Владимирский государственный университет

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2024

ISBN 978-5-9984-1746-7

УДК 517.3
ББК 22.161.1

Автор-составитель О. В. Крашенинникова

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Кратные и криволинейные интегралы [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / авт.-сост. О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 91 с. – ISBN 978-5-9984-1746-7. – Электрон. дан. (2,20 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальный типовой расчет по кратным и криволинейным интегралам.

Предназначено для студентов бакалавриата очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых трех семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 22. Библиогр.: 5 назв.

ISBN 978-5-9984-1746-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия соответствует программе второго курса обучения и включает раздел «Кратные и криволинейные интегралы».

Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемым разделам, примеры решения типовых задач и индивидуальный типовой расчет, включающий 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей его защитой во время рейтинговой недели).

Обозначения и терминология, используемые в пособии, являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы по кратным и криволинейным интегралам, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с изданием предполагает параллельное изучение этой темы по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой области D евклидовой плоскости. Разобьем область D кривыми на части $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n$. Будем предполагать, что $D_i \cap D_j$ при $i \neq j$ не имеет внутренних точек. Тогда $S(D) = S(D_1) + S(D_2) + \ldots + S(D_n)$. Это разбиение будем обозначать через T. Введем понятие диаметра разбиения. Для этого сначала введем понятие диаметра множества: пусть M – произвольное множество, тогда диаметр множества равен $diam(M) = \max d(P_1, P_2)$, где $P_1, P_2 \in M$. Диаметром разбиения назовем величину $\lambda_T = \max(diam(D_1), diam(D_2), \ldots diam(D_n))$. Далее выберем точки $(c_i, d_i) \in D_i$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим сумму

$$f(c_1,d_1)\cdot S(D_1) + f(c_2,d_2)\cdot S(D_2) + \ldots + f(c_n,d_n)\cdot S(D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i,d_i)\cdot S(D_i) =$$

$= \sigma_n(T)$ – интегральная сумма. Она зависит от способа разбиения и выбора точек.

Определение. Число A называется пределом интегральной суммы $\sigma_n(T)$ при $\lambda_T \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения T области D на части с $\lambda_T < \delta$ и при любом выборе точек $(c_i, d_i) \in D_i$ выполняется неравенство $\left|\sigma_n(T) - A\right| < \varepsilon$.

Если предел существует, то говорят, что функция $z = f(x,y)$ интегрируема в области D и этот предел обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ и называется двойным интегралом от $f(x,y)$ по области D. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda_T \to 0} \sigma_n(T).$$

Терема 1.1. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то она ограничена в области D.

Доказательство. Из определения интегрируемости следует, что для $\varepsilon = 1\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения T области D на части с

$\lambda_T < \delta$ и при любом выборе точек $(c_i, d_i) \in D_i$ выполняется неравенство $\left| f(c_1,d_1)\cdot S(D_1) + f(c_2,d_2)\cdot S(D_2) + \ldots + f(c_n,d_n)\cdot S(D_n) - A \right| < 1$.

Раскроем модуль:

$$A - 1 - (f(c_2,d_2)\cdot S(D_2) + \ldots + f(c_n,d_n)\cdot S(D_n)) < f(c_1,d_1)\cdot S(D_1) <$$
$$A + 1 - (f(c_2,d_2)\cdot S(D_2) + \ldots + f(c_n,d_n)\cdot S(D_n)).$$

Мы видим, что $A_1 \le f(c_1,d_1) \le A_2$, где A_1, A_2 - числа при $\forall (c_1,d_1) \in D_1$, то есть функция ограничена на D_1. Аналогично доказывается, что она ограничена на $D_2,\ldots,D_n$, поэтому она ограничена на множестве *D*. Теорема доказана.

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим в трехмерном пространстве следующее тело: $\{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$ (рис.2). Разобьем область *D* прямыми, параллельными осям координат, на прямоугольники: $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n$. Далее выберем точки $(c_i, d_i) \in D_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $f(c_i,d_i)\cdot S(D_i)$ - объем параллелепипеда с основанием D_i и высотой $f(c_i,d_i)$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i,d_i)\cdot S(D_i)$ - объем тела, составленного из параллелепипедов с основаниями D_i и высотами $f(c_i,d_i)$, $i = \overline{1,n}$. Он приближенно равен объему рассматриваемого тела и чем меньше диаметр разбиения, тем точнее объем, поэтому $V = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i,d_i)\cdot S(D_i)$,

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Свойства двойного интеграла

1. Если область *D* разбита кривой на две части D_1 и D_2, функция $z = f(x,y)$ интегрируема в области *D*, то она интегрируема в областях D_1 и D_2, обратно, если функция $f(x,y)$ интегрируема в областях D_1 и D_2, то она интегрируема в области *D*. При этом имеет место формула:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

2. $\iint_D dxdy = S(D)$.

3. $\iint_D k \cdot f(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$.

4. $\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$.

5. Если $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$.

6. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$.

Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области

Терема 1.2. Пусть функция $z = f(x,y)$ интегрируема в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и для $\forall x \in [a,b]$ существует интеграл $\int_c^d f(x,y)dxdy = J(x)$. Тогда функция $J(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\int_a^b J(x)dx = \iint_D f(x,y)dxdy$ или $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)$.

Примеры. 1) Вычислить двойной интеграл $\iint_D 3y \cdot \sin(xy)dxdy$, где D: $1 \le x \le 3,\ \dfrac{\pi}{2} \le y \le 3\pi$.

Решение. Исходя из вида подынтегральной функции, сначала расставим пределы сначала по y, потом по x:

$$\iint_D 3y \cdot \sin(xy)dxdy = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} ydy\int_1^3 \sin(xy)dx = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} y \cdot \frac{1}{y}dy(-\cos(xy))\Big|_1^3 =$$

$$=3\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi}(-\cos 3y+\cos y)dy=3\left(-\frac{1}{3}\sin 3y+\sin y\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi}=3\left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=-4.$$

2) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D 6x\cdot e^{\frac{xy}{3}}dxdy$, где D: $\ln 2\le x\le \ln 3,\ 3\le y\le 6$.

Решение. Исходя из вида подынтегральной функции, сначала расставим пределы сначала по x, потом по y:

$$\iint\limits_D 6x\cdot e^{\frac{xy}{3}}dxdy=6\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}xdx\int\limits_{3}^{6}e^{\frac{xy}{3}}dy=6\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}x\cdot\frac{3}{x}dx\left(e^{\frac{xy}{3}}\right)\Bigg|_{1}^{3}=18\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\left(e^{3x}-e^{x}\right)dx=$$

$$=18\left(\frac{1}{3}e^{3x}-e^{x}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{\ln 3}=18\left(\frac{1}{3}e^{3\ln 3}-e^{\ln 3}\right)-18\left(\frac{1}{3}e^{3\ln 2}-e^{\ln 2}\right)=96.$$

Вычисление двойного интеграла в случае произвольной области

Пусть область D имеет следующий вид: $\{(x,y):\ a\le x\le b,\ h(x)\le y\le g(x)\}$, где функции $h(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Такую область называют правильной в направлении оси Oy (рис.1).

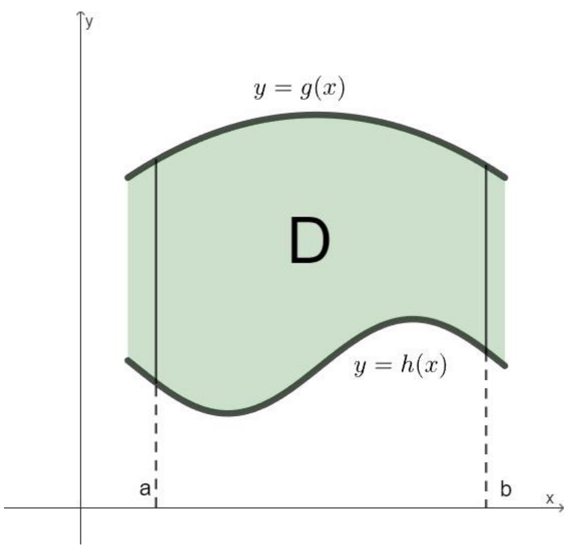


рис. 1

Пусть область D имеет следующий вид: $\{(x,y): \varphi(y)\le x\le\psi(y),\ c\le y\le d\}$, где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$. Такую область называют правильной в направлении оси *Ox* (рис.4). Область, правильную как в направлении оси *Ox*, так и в направлении оси *Oy* называют правильной областью. Пусть функция $z=f(x,y)$ непрерывна в области *D*, правильной в направлении оси *Oy*. Рассмотрим выражение $I_D=\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)$, которое называется двукратным или повторным интегралом от функции $f(x,y)$ по области *D*. В этом выражении сначала вычисляется интеграл по *y*, считая $x=const$. В результате получается непрерывная функция от *x*: $\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy=J(x)$. Затем эту функцию интегрируют по *x* в пределах от a до b и получают некоторое число $I_D=\int\limits_a^b J(x)dx$.

Может случиться так, что область *D* такова, что одна из функций $h(x)$ или $g(x)$ задается двумя аналитическими выражениями на отрезке $[a,b]$. Пусть, например, $h(x)=\begin{cases} h_1(x), & x\in[a,c] \\ h_2(x), & x\in[c,b]\end{cases}$.

Тогда двукратный интеграл запишется следующим образом:

$$\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=\int\limits_a^c dx\left(\int\limits_{h_1(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)+\int\limits_c^b dx\left(\int\limits_{h_2(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right).$$

Перечислим основные свойства двукратного интеграла.

Терема 1.3. Если правильную в направлении оси *Oy* область *D* разбить на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси *Oy* или *Ox*, то двукратный интеграл по области *D* будет равен сумме таких же интегралов по областям D_1 и D_2, то есть $I_D=I_{D_1}+I_{D_2}$.

Доказательство. Пусть прямая $x=c\quad(a<c<b)$ разбивает область *D* на две правильные в направлении оси *Oy* области D_1 и D_2. Тогда

$$I_D=\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=\int_a^b J(x)dx=\int_a^c J(x)dx+\int_c^b J(x)dx=\int_a^c dx\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)+$$
$$+\int_c^b dx\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=I_{D_1}+I_{D_2}.$$

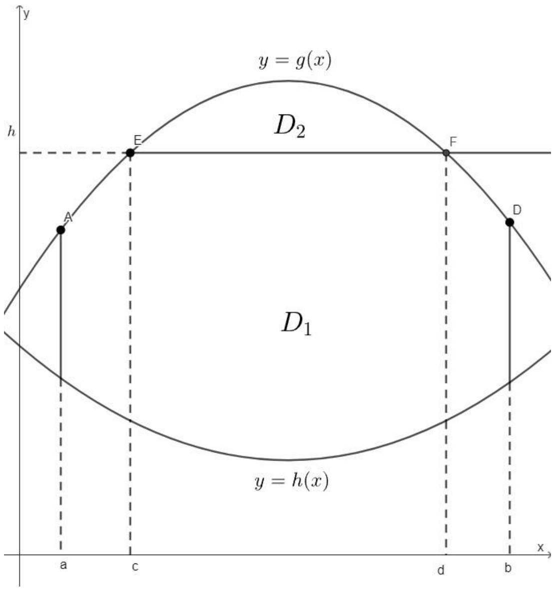


рис. 2

Пусть прямая $y=h$ разбивает область *D* на две правильные в направлении оси *Oy* области D_1 и D_2, как на рисунке 2. Область D_1 ограничена снизу кривой $y=h(x)$, сверху кривой *AEFB*, уравнение которой запишем как $y=g^*(x)$, с боков прямыми $x=a$, $x=b$. Область D_2 ограничена снизу кривой $y=h^*(x)=h$, сверху кривой $y=g(x)$, $x\in[c,d]$. Тогда $I_D=\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g^*(x)} f(x,y)dy+\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=$

$$=\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g^*(x)} f(x,y)dy\right)+\int_a^b dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right).$$

Разобьем последний интеграл на сумму трех интегралов, применяя к внешнему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$\int_a^b dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=\int_a^c dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)+\int_c^d dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)+\int_d^b dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)$$

Так как $g^*(x)=g(x)$ на отрезках $[a,c]$ и $[d,b]$, то первый и третий интегралы равны нулю, поэтому

$$I_D=\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g^*(x)} f(x,y)dy\right)+\int_c^d dx\left(\int_{g^*(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)=I_{D_1}+I_{D_2}.$$ Теорема доказана.

Следствие. Если область *D* разбита прямыми, параллельными осям координат, на любое число правильных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, то $I_D=I_{D_1}+I_{D_2}+\ldots+I_{D_n}$.

Терема 1.4. (оценка двукратного интеграла)

Пусть $m=\min\limits_D f(x,y)$, $M=\max\limits_D f(x,y)$, *S* – площадь области *D*. Тогда

$$m\cdot S\le\int_a^b dx\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)\le M\cdot S. \qquad (1)$$

Доказательство. Оценим внутренний интеграл, обозначив его $\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy=J(x)$. Тогда $J(x)\le M\big(g(x)-h(x)\big)$, следовательно,

$I_D=\int_a^b J(x)dx\le M\int_a^b\big(g(x)-h(x)\big)dx=M\cdot S$, то есть $I_D\le M\cdot S$. Аналогично, $J(x)\ge m\big(g(x)-h(x)\big)$, поэтому $I_D\ge m\cdot S$. Теорема доказана.

Терема 1.5. (теорема о среднем)

Двукратный интеграл I_D от непрерывной функции $z=f(x,y)$ по области *D* с площадью *S* равен произведению площади *S* на значение функции в некоторой точке *P* области *D*, то есть $I_D=f(P)\cdot S$.

Доказательство. Из соотношения (1) имеем $m \le \frac{1}{S} I_D \le M$. В силу непрерывности $z = f(x,y)$ она принимает в некоторой точке P области D значение, равное числу $\frac{1}{S} I_D$, то есть $I_D = f(P) \cdot S$. Теорема доказана.

Терема 1.6. Двойной интеграл от непрерывной функции $z = f(x,y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по D, то есть

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \right). \tag{2}$$

Доказательство.

Разобьем область D прямыми, параллельными осям координат, на n правильных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Тогда по следствию из теоремы 1.3 имеем $I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + \ldots + I_{D_n}$. Преобразуем каждое из слагаемых по теореме о среднем $I_{D_i} = f(P_i) \cdot S(D_i)$, тогда $I_D = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot S(D_i)$, где P_i - некоторая точка области D_i. Справа стоит интегральная сумма для функции $z = f(x,y)$ по области D. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и стремлении наибольшего диаметра областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ к нулю, получим $I_D = \lim\limits_{\max(diamD_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot S(D_i) = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Для случая неотрицательной функции $z = f(x,y)$ формула (2) имеет наглядное геометрическое толкование. Рассмотрим тело: $\{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ \ 0 \le z \le f(x,y)\}$. Мы показали, что $V = \iint_D f(x,y)dxdy$. (3)

Вычислим объем этого тела по теореме о вычислении объема тела по площадям параллельных сечений. Проведем плоскость $x = const$

($a<x<b$). Вычислим площадь $S(x)$ фигуры, получающейся в сечении плоскостью $x=const$. Это есть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y=h(x)$, $y=g(x)$, $z=0$, $z=f(x,y)$. Следовательно, $S=\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy$. Зная площади параллельных сечений, легко найти объем тела $V=\int\limits_a^b S(x)dx$, или, подставляя выражение для $S(x)$, получим:

$$V=\int\limits_a^b dx\left(\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right). \qquad (4)$$

В формулах (3) и (4) левые части равны, поэтому равны и правые части.

Геометрический смысл теоремы об оценке двукратного интеграла состоит в следующем: объем тела, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области *D*, превосходит объем цилиндра с основанием *D* и высотой $m=\min\limits_D f(x,y)$ и меньше объем цилиндра с основанием *D* и высотой $M=\max\limits_D f(x,y)$.

Замечание 2. Пусть область *D*, правильная в направлении оси *Ox*, ограничена линиями $\{(x,y): \varphi(y)\le x\le\psi(y),\ c\le y\le d\}$(рис.3)

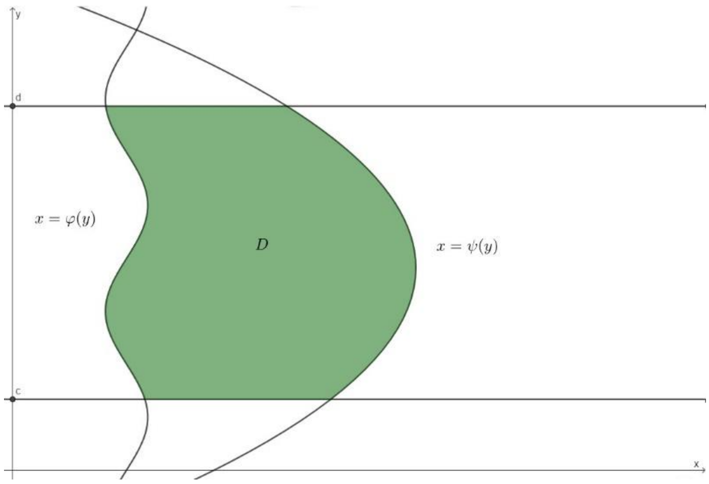


рис. 3

В этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right). \qquad (5)$$

При вычислении двойного интеграла его нужно представить либо по формуле (2), либо по формуле (5) в зависимости от вида области и вида подынтегральной функции.

Замечание 3. Если область *D* не является правильной, то её разбивают на конечное число правильных в направлении оси *Ox* или в направлении оси *Oy* областей. Вычисляя двойной интеграл по каждой из областей с помощью двукратного и складывая полученные результаты, получают искомый интеграл по области *D*.

Примеры. 1) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где $D:\ \ y=x, y=2x, x=0, x=1.$

Решение.

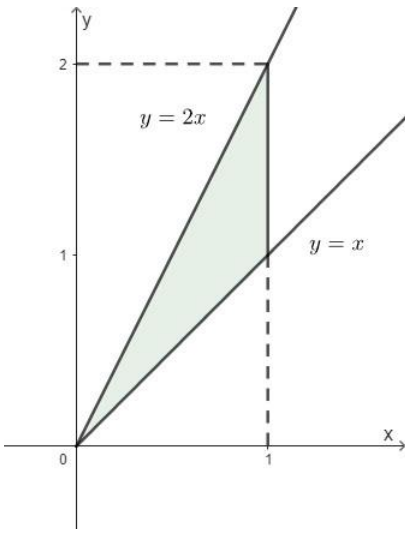


рис. 4

Область интегрирования – правильная в направлении оси *Oy* (рис.4), поэтому

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_x^{2x} ydy = \int\limits_0^1 xdx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^{2x} = \int\limits_0^1 x\left(2x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{3}{2}x^3dx = \frac{3}{2}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{8}$$

2) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy$, где D: $y=x^2, y^2=x$.

Решение. Область интегрирования – правильная в направлении и оси Oy и оси Ox (рис.5), поэтому пределы расставляем в зависимости от вида подынтегральной функции сначала по x, затем по y:

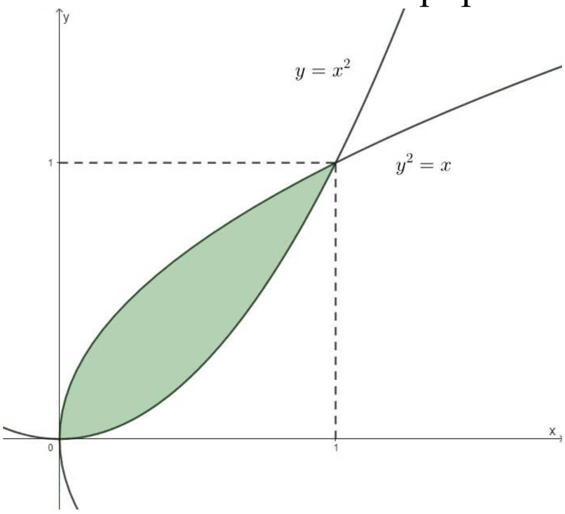


рис. 5

$$\iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy = \int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(y-x)dy = \int\limits_0^1 x^2dx\left.\left(\frac{y^2}{2}-yx\right)\right|_x^{2x} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2\left(2x^2-2x^2-\frac{x^2}{2}+x^2\right)dx = \int\limits_0^1\frac{x^4}{2}dx = \left.\frac{x^5}{10}\right|_0^1 = \frac{1}{10}.$$

3) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D: $y=x-4, y^2=2x$.

Область интегрирования – правильная в направлении оси Ox (рис.6), поэтому

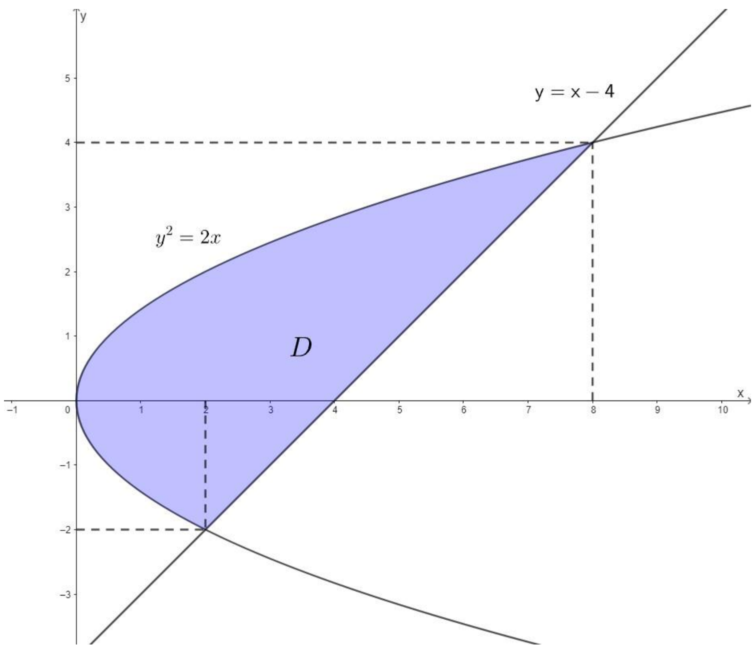


рис. 6

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_{-2}^{4} ydy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xdx = \int\limits_{-2}^{4} ydy\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4} y\left(y^2+8y+16-\frac{y^4}{4}\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\right|_{-2}^{4} = 90.$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОЩАДИ ОБЛАСТИ ПРИ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть есть два экземпляра плоскости XOY и UOV и заданы функции двух переменных $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Предположим, что эти функции определены в некоторой области Δ, тогда мы получим отображение $\Delta \to D \subset R^2 : (u,v) \to (x,y)$. Будем предполагать, что эти функции имеют в области Δ непрерывные частные производные: x'_u, x'_v, y'_u, y'_v.

Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = J(u,v)$, который называется Якобианом, $J(u,v) \neq 0$.

Будем предполагать, что отображение $\Delta \to D$, задаваемое функциями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, будет взаимно однозначным, тогда можно доказать, что существует обратное отображение и оно будет непрерывным.

Рассмотрим на плоскости UOV кривую $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, такую, что $(u')^2 + (v')^2 \neq 0$. Такие кривые называются гладкими. Образом этой кривой будет кривая $\begin{cases} x = x(u(t),v(t)) \\ y = y(u(t),v(t)) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$.

Докажем, что она будет гладкой. Действительно,

$x'_t = x'_u \cdot u'_t + x'_v \cdot v'_t,$

$y'_t = y'_u \cdot u'_t + y'_v \cdot v'_t.$

Посмотрим, могут ли производные обратиться в нуль одновременно:

$$\begin{cases} x'_u \cdot u'_t + x'_v \cdot v'_t = 0, \\ y'_u \cdot u'_t + y'_v \cdot v'_t = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы есть Якобиан $\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = J(u,v) \neq 0$, поэтому система имеет единственное решение $u'_t = 0$, $v'_t = 0$, но это противоречит условию $(u')^2 + (v')^2 \neq 0$. Значит образом гладкой кривой будет гладкая кривая.

Выясним, как связаны между собой площади областей Δ и D.

Терема 2.1. Если все частные производные x'_u, x'_v, y'_u, y'_v непрерывны в области Δ, то

$$S(D) = \iint\limits_{\Delta} |J(u,v)|\,dudv = |J(u_0, v_0)| \cdot S(\Delta),\ \text{где}\ (u_0, v_0) \in \Delta.$$

Доказательство (по Остроградскому).

Рассмотрим на плоскости *UOV* маленький прямоугольник $P_1P_2P_3P_4$, где $P_1(u,v)$, $P_2(u+\Delta u, v)$, $P_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $P_4(u, v+\Delta v)$. Площадь такого прямоугольника равна $S_{P_1P_2P_3P_4} = \Delta u \Delta v$. Найдем образ этого прямоугольника при отображении $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$ (рис.7):

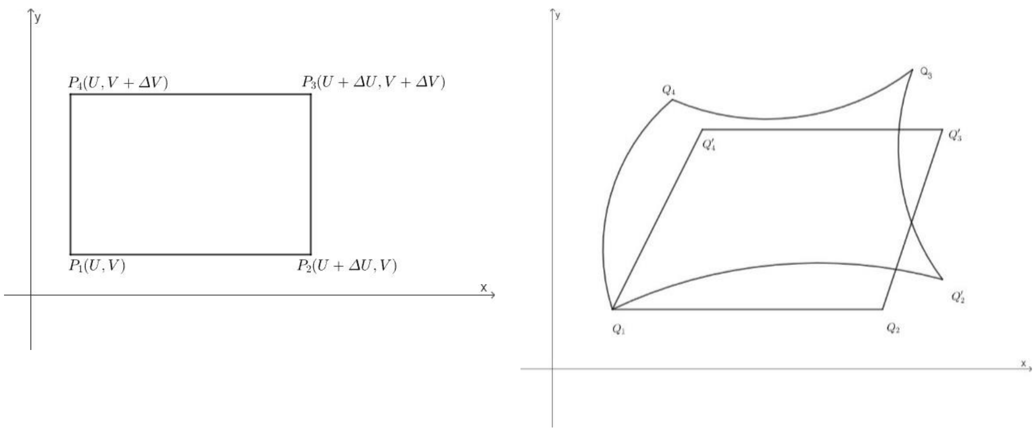


рис. 7

$Q_1(x(u,v), y(u,v))$, $Q_2(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$,

$Q_3(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v))$, $Q_4(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$.

Так как функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ имеют частные производные, то

$x(u+\Delta u, v+\Delta v) \approx x(u,v) + x'_u(u,v)\Delta u + x'_v(u,v)\Delta v$.

Пользуясь этой формулой, заменим точки Q_2, Q_3, Q_4 на близкие к ним точки Q'_2, Q'_3, Q'_4 с координатами:

$Q'_2(x(u,v) + x'_u(u,v)\Delta u, y(u,v) + y'_u(u,v)\Delta u)$,

$Q'_3(x(u,v) + x'_u(u,v)\Delta u + x'_v(u,v)\Delta v, y(u,v) + y'_u(u,v)\Delta u + y'_v(u,v)\Delta v)$,

$Q'_4(x(u,v) + x'_v(u,v)\Delta v, y(u,v) + y'_v(u,v)\Delta v)$.

Имеем $S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} \approx S_{Q_1Q_2'Q_3'Q_4'}$. Убедимся, что $Q_1Q_2'Q_3'Q_4'$ - параллелограмм. Действительно, $\overrightarrow{Q_1Q_2'} = \{x_u'\Delta u, y_u'\Delta u\}$ и $\overrightarrow{Q_4'Q_3'} = \{x_u'\Delta u, y_u'\Delta u\}$. Тогда

$$S_{Q_1Q_2'Q_3'Q_4'} = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u'\Delta u & y_u'\Delta u & 0 \\ x_v'\Delta v & y_v'\Delta v & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_u'\Delta u & y_u'\Delta u \\ x_v'\Delta v & y_v'\Delta v \end{matrix} \right\| = |J(u,v)|\Delta u\Delta v.$$

$S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} = |J(u,v)|\Delta u\Delta v + \varepsilon(\Delta u,\Delta v)\Delta u\Delta v$, где $\varepsilon(\Delta u,\Delta v)\to 0$ при $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$.

Рассмотрим общий случай. Область Δ разобьем на прямоугольники прямыми, параллельными осям координат, тогда образом этих прямых при отображении $(u,v)\to(x(u,v),y(u,v))$ будут некоторые гладкие кривые, $\Delta_i\to D_i$, $S(D)=\sum\limits_{i=1}^{n} S(D_i)$. Далее

$$S(D_i) = |J(u_i,v_i)|\Delta u_i\Delta v_i + \varepsilon(\Delta u_i,\Delta v_i)\Delta u_i\Delta v_i,$$

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} |J(u_i,v_i)| S(\Delta_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\Delta u_i,\Delta v_i) S(\Delta_i).$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, устремив диаметр разбиения к нулю, получим:

$S(D) = \iint\limits_{\Delta} |J(u,v)|dudv = (\textit{по теореме о среднем}) = |J(u_0,v_0)|\cdot S(\Delta)$, где $(u_0,v_0)\in\Delta$. Теорема доказана.

Замена переменных в двойном интеграле

Терема 2.2. Пусть функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ имеют частные производные x_u', x_v', y_u', y_v' в области Δ и Якобиан $\begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix} = J(u,v)\neq 0$.

Предположим, что при отображении $(u,v)\to(x(u,v),y(u,v))$ область Δ взаимно однозначно отображается в D и функция $f(x,y)$ интегрируема в D, тогда $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,u)|dudv$.

Доказательство. Разобьем область Δ на части гладкими кривыми, тогда образами этих кривых на плоскости XOY будут гладкие кривые, которые разбивают область D на части D_i. Выберем точки $(x_i, y_i) \in D_i$,

тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\max(diamD_i) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S(D_i)$.

По доказанному $S(D_i) = |J(u_i, v_i)| S(\Delta_i)$. Возьмем $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, тогда

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\max(diam\,\Delta_i) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\big(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i)\big) \cdot |J(u_i,v_i)| S(\Delta_i)$, а это есть интегральная сумма для функции $f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|$. Переходя к пределу при $\max(diam\Delta_i) \to 0$, получим

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) |J(u,u)| dudv$. Теорема доказана.

Рассмотрим полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & 0 \le r \le +\infty \\ y = r\sin\varphi, & -\pi < \varphi \le \pi. \end{cases}$$

Тогда $x'_r = \cos\varphi$, $x'_\varphi = -r\sin\varphi$, $y'_r = \sin\varphi$, $y'_\varphi = r\cos\varphi$, Якобиан $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. Следовательно, формула перехода к полярным координатам имеет следующий вид:

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$.

Примеры. 1) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, где D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Область интегрирования представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом 1. Перейдем к полярным координатам. Область интегрирования задается неравенствами: $r \le 1$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = \varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

2) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где D: $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le \sqrt{3}x$.

Решение. Область интегрирования представляет собой часть кольца, ограниченного окружностями с центром в начале координат и радиусами 1 и 3 и прямыми, проходящими через начало координат и составляющими с положительным направлением оси *Ox* углы 30^0 и 60^0 (рис. 8).

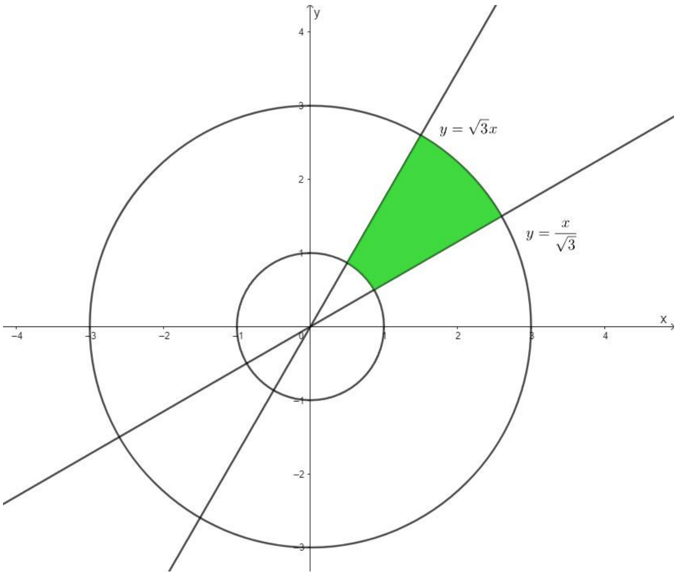


рис. 8

Перейдем к полярным координатам. Область D задается неравенствами:

$1 \le r \le 3$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Тогда

$$\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} arctg(tg\varphi)d\varphi \int\limits_1^3 rdr = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^3 = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{36}.$$

3) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, где D: $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$.

Решение. Перепишем первое уравнение в виде: $x^2+(y-1)^2=1$. Это уравнение окружности с центром в точке (0;1) и радиусом 1. Второе уравнение можно переписать в виде: $x^2+(y-2)^2=4$. Это каноническое уравнение окружности с центром в точке (0;2) и радиуса 4 (рис.9).

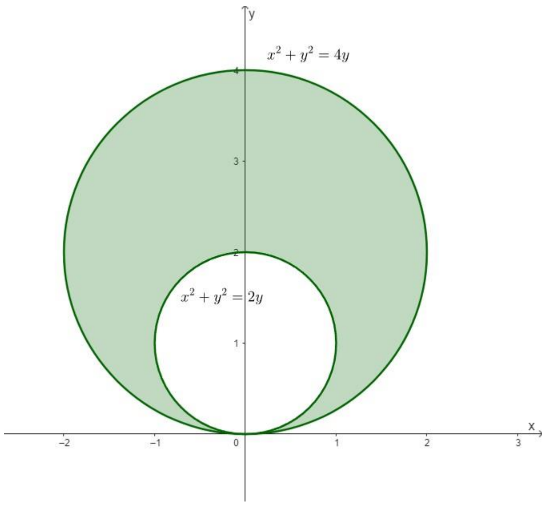


рис. 9

Перейдем к полярным координатам. Полярное уравнение первой окружности $r=2\sin\varphi$, второй $r=4\sin\varphi$. Так как полярный радиус неотрицательный, то полярный угол изменятся в пределах $0\le\varphi\le\pi$. Тогда

$$\iint\limits_D xy^2\,dxdy=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\cdot rdr=\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}r^4dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi}=\frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\left(1024\sin^5\varphi-32\sin^5\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin^7\varphi\,d\varphi=\frac{992}{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^7\varphi\,d(\sin\varphi)=\frac{992}{5}\cdot\left.\frac{\sin^8\varphi}{8}\right|_0^{\pi}=0\,.$$

4) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x\geq 0, y\geq 0$.

Решение. Область интегрирования представляет собой часть эллипса, расположенную в первой координатной четверти (рис.10).

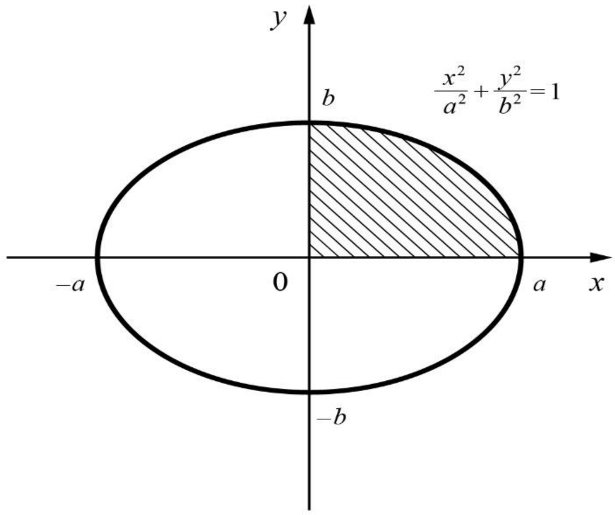


рис. 10

Перейдем к обобщенным полярным координатам: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi, & 0\leq r\leq +\infty \\ y = br\sin\varphi, & -\pi<\varphi\leq\pi. \end{cases}$

Уравнение эллипса в обобщенных полярных координатах будет $r=1$, $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$, якобиан равен $J=abr$. Тогда

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1 ar\cos\varphi\cdot br\sin\varphi\cdot abr dr = a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr =$$

$$= a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{a^2b^2}{8}\left.\frac{\cos 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^2b^2}{16}(\cos\pi-\cos 0) = \frac{a^2b^2}{8}.$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ, МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И КООРДИНАТ ЦЕНТРА ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Дадим определение площади поверхности, ограниченной линией *Г*, поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, причем функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные f'_x и f'_y. Пусть *L* – проекция линии *Г* на плоскость xOy. Область на плоскости xOy, ограниченную линией *L*, обозначим через *D* (рис.15). Разобьем область *D* произвольным образом на части $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n$. Выберем точки $P_i(\xi_i,\eta_i) \in D_i$, $i = \overline{1,n}$. Точке P_i будет соответствовать на поверхности точка $M_i(\xi_i,\eta_i, f(\xi_i,\eta_i))$. Через точку M_i проведем касательную плоскость к поверхности. Ее уравнение имеет вид:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i,\eta_i)(x-\xi_i) + f'_y(\xi_i,\eta_i)(y-\eta_i).$$

На этой плоскости выделим такую область σ_i, которая проектируется на плоскость xOy в виде D_i. Составим $\sum\limits_{i=1}^{n} S(\sigma_i)$. Предел этой суммы, когда наибольший из диаметров площадок $\sigma_i \to 0$, называют площадью поверхности, то есть по определению положим

$$S = \lim_{\max diam(\sigma_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\sigma_i). \qquad (6)$$

Получим формулу для вычисления площади поверхности. Обозначим через γ_i угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy. Тогда $S(D_i) = S(\sigma_i)\cos\gamma_i$. Отсюда $S(\sigma_i) = \dfrac{S(D_i)}{\cos\gamma_i}$.

Угол γ_i в тоже время есть угол между осью *Oz* и нормалью к поверхности, поэтому

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'_x(\xi_i,\eta_i)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_i,\eta_i)\right)^2}}.$$ Следовательно,

$S(\sigma_i) = \sqrt{1+\left(f'_x(\xi_i,\eta_i)\right)^2 + \left(f'_y(\xi_i,\eta_i)\right)^2}\, S(D_i)$. Подставляя это в (6), получим

$$S = \lim_{\max\, diam(\sigma_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'_x(\xi_i,\eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i,\eta_i))^2}\, S(D_i).$$

Предел интегральной суммы, стоящей в правой части, есть по определению двойной интеграл, поэтому окончательно получаем

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x(\xi_i,\eta_i))^2 + (f'_y(\xi_i,\eta_i))^2}\, dxdy.$$

Пример. Найти площадь части поверхности $z^2 = 4x$, вырезанной цилиндром $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$.

Решение. Проекцией этой части поверхности на плоскость xOy будет область, изображенная на рисунке 11.

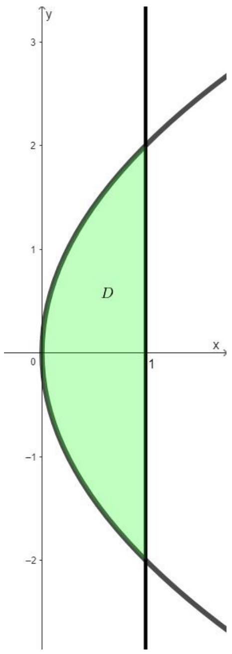


рис. 11

Выразим z из уравнения поверхности $z = \pm 2\sqrt{x}$, тогда $z'_x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда

$$S = 2\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dy =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot 4\sqrt{x}\, dx = 8\int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx =$$

$$= 16 \cdot \left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = \frac{16}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Пусть в области D распределено некоторое вещество так, что на каждую единицу площади области D приходится определенное количество этого вещества. Рассмотрим произвольную площадку D_i области D. Пусть масса вещества, приходящаяся на эту площадку, есть

Δm_i, тогда $\dfrac{\Delta m_i}{S(D_i)}$ есть средняя поверхностная плотность вещества в области D_i, следовательно, $\lim\limits_{S(D_i)\to 0}\dfrac{\Delta m_i}{S(D_i)} = f(P) = f(x,y)-$ поверхностная плотность вещества в точке *P*.

Пусть теперь, обратно, в области *D* задана поверхностная плотность $f(x,y)$ и требуется определить массу вещества в области *D*. Разобьем область *D* произвольным образом на части $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$. Выберем точки $P_i \in D_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда $f(P_i)-$ поверхностная плотность в точке $P_i \in D_i$. Следовательно, $f(P_i)\cdot S(D_i)$ есть примерная масса вещества, содержащаяся на площадке D_i, а $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot S(D_i)$ есть примерное общее количество вещество, распределенного в области *D*. Переходя к пределу при $\max(diam D_i)\to 0$, получим $M(D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Момент инерции плоской фигуры.

Моментом инерции *I* материальной точки с массой *m* относительно некоторой точки *O* называется произведение массы *m* на квадрат ее расстояния *r* от точки *O*: $I = mr^2$.

Моментом инерции системы материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно некоторой точки *O* называется сумма моментов инерции отдельных точек системы: $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$.

Определим момент инерции плоской фигуры *D*.

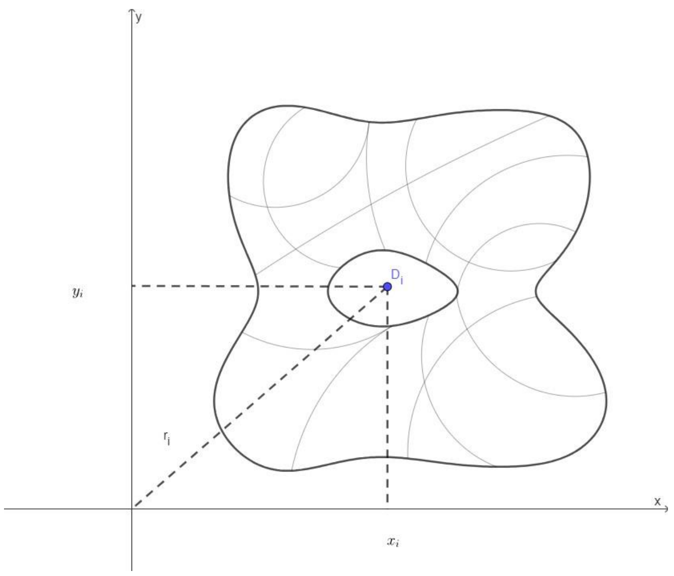


рис. 12

Разобьем область D произвольным образом на части $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ (рис.12). Выберем точки $P_i(x_i, y_i) \in D_i$, $i = \overline{1,n}$. Назовем элементарным моментом инерции I_i площадки D_i произведение $S(D_i)$ на квадрат расстояния $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$. Составим сумму таких моментов $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2\right)S(D_i)$ - интегральная сумма для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ по области D.

Момент инерции фигуры D определяется как предел этой интегральной суммы при $\max(diamD_i) \to 0$:

$$I_0 = \lim_{\max(diamD_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2\right)S(D_i) = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$$ - момент инерции фигуры D относительно начала координат.

Интегралы $I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy$, $I_y = \iint\limits_D x^2 dxdy$ называются, соответственно, моментами инерции фигуры D относительно осей Ox и Oy.

Замечание. Если поверхностная плотность не равна 1, а является некоторой функцией $\gamma(x,y)$, то $I_0 = \iint\limits_D \gamma(x,y)(x^2 + y^2)dxdy$.

Пример. Вычислить момент инерции фигуры *D*, ограниченной линиями $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ относительно оси *Oy*, если поверхностная плотность $\gamma(x, y) = y$.
Решение. Фигура *D* изображена на рисунке 13.

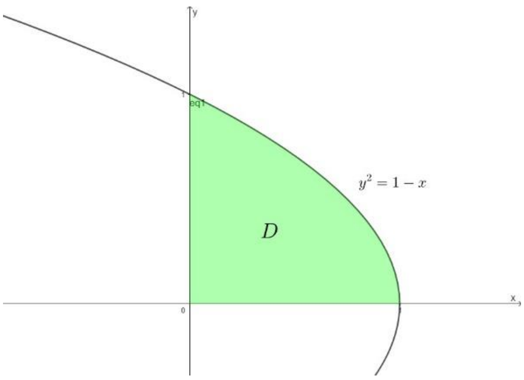


рис. 13

Имеем $I_y = \iint\limits_D yx^2 dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y^2} yx^2 dx = \int\limits_0^1 y \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1-y^2} dy =$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{3}(y - 3y^3 + 3y^5 - y^7)dy = \frac{1}{3}\left.\left(\frac{y^2}{2} - \frac{3y^4}{4} + \frac{3y^6}{6} - \frac{y^8}{8}\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}.$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры

Известно, что координаты центра тяжести системы материальных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ определяются по формулам $x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i}$, $y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^n y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i}$.

Определим координаты центра тяжести плоской фигуры D. Разобьем ее произвольным образом на очень маленькие площадки D_i. Если поверхностная плотность равна 1, то $m(D_i)=S(D_i)$. Если приближенно считать, что вся масса площадки D_i сосредоточена в точке $P_i(x_i,y_i)\in D_i$, то D можно рассматривать как систему материальных точек. Тогда координаты центра тяжести будут приближенно равны:

$$x_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iS(D_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}S(D_i)},\ y_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iS(D_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}S(D_i)}.$$

Переходя к пределу при $\max(diamD_i)\to 0$, получим:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy},\ y_c=\frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

Если поверхностная плотность равна $\gamma(x,y)$, то соответствующие формулы будут иметь вид:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy},\ y_c=\frac{\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

Выражения $M_y=\iint\limits_D x\cdot\gamma(x,y)\,dxdy$ и $M_x=\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)\,dxdy$ называются статическими моментами плоской фигуры D относительно осей Oy и Ox.

Пример. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривыми $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Фигура изображена на рисунке 14.

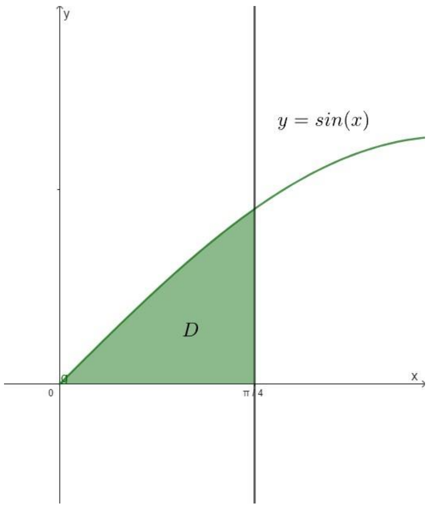


рис. 14

Так как фигура однородная, то

$$S = m = \iint_D dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)(2+\sqrt{2})}{8} = \frac{(4-\pi)(1+\sqrt{2})}{4},$$

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi - 2}{16},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{(\pi-2)2}{16(2-\sqrt{2})} = \frac{(\pi-2)(2+\sqrt{2})}{16}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ИХ СВЕДЕНИЕМ К ПОВТОРНЫМ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть G – ограниченная, замкнутая область трехмерного пространства. Предположим, что в этой области определена функция трех переменных $u = f(x,y,z)$. Разобьем область G произвольным образом на части $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots G_n$. Будем предполагать, что $G_i \cap G_j$ при $i \neq j$ не имеет внутренних точек. При этих условиях $V(G) = V(G_1) + V(G_2) + \ldots + V(G_n)$.

Обозначим через $d(G_i)$ – диаметр области G_i, $\lambda_T = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d(G_i)$. Выберем точки $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$, $i = \overline{1,n}$ и составим сумму $\sigma_T = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot V(G_i)$ – интегральная сумма. Конечный $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T$ называется тройным интегралом от функции $u = f(x,y,z)$ по области G и обозначается

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$$

Свойства тройного интеграла:

1. интегрируемая функция будет ограничена;
2. непрерывная функция будет интегрируема на ограниченном замкнутом множестве;
3. если $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ не имеет внутренних точек, функция $u = f(x,y,z)$ интегрируема в областях G_1 и G_2, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dxdydz$.

Вычисление тройного интеграла

Предположим, что пространственная область G, ограниченная замкнутой поверхностью S, обладает следующими свойствами:

1) любая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области G, пересекает поверхность S в двух точках;

2) вся область G проектируется на плоскость xOy в правильную область D;
3) всякая часть области G, отсеченная плоскостью, параллельной любой их координатных плоскостей, также обладает свойствами 1 и 2.

Область G, обладающую указанными свойствами, называют правильной трехмерной областью. Примерами таких областей является эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т.п.

Рассмотрим правильную трехмерную область $G=\{(x,y,z): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y)\le z\le \psi_2(x,y)\}$. Трехкратный интеграл по области G от функции трех переменных определяется следующим образом:

$$I_G=\int_a^b dx\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)\right).$$

Свойства трехкратного интеграла:

1. Если область G разбита плоскостью, параллельной какой-либо их координатных плоскостей на две области G_1 и G_2, то трехкратный интеграл по области G равен сумме трехкратных интегралов по областям G_1 и G_2. При любом разбиении области G на конечное число областей $G=G_1\cup G_2\cup\ldots G_n$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям, имеет место равенство $I_G=\sum\limits_{i=1}^{n} I_{G_i}$.
2. Оценка трехкратного интеграла.
Если $m=\min\limits_G f(x,y,z)$, $M=\max\limits_G f(x,y,z)$, то $m\cdot V(G)\le I_G\le M\cdot V(G)$.
Доказательство. Оценим сначала внутренний интеграл в трехкратном интеграле:
$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\le M\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz=M(\psi_2(x,y)-\psi_1(x,y)).$$

Тогда $I_G \le M \iint\limits_D (\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y))dxdy$. Но последний двойной интеграл равен объему тела G. Поэтому $I_G \le M \cdot V(G)$. Аналогично доказывается оценка снизу.

3. Теорема о среднем.
   Трехкратный интеграл от непрерывной функции $u = f(x,y,z)$ по области G равен произведению объема G на значение функции в некоторой точке P области G: $I_G \le f(P) \cdot V(G)$.

Теорема 4.1. Тройной интеграл от функции $u = f(x,y,z)$ по правильной области G равен трехкратному интегралу от этой функции по области G, то есть:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) \right).$$

Доказательство. Разобьем область G на правильные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям: $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots G_n$, тогда $I_G = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{G_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot V(G_i)$, где $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$, $i = \overline{1,n}$. Переходя к пределу при $\max\limits_{i=\overline{1,n}} diam(G_i) \to 0$, получим, что $I_G = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть тело имеет следующий вид $G = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$. Функция $u = f(x,y,z)$ интегрируема в области G и при фиксированных $(x,y) \in D$ существует $\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, тогда

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Примеры. 1) Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$,

$G: x+z=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Решение. Тело изображено на рис.15.

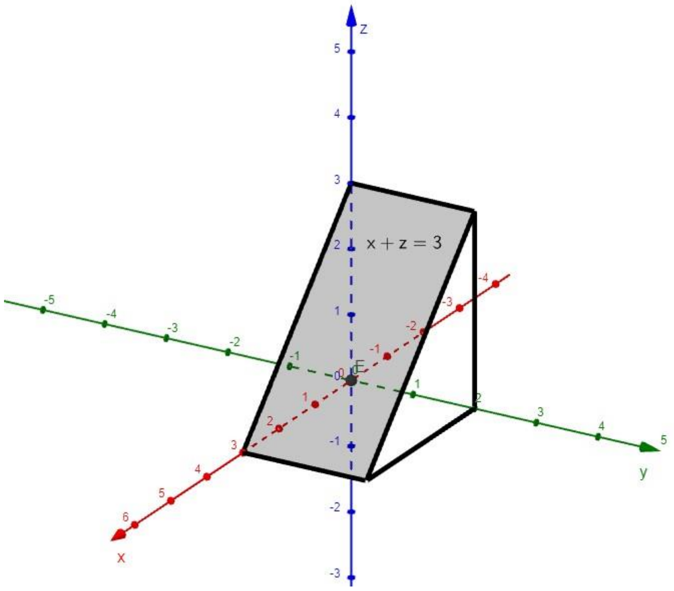


рис. 15

Перейдем к трехкратному интегралу:

$$\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \int\limits_0^3 dx\left(\int\limits_0^2 dy\left(\int\limits_0^{3-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3}\right)\right) =$$

$$= \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 dy\left(-\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\right)\Bigg|_0^{3-x} = \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 dy\left(-\frac{1}{2(y+4)^2}+\frac{1}{2(x+y+1)^2}\right) =$$

$$= \int\limits_0^3 dx\left(\frac{1}{2(y+4)}-\frac{1}{2(x+y+1)}\right)\Bigg|_0^2 = \int\limits_0^3\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x}{24}-\frac{1}{2}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln 6+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 3 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

2) Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz$,

$G: z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0.$

Решение. Перейдем к трехкратному интегралу:

$$\iiint_G xy^2z^3dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} xy^2z^3dz = \frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^x xy^2dy\cdot z^4\Big|_0^{xy} = \frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^x x^5y^6dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\cdot\frac{y^7}{7}\Big|_0^x = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{28}\cdot\frac{x^{13}}{13}\Big|_0^1 = \frac{1}{364}.$$

Замена переменных в тройном интеграле

Пусть задано отображение одного трехмерного пространства с координатами (u,v,t) в другое трехмерное пространство (x,y,z):

$$\begin{cases} x = x(u,v,t) \\ y = y(u,v,t). \\ z = z(u,v,t) \end{cases}$$

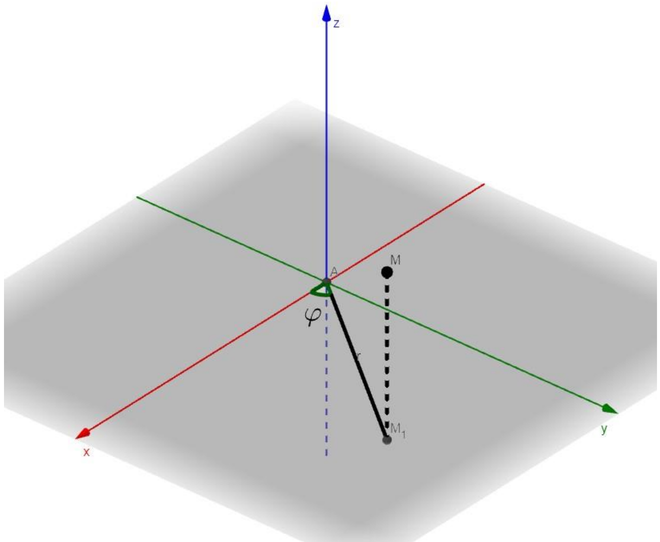
При этом отображении некоторая замкнутая область Δ взаимно однозначно и непрерывно отображается на область D. Пусть существуют и непрерывны все частные производные $x'_u, x'_v, \ldots, z'_t$. Обозначим через

$$J(u,v,t) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_t \\ y'_u & y'_v & y'_t \\ z'_u & z'_v & z'_t \end{vmatrix}.$$

Тогда $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t))dudvdt$.

Рассмотрим две замены.

1. Цилиндрические координаты: положение точки M определяется тремя числами (φ, r, z), где (φ, r) – полярные координаты проекции точки M на плоскость xOy, z – аппликата точки M (рис.16).



Тогда

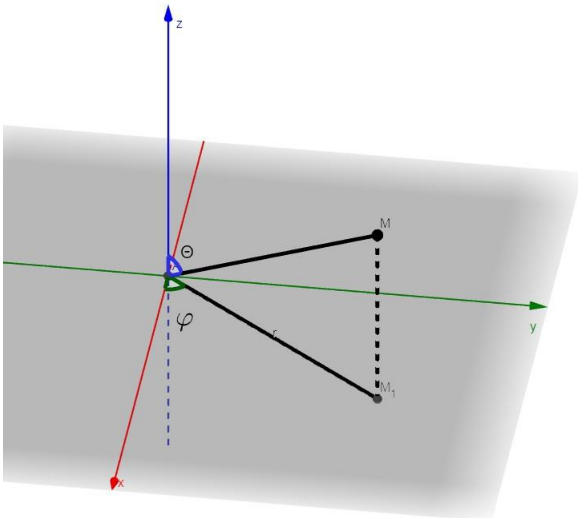
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\varphi, & -\pi < \varphi \le \pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Якобиан равен

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

рис. 16

2. Сферические координаты: положение точки M определяется тремя числами (φ, r, θ), где $r = |OM|$, θ – угол между OM и положительным направлением оси Oz, φ – угол между проекцией радиус-вектора OM на плоскость xOy и осью Ox (рис 17).



Тогда:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & -\pi < \varphi \le \pi \\ z = r\cos\theta, & 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

рис. 17

Якобиан равен $J=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=$

$=\cos\theta(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta-r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta)-$

$-r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\varphi+r\sin^2\theta\sin^2\varphi)=-r^2\sin\theta,\ |J|=r^2\sin\theta.$

Примеры. 1) Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G x^2dxdydz$,

$G: x^2+y^2+z^2\le R^2.$

Решение. Перейдем к сферическим координатам. В области G они изменяются так: $0\le r\le R,\ -\pi<\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le\pi$. Следовательно,

$$\iiint\limits_G x^2dxdydz=\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R r^4\,dr=$$

$$=-\frac{R^5}{10}\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=-\frac{R^5}{10}\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^\pi\cdot\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{R^5}{10}\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)\cdot2\pi=$$

$$=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

2) Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где область G ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0,\ z=0,\ z=a$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра в этих координатах имеет вид $r=2\cos\varphi$, поэтому в силу неотрицательности полярного радиуса имеем: $0<\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le2\cos\varphi$, $0\le z\le a$. Поэтому

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr\int\limits_0^a zdz=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\cos^3\varphi}{3}d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi)=\frac{4a^2}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8a^2}{9}.$$

Вычисление величин посредством тройного интеграла

1. Объем пространственной области G равен $\iiint\limits_G dxdydz$.

2. Масса тела, занимающего пространственную область G равен $\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dxdydz$, где $\rho(x,y,z)$ - объемная плотность распределения массы тела в точке $M(x,y,z)$.

3. Координаты центра тяжести тела G равны: $x_c=\frac{m_{yz}}{m}$, $y_c=\frac{m_{xz}}{m}$, $z_c=\frac{m_{xy}}{m}$, где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} – статические моменты тела относительно координатных плоскостей: $m_{yz}=\iiint\limits_G x\rho(x,y,z)dxdydz$, $m_{xz}=\iiint\limits_G y\rho(x,y,z)dxdydz$, $m_{xy}=\iiint\limits_G z\rho(x,y,z)dxdydz$.

4. Моменты инерции тела относительно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz* и начала координат равны: $I_x=\iiint\limits_G\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz$,

$I_y=\iiint\limits_G\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz$, $I_z=\iiint\limits_G\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz$,

$I_O=\iiint\limits_G\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz$.

Примеры. 1) Вычислить объем тела *G*, ограниченного поверхностями: $x+y+z=4, x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Решение. Тело изображено на рисунке 18, его проекция на плоскость *xOy* изображена на рисунке 19.

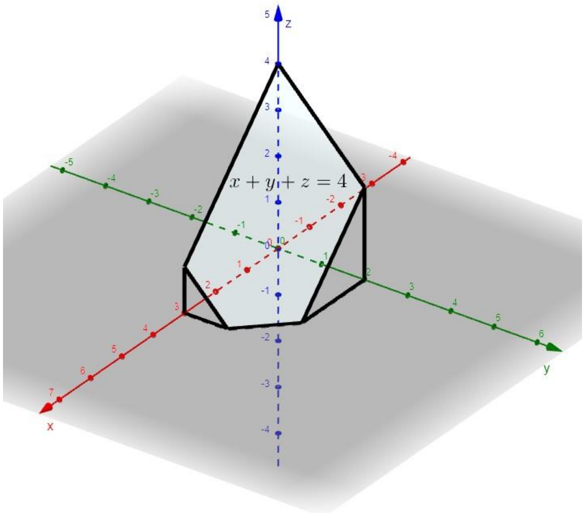


рис. 18

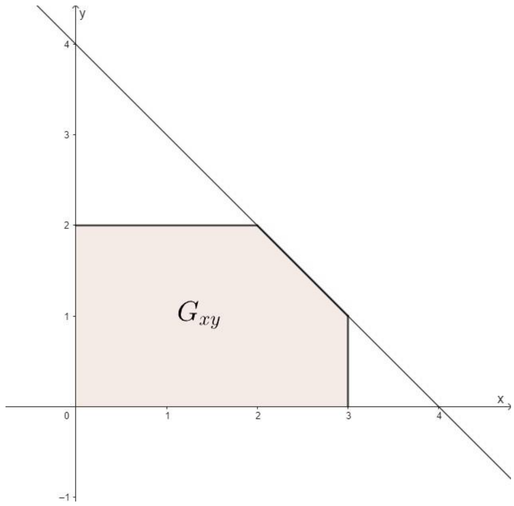


рис. 19

Тогда объем тела равен:

$$V=\iiint\limits_{G} dxdydz=\iint\limits_{G_{xy}} dxdy\int\limits_{0}^{4-x-y} dz=\iint\limits_{G_{xy}}(4-x-y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{2}(4-x-y)dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{0}^{4-x}(4-x-y)dy=\int\limits_{0}^{2}dx\left((4-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}+$$

$$=\int\limits_{2}^{3}dx\left((4-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{4-x}=\int\limits_{0}^{2}(6-2x)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}(4-x)^2dx=\left(6x-x^2\right)\Big|_{0}^{2}-$$

$$-\frac{1}{6}(4-x)^3\Big|_{2}^{3}=8-\frac{1}{6}(1-8)=\frac{55}{6}.$$

2) Вычислить объем тела *G*, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z^2$.

Решение. Тело ограничено сферой $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ с центром в точке (0,0,1) радиуса 1 и конусом $x^2+y^2=z^2$. Снизу тело ограничено конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, сверху – сферой $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Проекцией тела на координатную плоскость *xOy* будет круг $x^2+y^2\le 1$.

Его уравнение получается путем исключения z из данных уравнений сферы и конуса. Переходя к цилиндрическим координатам найдем объем:

$$V=\iiint\limits_{G}dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}dz=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(1-r+\sqrt{1-r^2}\right)rdr=$$

$$=2\pi\int\limits_0^1\left(r-r^2+r\sqrt{1-r^2}\right)dr=2\pi\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\pi.$$

3) Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1,\ 2y+z=2$, если в каждой точке его объемная плотность равна ординате этой точки.

Решение. По условию задачи объемная плотность в точке $M(x, y, z)$ равна $\rho(M)=y$, тогда масса этого тела:

$$m=\iiint\limits_{G}ydxdydz=\iint\limits_{G_{xy}}ydxdy\int\limits_{1-y}^{2(1-y)}dz=\iint\limits_{G_{xy}}y(1-y)dxdy=\int\limits_0^1(y-y^2)dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=$$

$$=\int\limits_0^1(y-y^2)2\sqrt{2y}dy=2\sqrt{2}\int\limits_0^1(y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}})dy=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

4) Найти координаты центра тяжести призматического тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=1$, $y=3$, $z=0$, $x+2z=3$.

Решение. Найдем объем рассматриваемого тела:

$$V=\iiint\limits_{G}dxdydz=\int\limits_0^3dx\int\limits_1^3dy\int\limits_0^{(3-x)/2}dz=\int\limits_0^3dx\int\limits_1^3\frac{3-x}{2}dy=\int\limits_0^3(3-x)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}$$

Тогда

$$x_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_{G}xdxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3xdx\int\limits_1^3dy\int\limits_0^{(3-x)/2}dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3xdx\int\limits_1^3\frac{3-x}{2}dy=\frac{2}{9}\int\limits_0^3x(3-x)dx=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=1;$$

$$y_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_G ydxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 ydy\int\limits_0^{(3-x)/2}dz=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y(3-x)dy=\frac{4}{9}\int\limits_0^3(3-x)dx=$$

$$=\frac{4}{9}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=2;$$

$$z_c=\frac{2}{9}\iiint\limits_G zdxdydz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2}zdz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3\frac{(3-x)^2}{8}dx\int\limits_1^3 dy=$$

$$=-\frac{1}{18}\cdot\frac{(3-x)^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}.$$

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА И ЕГО СВЕДЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

Рассмотрим на плоскости непрерывную спрямляемую кривую *AB* и произвольную функцию $f(x,y)$, заданную вдоль этой кривой. Разобьем кривую точками $A=P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ на элементарные дуги $\overset{\cup}{P_{i-1}P_i}$ и выберем на них произвольно по точке $M_i(x_i, y_i) \in \overset{\cup}{P_{i-1}P_i}$. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\sigma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\sigma_i$, где σ_i – длина дуги $\overset{\cup}{P_{i-1}P_i}$.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\max\sigma_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\sigma_i$, то он называется криволинейным интегралом первого рода и обозначается $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl$.

Заметим, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления, которое может быть придано кривой *AB*, то есть $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{(BA)} f(x,y)dl$.

Аналогично рассмотренному можно ввести понятие криволинейного рода первого рода по пространственной кривой $\int\limits_{(AB)} f(M)dl = \int\limits_{(BA)} f(x,y,z)dl$.

Предположим, что на кривой *AB* произвольно установлено направление (одно из двух возможных) так, что положение точки *M* может быть определено длиной дуги $l = \overset{\cup}{AM}$, отсчитываемой от начальной точки *A*. Тогда кривая *AB* задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(l) \\ y = y(l) \end{cases}, \quad 0 \le l \le L,$$

а функция $f(x,y)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(x(l), y(l))$ от переменной l.

Если через l_i, $i = \overline{1,n}$ обозначить значения длин дуг, отвечающих выбранным на кривой *AB* точкам деления $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то, очевидно,

$\sigma_i = l_i - l_{i-1} = \Delta l_i$. Обозначив через $\bar{l}_i$ значения, определяющие точки $M_i\ (l_{i-1} \le \bar{l}_i \le l_i)$, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\sigma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x(\bar{l}_i), y(\bar{l}_i)\right)\Delta l_i$, то есть интегральная сумма для криволинейного интеграла первого рода является интегральной суммой для определенного интеграла, так что сразу имеем:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dl = \int\limits_{0}^{L} f(x(l), y(l))dl. \qquad (7)$$

Пусть теперь кривая задана произвольными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Кроме того считаем, что кривая не имеет точек самопересечений. Такая кривая заведомо спрямляема. Если возрастание длины дуги $l = \overset{\cup}{AM} = l(t)$ отвечает возрастанию параметра t, то $l'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$.

Заменяя переменную в интеграле (7) справа, получим

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (8)$$

Если бы при возрастании параметра t длина дуги AM убывала, то нужно перейти к дуге BM, таким образом, в формуле (8) нижний предел в интеграле справа должен быть меньше верхнего.

В случае кривой, заданной явным уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, формула (8) принимает вид:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

Примеры. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_{(AB)} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$ от точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$

1) по прямой AB;

2) по дуге астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

Решение. 1) Уравнение прямой AB имеет вид $y=x+1$, тогда $y'=1$, а $dl=\sqrt{2}dx$. Имеем:

$$I=\int\limits_{(AB)}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl=\int\limits_{-1}^{0}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1}\right)\sqrt{2}dx=\sqrt{2}\left(3x^{\frac{4}{3}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=\sqrt{2}(3\cdot(-1)-2)=-5\sqrt{2}.$$

2) Найдем $x'=-3\cos^2 t\cdot\sin t$, $y'=3\sin^2 t\cdot\cos t$, тогда $dl=\sqrt{9\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt=3\cos t\cdot\sin t\,dt$. Имеем:

$$I=\int\limits_{(AB)}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl=\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos t-3\sin^{\frac{3}{2}}t\right)3\cos t\sin t\,dt=-12\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d(\cos t)-$$

$$-9\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}}t\,d(\sin t)=-4\cos^3 t\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{18}{7}\cdot\sin^{\frac{7}{2}}t\Bigg|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-4-\frac{18}{7}=-\frac{46}{7}.$$

Вычисление величин посредством криволинейного интеграла первого рода

1) Длина дуги плоской или пространственной кривой AB равна: $L(AB)=\int\limits_{(AB)}dl$.
2) Масса материальной дуги AB с линейной плотностью вещества $\rho(M)=\rho(x,y)$ равна $m(AB)=\int\limits_{(AB)}\rho(M)dl$.
3) Координаты центра тяжести дуги AB с линейной плотностью вещества $\rho(M)=\rho(x,y)$ равны:

$$x_c=\frac{\int\limits_{(AB)}x\rho(M)dl}{m};\quad y_c=\frac{\int\limits_{(AB)}y\rho(M)dl}{m};\quad z_c=\frac{\int\limits_{(AB)}z\rho(M)dl}{m}.$$

В случае равномерного распределения массы $\rho=const$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Примеры. 1) Найти массу дуги *AB* кривой $y=\ln x$, $1\le x\le 3$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки.

Решение. Находим $y'=\frac{1}{x}$, $dl=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$, $\rho=kx^2$. Имеем:

$$m=\int\limits_{(AB)}\rho(M)dl=\int\limits_1^3 kx^2\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\frac{k}{2}\int\limits_1^3\sqrt{x^2+1}\,d(x^2+1)=\frac{k}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=$$

$$=\frac{k}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{k}{3}\left(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}\right).$$

2) Найти координаты центра тяжести дуги *AB* винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le x\le\pi$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна аппликате этой точки.

Решение. Находим: $x'=-a\sin t$, $y'=a\cos t$, $z'=b$,

$$dl=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt;$$

$$m=\int\limits_{(AB)}\rho(M)dl=\int\limits_0^\pi kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=kb\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi=\frac{bk\pi^2}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_x=\int\limits_{(AB)}x\rho(M)dl=\int\limits_0^\pi a\cos t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=akb\sqrt{a^2+b^2}\,(t\sin t+\cos t)\Big|_0^\pi=$$

$$=-2abk\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_y=\int\limits_{(AB)}y\rho(M)dl=\int\limits_0^\pi a\sin t\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=akb\sqrt{a^2+b^2}\,(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^\pi=$$

$$=abk\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_z=\int\limits_{(AB)}z\rho(M)dl=\int\limits_0^\pi bt\cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{kb^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $x_c=\frac{I_x}{m}=-\frac{4a}{\pi^2}$; $y_c=\frac{I_y}{m}=\frac{2a}{\pi^2}$; $z_c=\frac{I_z}{m}=\frac{2b\pi}{3}$.

6. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Пусть на плоскости задана простая незамкнутая кривая AB и вдоль нее определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем кривую точками $A=P_0$, $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2),\ldots,P_n(x_n,y_n)=B$. Обозначим этот набор точек через T, а через $\lambda_T=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left|P_{i-1}P_i\right|$. Выберем на дуге $\overset{\cup}{P_{i-1}P_i}$ точку $M_i(c_i,d_i)$ и составим сумму $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)(x_i-x_{i-1})$.

Определение. Число A называется пределом суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\Delta x_i$ при $\lambda_T\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого разбиения T с диаметром разбиения $\lambda_T<\delta\Rightarrow\left|A-\sigma_n\right|<\varepsilon$.

Если этот предел существует, то он называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x,y)$ по кривой AB и обозначается $\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx$. Действуя точно также, но рассматривая сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}Q(c_i,d_i)\Delta y_i=\sum\limits_{i=1}^{n}Q(M_i)(y_i-y_{i-1})$, можно ввести понятие криволинейным интегралом второго рода от функции $Q(x,y)$ по кривой AB как предел этой интегральной суммы: $\int\limits_{(AB)}Q(x,y)dy$.

Как правило, эти интегралы рассматривают вместе и их сумму называют криволинейным интегралом второго рода «общего вида» и полагают: $\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+\int\limits_{(AB)}Q(x,y)dy$.

Свойства криволинейного интеграла второго рода:

1) $\int\limits_{(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{(BA)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$;

2) Если кривая AB разбита точкой C на части, то

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(AC)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(CB)} Pdx + Qdy .$$

Подобным же образом можно ввести понятие криволинейного интеграла второго рода вдоль пространственной незамкнутой кривой *AB*. Если функция $P(x, y, z)$ задана в точках этой кривой, то строят сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} P(c_i, d_i, h_i)\Delta x_i$ и рассматривают предел этой суммы при $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left| P_{i-1}P_i \right| \to 0$. Этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y, z)$ по кривой *AB* и обозначается $\int\limits_{(AB)} P(x, y, z)dx$. Аналогично определяются интегралы вида $\int\limits_{(AB)} Q(x, y, z)dy$ и $\int\limits_{(AB)} R(x, y, z)dz$. Наконец, рассматривается и интеграл общего вида $\int\limits_{(AB)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int\limits_{(AB)} P(x, y, z)dx +$ $\int\limits_{(AB)} Q(x, y, z)dy + + \int\limits_{(AB)} R(x, y, z)dz .$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема 6.1. Пусть кривая *AB* задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. При изменении параметра *t* от α до β точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ пробегает кривую в направлении от *A* к *B*. Тогда криволинейный интеграл второго рода существует и равен

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \qquad (9)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[\alpha; \beta]$ на части $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, тогда точки $A = P_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $P_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$

$,\ldots,P_n(\varphi(t_n),\psi(t_n))=B$ разбивают кривую на части. Пусть точка $M_i(c_i,d_i)\in \overset{\cup}{P_{i-1}P_i}$, тогда $c_i=\varphi(\theta_i)$, $d_i=\psi(\theta_i)$, где $t_{i-1}\le\theta_i\le t_i$.

Так как $\Delta x_i=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt$, то интегральная сумма может быть записана в виде: $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt$.

С другой стороны, интеграл в правой части в формуле (9) можно представить в виде суммы:

$$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Тогда $\left|I-\sigma_n\right|=\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta}P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt-\sum\limits_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\Delta x_i\right|=$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt-\sum_{i=1}^{n}P(c_i,d_i)\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\Big(P(\varphi(t),\psi(t))-P(c_i,d_i)\Big)\varphi'(t)dt\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\max_{[t_{i-1},t_i]}\left|P(\varphi(t),\psi(t))-P(c_i,d_i)\right|\cdot\left|\varphi'(t)\right|\cdot\left|\Delta t_i\right|.$$

Так как $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, то она ограничена на нем, то есть $\left|\varphi'(t)\right|\le M$. Функция $P(x,y)$ непрерывна на кривой, то есть на ограниченном замкнутом множестве, поэтому она будет равномерно непрерывна на кривой, следовательно, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\left|\varphi(t)-c_i\right|<\delta$, $\left|\psi(t)-d_i\right|<\delta\Rightarrow\left|P(\varphi(t),\psi(t))-P(c_i,d_i)\right|<\dfrac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$.

Если выбрать разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$ так, что $\max\limits_{\lambda_T \to 0} \Delta t_i < \delta$, то $\left|P(\varphi(t),\psi(t)) - P(c_i,d_i)\right| < \dfrac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$, поэтому окончательно получим: $\left|I-\sigma_n\right| \le \dfrac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)} \cdot M\cdot(\beta-\alpha) = \varepsilon$.

Таким образом, при $\max \Delta t_i \to 0$ имеем

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sigma_n = \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$ Теорема доказана.

Аналогично доказывается формула $\int\limits_{(AB)} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt$ и

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)dt.$$

Замечание. Определение криволинейного интеграла и указанный способ сведения его к определенному интегралу распространяется и на случай кривой, имеющей точки самопересечения, если только направление на ней по-прежнему определяется монотонным изменением параметра t от α до β.

Пусть криволинейный интеграл берется по кривой AB, заданной явным уравнением: $y = f(x),\quad a \le x \le b,$ тогда

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)\big)dx.$$

Примеры. 1. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_{(OA)} 2xydx + x^2dy$, где $O(0;0)$, $A(1;1)$, если:

a) (OA) – отрезок прямой;

b) (OA) – дуга параболы $y = x^2$.

Решение. а) Уравнение прямой, проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;1)$ имеет вид $y = x$, тогда $dy = dx$, поэтому получаем:

$$I=\int\limits_{(OA)}2xydx+x^2dy=\int\limits_0^1\left(2x^2+x^2\right)dx=x^3\Big|_0^1=1.$$

b) На дуге параболы $y=x^2$ имеем $dy=2xdx$, тогда

$$I=\int\limits_{(OA)}2xydx+x^2dy=\int\limits_0^1\left(2x^3+2x^3\right)dx=x^4\Big|_0^1=1.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_{(AB)}(xy-1)dx+x^2ydy$, где $A(1;0)$, $B(0;2)$ по дуге эллипса $\begin{cases}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$.

Решение. Имеем $dx=-\sin t\,dt$, $dy=2\cos t\,dt$. Тогда

$$I=\int\limits_{(AB)}(xy-1)dx+x^2ydy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t\sin t-1)(-\sin t)dt+2\cos^2 t\cdot\sin t\cdot 2\cos tdt=$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\cos t\cdot\sin^2 t+\sin t+4\cos^3 t\cdot\sin t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin^2 t\cdot d(\sin t)-\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^3 t\cdot d(\cos t)=-\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+1-\cos^4 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}+1+1=\frac{4}{3}.$$

Связь между криволинейными интегралами обоих типов

Рассмотрим простую гладкую кривую AB и, выбрав в качестве параметра длину дуги $s=\overset{\cup}{AM}$, представим ее параметрическими уравнениями: $\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$, $0\le s\le S$.

Функции $x(s)$ и $y(s)$ будут иметь непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MM_1}$, спроектируем его на ось Ox (рис.20).

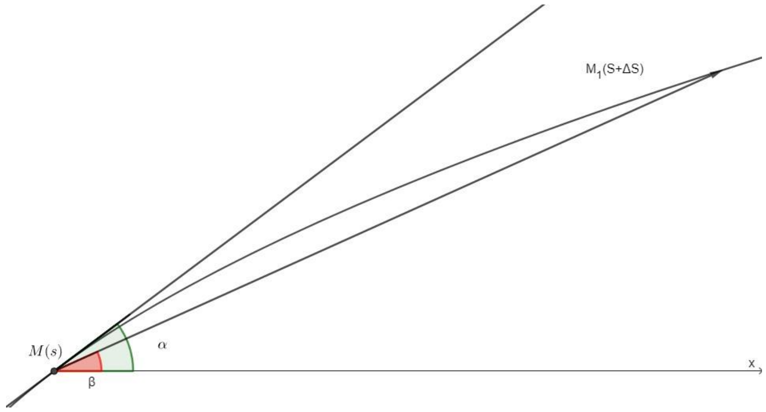


рис. 20

Тогда

$np_{Ox}\overrightarrow{MM_1} = \Delta x = \left|\overrightarrow{MM_1}\right|\cos\beta$, $np_{Oy}\overrightarrow{MM_1} = \Delta y = \left|\overrightarrow{MM_1}\right|\sin\beta$, откуда

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|},\ \sin\beta = \frac{\Delta y}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|},\ \lim_{\overset{\smile}{MM_1}\to 0}\frac{\Delta x}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|} = \lim_{\overset{\smile}{MM_1}\to 0}\frac{\Delta x}{\overset{\smile}{MM_1}}\cdot\frac{\overset{\smile}{MM_1}}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|} =$$

$= x'(s)$.

Следовательно, $\cos\alpha = x'(s)$, где α – угол между касательной, направленной в сторону возрастания дуги, и осью Ox. Аналогично имеем, что $\sin\alpha = y'(s)$.

Если вдоль кривой AB задана непрерывная функция $P(x, y)$, то имеем:

$$\int\limits_{(AB)} P(M)dx = \int\limits_0^S P(x(s), y(s))x'(s)ds = \int\limits_0^S P(x(s), y(s))\cos\alpha\, ds = \int\limits_{(AB)} P(M)\cos\alpha\, ds$$

и криволинейный интеграл второго рода оказался сведенным к криволинейному интегралу первого рода. Аналогично получаем

$$\int\limits_{(AB)} Q(x, y)dy = \int\limits_{(AB)} Q(x, y)\sin\alpha\, ds,$$

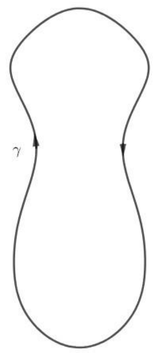
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(AB)} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)ds.$$

Аналогичную формулу можно получить для пространственной кривой:

$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы касательной.

7. ФОРМУЛА ГРИНА. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Эта формула связывает криволинейный интеграл и двойной. Пусть на плоскости задана замкнутая кривая γ. Будем говорить, что кривая пробегается в положительном направлении, если при обходе кривой в этом направлении область, которую она ограничивает, остается слева (рис.21). Если не указано, в каком направлении пробегается замкнутая кривая, то будем считать, что она пробегается в положительном направлении. Интеграл по замкнутому контуру обозначается $\oint$.



Теорема 7.1. Пусть область D ограничена кусочно-гладкой кривой, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ внутри области D и на границе ∂D. Тогда

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \text{ – формула Грина.}$$

рис. 21

Доказательство. Рассмотрим частный случай области $D=\{(x,y): a\le x\le b,\quad f(x)\le y\le g(x)\}$. Тогда

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b\left(\int_{f(x)}^{g(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx=\int_a^b P(x,y)\Big|_{f(x)}^{g(x)}dx=\int_a^b P(x,g(x))dx-\int_a^b P(x,f(x))dx$$

$$\oint_{\partial D}P(x,y)dx=\int_{\gamma_1}P(x,y)dx+\int_{\gamma_2}P(x,y)dx+\int_{\gamma_3}P(x,y)dx+\int_{\gamma_4}P(x,y)dx,$$

где $\gamma_1: x=a,\ dx=0$, поэтому $\int_{\gamma_1}P(x,y)dx=0$. Аналогично $\gamma_3: x=b,\ dx=0$, поэтому $\int_{\gamma_3}P(x,y)dx=0$.

Далее, $\gamma_2: y = f(x),\ \ a \le x \le b$, $\int\limits_{\gamma_3} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x, f(x))dx$,

$\gamma_4: y = g(x),\ \ a \le x \le b$, $\int\limits_{\gamma_3} P(x,y)dx = -\int\limits_a^b P(x, g(x))dx$.

Следовательно, $\oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x, f(x))dx - \int\limits_a^b P(x, g(x))dx$.

Таким образом мы доказали, что в этом случае $\oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$.

Рассмотрим область D, которую прямыми, параллельными оси Oy, можно разбить на конечное число областей рассмотренного вида. Тогда по доказанному $\oint\limits_{\partial D_i} P(x,y)dx = -\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. Если мы сложим все три равенства, то в правой части получим $-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. Когда складываем левые части, то замечаем, что отрезки прямых, с помощью которых мы разбивали область на части, встречаются дважды, причем пробегаются в противоположных направлениях и, поэтому при сложении криволинейных интегралов по этим отрезкам они будут равны нулю.

Рассмотрим второй частный случай $D = \{(x,y): c \le x \le d,\ \ g(y) \le x \le f(y)\}$. Тогда

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{f(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy = \int\limits_c^d Q(x,y)\Big|_{g(y)}^{f(y)} dy = \int\limits_c^d Q(f(y),y)dy -$$

$$-\int\limits_c^d Q(g(y),y)dy.$$ Следовательно,

$$\oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy = -\int\limits_c^d Q(g(y),y)dy + \int\limits_c^d Q(f(y),y)dy.$$

Таким образом, для области такого типа мы доказали формулу

$$\oint\limits_{\partial D} Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Если прямыми, параллельными оси *Ox* можно разбить область *D* на области рассмотренного типа, то также как и в первом случае можно доказать, что эта формула справедлива для такого типа областей.

Если область *D* прямыми, параллельными оси *Oy* можно разбить на конечное число областей первого типа и прямыми, параллельными оси *Ox* разбить на конечное число областей второго типа, то формула Грина справедлива для области *D*. Теорема доказана.

Вычисление площади с помощью криволинейных интегралов

Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в формуле Грина подобрать так, чтобы выражение $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ оказалось равным 1, то двойной интеграл приведется к площади области *D*, и мы получим выражение этой площади с помощью криволинейного интеграла, взятого по ∂D.

Так, полагая $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = 0$, найдем $S(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy$. При $Q(x,y) = 0$, $P(x,y) = -y$, получим $S(D) = -\oint\limits_{\partial D} ydx$. Наиболее употребительной является формула, отвечающая $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$, $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$:

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy - ydx. \qquad (10)$$

Пример. Найти площадь эллипса с полуосями *a* и *b*.

Решение. Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$. По формуле (10) имеем

$$S(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt + b\sin t \cdot a\sin t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

При расстановке пределов интегрирования было принято во внимание, что положительный обход контура отвечает возрастанию параметра *t*.

Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования

Во многих случаях $\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования γ. Выясним необходимые и достаточные условия выполнения этого факта.

Определение. Связным множеством на плоскости называется множество, любые две точки которого можно соединить кусочно-гладкой кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Теорема 7.2. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в связной области *D*. Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы нашлась функция $F(x,y)$ такая, что $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y) =$
$= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$ или $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует функция $F(x,y)$ такая, что $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$. Рассмотрим две точки *A* и *B* и любую кривую γ, их соединяющую. Пусть $\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда $A(\varphi(\alpha);\psi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta);\psi(\beta))$.

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \psi'(t) \right) dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\left(F(\varphi(t),\psi(t))\right) dt =$$

$= F(\varphi(t),\psi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$, то есть интеграл не зависит от пути интегрирования.

Достаточность. Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, тогда зафиксируем точку (x_0, y_0) и введем функцию $F(x,y) = \int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где $\gamma -$ любой путь, соединяющий точку (x_0, y_0) с точкой (x,y), входящий в область *D*. Это можно сделать, так как интеграл не зависит от пути интегрирования. Докажем, что $P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$.

По определению $\frac{\partial F}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}$.

Для вычисления $F(x+\Delta x,y)$ в качестве пути, соединяющего точку (x_0,y_0) с точкой $(x+\Delta x,y)$ возьмем путь, состоящий из γ и γ_1, где γ_1 – отрезок прямой, параллельной оси Ox. Тогда

$\frac{1}{\Delta x}\big(F(x+\Delta x,y)-F(x,y)\big)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{\gamma_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Далее,

$$\left|\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}-P(x,y)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(t,y)dt-\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)dt\right|=$$

$$=\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\big(P(t,y)-P(x,y)\big)dt\right|\le\frac{1}{|\Delta x|}\max_{t\in[x,x+\Delta x]}|P(t,y)-P(x,y)|\cdot|\Delta x|\to 0$$ при $\Delta x\to 0$ так как функция $P(x,y)$ непрерывна.

Мы доказали, что $\frac{\partial F}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=P(x,y)$. Аналогично доказывается, что $Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Мы доказали, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования в связной области необходимо и достаточно, чтобы нашлась функция $F(x,y)$ такая, что $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)$, где $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$ или $P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$.

В этом случае дифференциальная форма $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ называется полной дифференциальной формой.

Теорема 7.3. Для того чтобы в связной области D криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области D был равен нулю: $\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Доказательство. Необходимость. Разобьем замкнутый контур на две части (рис.22).

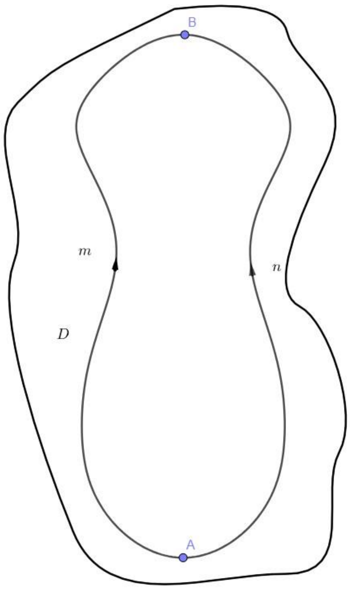


рис. 22

Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, тогда

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx+Qdy,$$

$$\int\limits_{AnB} Pdx+Qdy - \int\limits_{AmB} Pdx+Qdy = \oint\limits_{\gamma} Pdx+Qdy = 0.$$

Достаточность. Рассуждая в обратном порядке видим, что если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то он не зависит от пути интегрирования. Теорема доказана.

Определение. Область D называется односвязной, если вмести с любой замкнутой кривой в нее входит и часть плоскости, которую ограничивает данная кривая. В противном случае область D называется многосвязной.

Теорема 7.4. Пусть область D односвязная и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D. Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy$

не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, тогда $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$, или

$P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$. Продифференцируем первое равенство по *y*,

второе – по *x*, получим $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$. Но смешанные производные равны, если они непрерывны, поэтому $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Достаточно доказать, что $\oint\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=0$ по любому замкнутому контуру γ, ограничивающему область $D_1\subset D$. Применим формулу Грина:

$\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$. Теорема доказана.

Следствие. Предположим, что в односвязной области *D* функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы $Pdx+Qdy=dF(x,y)$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Заметим, что в этом случае

$F(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(u,v)du+Q(u,v)dv$, где интеграл берется по любому пути, соединяющему точки (x_0,y_0) и (x,y), лежащему в области *D*.

Примеры. 1) Вычислить $I=\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

Решение. Здесь $P(x,y)=x^4+4xy^3$, $Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2$, то есть $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования. Соединим эти точки ломаной ACB, где AC – отрезок: $y=-1$, $-2\le x\le 3$, а CB – отрезок: $x=3$, $-1\le y\le 0$. Тогда

$$I=\int\limits_{(AC)}+\int\limits_{(CB)}=\int\limits_{-2}^{3}(x^4-4x)dx+\int\limits_{-1}^{0}(54y^2-5y^4)dy=\left(\frac{x^5}{5}-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{3}+$$

$$+\left(18y^3-y^5\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{243+32}{5}-10+18-1=62.$$

2) Найти функцию $F(x,y)$ такую, что $dF=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$.

Решение. Имеем $P(x,y)=3x^2-2xy+y^2$, $Q(x,y)=-x^2+2xy-3y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2x+2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y-2x$. Тогда

$$F(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}(3u^2-2uv+v^2)du-(u^2-2uv+3v^2)dv.$$

Соединим точки (0,0) и (x,y) ломаной, состоящей из двух отрезков γ_1 и γ_2, где γ_1 – отрезок: $v=0$, $0\le u\le x$, а γ_2 – отрезок: $u=x$, $0\le v\le y$. Тогда

$$F(x,y)=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{0}^{x}3u^2du-\int\limits_{0}^{y}(x^2-2xv+3v^2)dv=v^3\Big|_0^x-$$

$$-\left(x^2v-xv^2+v^3\right)\Big|_0^y=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C.$$

3) Найти функцию $F(x,y)$ такую, что $dF=\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$.

Решение. Имеем $P(x,y)=\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2(x+y)^2-2(x+2y)(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{2(x+y)-2(x+2y)}{(x+y)^3}=\frac{-2y}{(x+y)^3},$$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2y}{(x+y)^3}$. Тогда

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{u+2v}{(u+v)^2}du+\frac{v}{(u+v)^2}dv.$$

Соединим точки (x_0,y_0) и (x,y) ломаной, состоящей из двух отрезков γ_1 и γ_2, где γ_1 – отрезок: $v=v_0$, $x_0\le u\le x$, а γ_2 – отрезок: $u=x$, $y_0\le v\le y$. Тогда

$$F(x,y)=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{u+2y_0}{(u+y_0)^2}du+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{v}{(u+v)^2}dv=$$

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{u+y_0}+\frac{y_0}{(u+y_0)^2}\right)du+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{u+v}-\frac{u}{(u+v)^2}\right)dv=$$

$$=\left(\ln|u+v_0|-\frac{v_0}{u+v_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+\left(\ln|u+v|+\frac{u}{u+v}\right)\Bigg|_{y_0}^{y}=$$

$$=\ln|x+y_0|-\frac{y_0}{x+y_0}-\ln|x_0+y_0|-\frac{y_0}{x_0+y_0}+\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}-\ln|x+y_0|-\frac{x}{x+y_0}=$$

$=\ln|x+y|+\dfrac{x}{x+y}+C$, где $C=-\ln|x_0+y_0|-\dfrac{y_0}{x_0+y_0}-1$.

4) С помощью формулы Грина вычислить

$\oint\limits_L(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, где $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Имеем $P(x,y)=xy+x+y$, $Q(x,y)=xy+x-y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+1$. Тогда

$$\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} (y-x)dxdy = \begin{bmatrix} x = a\,r\cos\varphi \\ y = b\,r\sin\varphi \\ dxdy = abrdrd\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (br\sin\varphi - ar\cos\varphi)ab\,r\,dr = ab\int\limits_0^{2\pi} (b\sin\varphi - a\cos\varphi)d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr =$$

$$ab\cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 \cdot \left.(-b\cos\varphi - a\sin\varphi)\right|_0^{2\pi} = 0.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. Изменить порядок интегрирования, изобразив область интегрирования.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$.

5. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

6. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)dx$.

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$.

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$.

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$.

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$.

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

12. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx$.

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-2-x}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$.

15. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$.

16. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

17. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

18. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{2-y} f(x,y)dx$.

19. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-2-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$.

21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$.

22. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)dy.$

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx.$

25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$

26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy.$

28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$

29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$

30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy.$

2. Вычислить двойной интеграл.

1. $\iint\limits_D y \cdot e^{\frac{xy}{2}}\, dxdy;\quad D: x=2,\ x=4,\ y=\ln 2,\ y=\ln 3.$

2. $\iint\limits_D y^2 \cdot \sin\left(\frac{xy}{2}\right) dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}.$

3. $\iint\limits_D y \cdot \cos(xy) dx\,dy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}.$

4. $\iint\limits_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{4}} dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=2,\ y=x.$

5. $\iint\limits_D y \cdot \sin(xy) dx\,dy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}.$

6. $\iint\limits_D y^2 \cdot \cos\left(\frac{xy}{2}\right) dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=\frac{x}{2}.$

7. $\iint\limits_D 4y \cdot e^{2xy} dx\,dy;\quad D: x=\frac{1}{2},\ x=1,\ y=\ln 3,\ y=\ln 4.$

8. $\iint\limits_D 4y^2 \cdot \sin(xy) dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x.$

9. $\iint\limits_D y \cdot \cos(2xy) dx\,dy;\quad D: x=\frac{1}{2},\ x=1,\ y=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}.$

10. $\iint\limits_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{8}} dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}.$

11. $\iint\limits_D 12y \cdot \sin(2xy) dx\,dy;\quad D: x=2,\ x=3,\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2}.$

12. $\iint\limits_D y^2 \cdot \cos(xy) dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

13. $\iint\limits_D y \cdot e^{\frac{xy}{4}}\, dxdy;\quad D: x=4,\, x=8,\, y=\ln 2,\, y=\ln 3.$

14. $\iint\limits_D 4y^2 \cdot \sin(2xy)\, dxdy;\quad D: x=0,\, y=\sqrt{2\pi},\, y=2x.$

15. $\iint\limits_D 2y \cdot \cos(2xy)\, dxdy;\quad D: x=1,\, x=2,\, y=\frac{\pi}{4},\, y=\frac{\pi}{2}.$

16. $\iint\limits_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{2}}\, dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{2},\, y=x.$

17. $\iint\limits_D y \cdot \sin(xy)\, dxdy;\quad D: x=\frac{1}{2},\, x=1,\, y=\pi,\, y=2\pi.$

18. $\iint\limits_D y^2 \cdot \cos(2xy)\, dxdy;\quad D: x=0,\, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\, y=\frac{x}{2}.$

19. $\iint\limits_D 8y \cdot e^{4xy}\, dxdy;\quad D: x=\frac{1}{4},\, x=\frac{1}{2},\, y=\ln 3,\, y=\ln 4.$

20. $\iint\limits_D 3y^2 \cdot \sin\left(\frac{xy}{2}\right) dxdy;\quad D: x=0,\, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},\, y=\frac{2x}{3}.$

21. $\iint\limits_D y \cdot \cos(xy)\, dxdy;\quad D: x=\frac{1}{2},\, x=1,\, y=\pi,\, y=3\pi.$

22. $\iint\limits_D y^2 \cdot e^{-\frac{xy}{2}}\, dxdy;\quad D: x=0,\ y=1,\, y=\frac{x}{2}.$

23. $\iint\limits_D y \cdot \sin(2xy)\, dxdy;\quad D: x=\frac{1}{2},\, x=2,\, y=\frac{\pi}{2},\, y=\frac{3\pi}{2}.$

24. $\iint\limits_D y^2 \cdot \cos(xy)\, dxdy;\quad D: x=0,\, y=\sqrt{\pi},\, y=2x.$

25. $\iint\limits_D 6y\cdot e^{\frac{xy}{3}}\,dx\,dy;\quad D: x=3,\ x=6,\ y=\ln 2,\ y=\ln 3.$

26. $\iint\limits_D y^2\cdot\sin\left(\frac{xy}{2}\right)dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

27. $\iint\limits_D y\cdot\cos(2xy)\,dx\,dy;\quad D: x=\frac{1}{2},\ x=2,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{3\pi}{2}.$

28. $\iint\limits_D y^2\cdot e^{-\frac{xy}{8}}\,dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=4,\ y=2x.$

29. $\iint\limits_D 3y\cdot\sin(xy)\,dx\,dy;\quad D: x=1,\ x=3,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=3\pi.$

30. $\iint\limits_D y^2\cdot\cos\left(\frac{xy}{2}\right)dx\,dy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{12\pi},\ y=2x.$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y=\frac{3}{x},\quad y=4e^x,\quad y=3,\quad y=4.$
2. $x=\sqrt{36-y^2},\quad x=6-\sqrt{36-y^2}.$
3. $x^2+y^2=72,\quad 6y=-x^2\quad (y\le 0).$
4. $x=8-y^2,\quad x=-2y.$
5. $y=\frac{3}{x},\quad y=8e^x,\quad y=3,\quad y=8.$
6. $y=\frac{\sqrt{x}}{2},\quad y=\frac{1}{2x},\quad x=16.$
7. $x=5-y^2,\quad x=-4y.$
8. $x^2+y^2=12,\quad \sqrt{6}y=-x^2\quad (y\le 0).$
9. $y=\sqrt{12-x^2},\quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\quad x=0\quad (x\ge 0).$
10. $y=\frac{3\sqrt{x}}{2},\quad y=\frac{3}{2x},\quad x=9.$

11. $y=\sqrt{24-x^2}, \quad 2\sqrt{3}y=x^2, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

12. $y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad x=0, \quad (x\geq 0).$

13. $y=20-x^2, \quad y=-8x.$

14. $y=\sqrt{18-x^2}, \quad y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$

15. $y=\dfrac{2}{x}, \quad y=5e^x, \quad y=2, \quad y=5.$

16. $y=32-x^2, \quad y=-4x.$

17. $x^2+y^2=36, \quad 3\sqrt{2}y=x^2 \quad (y\geq 0).$

18. $y=3\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{3}{x}, \quad x=4.$

19. $y=\sqrt{36-x^2}, \quad y=6-\sqrt{36-x^2}, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

20. $y=\dfrac{25}{4}-x^2, \quad y=\dfrac{5}{2}-x.$

21. $y=\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{1}{x}, \quad x=16.$

22. $y=\dfrac{2}{x}, \quad y=7e^x, \quad y=2, \quad y=7.$

23. $x=27-y^2, \quad x=-6y.$

24. $x=\sqrt{72-y^2}, \quad 6x=y^2, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$

25. $y=\sqrt{6-x^2}, \quad y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$

26. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}, \quad y=\dfrac{3}{2x}, \quad x=4.$

27. $y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad x=0, \quad (x\geq 0).$

28. $y=3\sqrt{x}, \quad y=\dfrac{3}{x}, \quad x=9.$

29. $y=\dfrac{1}{x}, \quad y=6e^x, \quad y=1, \quad y=6.$

30. $y=11-x^2, \quad y=-10y.$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $x^2+y^2-2y=0, \quad x^2+y^2-4y=0, \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x.$

2. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad y=0.$

3. $x^2+y^2-6y=0,\quad x^2+y^2-8y=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$

4. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$

5. $x^2+y^2-8y=0,\quad x^2+y^2-10y=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$

6. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$

7. $x^2+y^2-4y=0,\quad x^2+y^2-6y=0,\quad y=0,\quad y=\sqrt{3}x.$

8. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=0.$

9. $x^2+y^2-6y=0,\quad x^2+y^2-10y=0,\quad x=0,\quad y=x.$

10. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

11. $x^2+y^2-2y=0,\quad x^2+y^2-4y=0,\quad x=0,\quad y=\sqrt{3}x.$

12. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

13. $x^2+y^2-4y=0,\quad x^2+y^2-6y=0,\quad x=0,\quad y=\sqrt{3}x.$

14. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15. $x^2+y^2-2y=0,\quad x^2+y^2-6y=0,\quad x=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

16. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

17. $x^2+y^2-2y=0,\quad x^2+y^2-10y=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

18. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=0,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

19. $x^2+y^2-4y=0,\quad x^2+y^2-10y=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

20. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=0,\quad y=x.$

21. $x^2+y^2-2y=0,\quad x^2+y^2-4y=0,\quad x=0,\quad y=x.$

22. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=0,\quad y=\sqrt{3}x.$

23. $x^2+y^2-6y=0,\quad x^2+y^2-8y=0,\quad x=0,\quad y=x.$

24. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=0,\quad y=\sqrt{3}x.$

25. $x^2+y^2-4y=0, \quad x^2+y^2-8y=0, \quad x=0, \quad y=x.$

26. $x^2-4x+y^2=0, \quad x^2-8x+y^2=0, \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x.$

27. $x^2+y^2-4y=0, \quad x^2+y^2-8y=0, \quad x=0, \quad y=\sqrt{3}x.$

28. $x^2-4x+y^2=0, \quad x^2-6x+y^2=0, \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x.$

29. $x^2+y^2-2y=0, \quad x^2+y^2-10y=0, \quad x=0, \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

30. $x^2-6x+y^2=0, \quad x^2-10x+y^2=0, \quad y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x.$

5. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, $\mu(x,y)$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $x=1, \quad y^2=4x, \quad y=0 \quad (y\geq 0); \quad \mu(x,y)=7x^2+y.$
2. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\geq 0, y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}.$
3. $x=1, \quad y^2=4x, \quad y=0 \quad (y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{2}x^2+5y.$
4. $x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\geq 0, y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}.$
5. $x=2, \quad y^2=2x, \quad y=0 \quad (y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{8}x^2+2y.$
6. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x\geq 0, y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}.$
7. $x=2, \quad y^2=\dfrac{x}{4}, \quad y=0 \quad (y\geq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{2}x^2+6y.$
8. $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=25, \quad x=0, \quad y=0\,(x\geq 0, y\leq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}.$
9. $x=1, \quad y^2=4x, \quad y=0 \quad (y\geq 0); \quad \mu(x,y)=x+3y^2.$
10. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9, \quad x=0, \quad y=0\,(x\geq 0, y\leq 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}.$

11. $x=1, \quad y^2=x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=3x+6y^2.$

12.
$x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=25, \quad x=0, \quad y=0\,(x \le 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2}.$

13. $x=2, \quad y^2=\dfrac{x}{2}, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=2x+3y^2.$

14. $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0\,(x \le 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}.$

15. $x=\dfrac{1}{2}, \quad y^2=8x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=7x+3y^2.$

16. $x^2+y^2=9, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0\,(x \le 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}.$

17. $x=1, \quad y^2=8x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=7x^2+2y.$

18. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0\,(x \ge 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}.$

19. $x=2, \quad y^2=2x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{4}x^2+\dfrac{y}{2}.$

20. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0\,(x \ge 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}.$

21. $x=2, \quad y^2=2x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{4}x^2+y.$

22. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9, \quad x=0, \quad y=0\,(x \ge 0,\, y \le 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}.$

23. $x=2, \quad y^2=\dfrac{x}{2}, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{7}{2}x^2+8y.$

24. $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=25, \quad x=0, \quad y=0\,(x \ge 0,\, y \le 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{x-4y}{x^2+y^2}.$

25. $x=1, \quad y^2=4x, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=6x+3y^2.$

26. $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=16, \quad x=0, \quad y=0\,(x \ge 0,\, y \le 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}.$

27. $x=2, \quad y^2=\dfrac{x}{2}, \quad y=0 \quad (y \ge 0); \quad \mu(x,y)=4x+6y^2.$

28. $x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=9, \quad x=0, \quad y=0\,(x \le 0,\, y \ge 0); \quad \mu(x,y)=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}.$

29. $x=\dfrac{1}{2}$, $y^2=2x$, $y=0$ $(y\geq 0)$; $\mu(x,y)=4x+9y^2$.

30. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=0\,(x\leq 0,\, y\geq 0)$; $\mu(x,y)=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

6. Пластинка D задана неравенствами, $\mu(x,y)-$поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$, $x\geq 0$; $\mu(x,y)=y^2$.

2. $1\leq\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 2$, $y\geq 0$, $y\leq\dfrac{2x}{3}$; $\mu(x,y)=\dfrac{y}{x}$.

3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\leq 1$, $y\geq 0$; $\mu(x,y)=x^2y$.

4. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$, $y\geq 0$; $\mu(x,y)=x^2y$.

5. $1\leq\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 4$, $y\geq 0$, $y\leq\dfrac{x}{2}$; $\mu(x,y)=\dfrac{8y}{x^3}$.

6. $\dfrac{x^2}{9}+y^2\leq 1$, $x\geq 0$; $\mu(x,y)=7y^6x$.

7. $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1$, $x\geq 0$; $\mu(x,y)=y^4$.

8. $1\leq\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 4$, $x\geq 0$, $y\geq\dfrac{3x}{2}$; $\mu(x,y)=\dfrac{x}{y}$.

9. $1\leq\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}\leq 4$, $x\geq 0$, $y\geq\dfrac{x}{2}$; $\mu(x,y)=\dfrac{x}{y}$.

10. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$; $\mu(x,y)=x^3y$.

11. $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$; $\mu(x,y)=6x^3y^3$.

12. $1\leq\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 25$, $x\geq 0$, $y\geq\dfrac{x}{2}$; $\mu(x,y)=\dfrac{x}{y^3}$.

13. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=x^2y^2.$

14. $\dfrac{x^2}{16}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=5xy^7.$

15. $\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=30x^3y^7.$

16. $1\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 3,\quad y\ge 0,\quad y\le\dfrac{2x}{3};\quad \mu(x,y)=\dfrac{y}{x}.$

17. $x^2+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=7x^4y.$

18. $x^2+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=35x^4y^3.$

19. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=x^2.$

20. $1\le x^2+\dfrac{y^2}{16}\le 9,\quad y\ge 0,\quad y\le 4x;\quad \mu(x,y)=\dfrac{y}{x^3}.$

21. $\dfrac{x^2}{9}+y^2\le 1,\quad x\ge 0;\quad \mu(x,y)=11xy^8.$

22. $1\le\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}\le 5,\quad x\ge 0,\quad y\ge 2x;\quad \mu(x,y)=\dfrac{x}{y}.$

23. $1\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 5,\quad x\ge 0,\quad y\ge\dfrac{2x}{3};\quad \mu(x,y)=\dfrac{x}{y}.$

24. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=x^5y.$

25. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=x^4.$

26. $x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=15x^5y^3.$

27. $1\le\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 36,\quad x\ge 0,\quad y\ge\dfrac{3x}{2};\quad \mu(x,y)=\dfrac{9x}{y^3}.$

28. $\dfrac{x^2}{100}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=6xy^9.$

29. $\dfrac{x^2}{16}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0;\quad \mu(x,y)=105x^3y^9.$

30. $1\le \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 2,\quad y\ge 0,\quad y\le \dfrac{4x}{3};\quad \mu(x,y)=\dfrac{27y}{x^5}.$

7. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, $\mu(x,y,z)$ – объемная плотность. Найти массу тела.

1. $y=16\sqrt{2x},\quad y=\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=2;\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{y^2}{13}.$

2. $y=5\sqrt{x},\quad y=\dfrac{5x}{3},\quad z=0,\quad z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3};\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{4y}{3x}.$

3. $x^2+y^2=2,\quad y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad z=0,\quad z=15x;\quad \mu(x,y,z)=16x^2y.$

4. $x+y=2,\quad y=\sqrt{x},\quad z=0,\quad z=12y;\quad \mu(x,y,z)=20xy^2.$

5. $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{2},\quad x=\dfrac{5y}{6},\quad z=0,\quad z=3+\sqrt{y};\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{14x}{5}.$

6. $x=20\sqrt{2y},\quad x=5\sqrt{2y},\quad z=0,\quad x+z=\dfrac{1}{2};\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{8y}{3x^3}.$

7. $x^2+y^2=2,\quad x=\sqrt{y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=30y;\quad \mu(x,y,z)=20y^2.$

8. $x+y=2,\quad x=\sqrt{y},\quad z=0,\quad z=\dfrac{12x}{5};\quad \mu(x,y,z)=15xy.$

9. $y=17\sqrt{2x},\quad y=2\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=\dfrac{1}{2};\quad \mu(x,y,z)=143x^4.$

10. $y=\dfrac{5\sqrt{x}}{3},\quad y=\dfrac{5x}{9},\quad z=0,\quad z=\dfrac{5(3+\sqrt{x})}{9};\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{84y}{25}.$

11. $x^2+y^2=8,\quad y=\sqrt{2x},\quad y=0,\quad z=0,\quad z=\dfrac{15x}{11};\quad \mu(x,y,z)=1{,}1x^2y.$

12. $x+y=4,\quad y=\sqrt{2x},\quad z=0,\quad z=3y;\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{35xy^2}{4}.$

13. $x=\dfrac{5\sqrt{y}}{6},\quad x=\dfrac{5y}{18},\quad z=0,\quad z=\dfrac{5(3+\sqrt{y})}{18};\quad \mu(x,y,z)=\dfrac{7y}{3}.$

14. $x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad y + z = 2; \quad \mu(x, y, z) = 5x.$

15. $x^2 + y^2 = 8, \quad x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 5y; \quad \mu(x, y, z) = 3xy^2.$

16. $x + y = 4, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{3x}{5}; \quad \mu(x, y, z) = 5y.$

17. $y = 6\sqrt{3x}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 0, \quad x + z = 3; \quad \mu(x, y, z) = 7x.$

18. $y = \dfrac{5\sqrt{x}}{6}, \quad y = \dfrac{5x}{18}, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{5(3 + \sqrt{x})}{18}; \quad \mu(x, y, z) = 7x^2.$

19. $x^2 + y^2 = 18, \quad y = \sqrt{3x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{2x}{9}; \quad \mu(x, y, z) = 4y.$

20. $x + y = 6, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 0, \quad z = 4y; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{y}{9x^2}.$

21. $x = 7\sqrt{3y}, \quad x = 2\sqrt{3y}, \quad z = 0, \quad y + z = 3; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{4xy^3}{27}.$

22. $x = \dfrac{5\sqrt{y}}{3}, \quad x = \dfrac{5y}{9}, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{5(3 + \sqrt{y})}{9}; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{x}{4y}.$

23. $x^2 + y^2 = 18, \quad x = \sqrt{3y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{10y}{3}; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{xy}{4}.$

24. $x + y = 6, \quad x = \sqrt{3y}, \quad z = 0, \quad z = 4x; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{35x^2 y}{27}.$

25. $y = \sqrt{15x}, \quad y = \sqrt{15}x, \quad z = 0, \quad z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}); \quad \mu(x, y, z) = 13x.$

26. $x^2 + y^2 = 50, \quad y = \sqrt{5x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{3x}{17}; \quad \mu(x, y, z) = 7y^2.$

27. $x + y = 8, \quad y = \sqrt{4x}, \quad z = 0, \quad z = 3y; \quad \mu(x, y, z) = \dfrac{35xy}{29}.$

28. $x = 16\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad y + z = 2; \quad \mu(x, y, z) = xy.$

29. $x = 15\sqrt{y}, \quad x = 15y, \quad z = 0, \quad z = 15(1 + \sqrt{y}); \quad \mu(x, y, z) = 7y^2.$

30. $x^2 + y^2 = 50, \quad x = \sqrt{5y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{4y}{5}; \quad \mu(x, y, z) = xy^2.$

8. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

1. $x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 0, \quad z = \dfrac{5}{4} - x.$

2. $x^2 + y^2 = -2\sqrt{2}y, \quad z = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4.$

3. $x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

4. $x^2+y^2=4x,\quad z=0,\quad z=3-y.$

5. $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-4.$

6. $x^2+y^2=7x,\quad x^2+y^2=10x,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=0\quad (y\le 0).$

7. $x^2+y^2=-4x,\quad z=0,\quad z=8-y.$

8. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-4.$

9. $x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=5x,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=0\quad (y\le 0).$

10. $x^2+y^2=2y,\quad z=0,\quad z=7-x.$

11. $x^2+y^2=3\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-9.$

12. $x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=5y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2.$

13. $x^2+y^2=2y,\quad z=0,\quad z=2-x.$

14. $x^2+y^2=3\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-9.$

15. $x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=3y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2.$

16. $x^2+y^2=-2\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-4.$

17. $x^2+y^2=4x,\quad z=0,\quad z=12-y.$

18. $x^2+y^2=7x,\quad x^2+y^2=9x,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2.$

19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-16.$

20. $x^2+y^2=4y,\quad z=0,\quad z=4-x.$

21. $x^2+y^2=4y,\quad x^2+y^2=7y,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=0\quad (y\ge 0).$

22. $x^2+y^2=4\sqrt{2},\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-16.$

23. $x^2+y^2=-4x,\quad z=0,\quad z=\dfrac{17}{4}-y.$

24. $x^2+y^2=9x,\quad x^2+y^2=12x,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

25. $x^2+y^2=-2\sqrt{2}x,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-4.$

26. $x^2+y^2=4y,\quad z=0,\quad z=6-x.$

27. $x^2+y^2=10x,\quad x^2+y^2=13x,\quad z=0,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=0\quad (y\ge 0).$

28. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=0,\quad z=x^2+y^2-4.$

29. $x^2+y^2=6,\quad z=0,\quad z=\dfrac{21}{4}-y.$

30. $x^2+y^2=5y, \quad x^2+y^2=8y, \quad z=0, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

9. Найти статический момент тела V относительно координатных плоскостей: в вариантах № 1-10 $-M_{xy}$, в вариантах № 11-20 $-M_{xz}$, в вариантах № 21-30 $-M_{yz}$. Однородное тело V плотности $\rho\equiv 1$ задано ограничивающими его поверхностями.

1. $2x+3y+4z=24, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$
2. $x^2+y^2=z^2, \quad z=2, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
3. $x^2+y^2+z^2=16, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
4. $x^2+y^2=z, \quad z=2, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
5. $x^2+y^2=9, \quad z=0, \quad z=2, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
6. $3x-y+2z=6, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$
7. $x^2+y^2=2z^2, \quad z=3, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
8. $x^2+y^2+z^2=9, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
9. $x^2+y^2=3z, \quad z=4, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
10. $x^2+y^2=8, \quad z=0, \quad z=3, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
11. $x+4y+3z=24, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$
12. $x^2+y^2=6, \quad z=0, \quad z=6, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
13. $x^2+y^2+z^2=9, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
14. $3x-y-2z=16, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$
15. $x^2+y^2=z^2, \quad z=6, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
16. $x^2+y^2=z, \quad z=24, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
17. $x^2+y^2=8, \quad z=0, \quad z=8, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
18. $x^2+y^2+z^2=15, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
19. $x^2+y^2=2z^2, \quad z=5, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
20. $x^2+y^2=6z, \quad z=3, \quad y=0 \quad (y\geq 0).$
21. $3x+y+4z=12, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$
22. $x^2+y^2=9, \quad z=0, \quad z=2, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
23. $x^2+y^2+z^2=12, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad x=0 \quad (x\geq 0).$
24. $x^2+y^2=z^2, \quad z=4, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

25. $x^2+y^2=z, \quad z=8, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

26. $x-2y+6z=12, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

27. $x^2+y^2=4, \quad z=0, \quad z=3, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

28. $x^2+y^2+z^2=10, \quad z=0 \quad (z\geq 0), \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

29. $x^2+y^2=2z^2, \quad z=6, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

30. $x^2+y^2=5z, \quad z=6, \quad x=0 \quad (x\geq 0).$

10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями

1. $z=2-12(x^2+y^2), \quad z=24x+2.$

2. $z=10\left((x-1)^2+y^2\right)+1, \quad z=21-20x.$

3. $z=8(x^2+y^2)+3, \quad z=16x+3.$

4. $z=2-20\left((x+1)^2+y^2\right), \quad z=-40x-38.$

5. $z=4-14(x^2+y^2), \quad z=4-28x.$

6. $z=28\left((x+1)^2+y^2\right)+3, \quad z=56x+59.$

7. $z=32(x^2+y^2)+3, \quad z=3-64x.$

8. $z=4-6\left((x-1)^2+y^2\right), \quad z=12x-8.$

9. $z=2-4(x^2+y^2), \quad z=8x+2.$

10. $z=22\left((x-1)^2+y^2\right)+3, \quad z=47-44x.$

11. $z=24(x^2+y^2)+1, \quad z=48x+1.$

12. $z=2-18\left((x+1)^2+y^2\right), \quad z=-36x-34.$

13. $z=-16(x^2+y^2)-1, \quad z=-32x-1.$

14. $z=30\left((x+1)^2+y^2\right)+1, \quad z=60x+61.$

15. $z=26(x^2+y^2)-2, \quad z=-52x-2.$

16. $z=-2\left((x-1)^2+y^2\right)-1, \quad z=4x-5.$

17. $z=-2(x^2+y^2)-1, \quad z=4y-1.$

18. $z = 26\left((x-1)^2 + y^2\right) - 2, \quad z = 50 - 52x.$

19. $z = 30(x^2 + y^2) + 1, \quad z = 60y + 1.$

20. $z = -16\left((x+1)^2 + y^2\right) - 1, \quad z = -32x - 33.$

21. $z = 2 - 18\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 2 - 36y.$

22. $z = 24\left((x+1)^2 + y^2\right) + 1, \quad z = 48x + 49.$

23. $z = 22(x^2 + y^2) + 3, \quad z = 3 - 44y.$

24. $z = 2 - 4\left((x-1)^2 + y^2\right), \quad z = 8x - 6.$

25. $z = 4 - 6\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 12y + 4.$

26. $z = 32\left((x-1)^2 + y^2\right) + 3, \quad z = 67 - 64x.$

27. $z = 28(x^2 + y^2) + 3, \quad z = 56y + 3.$

28. $z = 4 - 14\left((x+1)^2 + y^2\right), \quad z = -28x - 24.$

29. $z = 2 - 20\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 2 - 40y.$

30. $z = 8\left((x+1)^2 + y^2\right) + 3, \quad z = 16x + 19.$

11. Найти объем тела, заданного неравенствами

1. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -x \le y \le 0.$

2. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le 0.$

3. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, \quad -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0.$

4. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, \quad z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

5. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, \quad z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x.$

6. $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x.$

7. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, \quad 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}}, \quad y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \le -\sqrt{3}x.$

8. $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0, \quad -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$

9. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad x \le y \le 0.$

10. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad \sqrt{3}x \le y \le 0.$

11. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

12. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}, \quad -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le -\sqrt{3}x.$

13. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, \quad z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \le 0, \quad y \le \sqrt{3}x.$

14. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121, \quad z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \ge 0, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

15. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}}, \quad y \le \sqrt{3}x, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

16. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0, \quad y \ge \sqrt{3}x, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

17. $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}, \quad 0 \le y \le -x.$

18. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}, \quad 0 \le y \le -\sqrt{3}x.$

19. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, \quad z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x.$

20. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x.$

21. $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64, \quad z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

22. $49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, \quad z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

23. $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0, \quad y \ge 0, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

24. $49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, \quad 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}}, \quad y \le 0, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

25. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}, \quad 0 \le y \le x.$

26. $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 196, \quad -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{25}}, \quad 0 \le y \le \sqrt{3}x.$

27. $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 196, \quad z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{x} \le y \le 0.$

28. $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144, \quad z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}, \quad 0 \le y \le \sqrt{3}x.$

29. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, \quad z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \le 0, \quad y \le -\sqrt{3}x.$

30. $64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169, \quad z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \ge 0, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$

12. Вычислить криволинейный интеграл первого рода.

1. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – часть кривой $y = \ln x$ от точки $(1;0)$ до точки $(2;\ln 2)$.

2. $\int\limits_L (x^2 + y^2) dl$, где L – отрезок прямой от точки $(1;1)$ до точки $(2;4)$.

3. $\int\limits_L y\,dl$, где L – часть параболы $y^2=4x$ от точки (0;0) до точки (1;2).

4. $\int\limits_L \sin x\,dl$, где L – часть кривой $y=-\ln(\cos x)$ от точки (0;0) до точки $\left(\frac{\pi}{6};\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

5. $\int\limits_L x\,dl$, где L – часть кривой $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$ от точки $\left(\frac{1}{4};\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ до точки $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

6. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – часть кривой $y=\ln(x^2-1)$ от точки $(2;\ln 3)$ до точки $(3;\ln 8)$.

7. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где L – отрезок прямой от точки (0;-2) до точки (4;0).

8. $\int\limits_L x\,dl$, где L – часть кривой $y=\ln x$ от точки (1;0) до точки $(3;\ln 3)$.

9. $\int\limits_L y\,dl$, где L – часть параболы $y^2=2x$, отсеченная параболой $x^2=2y$.

10. $\int\limits_L tg\,x\,dl$, где L – часть кривой $y=-\ln(\cos x)$ от точки $\left(\frac{\pi}{6};\ln\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ до точки $\left(\frac{\pi}{3};\ln 2\right)$.

11. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – часть кривой $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$ от точки $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

12. $\int\limits_L x\,dl$, где L – часть кривой $y=\ln(x^2-1)$ от точки $(\sqrt{3};\ln 2)$ до точки $(\sqrt{5};\ln 4)$.

13. $\int\limits_L xy\,dl$, где L – контур квадрата $|x|+|y|=1$.

14. $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, где L – часть параболы $2y=x^2$ от точки $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ до точки (2;2).

15. $\int\limits_L \cos x\,dl$, где L – часть кривой $y=\ln(\sin x)$ от точки $\left(\frac{\pi}{3};\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

16. $\int\limits_L x^{\frac{3}{2}}dl$, где L – часть кривой $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$ от точки $\left(\frac{1}{4};\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ до точки $\left(\frac{3}{4};\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

17. $\int\limits_L x^3dl$, где L – часть кривой $y=1-\ln(x^2-1)$ от точки $(3;1-\ln 8)$ до точки $(4;1-\ln 15)$.

18. $\int\limits_L x^2y\,dl$, где L – отрезок прямой от точки (0;1) до точки (1;3).

19. $\int\limits_L x\,dl$, где L – часть параболы $4y=x^2$ от точки (0;0) до точки (2;1).

20. $\int\limits_L ctg\,x\,dl$, где L – часть кривой $y=\ln(\sin x)$ от точки $\left(\frac{\pi}{6};-\ln 2\right)$ до точки $\left(\frac{\pi}{3};\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

21. $\int\limits_L \sqrt{1-x}\,dl$, где L – часть кривой $y=\arccos x+\sqrt{1-x^2}$ от точки $\left(0;1+\frac{\pi}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)$.

22. $\int\limits_L x\,dl$, где L – часть кривой $y=1-\ln(x^2-1)$ от точки $(\sqrt{2};1)$ до точки $(\sqrt{3};1-\ln 2)$.

23. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой от точки $(0;-1)$ до точки $(4;1)$.

24. $\int\limits_L x^3 dl$, где L – часть параболы $2y=x^2$ от точки $(2;2)$ до точки $\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

25. $\int\limits_L (1-x)dl$, где L – часть кривой $y=\arccos x+\sqrt{1-x^2}$ от точки $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ до точки $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

26. $\int\limits_L x^2 dl$, где L – часть кривой $y=1-\ln(x^2-1)$ от точки $(2;1-\ln 3)$ до точки $(\sqrt{5};1-\ln 4)$.

27. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L – отрезок прямой от точки $(0;0)$ до точки $(1;4)$.

28. $\int\limits_L \sqrt{1+x}\,dl$, где L – часть кривой $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ от точки $(0;1)$ до точки $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

29. $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, где L – отрезок прямой от точки $(0;1)$ до точки $(1;4)$.

30. $\int\limits_L y^2 dl$, где L – часть параболы $y^2=8x$ от точки $(1;2\sqrt{2})$ до точки $(2;4)$.

13. Найти массу дуги γ с линейной плотностью $\rho(M)=\rho(x,y)$.

1. γ – дуга окружности $x^2+y^2=4$ $(y\ge 0)$; $\rho(x,y)=y$.

2. γ – линия $\begin{cases} x=8\sin t+6\cos t \\ y=6\sin t-8\cos t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$; $\rho(x,y)=x$.

3. γ – линия $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad \rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \\ z = t \end{cases}$

4.

5. γ – четверть окружности $x^2 + y^2 = 9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0; \quad \rho(x,y) = 2x$.

6. γ – полуокружность $x^2 + y^2 = 4, \quad y \ge 0; \quad \rho(x,y) = 6y^3$.

7. γ – кардиоида $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}; \quad \rho(x,y) = |y|.$

8. γ – линия $\begin{cases} x = \dfrac{t^4}{4} \\ y = \dfrac{t^6}{6} \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2; \quad \rho(x,y) = 4 - x.$

9. γ – линия $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad \rho(x,y) = z - \sqrt{x^2 + y^2}. \\ z = t \end{cases}$

10. γ – первая арка циклоиды

$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad \rho(x,y) = \sqrt{3y}.$

11. γ – линия $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad \rho(x,y) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}. \\ z = t \end{cases}$

12. γ – линия $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = x.$

13. γ – линия $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}; \quad \rho(x,y) = 8\left(x\sqrt[3]{y} - y\sqrt[3]{x}\right). \\ z = \dfrac{3t}{2} \end{cases}$

14. γ – полуарка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi; \quad \rho(x,y) = 3x.$

15. γ – линия $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad \rho(x,y) = x^2 + y^2 + z^2. \\ z = t \end{cases}$

16. γ – линия $\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t \\ y = 3\sin t - 4\cos t \end{cases}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi$; $\rho(x,y) = y$.

17. γ – полуарка циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$; $\rho(x,y) = y$.

18. γ – линия $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}; \quad \rho(x,y) = xy\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}\right). \\ z = \dfrac{3t}{2} \end{cases}$

19. γ – часть окружности $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 1$; $\rho(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$.

20. γ – часть кардиоиды $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$; $\rho(x,y) = x$.

21. γ – линия $\begin{cases} x = 4 - \dfrac{t^4}{4} \\ y = \dfrac{t^6}{6} \end{cases}$, $0 \le t \le 1$; $\rho(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$.

22. γ – линия $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le \pi; \quad \rho(x,y) = yz. \\ z = 4t \end{cases}$

23. γ – линия $\begin{cases} x = 2t\cos t \\ y = 2t\sin t, \quad 0 \le t \le \pi; \quad \rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \\ z = t \end{cases}$

24. γ – линия $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$; $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

25. γ – часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, $y \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\rho(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$.

26. γ – линия $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = xz. \\ z = 3t \end{cases}$

27. γ – линия $\begin{cases} x = 3t\cos t \\ y = 3t\sin t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = 3z. \\ z = 2t \end{cases}$

28. γ – линия $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = 2z. \\ z = 3e^t \end{cases}$

29. γ – линия $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = 3z. \\ z = \dfrac{2t^3}{3} \end{cases}$

30. γ – линия $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \quad \rho(x,y) = 2xy. \\ z = 2t \end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

1. Определение двойного интеграла.
2. Геометрический смысл двойного интеграла.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области.
5. Вычисление двойного интеграла в случае произвольной области.
6. Преобразование площади области при замене переменной.
7. Замена переменных в двойном интеграле.
8. Вычисление площади поверхности.
9. Вычисление массы плоской области.
10. Вычисление моментов инерции и координат центра тяжести плоской фигуры.
11. Определение тройного интеграла и его свойства.
12. Вычисление тройных интегралов их сведением к повторным.
13. Замена переменных в тройном интеграле.
14. Вычисление величин посредством тройного интеграла.
15. Криволинейный интеграл первого рода и его сведение к определенному.
16. Вычисление величин посредством криволинейного интеграла первого рода.
17. Криволинейный интеграл второго рода.
18. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
19. Связь между криволинейными интегралами обоих типов.
20. Формула Грина.
21. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие отражает опыт работы автора со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит раздел высшей математики, изучаемый во втором семестре «Кратные и криволинейные интегралы».

Проблема совершенствования содержания и методов обучения в высшей школе приобрела особую актуальность в нашем меняющемся обществе. Важнейший элемент математического образования – создание учебников и пособий, отвечающих современным требованиям теории и практики преподавания. Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В пособии среди прочих решается и задача выделения необходимого минимума сопутствующего материала, обеспечивающего усвоение основного содержания. Автор стремился соединить доступность изложения с краткостью конспекта, облегчить процесс усвоения знаний за счет доступного изложения и упрощения доказательств.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – ISBN 5-7107-8334-Х.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – 13-е изд., стер. – М. : Наука, 1985. – 560 с.

3. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с. – ISBN 5-02-013925-4.

4. Давыдова, Л. В. Кратные и криволинейные интегралы и теория поля : Задания к типовым расчетам по высшей математике / Л. В. Давыдова, В. Я. Овечкин, М. А. Шепилов ; под ред. К. В. Валикова ; Владим. гос. ун-т. − Владимир, 1994. – 52 с.

5. Сборник задач по кратным, криволинейным, поверхностным интегралам и теории поля / Л. В. Давыдова [и др.] ; Владим. гос. ун-т. − 2-е изд., доп. и перераб. − Владимир, 2004. – 72 с. – ISBN 5-89368-513-Х.

Учебное электронное издание

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебно-практическое пособие

Автор-составитель
КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

Издается в авторской редакции

***Системные требования*:** Intel от 1,3 ГГц; Windows 7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и электроники
кафедра функционального анализа и его приложений
krashola2012@yandex.ru