся неизменной.

5. Некоторая масса идеального газа нагревается при постоянном давлении от температуры t_1 = 27 ˚С до температуры t_1 = 127 ˚С. Объём газа при этом увеличивается на ΔV = 1 л. Какой объём V_1 занимал газ в первоначальном состоянии?

6. Определить первоначальную температуру T_0 газа, находящегося в закрытом сосуде, если при увеличении давления на Δp = 0,4 % от первоначального давления температура возросла на ΔT = 1 К.

7. В камере, заполненной азотом, при температуре T_0 = 300 К находится открытый цилиндрический сосуд (рис. 14). Высота сосуда L = 50 см. Сосуд плотно закрывают цилиндрической пробкой и охлаждают до температуры T_1. В результате расстояние от дна сосуда до низа пробки становится h = 40 см (рис. 15). Затем сосуд нагревают до первоначальной температуры T_0. Расстояние от дна сосуда до низа пробки при этой температуре становится H = 46 см (рис. 16). Чему равна температура T_1? Величину силы трения между пробкой и стенками сосуда считать одинаковой при движении пробки вниз и вверх. Массой пробки пренебречь. Давление азота в камере во время эксперимента поддерживается постоянным.

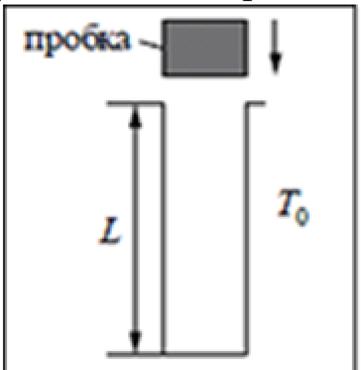


Рис. 14

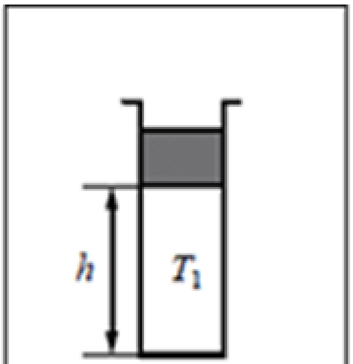


Рис. 15

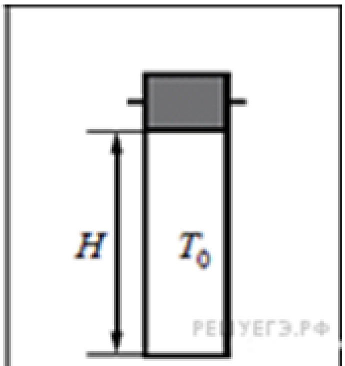


Рис. 16

2.2. Термодинамика

Внутренняя энергия. Количество теплоты. Удельная теплоемкость вещества. Работа в термодинамике. Внутренняя энергия U тела (молекулярной системы) – это энергия тела без кинетической и потенциальной как целого. Возможны два способа изменения внутренней энергии тела: 1) в процессе теплопередачи, 2) при совершении над телом работы.

В процессе теплопередачи изменение внутренней энергии осуществляется при непосредственном (при соприкосновении) обмене энергией между хаотически движущимися молекулами взаимодействующих тел. Количество энергии, переданное в процессе теплопередачи, называется количеством теплоты Q.

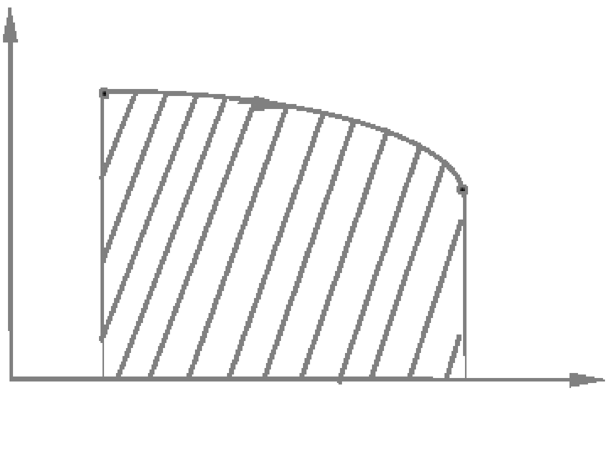
Количество теплоты, необходимое для нагревания тела на один градус, называется теплоемкостью C тела: $C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$.

Количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на один градус, называется удельной теплоемкостью $C_{УД}$ этого вещества.

При совершении работы A энергия упорядоченного движения одного тела как целого переходит в энергию упорядоченного движения другого тела.

При изобарном расширении газа работа A' газа вычисляется из формулы: $A' = P \cdot \Delta V$, где P – давление, ΔV – изменение объема газа.

При графическом изображении любого процесса на P-V диаграмме работа равна площади под кривой перехода из состояния 1 в состояние 2.



Закон сохранения энергии в тепловых процессах (первый закон термодинамики). Применение первого закона термодинамики к изопроцессам.

Формулировка первого закона термодинамики: количество теплоты Q, сообщенное телу (системе), идет на приращение внутренней энергии тела ΔU и на совершение телом работы A'. Математическая запись первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A',$$

где $\Delta U = U_2 - U_1$.

Работа, совершаемая телом, A' связана с работой внешних сил над телом A соотношением: $A = -A'$. Отсюда первый закон термодинамики можно записать в виде: $\Delta U = Q + A$.

Выражения первого закона термодинамики для различных процессов идеального газа:

1) $Q + A = 0$ – изотермический процесс;

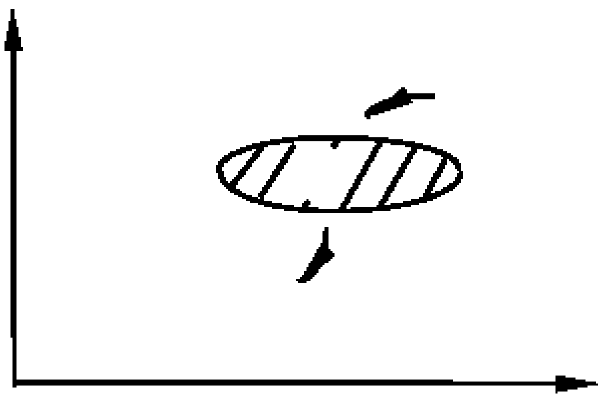
2) $Q = \Delta U$ – изохорный процесс;

3) $Q = \Delta U + P \cdot \Delta V$ – изобарный процесс;

4) $\Delta U = A$ – адиабатный процесс.

Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

Тепловой двигатель содержит рабочее вещество (тело), которое на начальном этапе приводится в соприкосновение (контакт) с нагревателем, а на конечном – с холодильником так, что рабочее вещество совершает прямой круговой процесс (цикл).



1

За цикл рабочее вещество теплового двигателя получает от нагревателя количество теплоты Q_1, холодильнику отдает количество теплоты Q_2 и совершает работу A', равную площади цикла. Так как за цикл внутренняя энергия тела не изменяется, то $A' = Q_1 - Q_2$. Величина, оценивающая эффективность теплового двигателя, – коэффициент полезного действия (КПД) η. КПД определяется отношением выполненной за цикл работы к количеству теплоты, полученной рабочим веществом от нагревателя:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1}.$$

В 1824 г. С. Карно установил, что КПД любого теплового двигателя (работающего в том же температурном интервале) не может быть больше значения $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где T_1 – температура нагревателя, а T_2 – температура холодильника.

Пример3.

Идеальная тепловая машина Карно с температурой нагревателя 100°С и температурой холодильника 0°С за один цикл совершает работу 80 кДж. Найти КПД машины, количество теплоты, получаемое машиной за цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Решение:

Для решения используем выражение для КПД машины Карно: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ и первый закон термодинамики для цикла: $A' = Q_1 - Q_2$. Тогда для значения КПД следует:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + 273°\mathrm{C}} = \frac{100}{373} \approx 0{,}268 = 26{,}8\%$$

В то же время: $\eta = \frac{A'}{Q_1}$. Поэтому для Q_1 получается:

$$Q_1 = \frac{A'}{\eta} = \frac{80 \cdot 10^3}{0{,}268} = 299 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 299 \text{ кДж}.$$

Из первого закона термодинамики для Q_2 следует:

$$Q_2 = Q_1 - A' = 219 \text{ кДж}.$$

Ответ: $\eta = 26{,}8\%$; $Q_1 = 299$ кДж; $Q_2 = 219$ кДж.

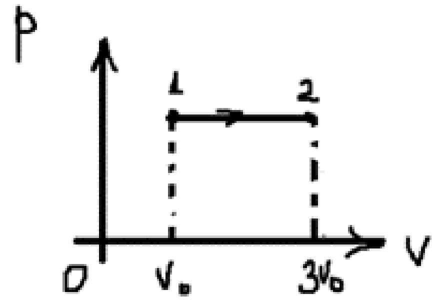
Задачи для самостоятельного решения

1. Какова внутренняя энергия идеального газа, находящегося в сосуде объемом 1,5 л при комнатной температуре, если концентрация молекул $2*10^{19}$ $см^{-3}$?

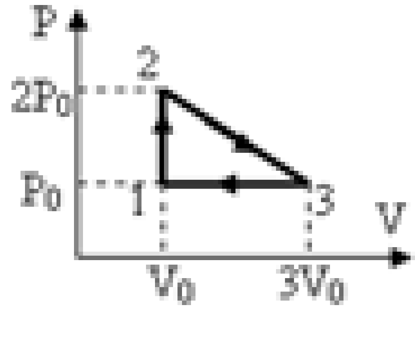
2. Какую работу совершит кислород массой 320 г при изобарном нагревании на 10 К?

3. Рабочее тело тепловой машины с КПД 10 % совершает за один цикл работу 50 кДж. Какое количество теплоты получает рабочее тело от нагревателя за цикл?

4. На рисунке изображено изменение состояние 1 моль идеального газа. Начальная температура газа 27 °С. Какое количество теплоты сообщено газу в этом процессе?



5. Цикл тепловой машины, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, показан на рисунке. Определите КПД цикла.



6. Гелий расширяется сначала адиабатно, а затем изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу 4,5 кДж. Какую работу совершил газ за весь процесс?

2.3. Жидкости и твердые тела

Влажность воздуха. Водяной пар, входящий в состав воздуха, определяет влажность воздуха. Влажность воздуха характеризуется абсолютной и относительной влажностью. Абсолютная влажность P_A – парциальное давление водяного пара при данной температуре. Относительная влажность φ равна отношению (в процентах) абсолютной влажности к давлению насыщенного водяного пара P_H при данной температуре:

$$\varphi = \frac{P_A}{P_H} 100\% .$$

Пример 4.

Температура воздуха 20°С и относительная влажность 75 %. Найти абсолютную влажность воздуха.

Решение:

Из таблицы зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры можно найти: P_H = 17,5 мм рт.ст. при 20 °С. Тогда для абсолютной влажности следует:

$$P_A = \varphi \cdot P_H = 0,75 \cdot 17,5 = 13,1 \text{ мм рт.ст.} = 1,74 \text{ кПа}.$$

Ответ: P_A = 1,74 кПа.

Задачи для самостоятельного решения

1. В сосуд наливают mг = 5 кг горячей воды при t_1 = 80 ˚С и mх = 3 кг холодной воды при t_2. Установившаяся температура воды в сосуде t_3 = 65 ˚С. Определить температуру холодной воды t_2. Теплоёмкостью сосуда пренебречь.

2. На сколько градусов можно нагреть воду массой m_1 = 23 кг при сжигании керосина массой m_2 = 42 г, если считать, что теплота, выделившаяся при сгорании, целиком пошла на нагревание воды. Удельная теплоёмкость воды св = 4200 Дж/(кг·К). Удельная теплота сгорания керосина q = 46 МДж/кг

3. Двухлитровый алюминиевый чайник налили доверху водой при температуре t_1 = 20 ºС и поставили на электроплитку с КПД η =

30 %. Мощность плитки P = 5 кВт, масса чайника $m_ч$ = 500 г. Через какое время τ масса воды в чайнике уменьшится на Δm = 100 г? Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость алюминия $c_{ал}$ = 900 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды L = 2,25 МДж/кг, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3.

4. В комнате размерами 5 м*5 м*3 м, в которой воздух имеет температуру 25 ^{0}С и относительную влажность 25 % , включили увлажнитель воздуха производительностью 0,36 кг/ч. Сколько времени необходимо работать увлажнителю, чтобы относительная влажность воздуха в комнате стала равна 75 % ? Давление насыщенного водяного пара при температуре 25 ^{0}С равно 3,17 кПа. Комнату считать герметичным сосудом.

5. Два сосуда объёмами 20 л и 30 л, соединённые трубкой с краном, содержат влажный воздух при комнатной температуре. Относительная влажность в сосудах равна соответственно 30 % и 40 % . Если кран открыть, то какой будет относительная влажность воздуха в сосудах после установления теплового равновесия, считая температуру постоянной?

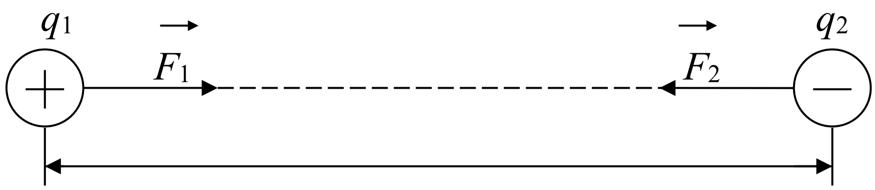
3. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

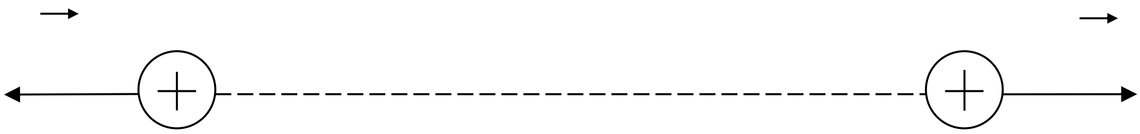
3.1. Электростатика

Взаимодействие заряженных тел. Закон Кулона.

В природе существуют заряды двух типов: положительные и отрицательные. Разноименные заряды притягиваются, одноименные отталкиваются. Сила взаимодействия двух точечных зарядов определяется законом Кулона.

Формулировка закона Кулона: два точечных заряда взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной произведению величин зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между зарядами. Сила направлена по линию, соединяющей заряды. На рисунках показано направление сил для разноименных и одноименных зарядов.





Модули сил F_1 и F_2 равны. Выражение для силы взаимодействия точечных зарядов в системе СИ имеет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2},$$

где ε_o – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость окружающей среды, q_1 и q_2 – величины точечных зарядов, r – расстояние между точечными зарядами.

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Электрическое поле точечного заряда. Заряженные тела создают в пространстве электрическое поле. Электрическое поле характеризуется в каждой точке вектором напряженности электрического поля $\overline{E}$. На точечный заряд q, помещенный в электрическое поле, действует сила $\overline{F}$, равная:

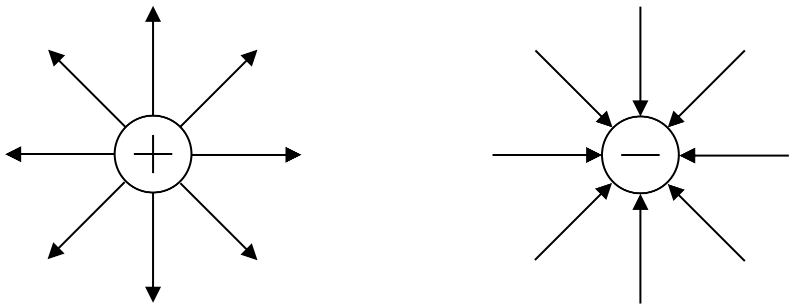
$$\overline{F} = q \cdot \overline{E}$$

Точечный заряд создает в пространстве электрическое поле, напряженность которого описывается формулой:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{|Q|}{r^2},$$

где Q – величина точечного заряда, r – расстояние от заряда Q до рассматриваемой точки пространства.

Система силовых линий уединенного положительного и уединенного отрицательного точечных зарядов представлена на рисунках:



Принцип суперпозиции полей. Напряженность электрического поля системы заряженных тел равна сумме напряженностей электрического поля каждого тела в отдельности, как если бы других тел не было, т. е.:

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + ... + \overline{E}_N .$$

Потенциал электрического поля. Электростатическое поле характеризуется в каждой точке величиной потенциала. Потенциал φ численно равен величине потенциальной энергии единичного положительного заряда, внесенного в данную точку поля, т. е.:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{W_P(x, y, z)}{q},$$

где $W_P(x,y,z)$ – потенциальная энергия точечного заряда q, внесенного в точку с координатами (x,y,z).

Геометрически потенциал электростатического поля описывается системой эквипотенциальных линий и поверхностей. Каждая точка эквипотенциальной линии или поверхности имеет одинаковый потенциал. Потенциал электростатического поля точечного заряда имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r},$$

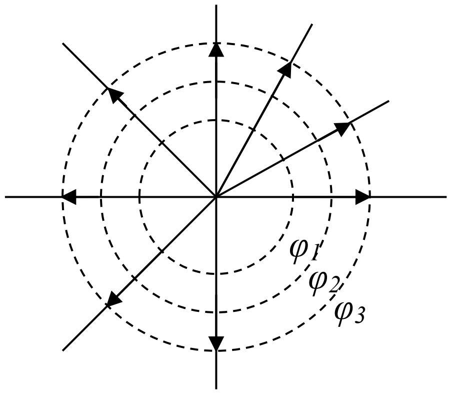
где r – расстояние от точечного заряда Q до рассматриваемой точки поля. Система эквипотенциальных поверхностей (сферы) электростатического поля уединенного положительного точечного заряда изображена на рисунке

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны. Принцип суперпозиции для потенциала имеет вид:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N.$$

Работа электростатического поля при перемещении заряда. Разность потенциалов.

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда по любому замкнутому контуру равна нулю. Работа сил электростатического поля A_{12} при перемещении точечного заряда из точки 1 поля в точку 2 поля равна:



$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$,

где q – величина заряда, перемещаемого из точки 1 в точку 2, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов двух точек поля.

Таким образом, разность потенциалов численно равна работе сил электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из одной точки поля в другую.

Проводники в электрическом поле

1) Напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю.

2) Заряд, сообщенный проводнику, располагается на поверхности проводника.

3) Область проводника – эквипотенциальная область. Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью.

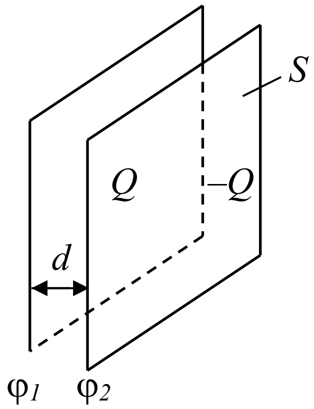
4) Силовые линии электростатического поля перпендикулярны к поверхности проводника.

Электроемкость. Конденсаторы. Потенциал φ заряженного уединенного проводника пропорционален заряду Q проводника: $Q = C\cdot\varphi$. Величина C – электроемкость уединенного проводника. Величина электроемкости определяется геометрической формой, размерами проводника и диэлектрическими свойствами среды. Так, электроемкость уединенного шара радиуса R равна $4\pi\varepsilon_o\varepsilon R$.

Два близко расположенных друг к другу проводника составляют конденсатор. Заряд конденсатора и разность потенциалов U обкладок связаны соотношением

$Q = C\cdot U$,

где C – электроемкость конденсатора, $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Наибольшее распространение получил плоский конденсатор, у которого обкладки – плоские пластины. На рисунке представлен плоский конденсатор.



Электроемкость плоского конденсатора C равна:

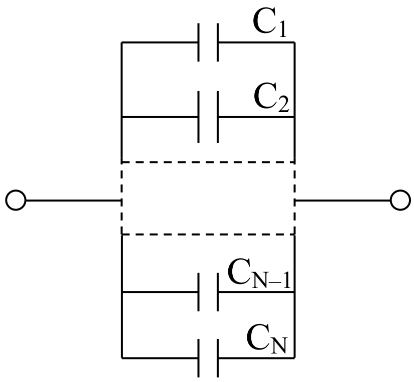
$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot S}{d},$$

где S – площадь обкладки конденсатора, d – расстояние между обкладками. Электрическое поле внутри конденсатора однородное, и напряженность E равна:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Параллельное и последовательное соединение конденсаторов

Параллельное соединение конденсаторов показано на рисунке.



При параллельном соединении напряжение на каждом конденсаторе одинаково и равно напряжению на всей батарее: $U = U_1 = U_2 = \ldots = U_N$.

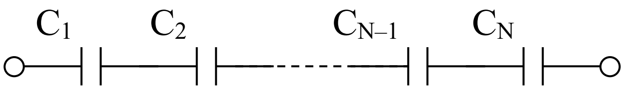
Заряд Q на батарее конденсаторов равен сумме зарядов на каждом конденсаторе:

$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_N$.

Общая электроемкость С равна сумме электроемкостей каждого конденсатора:

$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$.

Последовательное соединение конденсаторов показано на рисунке



При последовательном соединении заряд на каждом конденсаторе одинаков и равен заряду на всей батарее:

$Q = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_N$.

Напряжение на батарее конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе:

$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_N$.

Общая электроемкость C батареи связана с электроемкостью каждого конденсатора выражением:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}.$$

Энергия электрического поля. Энергия W_p электростатического поля между обкладками плоского конденсатора (энергия конденсатора) равна:

$$W_p = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{U^2 \cdot C}{2}.$$

Энергия электростатического поля системы точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots q_N$ равна:

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \cdot \varphi_1 + q_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + q_N \cdot \varphi_N),$$

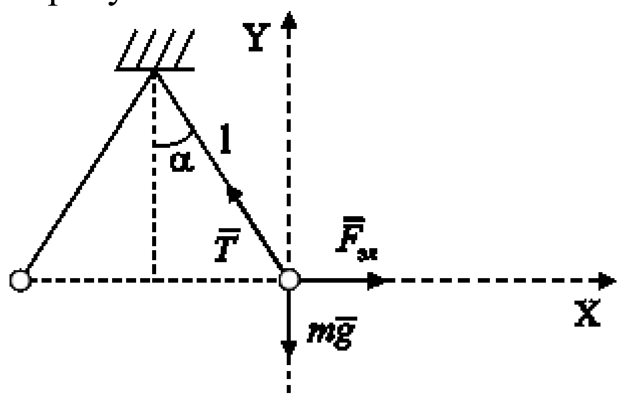
где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N$ – потенциал электростатического поля в точках расположения зарядов $q_1, q_2, \ldots q_N$, соответственно.

Пример.1

Два маленьких одинаковых шарика массой по 5,0 г подвешены на нитях длиной по 10 см, так, что их поверхности соприкасаются. Найти величину заряда, который необходимо сообщить каждому шарику, чтобы натяжение нитей стало равно 98,1 мН.

Решение:

После сообщения шарикам зарядов они разойдутся на расстояние r, как показано на рисунке.



На каждый шарик действует сила тяжести $m\bar{g}$, сила натяжения нити $\bar{T}$ и сила кулоновского отталкивания $\bar{F}_{эл}$. Шарики находятся в равновесии, поэтому: $m\bar{g} + \bar{F}_{эл} + \bar{T} = 0$.

В проекциях на ось *ox* и *oy* этого уравнения получим, соответственно,

$$F_{эл} = T \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

$$mg = T \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

где α – угол между вертикалью и нитью.

Выражение для $F_{ЭЛ}$ имеет вид:

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}, \qquad (3)$$

Из рисунка видно, что

$$\frac{r}{2l} = \sin\alpha, \qquad (4)$$

Из уравнения (2) легко найти, что угол α = 60°. Тогда из соотношений (3), (4) и уравнения (1) получим для заряда шарика выражение:

$$q = r\sqrt{T 4\pi\varepsilon_0 \cdot \sin\alpha} = 0{,}173 \cdot \sqrt{\frac{98{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}866}{9 \cdot 10^9}} = 0{,}53\ \text{мкКл}$$

Ответ: q = 0,53 мкКл.

<u>Пример 2.</u>

В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной 1,0 м расположены одинаковые по величине, но разные по знаку точечные заряды $9{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл и – $9{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти напряженность электростатического поля в третьей вершине треугольника.

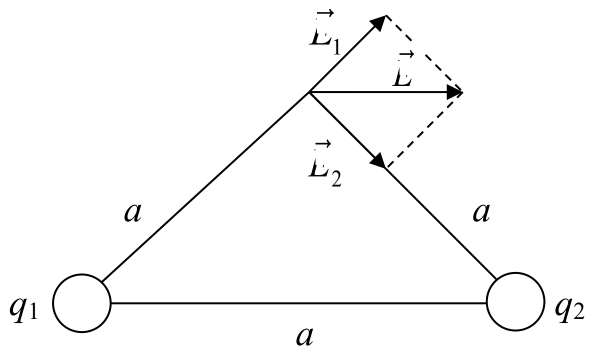
Решение

Напряженность электростатического поля в третьей вершине треугольника определяется по принципу модулю, расстояние до третьей вершины треугольника от них одинаковое и они точечные, то:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2},$$

Направление вектора $\vec{E}$ вытекает из правила сложения векторов $\vec{E_1}$ и $\vec{E_2}$, как показано на рисунке.

Так как все углы треугольника равны 60°, то треугольник векторов $\vec{E_1}$, $\vec{E_2}$, $\vec{E}$ также равносторонний. Поэтому модуль вектора $\vec{E}$ равен:



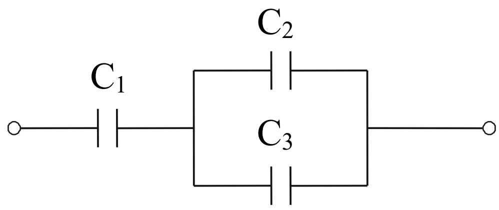
$$E = E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2} = 81\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Как видно из рисунка, вектор $\vec{E}$ параллелен линии, соединяющей заряды q_1 и q_2.

Ответ: E = 81 В/м.

Пример 3.

Три конденсатора емкостью C_1 = 4 мкФ, C_2 = 3 мкФ, C_3 = 2 мкФ соединены, как показано на рисунке. Заряд на первом конденсаторе $8{,}0 \cdot 10^{-4}$ Кл. Найти напряжение батареи конденсаторов и энергию батареи конденсаторов.



Решение

Эквивалентная схема батареи конденсаторов: два последовательно соединенных конденсатора C_1 и C_4, где C_4 – электроемкость участка конденсаторов C_2 и C_3. Так как конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно, электроемкость участка равна: $C_4 = C_2 + C_3$. Общая электроемкость батареи $C_{общ}$, следовательно, равна:

$$C_{общ} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Заряд батареи Q равен заряду на конденсаторе C_1. Отсюда для напряжения на батарее имеем:

$$U = \frac{Q}{C_{общ}} = \frac{q_1(C_1 + C_2 + C_3)}{C_1(C_2 + C_3)} = \frac{8{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{6}}{20} = 360 \text{ В}$$

Для энергии батареи получим:

$$W = \frac{1}{2}U \cdot Q = \frac{1}{2}U \cdot q_1 = \frac{1 \cdot 360 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-4}}{2} = 0{,}14 \text{ Дж}$$

Ответ: U = 360 В, W = 0,14 Дж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти расстояние r_1 между двумя одинаковыми точечными зарядами, находящимися в масле ($\varepsilon = 4$), если сила взаимодействия между ними такая же, как в вакууме на расстоянии $r_2 = 30$ см.

2. Шарик массой m = 4г, несущий заряд $q_1 = 400$ нКл, подвешен на нити. При приближении к нему такого же шарика с зарядом q_2 противоположного знака нить отклонилась на угол $\alpha = 45^o$ от вертикали, а шарики оказались на одной горизонтали на расстоянии $r = 3$ см друг от друга. Найти величину заряда q_2. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

3. В вертикально направленном однородном электрическом поле находится пылинка массой $m = 2 \cdot 10^{-9}$ г и зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Кл. Какова напряженность поля E, если пылинка находится в равновесии?

4. Найдите ускорение a, с которым падает шарик массы $m = 0{,}05$ кг с зарядом $q = 4$ мкКл в однородном электрическом поле с напряжённостью $E = 50$ кВ/м. Вектор напряжённости направлен вертикально вверх.

5. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого $d_1 = 0{,}5$ мм заряжен до напряжения $U_1 = 10$ В и отключён от источника. Каким будет напряжение U_2, если пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 2{,}5$ мм?

6. При разрядке батареи, состоящей из 20 параллельно включённых конденсаторов с одинаковыми ёмкостями $C = 20$ мкФ, выделилось количество теплоты $Q = 2$ Дж. До какой разности потенциалов U были заряжены конденсаторы?

7. Конденсаторы ёмкостью $C_1 = 2{,}0$ мкФ и $C_2 = 8{,}0$ мкФ соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $U_0 = 200$ В. Чему равна разность потенциалов U_1 на первом конденсаторе?

8. Между двумя параллельными вертикально расположенными диэлектрическими пластинами создано однородное электрическое поле, напряженность которого равна $2*10^5$ В/м. Между пластинами помещен шарик на расстоянии 1,5 см от левой пластины и 2,5 см от правой пластины. Заряд шарика – 0,2 нКл, масса 20 мг. Шарик освобождают и он начинает двигаться. На сколько успеет сместиться шарик по вертикали до удара об одну из пластин?

3.2. Законы постоянного тока

Сила тока. Закон Ома для участка цепи. Количество заряда, проходящее через поперечное сечение проводника в единицу времени, определяет силу тока I:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

где Δq – количество заряда, прошедшее через поперечное сечение проводника за время Δt. Если за любые равные промежутки времени через поперечное сечение проводника проходит одинаковое количество заряда, то электрический ток постоянный:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Сила тока, прошедшая через площадку единичной площади, ориентированной перпендикулярно к скорости носителей заряда, определяет плотность тока j:

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}}.$$

где ΔI – сила тока, прошедшего через площадку площади $\Delta S_{\perp}$, ориентированной перпендикулярно к скорости носителей заряда. В проводнике плотность тока равна:

$$j = e \cdot n \cdot \upsilon,$$

где e – заряд частицы, n – концентрация носителей заряда, υ – скорость частиц.

Формулировка закона Ома: сила тока I на участке цепи прямо пропорциональна напряжению U на этом участке цепи:

$$I = \frac{1}{R} \cdot U,$$

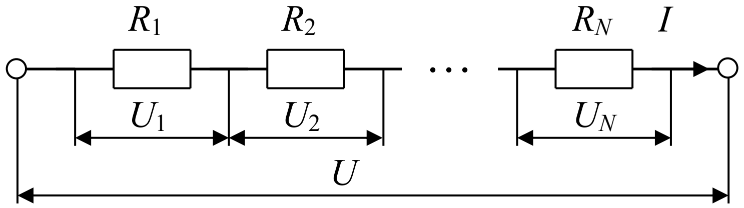
где R – электрическое сопротивление участка цепи.

Величина электрического сопротивления определяется параметрами проводника:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное электросопротивление проводника, l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения проводника.

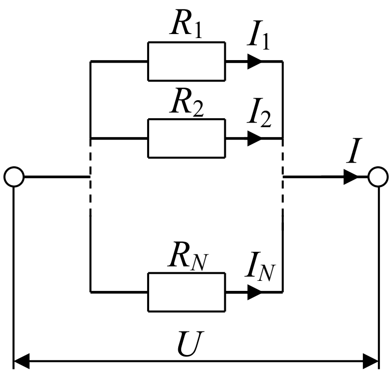
Последовательное и параллельное соединение проводников.



Последовательное соединение проводников изображено на рисунке. Как видно из рисунка и как следует из закона Ома, при последовательном соединении проводников:

1) $I = I_1 = I_2 ... = I_N,$
2) $U = U_1 + U_2 + ... + U_N,$
3) $R_{общ} = R_1 + R_2 + ... + R_N.$

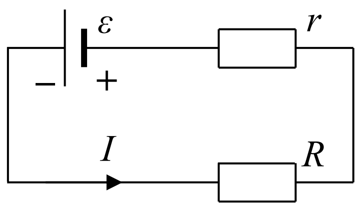
Параллельное соединение проводников изображено на рисунке справа.



При параллельном соединении проводников:

1) $I = I_1 + I_2 + ... + I_N,$
2) $U = U_1 = U_2 = ... = U_N,$
3) $\dfrac{1}{R_{общ}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + ... + \dfrac{1}{R_N}.$

Закон Ома для полной цепи. На рисунке изображена цепь, в которой ε – ЭДС источника тока, R – внешнее сопротивление цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока, I – сила тока.



Формулировка закона Ома для полной цепи: сила тока I в полной цепи прямо пропорциональна ЭДС источника тока ε и обратно пропорциональна сумме внешнего и внутреннего сопротивлений.

$$I = \frac{\varepsilon}{(R + r)}.$$

Работа и мощность тока. При протекании постоянного тока I на участке цепи ток совершает работу A:

$A = I \cdot U \cdot t,$

где U – напряжение на участке цепи, t – время протекания тока. Если работа тока полностью идет на нагревание проводника, то мощность тока описывается законом Джоуля-Ленца.

Формулировка закона Джоуля-Ленца: количество теплоты, выделяющееся в проводнике в единицу времени (мощность тока), равно произведению силы тока на напряжение на этом участке цепи:

$$Q = P = I \cdot U,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в проводнике, P – мощность тока. Используя закон Ома, выражение для закона Джоуля-Ленца можно записать в форме:

$$Q = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R},$$

где R – сопротивление участка цепи, на котором в единицу времени выделяется количество теплоты Q.

Электрический ток в растворах и расплавах электролитов. Закон электролиза. Электролиты – растворы, расплавы какого-либо вещества, обладающие ионной проводимостью.

Электролиз – явление выделения нейтральных атомов или групп атомов на электродах при прохождении тока через электролит.

Формулировка закона электролиза: при электролизе масса вещества m, выделившаяся на каждом электроде, пропорциональна количеству заряда q, прошедшего через электролит:

$$m = K \cdot q,$$

где K – электрохимический эквивалент вещества. Отношение электрохимического эквивалента вещества к химическому эквиваленту X для всех веществ одинаково:

$$\frac{K}{X} = \frac{1}{F},$$

где F – число Фарадея. Химический эквивалент определяется отношением массы моля элемента A к его валентности n:

$$X = \frac{A}{n}.$$

Если ток I, проходящий через электролит, постоянный, то закон электролиза можно записать в форме:

$$m = K \cdot I \cdot t = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot I \cdot t.$$

Пример 4.

Медный провод длиной 12 м находится под напряжением 0,5 В. Найти плотность тока в проводе.

Решение

Для решения воспользуемся законом Ома и выражениями для сопротивления проводника R и плотности тока j. Известно, что

$$R = \rho_{\mathrm{Cu}} \cdot \frac{l}{S} \text{ и}$$

$$j = \frac{I}{S}$$

где S – площадь поперечного сечения провода. Из закона Ома следует:

$$U = I \cdot R = I \cdot \rho_{\mathrm{Cu}} \frac{l}{S} = \frac{I}{S} \cdot \rho_{\mathrm{Cu}} \cdot l = j \cdot \rho_{\mathrm{Cu}} \cdot l$$

Для плотности тока получим:

$$j = \frac{U}{\rho_{\mathrm{Cu}} \cdot l} = \frac{0,5}{17 \cdot 10^{-9} \cdot 12} = 2,45 \cdot 10^{6} \text{ А/м}^2.$$

Ответ: $j = 2,45 \cdot 10^6$ А/м^2.

Пример 5.

В замкнутой цепи ЭДС источника 20 В, сила тока 4,0 А, внешнее сопротивление цепи 2,0 Ом. Найти КПД работы источника тока в данной цепи.

Решение:

КПД η работы источника тока в данной цепи равно отношению полезной мощности, выделившейся на внешнем сопротивлении цепи, к мощности общей, выделившейся на общем сопротивлении цепи. Отсюда следует:

$$\eta = \frac{I^2 \cdot R}{I^2 (R + r)}.$$

Из закона Ома для полной цепи следует:

$$R + r = \frac{\varepsilon}{I}.$$

Поэтому окончательно имеем:

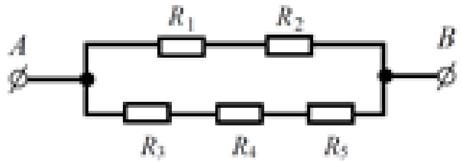
$$\eta = \frac{R}{R + r} = \frac{R \cdot I}{\varepsilon} = \frac{2,0 \cdot 4,0}{20} = 0,4$$

Ответ: $\eta = 0,4$

Задачи для самостоятельного решения

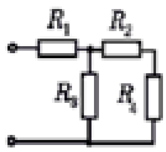
1. Определить падение напряжения U на проводнике, имеющем сопротивление R = 10 Ом, если известно, что за Δt = 4 мин. по проводнику прошел заряд q = 120 Кл.

2. Сопротивление каждого резистора в цепи, показанной на рисунке, равно $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ = 100 Ом. Участок подключён к источнику постоянного напряжения выводами A и B. Напряжение на резисторе R_4 равно U_4 = 12 В. Каково напряжение между выводами схемы U_{AB}?

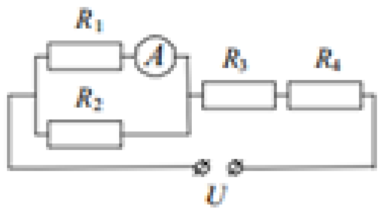


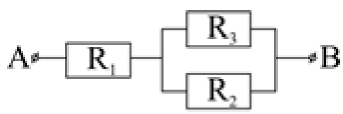
3. К цепи приложено напряжение U_0 = 45 В. Чему равна сила тока I_3 через третий резистор R_3, если сопротивление каждого из резисторов по R = 12 Ом.

4. В цепи, изображенной на рисунке, сопротивления равны: R_1 = 2 Ом, R_2 = 3 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 0,8 Ом. На вход подано напряжение U = 20 В. Найти показание I_1 включенного в цепь идеального амперметра А.

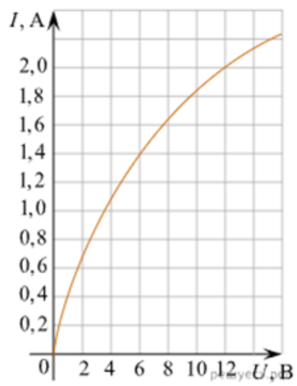


5. Три сопротивления R_1 = 2 Ом, R_2 = 5 Ом, R_3 = 3 Ом соединены так, как показано на рисунке. Если разность потенциалов между точками АВ равна U_0 = 62 В, то какова мощность P_2, выделяемая на сопротивлении R_2?





6. К однородному медному цилиндрическому проводнику на время Δt = 15 с приложили разность потенциалов U = 1 В. Какова длина проводника l, если его температура при этом повысилась на ΔT = 10 К? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. Удельное сопротивление меди $\rho_{уд} = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м, плотность меди ρ = 8900 кг/м3, удельная теплоёмкость меди c = 380 Дж/(кг·К).

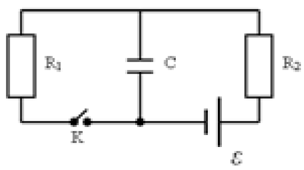


7. При коротком замыкании выводов аккумулятора сила тока в цепи равна 12 А. При подключении к выводам аккумулятора электрической лампы элек-

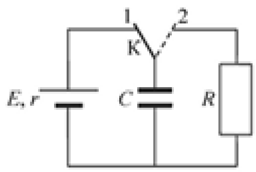
трическим сопротивлением 5 Ом сила тока в цепи равна 2 А. По результатам этих экспериментов определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

8. Вольт-амперная характеристика лампы накаливания изображена на рисунке. При напряжении источника 12 В температура нити лампы равна 3100 К. Сопротивление нити прямо пропорционально её температуре. Какова температура нити накала при напряжении источника 6 В?

9. Определите внутреннее сопротивление r источника тока, если после замыкания ключа K в цепи, показанной на рисунке, заряд конденсатора уменьшился в три раза. Сопротивления резисторов $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 70$ Ом.



10. В схеме, показанной на рисунке, ключ K долгое время находиться в положении 1. В момент $t_0 = 0$ ключ перевели в положение 2. Какое количество теплоты Q выделиться в резисторе $R = 100$ кОм к моменту $t > 0$, когда сила тока в цепи $I = 0{,}1$ мА? ЭДС батареи $E = 15$ В, её внутреннее сопротивление $r = 30$ Ом, ёмкость конденсатора $C = 0{,}4$ мкФ. Потерями на электромагнитное излучение пренебречь.



3.3. Магнитное поле. Электромагнитная индукция

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера. На проводник с током в магнитном поле действует сила, значение которой в общем случае зависит от формы проводника и величины магнитной индукции вдоль линии проводника. Если магнитное поле однородное с магнитной индукцией $\vec{B}$, проводник – прямолинейный отрезок длины l, то закон Ампера определяет силу F_A, действующую на проводник при протекании через него тока I. Выражение для силы Ампера имеет вид:

$$F_A = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлением тока в проводнике и направлением вектора $\vec{B}$. Направление вектора $\vec{F}_A$ определяется правилом левой руки.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. На отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле, действует сила, величина которой зависит от скорости частицы и магнитной индукции. Если магнитное поле характеризуется магнитной индукцией $\vec{B}$, скорость частицы $\vec{v}$, заряд частицы q, то сила, действующая на частицу, называется силой Лоренца $F_л$ и имеет вид:

$$F_Л = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлением скорости частицы и вектором $\vec{B}$. Направление силы Лоренца определяется правилом левой руки.

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. Формулировка закона электромагнитной индукции: при изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводник, в проводнике возникает ЭДС электромагнитной индукции. ЭДС электромагнитной индукции вызывает в проводнике индукционный ток. Величина ЭДС электромагнитной индукции ε_i определяется выражением:

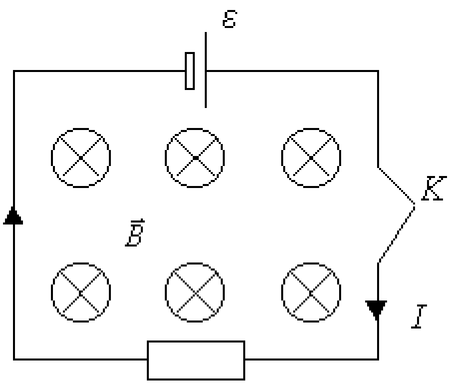
$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta \Phi$ – величина изменения магнитного потока, пронизывающего проводник за время Δt.

Направление индукционного тока определяется правилом Ленца.

Формулировка правила Ленца: индукционный ток направлен так, чтобы своим собственным магнитным полем препятствовать изменению внешнего магнитного потока, пронизывающего проводник.

Явление самоиндукции. Индуктивность. При протекании тока в какой-либо цепи этот ток создает собственное магнитное поле, пронизывающее поверхность контура цепи. На рисунке представлен пример такой цепи и направление силовых линий собственного магнитного поля $\vec{B}$.



Магнитный поток Φ магнитного поля, пронизывающего поверхность контура цепи, пропорционален силе тока I в цепи

$$\Phi = L \cdot I,$$

где L – индуктивность контура. Величина индуктивности контура определяется геометрической формой цепи, геометрическими размерами цепи и магнитными свойствами окружающей среды.

При изменении тока в цепи изменяется собственный магнитный поток, пронизывающий поверхность контура цепи. Поэтому в цепи возникает ЭДС самоиндукции ε_S, величина которой

$$\varepsilon_S = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где ΔI – изменение тока в цепи за время Δt. ЭДС самоиндукции вызывает в цепи появление экстратока. Направление экстратока определяется правилом Ленца.

Энергия магнитного поля. Магнитное поле обладает энергией. При протекании тока силой I через катушку индуктивности L энергия W магнитного поля равна:

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}$$

Пример 6.

Протон движется по окружности радиусом 60 см в магнитном поле с индукцией 1,0 Тл. Найти кинетическую энергию протона.

Решение

Заряженная частица движется по окружности в магнитном поле, если силовые линии магнитного поля перпендикулярны к вектору скорости. Центростремительное ускорение $a_ц$ обусловлено силой Лоренца $F_л$. Отсюда по второму закону Ньютона:

$$m_p \cdot a_ц = F_л \qquad (1)$$

Выражения для $a_ц$ и $F_л$ имеют вид:

$$a_ц = \frac{\upsilon^2}{R};\ F_л = l_0 \cdot \upsilon \cdot B \qquad (2)$$

Подставляя эти выражения в (1), получим: $m_p \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = l_0 \cdot \upsilon \cdot B$.

Для скорости протона υ следует: $\upsilon = \frac{l_0}{m_p} \cdot B \cdot R$.

Окончательно для кинетической энергии получим:

$$E_к = \frac{m_p \cdot \upsilon^2}{2} = \frac{m_p \cdot l_0^{\,2}}{2 \cdot m_p^{\,2}} \cdot B^2 \cdot R^2 = \frac{l_0^{\,2} \cdot B^2 \cdot R^2}{2 \cdot m_p} =$$

$$= \frac{(1,6)^2 \cdot 10^{-38} \cdot 1,0 \cdot 36 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot (1,672) \cdot 10^{-27}} = 27.6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$$

Ответ: $E_к = 27{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Пример 7.

В однородном поле с индукцией 0,4 Тл расположена квадратная рамка из медной проволоки так, что плоскость рамки перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Площадь поперечного сечения проволоки 0,25 мм^2, площадь рамки 25 см^2. Найти количество заряда, которое пройдет через поперечное сечение проволоки, если величина магнитной индукции уменьшится до нуля.

Решение

Обозначим сторону рамки через a, а промежуток

времени, за который магнитная индукция уменьшится до нуля, через Δt. При изменении магнитного поля в рамке возникает ЭДС электромагнитной индукции ε_i, равная:

$$|\varepsilon_i| = \frac{|\Delta \Phi|}{\Delta t}$$

где $\Delta \Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего плоскость рамки. Так как силовые линии всегда перпендикулярны к плоскости рамки и конечный магнитный поток равен нулю, то $|\Delta \Phi| = B \cdot S$. С другой стороны, по закону Ома имеем:

$$|\varepsilon_i| = I \cdot R,$$

где $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ – сила тока в проводнике, $R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \dfrac{4 \cdot a}{S_0}$ – сопротивление рамки. Из двух выражений для $|\varepsilon_i|$ получается:

$$\frac{B \cdot S}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \frac{\rho_{cu} \cdot 4a}{S_0}.$$

Окончательно для Δq имеем:

$$\Delta q = \frac{B \cdot \sqrt{S} \cdot S_0}{4\rho_{\text{Cu}}} = \frac{0,4 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 17 \cdot 10^{-9}} = 0,0735 \text{ Кл} = 74 \text{ мКл}$$

Ответ: $\Delta q = 74$ мКл.

Задачи для самостоятельного решения

1. Прямой проводник длины $l = 20$ см расположен параллельно к линиям индукции в однородном магнитном поле. Какова величина силы Ампера FA, действующей на проводник со стороны магнитного поля, если по нему идет ток $I = 5$ А, а магнитная индукция В = 10 мТл?

2. Определить радиус окружности R, по которой движется электрон в камере Вильсона, помещенный в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}021$ Тл, если энергия электрона $Ек = 3{,}9 * 10^3$ эВ. Заряд электрона $qe = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $me = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

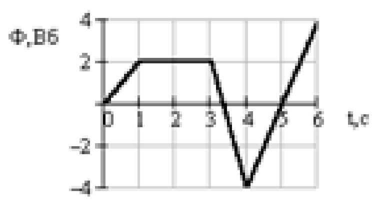
3. Электрон движется в однородном магнитном поле по круговой орбите радиусом $6*10^{-4}$ м. Импульс частицы $4{,}8*10^{-24}$ кг*м/с. Чему равна индукция магнитного поля?

4. Найти поток вектора магнитной индукции через рамку, площадь которой равна 0,02 м^2, а плоскость расположена под углом 60^0 к вектору магнитной индукции при В = 0,05 Тл.

5. Прямолинейный проводник подвешен горизонтально на двух нитях в однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл. Вектор магнитной индукции горизонтален и перпендикулярен проводнику. Во сколько раз изменится сила натяжения нитей при изменении направления тока на противоположное? Масса единицы проводника 0,01 кг/м, сила тока в проводнике 5 А.

6. Виток провода находится в магнитном поле, вектор индукции которого составляет угол $\alpha = 30^0$ с плоскостью витка. Зависимость от времени магнитного потока, пронизывающего виток, показана на графике. Если сопротивление витка $R = 2$ Ом, то какой ток Ii протекал по витку в момент времени $t = 2$ с?

7. Медное кольцо, диаметр которого $D = 20$ см, а диаметр провода кольца $d = 2$ мм, расположено в однородном магнитном поле. Плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции. Определить модуль скорости изменения магнитной индукции поля $\Delta B/\Delta t$ со временем, если при этом в кольце возникает индукционный ток $Ii = 1$ А. Удельное сопротивление меди $\rho м = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.



8. В проводнике индуктивностью L = 5 мГн сила тока в течение Δt = 0,2 с равномерно возрастает с I_1 = 2 А до некоторого значения I_2. При этом в проводнике возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}si$ = 0,2 В. Определить конечное значение силы тока I_2 в проводнике.

9. По прямому горизонтальному проводнику длиной 1 м и площадью поперечного сечения $1{,}25 \cdot 10^{-5}$ м^2, подвешенному с помощью двух одинаковых пружинок, течет ток 10 А. Какой угол составляют оси пружинок с вертикалью при включении вертикального магнитного поля индукцией 0,1 Тл. Плотность материалов проводника $8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

10. Четыре одинаковые проволоки длиной L каждая связаны на концах шарнирами и образуют квадрат, помещенный в магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости квадрата. Сопротивление каждой проволоки R. Какой заряд протечет через гальванометр, соединенный последовательно с одной из проволочек, если противоположные вершины квадрата растягивают до тех пор, пока он не превратится в прямой проводник?

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Механические колебания и волны

Гармонические колебания. Амплитуда, период и частота колебаний. Колебания называются гармоническими, если координаты тела со временем изменяются по закону синуса или косинуса. Если гармонические колебания возникают в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе, то они называются собственными гармоническими колебаниями. Такие одномерные колебания, например, может совершать шарик, закрепленный на пружине, в этом случае зависимость координаты X тела от времени t описывается формулой:

$$X = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha_0)$$

где X_m – амплитуда колебаний: модуль максимального смещения тела из положения равновесия; ω_0 – циклическая частота; $\omega_0 t + \alpha_0$ – фаза колебания; α_0 – начальная фаза колебания; υ – частота колебаний: число колебаний за секунду; T – период колебаний: время одного колебания. Циклическая частота, частота и период колебаний связаны соотношениями:

$$\omega_0 = 2\pi\upsilon, \upsilon = \frac{1}{T}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T.}$$

Гармонические колебания. Скорость и ускорение тела. Выражение для скорости тела ϑ получается как первая производная координаты по времени:

$$\vartheta = X' = -\omega_0 \cdot X_m \cdot \sin\left(\omega_0 t + \alpha_0\right) = \omega_0 X_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \vartheta_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

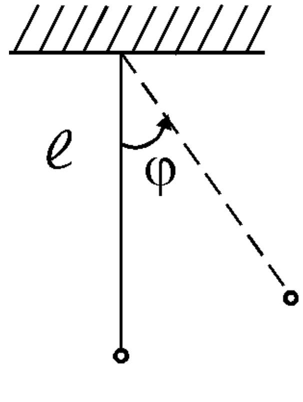
где $\vartheta_\mathrm{m} = \omega_0 \cdot \mathrm{X_m}$ – амплитуда колебаний скорости. Скорость тела изменяется по гармоническому закону со временем. Фаза колебаний скорости сдвинута относительно фазы колебаний координаты тела на $\pi/2$.

Выражение для ускорения тела a получается как первая производная скорости по времени:

$$a = \vartheta' = -\omega_0 \cdot \vartheta_m \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}) = -\omega_0^2 \cdot X_m \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \omega_0^2 \cdot X_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi) = a_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi),$$

где $a_m = \omega_0^2 \cdot X_m = \omega_0 \cdot \vartheta_m$ – амплитуда колебаний ускорения. Ускорение тела изменяется по гармоническому закону со временем. Фаза колебаний ускорения сдвинута относительно фазы колебаний координаты на π. Фаза колебаний ускорения сдвинута относительно фазы колебаний скорости на $\pi/2$.



Математический маятник. Период колебаний математического маятника. Маленький шарик (материальная точка), подвешенный на длинной нити, называется математическим маятником.

Положение математического маятника характеризуется углом отклонения φ от положения равновесия, как показано на рисунке.

Выведенный из положения равновесия и предоставленный сам себе маятник совершает собственные гармонические колебания. Изменения угла φ со временем t описывается формулой:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где φ_0 – амплитуда. Циклическая частота ω_0, период собственных колебаний T определяются параметрами маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина нити маятника; g – ускорение свободного падения.

Пружинный маятник. Период колебаний пружинного маятника. Циклическая частота ω_0, период собственных колебаний Т пружинного маятника определяются параметрами маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Превращение энергии при гармонических колебаниях. Силы, действующие в колебательной системе (пружинный маятник, математический маятник), – консервативные. Поэтому при собственных гармонических колебаниях полная механическая энергия E сохраняется:

$$E = E_k + E_П = const.$$

Однако при собственных гармонических колебаниях происходит превращение энергии: кинетическая энергия тела E_k переходит в потенциальную и наоборот. Эти превращения происходят непрерывно, но сумма кинетической и потенциальной энергии тела остаётся неизменной. Для пружинного маятника выражения кинетической и потенциальной энергии имеют вид, соответственно:

$$E_k = \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{m(x')^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\omega_0^2\cdot X_m^2\cdot\sin^2(\omega_0 t + \alpha_0) = \frac{m\vartheta_m^2}{2}\cdot\sin^2(\omega_0 t + \alpha_0) =$$

$$= \frac{m\vartheta_m^2}{2\cdot 2}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha_0)],$$

$$E_n = \frac{kX^2}{2} = \frac{k}{2}\cdot X_m^2\cdot\cos^2(\omega_0 t + \alpha_0) = \frac{kX_m^2}{2\cdot 2}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha_0)].$$

Как видно из этих выражений, кинетическая и потенциальная энергии изменяются со временем с циклической частотой $2\omega_0$. Для полной механической энергии следует:

$$E = E_k + E_n = \frac{mX_m^2\omega_0^2}{2} = \frac{kX_m^2}{2}.$$

Вынужденные колебания. Резонанс. Колебания, происходящие под действием вынуждающей силы, называются вынужденными. Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону с частотой ω, то колебания также происходят с частотой ω. Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω изменений вынуждающей силы. При совпадении частоты изменений вынуждающей силы с частотой собственных колебаний тела (системы) ω_0 амплитуда достигает максимального значения. Это явление называется резонансом. Условие резонанса: $\omega_{рез} = \omega_0$, где $\omega_{рез}$ – резонансная частота.

Длина волны. Связь длины волны со скоростью её распространения. При распространении гармонической волны в упругой среде каждая частица среды колеблется по гармоническому закону (гармонические колебания) с одной и той же частотой. Фазы колебаний у частиц разные. Сдвиг по фазе Δφ между фазами колебаний двух частиц, находящихся на расстоянии Δl вдоль распространения волны, равен:

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta l/\lambda,$$

где λ – длина волны. Длина волны λ – расстояние, которое проходит волна за один период колебаний. Длина волны λ – это также расстояние между двумя ближайшими точками, разность фаз колебаний которых составляет 2π.

Длина волны λ связана со скоростью её распространения соотношениями:

$$\lambda = \vartheta \cdot T = \frac{\vartheta}{\upsilon} = \frac{2\pi\vartheta}{\omega}.$$

<u>*Пример 1.*</u>

Точка совершает гармонические колебания с амплитудой 5,0 см и периодом 4,0 с. Найти амплитуду колебания скорости и амплитуду колебаний ускорения.

Решение.

При гармоническом колебании амплитуда X_m и циклическая частота ω_0 связаны с амплитудой скорости ϑ_m и амплитудой ускорения a_m формулами:

$$\vartheta_m = X_m \cdot \omega_0; \qquad (1)$$

$$a_m = X_m \cdot \omega_0^2. \qquad (2)$$

В то же время $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$. (3)

Из формул (1) – (3) получается:

$$\vartheta_m = \frac{X_m \cdot 2\pi}{T} = \frac{5{,}0 \cdot 6{,}28}{4} = 7{,}85\ \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$a_m = \frac{X_m \cdot 4\pi^2}{T^2} = \frac{5{,}0 \cdot 4 \cdot 9{,}87}{16} = 12{,}3\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $\vartheta_m = 7{,}85\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$, $a_m = 12{,}3\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Пример 2.

Металлический шарик математического маятника имеет массу 1,0 г. Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если шарику сообщить заряд $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ Кл и поместить маятник в однородное электрическое поле напряжённостью$1{,}0 \cdot 10^3$ В/м, направленное вертикально вниз?

Дано:
$m = 1{,}0$ г
$q = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ Кл
$E = 1{,}0 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$

$\dfrac{T_0}{T}$ —?

Решение.

Как видно из формулы,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l – длина математического маятника, период колебаний определяется ускорением свободного падения шарика в поле силы тяжести. При сообщении шарику заряда q и помещении шарика в однородное электрическое поле, очевидно, период колебаний будет определяться формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}},$$

где a – ускорение шарика при движении в новом силовом поле. Для нахождения a запишем уравнение 2-го закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось при свободном движении шарика в новом силовом поле:

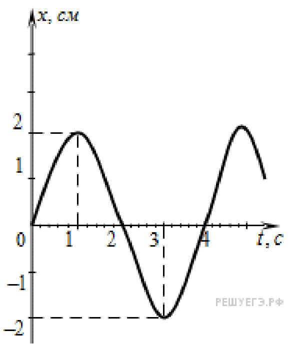
$$m \cdot a = m \cdot g + q \cdot E,$$

где $q \cdot E$ – сила, действующая на шарик в электрическом поле. Отсюда для ускорения получим выражение: $a = g + \frac{q \cdot E}{m}$, а для периода колебаний маятника в новом силовом поле $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{q \cdot E}{m}}}$. Следовательно, отношение периодов составляет величину:

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g + \frac{q \cdot E}{m}}{g}} = \left(\frac{9{,}81 + \frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{3}}{10^{-3}}}{9{,}81} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9{,}81 + 10}{9{,}81} \right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}42.$$

Ответ: Период колебаний маятника уменьшится в 1,42 раза.

Задачи для самостоятельного решения



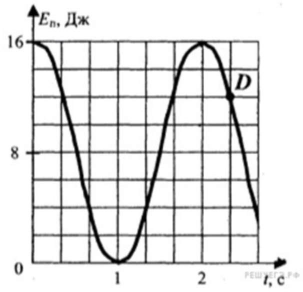
1. На рисунке представлен график смещения x тела от положения равновесия с течением времени t при гармонических колебаниях. Чему равны амплитуда x_0 колебаний и период T колебаний?

В таблице представлены данные о положении шарика, гармонически колеблющегося вдоль оси OX в различные моменты времени.

t, с	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
x, мм	0	2	5	10	13	15	13	10	5	2	0	–2	–5	–10	–13	–15	–13

Какова амплитуда колебаний шарика? Каков период колебаний?

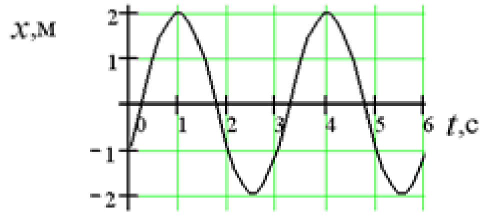
2. На рисунке представлен график зависимости потенциальной энергии математического маятника (относительно положения его равновесия) от времени. В момент времени, соответствующий на графике точке D, полная механическая энергия маятника равна:



Определить массу груза m, колеблющегося на пружине жёсткостью k = 300 Н/м, если при амплитуде колебаний A = 2 см он имеет максимальную скорость υ_{max} = 3 м/с.

3. Точка совершает гармонические колебания по синусоидальному закону и в некоторый момент времени имеет модули смещения, скорости и ускорения: x = 4 см, υ = 0,05 м/с, a = 0,8 м/с^2. Каково максимальное ускорение a_{max} точки?

4. Координата точки массы m = 100 г, совершающей колебания вдоль оси OX меняется по синусоидальному закону как показано на рисунке. Определить полную энергию колебаний E.



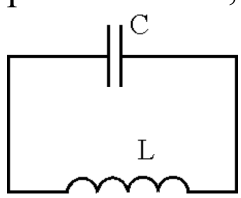
5. Два маятника, длины которых отличаются на 22 см, совершают в одном и том же месте Земли за некоторое время один 30 колебаний, другой 36 колебаний. Найдите длины маятников.

6. Груз, подвешенный к пружине с коэффициентом жесткости 50 Н/м, совершает колебания с амплитудой 6 см. Скорость груза в момент прохождения положения равновесия равна 0,3 м/с. Определите массу груза.

4.2. Электромагнитные колебания и волны

Свободные электромагнитные колебания в контуре. Собственная частота колебаний в контуре.

В колебательном контуре, изображённом на рисунке, составленном из катушки индуктивности L и конденсатора электроёмкости C, совершаются свободные электрические колебания.



Свободные электрические колебания являются гармоническими колебаниями. Величина заряда q на конденсаторе изменяется со временем по гармоническому закону:

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где q_m – амплитудное значение величины заряда на конденсаторе. Сила тока I, текущего через индуктивность, со временем изменяется по закону

$$I = q' = -q_m \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha_0) = I_m \cdot \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

где I_m – амплитуда колебаний силы тока в цепи. Напряжение U на конденсаторе также изменяется по гармоническому закону

$$U = \frac{1}{C} \cdot q = \frac{q_m}{C} \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = U_m \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где U_m – амплитуда колебаний напряжения. Колебания величины силы тока сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно колебаний величины заряда и напряжения на конденсаторе.

Собственная частота ω_0 колебаний в колебательном контуре определяется параметрами цепи и равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Период колебаний T описывается формулой Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Превращения энергии в колебательном контуре. В колебательном контуре с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением полная энергия E, равная сумме энергии электрического поля конденсатора E_C и энергии магнитного поля катушки E_L, остаётся постоянной:

$$E = E_C + E_L = const.$$

Однако в колебательном контуре непрерывно происходит превращение энергии: энергия электрического поля E_C переходит в энергию магнитного поля E_L и наоборот. Изменения со временем энергии электрического поля и энергии магнитного поля, соответственно, имеют вид:

$$E_C = \frac{q^2}{2 \cdot C} = \frac{q_m^2}{2 \cdot C} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0) = \frac{q_m^2}{2 \cdot C} \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos(2(\omega_0 t + \alpha_0))]$$

$$E_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{L(q')^2}{2} = \frac{L \cdot I_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)}{2} = \frac{L \cdot q_m^2 \cdot \omega_0^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0) =$$

$$= \frac{L \cdot I_m^2}{2 \cdot 2}[1 - \cos(2(\omega_0 t + \alpha_0))].$$

Как видно из этих выражений, энергия электрического поля и энергия магнитного поля в колебательном контуре со временем изменяются с циклической частотой $2\omega_0$.

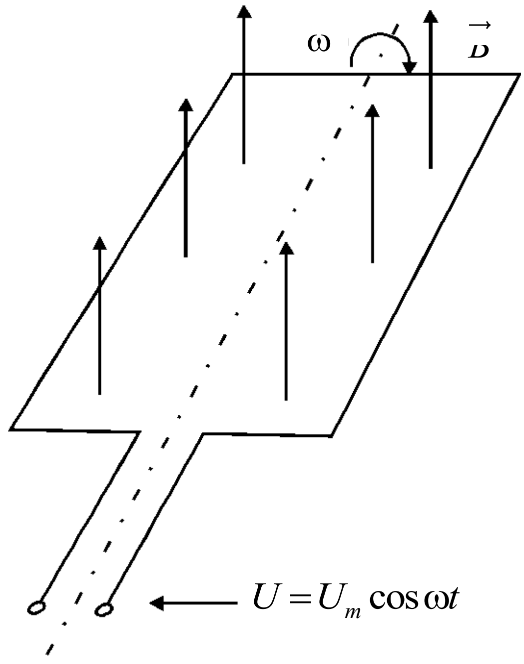
Для полной энергии колебательного контура следует:

$$E = E_C + E_L = \frac{U_m \cdot q_m}{2} = \frac{q_m^2}{2C} =$$

$$= \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \frac{L \cdot q_m^2 \cdot \omega_0^2}{2}.$$

Переменный электрический ток. При вращении проволочной рамки в однородном магнитном поле (как показано на рисунке) магнитный поток, пронизывающий поверхность рамки, изменяется по гармоническому закону. На концах рамки, в соответствии с законом электромагнитной индукции, возникает переменное напряжение U, которое изменяется по гармоническому закону:

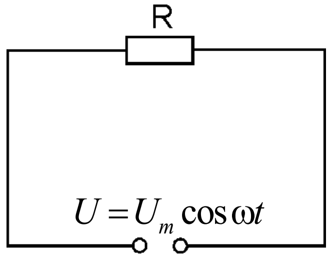
$$U = U_m \cdot \cos\omega t.$$



Рассматриваемая рамка является простейшей моделью генератора переменного напряжения. При включении генератора в электрическую цепь в ней возникает переменный электрический ток. Характер протекания переменного электрического тока зависит от типа цепи, подключенной к генератору. Возможны следующие случаи:

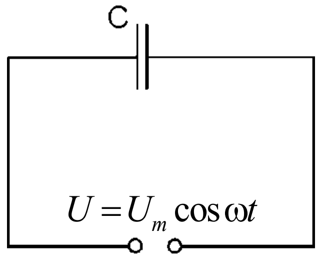
1. Активное сопротивление в цепи переменного тока (см. рисунок).

Сопротивление R называется активным, если не обладает ни индуктивностью, ни электроёмкостью. По закону Ома получается, что ток I в цепи равен:



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \cos\omega t = I_m \cdot \cos\omega t.$$

Как видно, между колебаниями напряжения и колебаниями силы тока на активном сопротивлении нет сдвига фаз.



2. Электроёмкость в цепи переменного тока (см. рисунок). Для такого типа цепи напряжение на конденсаторе в любой момент равно напряжению на генераторе:

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cdot \cos\omega t.$$

Следовательно, для тока в цепи получается:

$$I = q' = -U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \sin\omega t = I_m \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

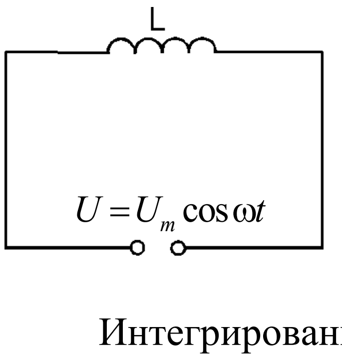
Как видно, колебания силы тока опережают по фазе колебания напряжения на конденсаторе на $\pi/2$. Амплитуда силы тока I_m связана с амплитудой напряжения U_m соотношением

$$I_m = \frac{U_m}{X_C},$$

где $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – ёмкостное сопротивление цепи.

3. Индуктивность в цепи переменного тока (см. рисунок). Для такого типа цепи напряжение самоиндукции

$$E_S = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$



на концах катушки в любой момент времени равно:

$$E_S = -U.$$

Отсюда сила тока I и напряжение на генераторе связаны соотношением:

$$U_m \cdot \cos\omega t = L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Интегрирование данного выражения для силы тока даёт формулу

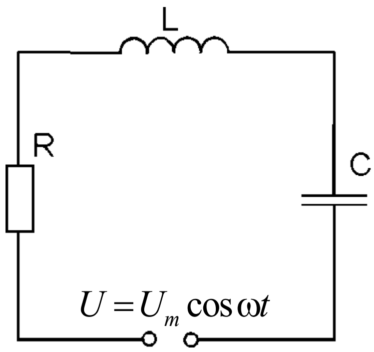
$$I = \frac{U_m}{L\omega} \cdot \sin\omega t = \frac{U_m}{L\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Как видно, колебания силы тока отстают от колебания напряжения на индуктивности на π/2. Амплитуда силы тока I_m связана с амплитудой напряжения U_m соотношением

$$I_m = \frac{U_m}{X_L},$$

где $X_L = \omega \cdot L$ – индуктивное сопротивление цепи.

Вынужденные электрические колебания. Резонанс в электрической цепи. В цепи с последовательно включенными генератором переменного напряжения, активным сопротивлением R, конденсатором электроёмкости C, катушки индуктивности L (см. рисунок) происходят вынужденные электрические колебания.



Колебания напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями силы тока в цепи. Колебания напряжения на катушке опережают по фазе на π/2 колебания силы тока. Колебания напряжения на электроёмкости отстают по фазе на π/2 от колебания силы тока. В целом колебания силы тока в цепи сдвинуты по фазе от колебаний напряжения на генераторе на некоторый угол φ:

$$I = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Амплитуда колебаний силы тока I_m связана с амплитудой колебаний напряжения U_m и параметрами цепи соотношением:

$$I_m = \frac{U_m}{Z},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ – полное электрическое сопротивление или импеданс. Величина угла φ определяется соотношением:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Амплитуда колебаний тока, как видно, зависит от частоты колебаний генератора переменного напряжения. При $\omega = 1/\sqrt{LC}$ наблюдается явление резонанса: амплитуда силы тока в цепи принимает максимальное значение.

Мощность в цепи переменного тока. Действующее значение силы тока и напряжения. Мощность мгновенная, выделяемая в цепи переменного тока, равна:

$$P = U \cdot I = U_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока равна:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \cdot U_m \cdot I_m \cdot \cos\varphi.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I_Д$ величины

$$I_Д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

(действующее значение тока) и постоянное напряжение $U_Д$ величины

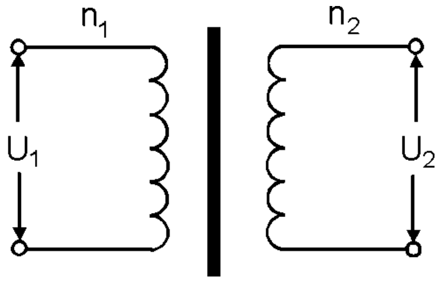
$$U_Д = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

(действующее значение напряжения). Следовательно, для средней мощности $\overline{P}$ получается:

$$\overline{P} = U_Д \cdot I_Д \cdot \cos\varphi,$$

где cosφ – называется коэффициентом мощности.

Трансформатор. Трансформатор – устройство, преобразующее переменный ток одного напряжения в переменный ток той же частоты другого напряжения. Состоит из магнитосвязанных первичной обмотки (катушки) и вторичной обмотки (катушки). Параметры трансформатора: n_1 – число витков первичной обмотки, n_2 – число витков вторичной обмотки. На первичную обмотку подаётся переменное напряжение U_1, со вторичной обмотки снимается напряжение U_2 (см. рисунок).



Отношение действующих напряжений на первичной и вторичной обмотках равно:

$$\frac{U_{Д1}}{U_{Д2}} = \frac{n_1}{n_2} = K,$$

где K – коэффициент трансформации.

Мощность, подводимая к первичной обмотке, $\overline{P}_1$ равна (почти) мощности, потребляемой в цепи вторичной обмотки, $\overline{P}_2$: $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$ или

$U_{Д1} \cdot I_{Д1} = U_{Д2} \cdot I_{Д2}$.

Следовательно, для трансформатора получается соотношение:

$$\frac{U_{Д1}}{U_{Д2}} = \frac{I_{Д2}}{I_{Д1}}.$$

Пример 3.

Колебательный контур приёмника содержит катушку постоянной индуктивности и конденсатор переменной электроёмкости. При минимальном значении электроёмкости колебательный контур настроен на электромагнитную волну длиной 800 м. Максимальное значение электроёмкости в четыре раза больше минимального значения. Найти максимальную длину волны, на которую может быть настроен колебательный контур приёмника.

Решение.

Длина волны λ, на которую построен колебательный контур, равна:

$$\lambda = \vartheta \cdot T, \tag{1}$$

где ϑ – скорость электромагнитной волны, T – период колебаний контура.

Период колебаний определяется формулой Томсона:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{LC}. \tag{2}$$

Как видно из выражений (1) и (2), большим значениям электроёмкости соответствуют большие значения длин волн. Поэтому для минимального значения длины волны λ_{min} и максимального значения длины волны λ_{max} получается:

$$\lambda_{min} = \vartheta \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C_{min}}, \tag{3}$$

$$\lambda_{max} = \vartheta \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}_{max}, \tag{4}$$

где C_{min} – минимальное значение электроёмкости конденсатора, C_{max} – максимальное значение электроёмкости конденсатора. Из формул (3) и (4) следует:

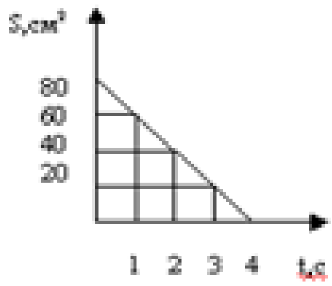
$$\lambda_{max} = \lambda_{min} \cdot \sqrt{\frac{C_{max}}{C_{min}}} = 800 \cdot \sqrt{4} = 1600 \text{ м.}$$

Ответ: λ_{max} = 1600 м.

Задачи для самостоятельного решения

1. В колебательном контуре сила тока с течением времени изменяется по закону $i = 0{,}01\cos 1000t$ (А). Ёмкость конденсатора в контуре С = 10 мкФ. Найти индуктивность контура L.

2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 2{,}5$ мкГн и двух конденсаторов, соединённых между собой параллельно, ёмкостью $C = 5$ нФ каждый. Определить период Т электрических колебаний в контуре.



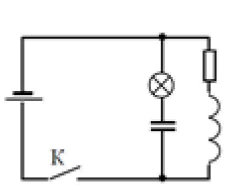
3. Площадь S обкладок конденсатора переменной электроемкости колебательного контура изменяется со временем t, как показано на рисунке. Индуктивность L остается постоянной. Найти частоту колебаний ν в момент времени $t = 3$ с, если в начальный момент времени ($t = 0$) она равнялась $\nu_0 = 3$ МГц.

4. В колебательном контуре сила тока с течением времени изменяется по закону i = 0,01cos1000t (А). Ёмкость конденсатора в контуре С = 10 мкФ. Найти максимальное напряжение U_{max} на обкладках конденсатора.

5. Найти длину волны λ, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд конденсатора q_{max} = 1 мкКл, а максимальная сила тока I_{max} = 4 А. Скорость света в вакууме с = $3 \cdot 10^8$ м/с

6. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения $U_{max} = 2$ В, и он начал разряжаться. Какой будет сила тока i в тот момент, когда энергия окажется поровну распределённой между электрическим и магнитным полем?

7. В электрической цепи, показанной на рисунке, ЭДС источника тока равна $E = 12$ В, емкость конденсатора $C = 2$ мФ, индуктивность катушки $L = 5$ мГн, сопротивление лампы $R_л = 5$ Ом и сопротивление резистора и $R_р = 3$ Ом. В начальный момент времени ключ K замкнут. Какая энергия Q выделится в лампе после размыкания ключа? Внутренним сопротивлением источника тока, а также сопротивлением катушки и проводов пренебречь.



5. ОПТИКА

5.1. Геометрическая оптика

Скорость света.

Скорость света C в вакууме не зависит от длины волны и равна приблизительно $3 \cdot 10^8$ м/с. В прозрачной среде скорость света ϑ определяется абсолютным показателем преломления n по формуле

$$\vartheta = \frac{C}{n}.$$

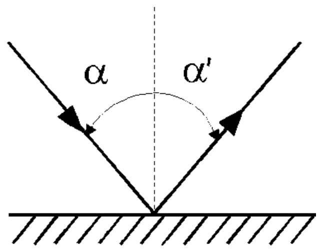
Величина абсолютного показателя преломления среды характеризует оптическую плотность среды.

Прямолинейное распространение света.

В однородной среде свет распространяется вдоль прямых линий, называемых лучами. При пересечении лучи света не взаимодействуют друг с другом (приближение геометрической оптики).

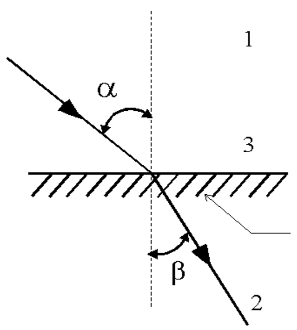
Закон отражения света.

На границе раздела двух сред луч света отражается, причём луч падающий, луч отражённый и нормаль в точке падения к границе раздела лежат в одной плоскости (рисунок). Угол падения α равен углу отражения α'.



$$\alpha = \alpha'$$

Закон преломления света. На границе раздела двух сред луч света преломляется, причём луч падающий, луч преломлённый и нормаль в точке падения к границе раздела лежат в одной плоскости (рисунок). Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления не зависит от угла падения и постоянно для данных сред.



n_{12} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой. Относительный показатель преломления связан с абсолютными показателями n_1 и n_2 и скоростями света в первой среде ϑ_1, во второй среде – ϑ_2, соотношениями:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}.$$

1. – первая среда с абсолютным показателем преломления n_1
2. – вторая среда с абсолютным показателем преломления n_2

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{const} = n_{12}$$

Явление полного внутреннего отражения.

При распространении света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_1 > n_2$) наблюдается явление полного отражения. Явление полного внутреннего отражения заключается в том, что все лучи, углы падения которых превышают некоторый угол $\alpha_{пр}$, только отражаются на границе раздела двух сред (рис. 17), не проникая во вторую среду.

Угол $\alpha_{пр}$ называется предельным углом полного внутреннего отражения. Условием определения угла $\alpha_{пр}$ является соотношение:

$\frac{\sin\alpha_{пр}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$. Отсюда $\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1}$.

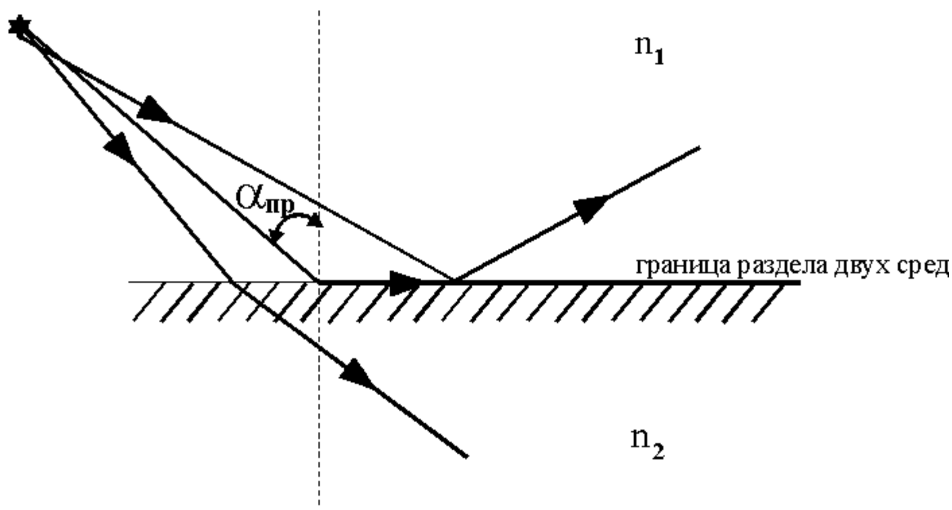


Рис. 17

При переходе света из прозрачной среды с абсолютным показателем преломления n в вакуум, условием для предельного угла полного внутреннего отражения является соотношение:

$\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n}$. Отсюда $\alpha_{пр} = \arcsin\frac{1}{n}$.

Пример 1.

Луч света распространяется из стекла в воду. Предельный угол полного внутреннего отражения равен 62° . Найти скорость света в стекле, если абсолютный показатель преломления воды 1,33.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся условием для определения предельного угла полного внутреннего отражения $\alpha_{пр}$:

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1}$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления стекла и воды соответственно. В то же время абсолютный показатель преломления стекла связан со скоростью света ϑ_1 в стекле соотношением:

$$n_1 = \frac{C}{\vartheta_1}, \tag{2}$$

где C – скорость света в вакууме. Из выражений (1) и (2) найдём скорость света в стекле:

$$\vartheta_1 = \frac{C \cdot \sin\alpha_{пр}}{n_2} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \cdot 0{,}887}{1{,}33} = 2{,}0 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\vartheta_1 = 2{,}0 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. На стеклянную пластинку с относительным показателем преломления $n = 1/\sqrt{3}$ падает луч света. Каков угол падения луча α, если угол между отраженным и преломленным лучами равен $\varphi = 90^{\circ}$?

2. На горизонтальном дне водоёма, имеющего глубину $h = 1{,}2$ м, лежит плоское зеркало. Угол падения света на поверхность воды равен $\alpha = 30^{\circ}$. На каком расстоянии s от места падения этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Абсолютный показатель преломление воды $n = 1{,}33$.

3. В дно озера глубиной $H = 2$ м вбит столб, выступающий из воды на $h = 1$м. Определите длину тени L столба на дне озера, если лучи солнца падают на поверхность воды под углом $\varphi = 60^{\circ}$ к горизонту. Относительный показатель преломления воды принять $n = 1{,}33$.

5.2. Простейшие оптические приборы

Построение изображения в плоском зеркале

Для построения изображения светящейся точки используются два луча. Пересечение лучей (или их продолжений) даёт изображение светящейся точки. На рис. 18 показано построение изображения светящейся точки S в плоском зеркале. На рис. 19 показано построение изображения светящегося отрезка AB в плоском зеркале.

Как видно из рис. 18 и 19, изображение предмета в плоском зеркале мнимое, прямое, симметричное относительно плоскости зеркала.

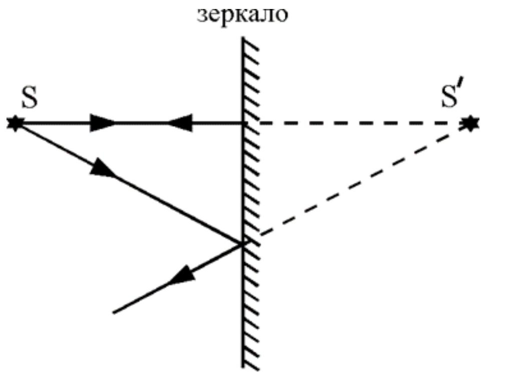


Рис. 18

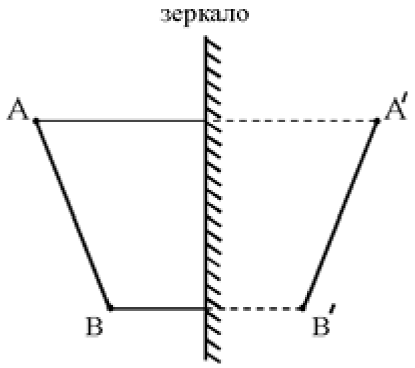


Рис. 19

Линза. Фокусное расстояние линзы. Линза – прозрачное тело, ограниченное с двух сторон кривыми поверхностями, обычно сферами. Пучок лучей (или их продолжение), падающий на линзу параллельно её главной оптической оси, собирается в точке на оси, называемой главным фокусом линзы (рис. 20). Пучок лучей (или их продолжение), падающий на линзу параллельно какой-либо побочной оптической оси, собирается в точке пересечения этой оси с фокальной плоскостью (рис. 21).

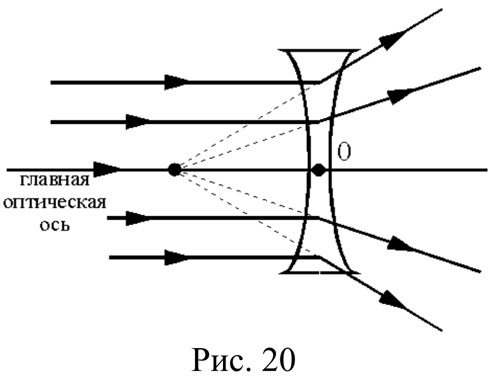


Рис. 20

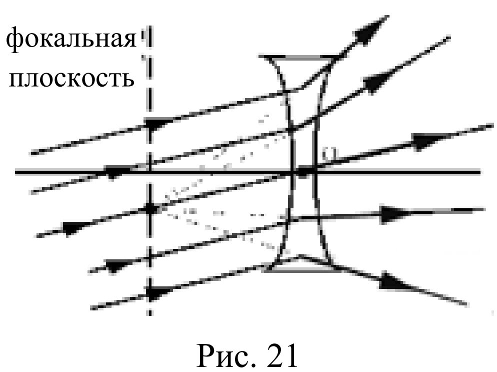


Рис. 21

Расстояние от оптического центра линзы до главного фокуса называется фокусным расстоянием линзы. У собирающей линзы главный фокус-действительный, фокусное расстояние положительное, у рассеивающей – мнимый, фокусное расстояние отрицательное.

Преломляющая способность линзы характеризуется оптической силой D:

$$D = \frac{1}{F},$$

где F – фокусное расстояние линзы. Оптическая сила линзы определяется показателем преломления n вещества линзы, радиусами кривизны первой поверхности R_1 и второй поверхности R_2. Для двояковыпуклой линзы оптическая сила D имеет вид

$$D = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Оптическая сила двух соприкасающихся тонких линз равна сумме оптических сил линз: $D = D_1 + D_2$.

Формула тонкой линзы. Линейное увеличение линзы. Формула тонкой линзы связывает величины, характеризующие положение предмета и изображение предмета с фокусным расстоянием линзы. Формула тонкой линзы имеет вид:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от изображения до линзы. Величины d, f, F – алгебраические. Если предмет и изображение действительные, то $d > 0, f > 0$. Если предмет (источник) и изображение мнимые, т. е. получаются на пересечении продолжения лучей, то $d < 0, f < 0$. На рис. 22 показано построение изображения предмета (вертикального отрезка AB) в собирающей линзе. На рис. 23 показано построение изображения предмета (вертикального отрезка AB) в рассеивающей линзе.

Отношение линейного размера $A'B'$ изображения к линейному размеру AB предмета называется линейным увеличением линзы $Г$. Из рис. 22 видно, что линейное увеличение линзы равно:

$$Г = \frac{A'B'}{AB} = \frac{|f|}{|d|}$$

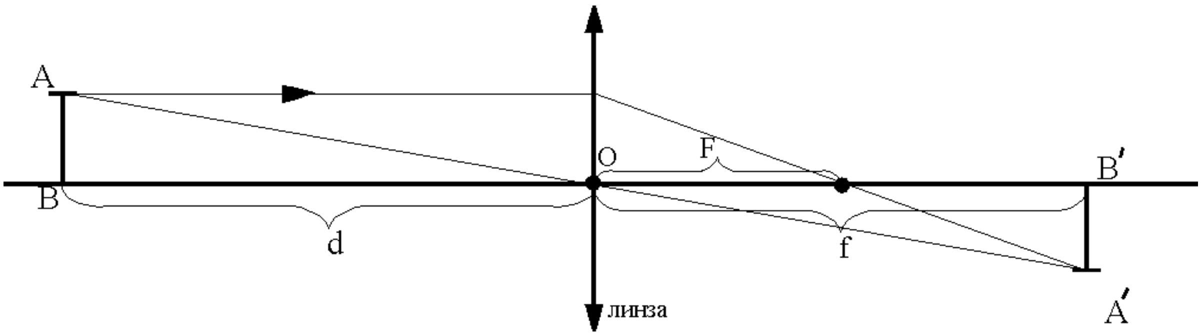


Рис. 22

Построение изображения в линзах. Прохождение лучей через линзу определяется свойствами некоторых характерных точек, осей и плоскостей линзы: оптического центра линзы, главного фокуса линзы, главной оптической оси линзы, побочных оптических осей, фокальной плоскости. Поэтому при построении изображения в линзах используются следующие лучи:

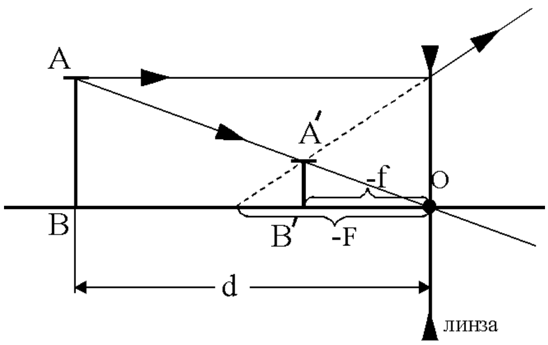


Рис. 23

1) луч, проходящий через главный фокус линзы; преломленный луч параллелен главной оптической оси;

2) луч, проходящий через оптический центр линзы; за линзой этот луч идёт не преломляясь;

3) луч, идущий параллельно главной оптической оси; преломлённый луч идёт через главный фокус линзы;

4) луч, идущий параллельно побочной оптической оси; преломлённый луч идёт через точку пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью.

<u>*Пример 2.*</u>

На собирающую линзу с оптической силой 3,0 дптр падает пучок лучей света в виде конуса, ось симметрии которого совпадает с оптической осью. Вершина светового конуса находится за линзой на расстоянии 25 см от линзы. Найти расстояние от линзы до точки, в которой соберутся лучи пучка света после преломления в линзе.

Решение.

На рис. 24 показано изображение S′ вершины светового конуса *S*. Как видно, этот случай соответствует мнимости предмета (на пересечении продолжения лучей) и, следовательно, расстояние от предмета до линзы отрицательно.

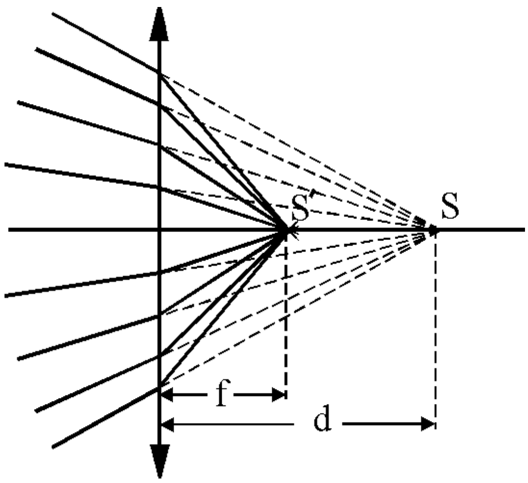


Рис. 24

Из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D$

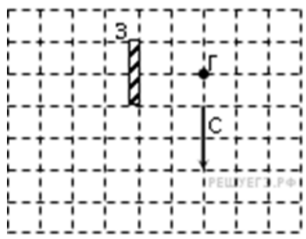
получается:

$$f=\frac{1}{D-\frac{1}{d}}=\frac{1}{3{,}0+4{,}0}=0{,}14\ \text{м}$$

Ответ: $f = 0{,}14$ м

Задачи для самостоятельного решения

1. В плоском зеркале *З* наблюдается изображение стрелки *С*, глаз находится в точке *Г*. Какая часть изображения стрелки видна глазу?



2. Светящаяся точка находится на главной оптической оси линзы с оптической силой $D = -4$ дптр. Расстояние от линзы до ее изображения $f = 20$ см. На каком расстоянии d от линзы находится точка?

3. . Предмет помещают на главной оптической оси рассеивающей линзы на расстоянии $d = 2F$, где F – фокусное расстояние линзы. Изображение предмета при этом получается на расстоянии $f = 20$ см от линзы. Определить фокусное расстояние линзы F.

4. Источник света находится на оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d_1 = 20$ см от нее, а его мнимое изображение получается на расстоянии $f_1 = 30$ см от нее. На каком расстоянии f_2 от линзы получится изображение светящейся точки, находящейся на расстоянии $d_2 = 15$ см от нее?

5. В плоскости, параллельной плоскости тонкой собирающей линзы, по окружности со скоростью 5 м/с движется точечный источник света. Расстояние между плоскостями 15 см. Центр окружности

находится на главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы 10 см. Найдите скорость движения изображения точечного источника света. Сделайте чертеж.

6. Фокусное расстояние собирающей линзы равно F = 12 см. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии d = 24 см от ее плоскости. Если линзу отодвинуть дальше от источника света на Δd = 6 см, то расстояние между источником и его изображением увеличится на …

7. На экране получено четкое изображение предмета, увеличенное в два раза. Найти расстояние l от предмета до экрана, если фокусное расстояние линзы F = 8 см.

5.3. Волновая оптика

Интерференция света. На рис. 25 изображены два когерентных источника S_1 и S_2 света, при наложении волн которых наблюдается явление интерференции. Расстояние между источниками равно d. Оптическая длина пути (произведение расстояния на величину показателя преломления среды) от первого источника до рассматриваемой точки P равно l_1, от второго источника – l_2.

Условие для получения интерференционного максимума в точке P: разность хода волн $\Delta l = l_2 - l_1$ от источников S_2 и S_1 равна целому числу m длин волн λ, т. е.

$$\Delta l = m \cdot \lambda, \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ .$$

Условие для получения интерференционного минимума в точке P: разность хода волн от источников S_2 и S_1 равна полуцелому числу длин волн λ, т. е.

$$\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda .$$

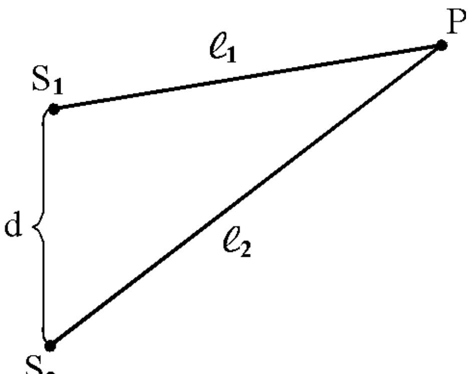


Рис. 25

Для того чтобы наблюдаемая интерференционная картина была отчётливой, необходимо, чтобы расстояние между источниками d было много меньше расстояния L до экрана (места регистрации интерференционной картины), т. е. $d \ll$.

Дифракционная решётка. Дифракционная решётка состоит из N правильно чередующихся щелей. Основной параметр дифракционной решётки – постоянная решётки d (расстояния между щелями). При падении параллельного пучка света на экране за дифракционной решёткой образуется дифракционная картина: чередование главных максимумов интенсивности света и минимумов интенсивности света. Условие главного максимума:

$$d \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda,$$

где φ – угол дифракции, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (порядок дифракционного максимума).

Пример 3.

При освещении дифракционной решётки монохроматическим светом угол дифракции главного максимума второго порядка равен 12°. Найти угол дифракции главного максимума четвёртого порядка.

Решение

Для решения запишем условия главного максимума второго и четвёртого порядков соответственно, полученной дифракционной картины:

$$d \cdot \sin\varphi_2 = 2 \cdot \lambda, \qquad (1)$$

$$d \cdot \sin\varphi_4 = 4 \cdot \lambda, \qquad (2)$$

где d – постоянная дифракционной решётки, λ – длина волны падающего света. Разделив почленно выражение (2) на выражение (1), получим: $\sin\varphi_4 = 2 \cdot \sin\varphi_2$

Отсюда, для угла φ_4 следует:

$$\varphi_4 = \arcsin\left(2 \cdot \sin\varphi_2\right) = \arcsin\left(2 \cdot 0{,}2079\right) = 24^\circ \ldots$$

Ответ : $\varphi_4 = 24^\circ \ldots$

Задачи для самостоятельного решения

1. Если период дифракционной решетки d = 4 мкм, то каков наибольший порядок спектра k для зеленой линии с длиной волны λ = 510,6 нм?

2. Спектр получен с помощью дифракционной решётки с периодом d = 19 мкм, расположенной параллельно экрану. Дифракционный максимум второго порядка удалён от центрального максимума на

расстояние b = 7,2 см, а от решётки – на расстояние L = 1 м. Какова длина волны λ падающего света? При расчётах принять sinφ = tgφ

3. На дифракционную решётку с периодом d = 10 мкм нормально к поверхности решётки падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ = 600 нм. За решёткой параллельно её плоскости расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F = 5 см. Чему равно расстояние между максимумами первого и второго порядков на экране, расположенным в фокальной плоскости линзы? При расчётах принять sinφ = tgφ

4. Два когерентных источника света, расстояние между которыми h = 1 мм, лежат в плоскости, параллельной экрану. Длина волны излучения λ = 500 нм. Расстояние между источниками света и экраном L = 4 м. Каково расстояние между центральным и вторым максимумами интерференционной картины. При расчётах принять sinφ = tgφ

5. Определить длину волны λ_1 для линии в дифракционном спектре четвёртого порядка, совпадающей с изображением линии спектра третьего порядка, у которой длина волны λ_2 = 492 нм.

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА АТОМА И ЯДРА

6.1. Световые кванты

Кванты света.

В ряде явлений свет ведёт себя как поток частиц. Частицы называются квантами света, или фотонами. Энергия фотона E определяется частотой света ν по формуле

$$E = h \cdot \nu,$$

где h – постоянная Планка.

Масса фотона m равна:

$$m = \frac{h \cdot \nu}{C^2}.$$

Импульс фотона p равен: $p = \dfrac{h}{\lambda}$.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. В фотоэффекте квант света вырывает электрон из вещества. Энергия фотона $h\nu$ идёт на совершение работы выхода A и на сообщение электрону кинетической энергии. Уравнение Эйнштейна имеет вид

$$h \cdot \nu = A + \frac{m_0 \cdot \vartheta^2}{2},$$

где m_0 – масса электрона, ϑ – скорость электрона.

Красная граница фотоэффекта. Фотоэффект происходит, если частота падающего света больше минимального значения ν_m, называемого красной границей фотоэффекта. Красная граница фотоэффекта находится из условия:

$$\nu_m = \frac{A}{h}.$$

Минимальной частоте ν_m соответствует максимальное значение длины волны света λ_m. Длина волны λ_m следует из формулы:

$$\lambda_m = \frac{h \cdot C}{A}.$$

<u>*Пример 1.*</u>

На поверхность металла падает электромагнитная волна с длиной волны 180 нм. Найти максимальную скорость вырванных электронов, если для этого металла длина волны красной границы фотоэффекта 275 нм.

Решение.

Из уравнения Эйнштейна для максимальной скорости ϑ_m вырванных электронов следует:

$$\vartheta_m = \left[\frac{2 \cdot (h \cdot \nu - A)}{m_0}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Частота ν связана с длиной волны λ формулой:

$$\nu = \frac{C}{\lambda}, \qquad (2)$$

а работа выхода A с длиной волны λ_m соотношением $A = \dfrac{h \cdot c}{\lambda_m}$. (3)

Используя выражения (2) и (3), окончательно для максимальной скорости ϑ_m получим:

$$\vartheta_m = \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{h \cdot C}{\lambda} - \frac{h \cdot C}{\lambda_m} \right)}{m_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{180 \cdot 10^{-9}} - \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{275 \cdot 10^{-9}} \right)}{0,911 \cdot 10^{-30}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,915 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\vartheta_m = 0,915 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какова энергия фотона, соответствующего длине волны 6 мкм?
2. Работа выхода фотоэлектронов из металла катода вакуумного фотоэлемента равна 1,5 эВ. Катод освещается монохроматическим светом, у которого энергия фотонов равна 3,5 эВ. Каково запирающее напряжение, при котором фототок прекратится?
3. В опытах по изучению фотоэффекта фотоэлектроны тормозятся электрическим полем. Определить постоянную Планка, используя результаты опыта.

Задерживающее напряжение, U, В	0,4	0,6
Частота, ν, 10^{14} Гц	5,5	6,1

4. Красная граница фотоэффекта исследуемого металла соответствует длине волны 600 нм. При освещении этого металла светом максимальная кинетическая энергия выбитых из него фотоэлектронов в 3 раза меньше энергии падающего света. Какова длина волны?
5. Число фотонов, излучаемых лазерной указкой за 5 с, $6*10^{16}$. Длина волны излучения указкой равна 600 нм. Определите мощность излучения указки.
6. В вакууме находится два покрытых кальцием электрода, к которым подключен конденсатор емкостью 8000 пФ. При длительном освещении катода светом фототок, возникающий в начале, прекращается, а на конденсаторе появляется заряд $11*10^{-9}$ Кл. Работа выхода электронов из кальция $4,42*10^{-19}$ Дж. Определите длину волны света, освещающего катод.

7. Цинковую пластинку освещают ультрафиолетовым светом с длиной волны λ = 300 нм. На какое максимальное расстояние s от пластинки может удалится фотоэлектрон, если вне пластинки создано задерживающее однородное поле с напряженностью E = 10 В/см? Работа выхода из цинка Aвых = 3,74 эВ. Заряд электрона qэ = $1{,}6*10^{-19}$ Кл, его масса mэ = $9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, постоянная Планка h = $6{,}63*10^{-34}$ Дж*с, скорость света с = $3*10^{8}$ м/с.

6.2. Атом и атомное ядро

Квантовые постулаты Бора. Атомная система (атом) находится в стационарном состоянии с соответствующей энергией E_n; в стационарном состоянии атом не испускает и не поглощает кванты электромагнитного излучения.

1) Атомная система (атом) излучает или поглощает квант электромагнитного излучения при переходе из одного стационарного состояния в другое. Энергия E фотона с частотой ν соответствующего перехода, равна

$$\varepsilon = h \cdot \nu = E_m - E_n ,$$

где E_m и E_n – энергии стационарных состояний.

Состав ядра атома. Ядро любого элемента состоит из протонов и нейтронов. Ядро характеризуется порядковым номером элемента Z в таблице Менделеева и массовым числом A. Число протонов в ядре равно Z, число нуклонов в ядре равно A, число нейтронов $N = A - Z$.

Энергия связи ядра. Энергия связи ядра $\Delta E_{св}$ связана с дефектом масс ядра ΔM соотношением:

$$\Delta E_{св} = \Delta M \cdot C^2 .$$

Дефект масс ядра равен разности суммы масс покоя нуклонов ядра и массы ядра $M_Я$:

$$\Delta M = Z \cdot m_p + \left(A - Z\right) \cdot m_n - M_Я ,$$

где m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона.

Закон радиоактивного распада. Число ядер радиоактивного изотопа n с течением времени уменьшается: наблюдается радиоактивный распад. Число ядер n определяется уравнением:

$$n = n_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где n_0 – начальное количество ядер в момент времени $t = 0$, T – период полураспада.

Пример 2.

Один протон и два нейтрона соединяются в атомное ядро. Определить величину высвободившейся энергии. Масса протона 1,00728 а.е.м., масса нейтрона 1,00866 а.е.м., масса ядра трития 3,0155 а.е.м. (1 а.е.м. = $1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг).

Решение.

Дефект масс ядра ΔM равен:

$$\Delta M = m_P + 2 \cdot m_n - M_Я .$$

В соответствии с законом взаимосвязи массы и энергии при образовании ядра трития выделяется энергия ΔE, равная:

$$\Delta E = \Delta M \cdot C^2 = (m_p + 2m_n - M_Я) \cdot C^2 =$$

$$= (1{,}00728 + 2 \cdot 1{,}00866 - 3{,}0155) \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 1{,}36 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

Ответ : $\Delta E = 1{,}36 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Активность радиоактивного элемента уменьшилась в 4 раза за 8 дней. Каков период полураспада этого элемента?
2. Чему равен период полураспада изотопа, если за одни сутки распадается в среднем 750 атомов из 1000?
3. Какая доля радиоактивных ядер изотопа $^{14}_{6}C$ распадется за 10 лет, если период его полураспада равен 557 лет?
4. Сколько происходит α и β распадов при радиоактивности распаде $^{238}_{92}U$, если при этом получается $^{198}_{82}Pb$?
5. Какая частица образуется в результате ядерной реакции $^{27}_{13}Al + \gamma \to {}^{26}_{12}Mg + ?$
6. Радиоактивный препарат помещён в медный контейнер массой m = 0,5 кг. За два часа температура контейнера повысилась на

ΔT = 5,2 К. Известно, что данный препарат испускает α-частицы энергией Eα = 5,3 МэВ, причём энергия всех α-частиц полностью переходит во внутреннюю энергию контейнера. Найдите активность препарата. Удельная теплоёмкость меди c = 380 Дж/(кг·К)

7. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E\_n = -13{,}6/n^2$ эВ, где n = 1, 2, 3, …. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом испускает фотон. Поток таких фотонов падает на поверхность фотокатода. Запирающее напряжение для фотоэлектронов, вылетающих с поверхности фотокатода, $U_з$ = 7,4 В. Какова работа выхода Авых фотоэлектронов с поверхности фотокатода? Заряд электрона $q_э = 1{,}6*10^{-19}$ Кл.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. Механика

1.1. Кинематика	1.2 Динамика	1.3 Законы сохранения
1) 4 с	19) 250 Н/м	31) 10 м/с
2) 20 м	20) 16,2 пН	32) 15 м/с
3) 8 м/с	21) 8 м/с^2	33) 6,9 м/с
4) 53 км/ч	22) 12 Н	34) 2 с
5) 4,5 м/с	23) 1 м/с^2	35) 60 Дж
6) 40 м	24) 3 м/с	36) 240 Дж
7) 960 м	25) 1,5 Н	37) 504 Дж
8) 0,6 с	26) 2 м/с^2; 12 Н	38) 100 м/с
9) 3,6 м	27) 0,76 кг	39) 0,18 м
10) 45 м	28) 40 ^{0}	40) 100 г
11) 5 с	29) 800 кг	
12) 22,4 м	30) 1,7	
13) 30 м/с		
14) 1,5 с		
15) 33,8 м		
16) 0,28 с		
17) 2 м/с		
18) 5м		

1.4 Статика	1.5 Жидкости и газы
41) 500 м^3	46) 6 кПа
42) 74 кг	47) 750 кг/м^3
43) 120 кг	48) 700 кг/м^3
44) 700 кг/м^3	
45) 42^0	

2. Молекулярная физика и термодинамика

2.1 Основы МКТ	2.2 Термодинамика	2.3 Жидкости и твердые тела
1) 225 К	8) 185 Дж	14) 40 ^{0} С
2) 0,11 Мпа	9) 831 Дж	15) 20 ^{0} С
3) 1,9 м^3	10) 500 кДж	16) 10,4 мин
4) 75 К	11) 12,5 кДж	17) 2,4 ч
5) 3 л	12) 16,7 %	18) 38 %
6) 250 К	13) 7,5 кДж	
7) 219 К		

3. Основы электродинамики

3.1 Электростатика	3.2 Законы постоянного тока	3.3 Магнитное поле. Электромагнитная индукция
1) 15 см	9) 5 В	19) 0
2) 10 нКл	10) 36 В	20) 0,01 м
3) 625 кВ/м	11) 1,5 А	21) 0,05 Тл
4) 6 м/с^2	12) 2,4 А	22) 0,87 Вб
5) 50 В	13) 180 Вт	23) 3
6) 100 В	14) 5,1 м	24) 0
7) 160 В	15) 1 Ом	25) 0,11 Тл/с
8) 7,5 см	16) 2200 К	26) 10 А
	17) 30 Ом	27) 45^0
	18)25 мкДж	28) BL^2/4R

4. Колебания и волны

4.1. Механические колебания и волны	4.2. Электромагнитные колебания и волны
1) 2 см; 4 с	9) 100 мГн
2) 15 мм; 4 с	10) 1 мкс
3) 16 Дж	11) 6 МГц
4) 13,3 г	12) 1 В
5) 83 см/с^2	13) 471 м
6) 0,88 Дж	14) 10 мА
7) 0,72 м; 0,5 м	15) 115 мДж
8) 2 кг	

5. Оптика

5.1 Геометрическая оптика	5.2 Простейшие оптические приборы	5.3 Волновая оптика
1) 30 ^{0}	4)0,5	11) 7
2) 97 см	5) 1 м	12) 684 нм
3) 1,39 м	6) 30 см	13) 3 мм
	7) 20 см	14) 4 мм
	8) 10 м/с	15) 369 нм
	9) 2 см	
	10) 36 см	

6. Квантовая физика. Физика атома и ядра.

6.1 Световые кванты	6.2 Атом и атомное ядро
1) 3,3*10^{-20} Дж	8)4 Дня
2) 2 В	9) 12 часов
3) 5,3*10^{-34} Дж*с	10) 1,2 %
4) 400 нм	11) 10 и 10
5) 4 мВт	12) Протон
6) 300 нм	13) 1,7*10^{11} с$^{-1}$
7) 0,4 мм	14) 2,8 эВ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие содержит теоретический и практический материал по математике и физике. Оно может быть использовано в качестве пособия по подготовке абитуриентов к школьным экзаменам, ЕГЭ или поступлению в институты, университеты.

Материал пособия подходит и для проведения преподавателями корректирующих курсов по математике и физике у первокурсников. Авторы стремились изложить материал по возможности полно и доступно.

Процесс матемизации затронул почти все науки в современном мире. Немецкий философ XVIII века Иммануил Кант считал, что наука тем более заслуживает название науки, чем больше в ней математики. В наше время будущим экономистам, инженерам, программистам, архитекторам, строителям и другим специалистам также необходима серьёзная математическая подготовка, как и во времена И. Канта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дымков, М. П. Математика : учеб. пособие / М. П. Дымков. – Минск : БГЭУ, 2011. – 62 с.

2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М. И. Сканави. – М. : Мир и Образование, 2013. – 608 с.

3. Калебин, А. В. Математика : пособие для поступающих во Влад. гос. ун-т / А. В. Калебин, Р. С. Ксенофонтов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 172 с. – ISBN 5-89368-386-2.

4. Сорокина, А. Г. Пособие по математике для поступающих во Влад. гос. ун-т / А. Г. Сорокина, В. А. Скляренко ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 100 с. – ISBN 5-89368-275-0.

5. Беспалов, М. С. Математика : учеб. пособие / М. С. Беспалов, А. Г. Беспалова, Т. А. Еропкина. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2001. – 122 с.

6. Тесты централизованного тестирования по математике 2000 – 2007 гг. [Электронный ресурс]. – URL: https://mathnet.spb.ru/ct.htm (дата обращения: 03.10.2023).

7. Варианты ЕГЭ 2006 г. [Электронный ресурс]. – URL: https://mathnet.spb.ru/ege/ege2006-2.htm (дата обращения: 03.10.2023).

8. Справочник для поступающих в высшие учебные заведения Российской Федерации / авт.-сост.: Г. В. Арсеньев, А. М. Водянский, Г. К. Шестаков ; под ред. В. Д. Шадрикова. – М. : Дрофа, 1999. – 544 с. – ISBN 5-7107-2092-5.

9. Кабардин, О. Ф. Физика : справ. для старшеклассников и поступающих в вузы / О. Ф. Кабардин. – М. : АСТ-ПРЕСС, 2001. – 528 с. – ISBN 978-5-94776-607-3.

10. Задачи по физике для поступающих в вузы : учеб. пособие для подгот. отд-ний вузов / Г. А. Бендриков [и др.]. – М. : Наука, 2013. – 333 с. – ISBN 978-5-9221-1497-4.

11. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Наука, 1990. – ISBN 5-02-014508-4.

12. Енохович, А. С. Справочник по физике и технике / А. С. Енохович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1983. – 255 с.

13. Мякишев, Г. Я. Физика. 10 класс: базовый и профильный уровни : учебник / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский. – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 366 с. – ISBN 978-5-09-022776-6.

14. Мякишев, Г. Я. Физика. 11 класс: базовый и профильный уровни : учебник / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин. – 17-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 2008. – 399 с. – ISBN 978-5-09-103620-6.

15. Касаткина, И. Л. Физика для старшеклассников и абитуриентов: интенсивный курс подготовки к ЕГЭ / И. Л. Касаткина. – Изд. 2-е. – Ростов н/Д. : Феникс, 2013. – 735 с. – ISBN 978-5-222-20747-5.

16. Турчина, Н. В. Физика в задачах для поступающих в вузы / Н. В. Турчина. – М. : Оникс : Мир и Образование, 2008. – 768 с. – ISBN 978-5-488-01495-4 (Оникс). – ISBN 978-5-94666-452-3 (Мир и Образование).

17. Рымкевич, А. П. Физика. Задачник. 10 – 11 классы / А. П. Рымкевич. – 17-е изд., стер. – М. : Дрофа, 2013. – 188 с. – ISBN 978-5-358-11908-6.

18. Физика. ЕГЭ-2023. Тематический тренинг. Все типы заданий : учеб.-метод. пособие / под ред. Л. М. Монастырского. – Ростов н/Д. : Легион, 2019. – 480 с. – ISBN 978-5-9966-1261-1.

19. Демидова, М. Ю. ЕГЭ 2023. Физика. Типовые экзаменационные варианты / Демидова М. Ю., Грибов В. А.. – М. : Национальное образование, 2020. – 400 с. – ISBN 978-5-4454-1306-6.

20. Кулиш, А. А. Физика : пособие для подгот. к вступительным экзаменам в вуз / А. А. Кулиш ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2002. – 114 с. – ISBN 5-89368-352-8.

Учебное издание

ПОМОЩЬ ПЕРВОКУРСНИКАМ

Математика и физика

Учебное пособие

Авторы-составители
КОКУРИНА Юлия Камильевна
АНТОНОВА Мария Александровна

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 28.02.24.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 13,72. Тираж 30 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.