

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Практикум

В двух частях

Часть 1

Издание второе, исправленное
и дополненное

Владимир 2007

УДК 559.3/8(07)
ББК 30.121
Р24

Авторы:

А.М. Бурлакова, А.Ф. Ковалев,
М.Г. Танкеева, А.В. Тимохин

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент
зав. кафедрой технико-технологических дисциплин
Владимирского государственного педагогического университета
Л.Н. Шарыгин

Доктор технических наук, профессор
кафедры менеджмента
Владимирского института бизнеса
Р.А. Тихомиров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Расчет на прочность и жесткость прямых стержней : практи-
Р24 кум. В 2 ч. Ч. 1 / А. М. Бурлакова, А. Ф. Ковалев, М. Г. Танкеева
[и др.] ; Владим. гос. ун-т. – 2-е изд., испр. и доп. – Владимир : Изд-
во Владим. гос. ун-та, 2007. – 64 с.
ISBN 5-89368-699-3

Содержит задания по основным разделам курса "Сопротивление материалов" и методику их выполнения. Способствует усвоению основных теоретических положений курса и методики расчета типовых элементов конструкций на прочность и жесткость.

Предназначен для студентов дневной и заочной форм обучения по специальностям, связанным с машиностроением (150104, 150204, 150900, 151001, 151002), приборостроением (200101, 200106), автотранспортом (190601, 190603, 140501).

Табл. 21. Ил. 34. Библиогр.: 4 назв.

Введение, заключение, задание 2, задачи 1, 3, 4 задания 3, задачи 1, 2, 3 задания 4, задание 5 написаны А.М. Бурлаковой; задача 2 задания 3, задача 4 задания 4 – А.Ф. Ковалевым; задание 1 – М.Г. Танкеевой; задание 6 – А.В. Тимохиным.

УДК 559.3/8(07)
ББК 30.121

ISBN 5-89368-699-3

© Владимирский государственный
университет, 2001

© Владимирский государственный
университет, 2007, с изменениями

ВВЕДЕНИЕ

Практикум "Расчет на прочность и жесткость прямых стержней" (часть I) содержит задания по следующим темам курса сопротивления материалов:

- геометрические характеристики плоских сечений;
- метод сечений, эпюры внутренних силовых факторов;
- растяжение и сжатие;
- кручение;
- прямой изгиб;
- основы теории напряженного и деформированного состояния.

Задания по темам "Сложное сопротивление", "Статически-неопределимые системы", "Динамические задачи в сопротивлении материалов", "Сопротивление усталости", "Устойчивость сжатых стержней" будут включены во 2-ю часть практикума.

Задания для курсовых и расчетно-проектировочных работ являются индивидуальными. Расчетные схемы и числовые значения каждый студент выбирает по варианту (шифру). Номер варианта состоит из четырех цифр. Каждая цифра соответствует номеру строки в первой графе (столбце) указанной в условии задачи таблицы. В графах I, II, III, IV находятся данные соответственно первой (I), второй (II), третьей (III), четвертой (IV) цифре номера варианта, считая слева направо. Номер варианта выдает преподаватель. Таким образом обеспечивается многовариантность заданий (9999 вариантов каждой задачи).

Общие требования к выполнению и оформлению курсовых и расчетно-проектировочных работ:

1. Выписать условие задачи и числовые данные согласно варианту, сделать в масштабе аккуратный эскиз, на котором указать размеры и величины, необходимые для расчета.

2. Записи выполнять на одной стороне листа, на белой бумаге формата А4 (210×297) рукописным способом, четко и аккуратно.

3. Текстовая часть должна содержать названия этапов расчета, краткие пояснения хода решения задачи, расчетные формулы, численные расчеты и результаты вычислений по каждому этапу решения.

4. Схемы и графики выполняют карандашом при помощи чертежных инструментов с соблюдением выбранного масштаба изображения.

5. Окончательные результаты оформляют в виде ответа.

6. Титульный лист курсовой или расчетно-проектировочной работы оформляют в соответствии с прил. 1. Все листы работы последовательно нумеруют и сшивают.

7. Выполненную курсовую или расчетно-проектировочную работу предъявляют преподавателю для защиты в сроки, указанные в учебном плане.

Задание 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Цель работы - развитие навыков самостоятельного расчета геометрических характеристик, закрепление знаний основных теоретических зависимостей между геометрическими характеристиками плоских сечений.

Задача № 1. Для заданного плоского сечения с одной осью симметрии (рис. 1) определить:

- положение центра тяжести сечения;
- положение главных центральных осей;
- главные центральные моменты инерции.

Номер эскиза сечения (см. рис. 1) и данные для расчета выбрать по номеру варианта из табл. 1. В номере варианта использовать три первые цифры четырехзначного шифра.

Задача № 2. Для заданного несимметричного плоского сечения определить:

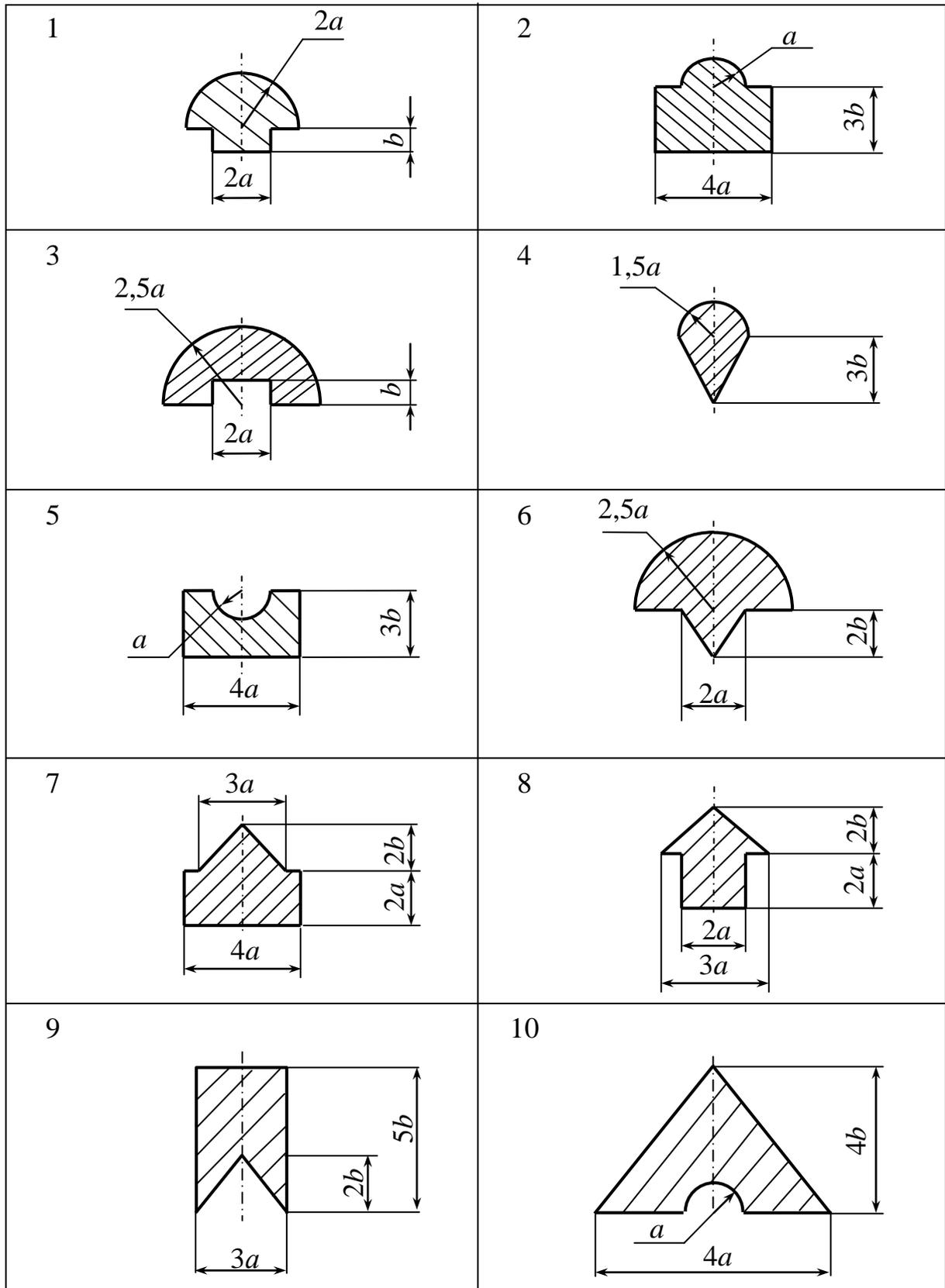
- положение центра тяжести сечения;
- положение главных центральных осей;
- главные центральные моменты инерции.

Данные для расчета взять в табл. 2, форма сечения приведена на рис. 2.

Задачи № 3, 4. Для заданного плоского сечения симметричного (задача № 3) и несимметричного (задача № 4), составленного из прокатных профилей, определить:

- положение центра тяжести сечения;
- положение главных центральных осей;
- главные центральные моменты инерции.

Данные для расчета взять в табл. 3, форма сечения приведена на рис. 3, *а* (задача № 3) и на рис. 3, *б* (задача № 4). Информацию о геометрических характеристиках прокатных профилей выписать из соответствующих ГОСТов (прил. 2 – 6).



Puc. 1

Таблица 1

Номер строки	I	II	III
	Форма сечения	a , мм	b , мм
1	9	16	14
2	7	22	10
3	5	18	12
4	1	20	16
5	2	16	14
6	3	18	10
7	8	16	12
8	10	22	12
9		4	20
0	6	18	14

Таблица 2

Номер строки	I	II	III
	Форма сечения	a , мм	b , мм
1	4	48	28
2	7	36	24
3	1	28	20
4	9	42	26
5	2	38	28
6	3	30	18
7	5	32	22
8	10	44	24
9		6	34
0	8	46	28

Таблица 3

Номер строки	I	II		III		
	Тип сечения	Номер 1-го швеллера	Толщина пластины a , мм	Номер 2-го профиля		
				уголок	швеллер	двутавр
1	1	40	30	180×180×12	18	10
2	2	36	40	100×100×16	10	12
3	3	33	50	125×80×10	12	14
4	4	30	60	140×90×8	14	16
5	5	27	70	160×100×10	22	18
6	6	24	36	180×110×10	16	24
7	7	24	48	250×160×12	16а	20
8	8	20	24	140×140×10	18	27
9	9	22	56	110×70×8	18а	22
0	10	20	64	100×63×10	20	30

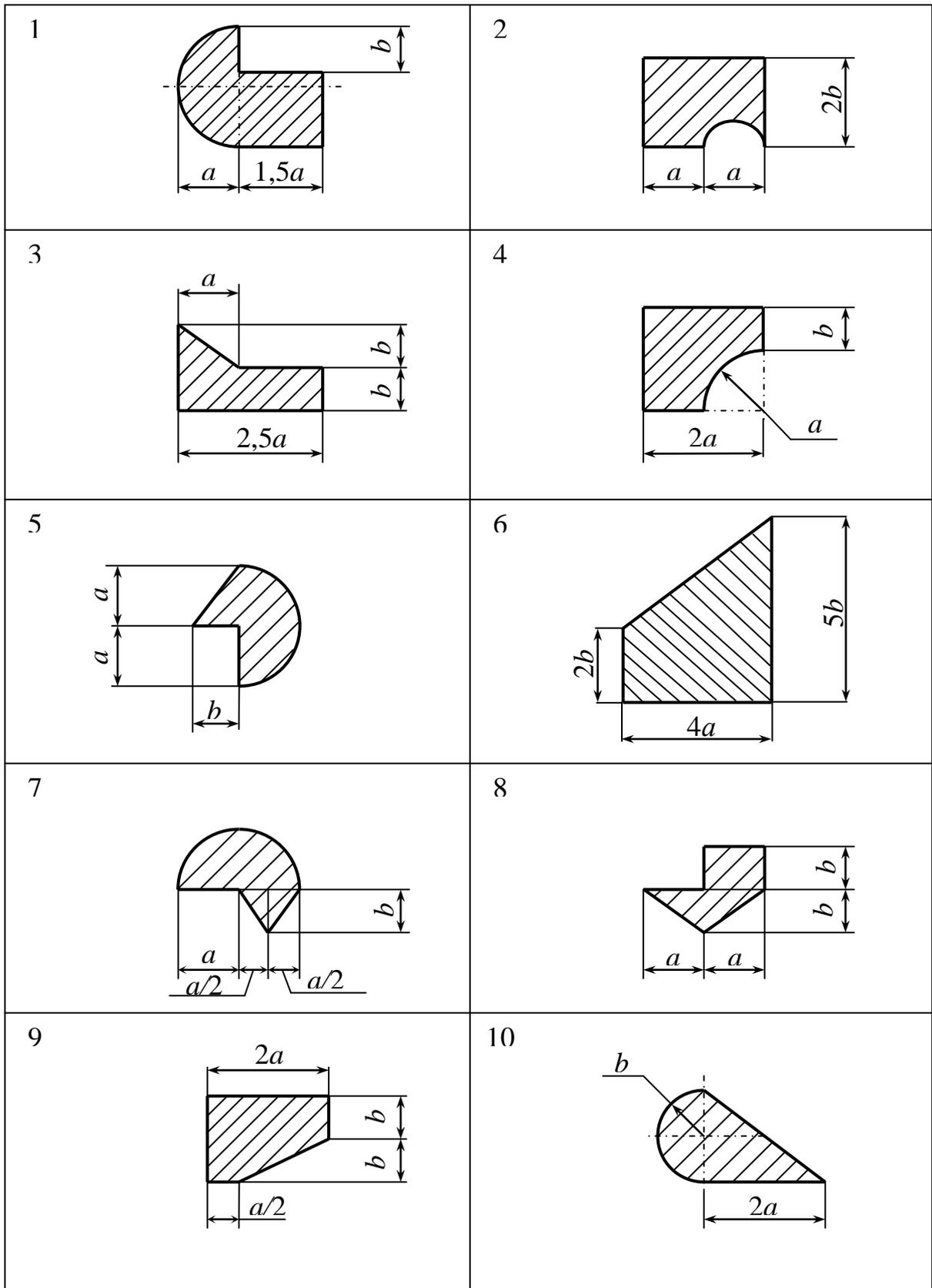
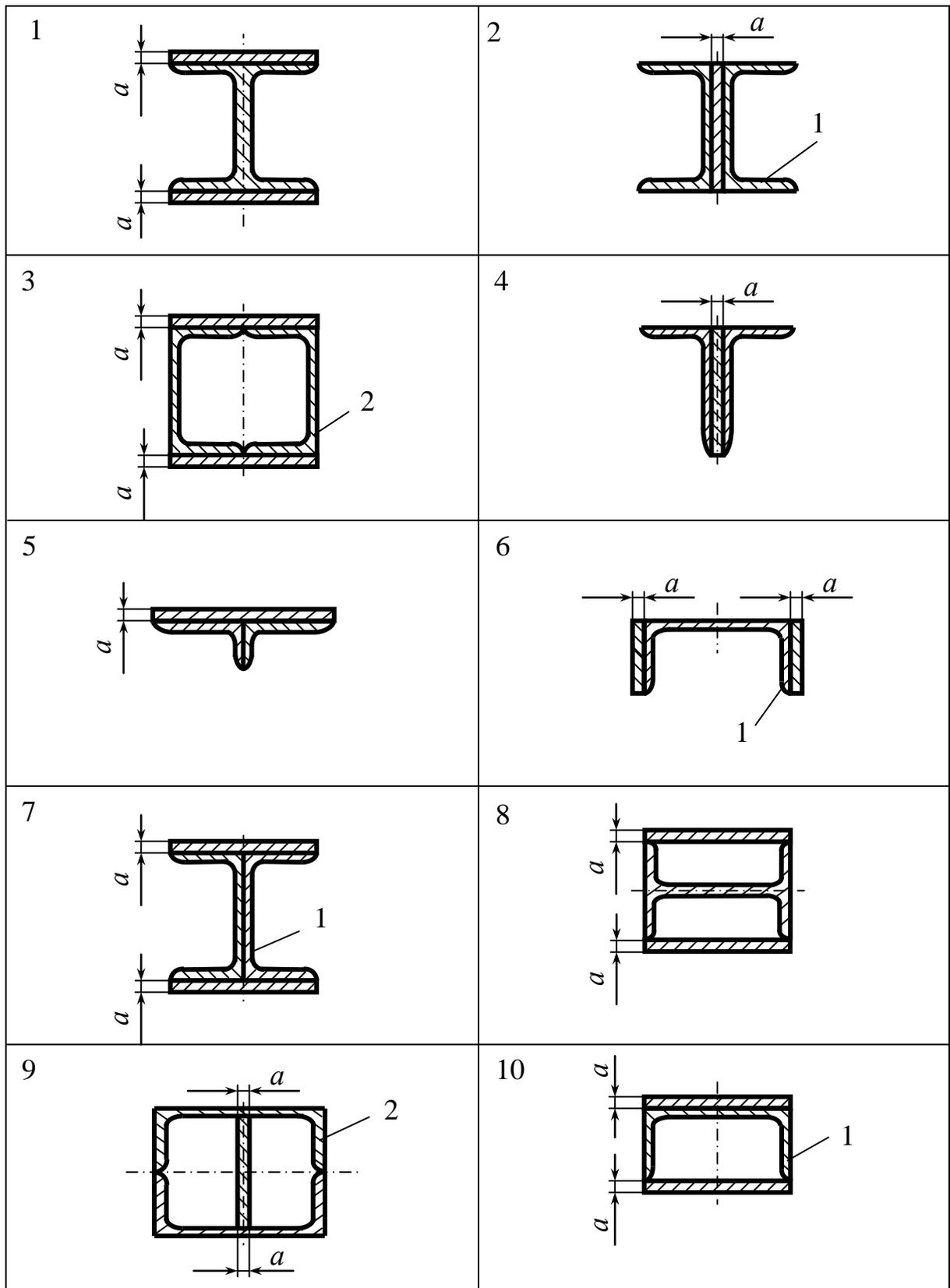
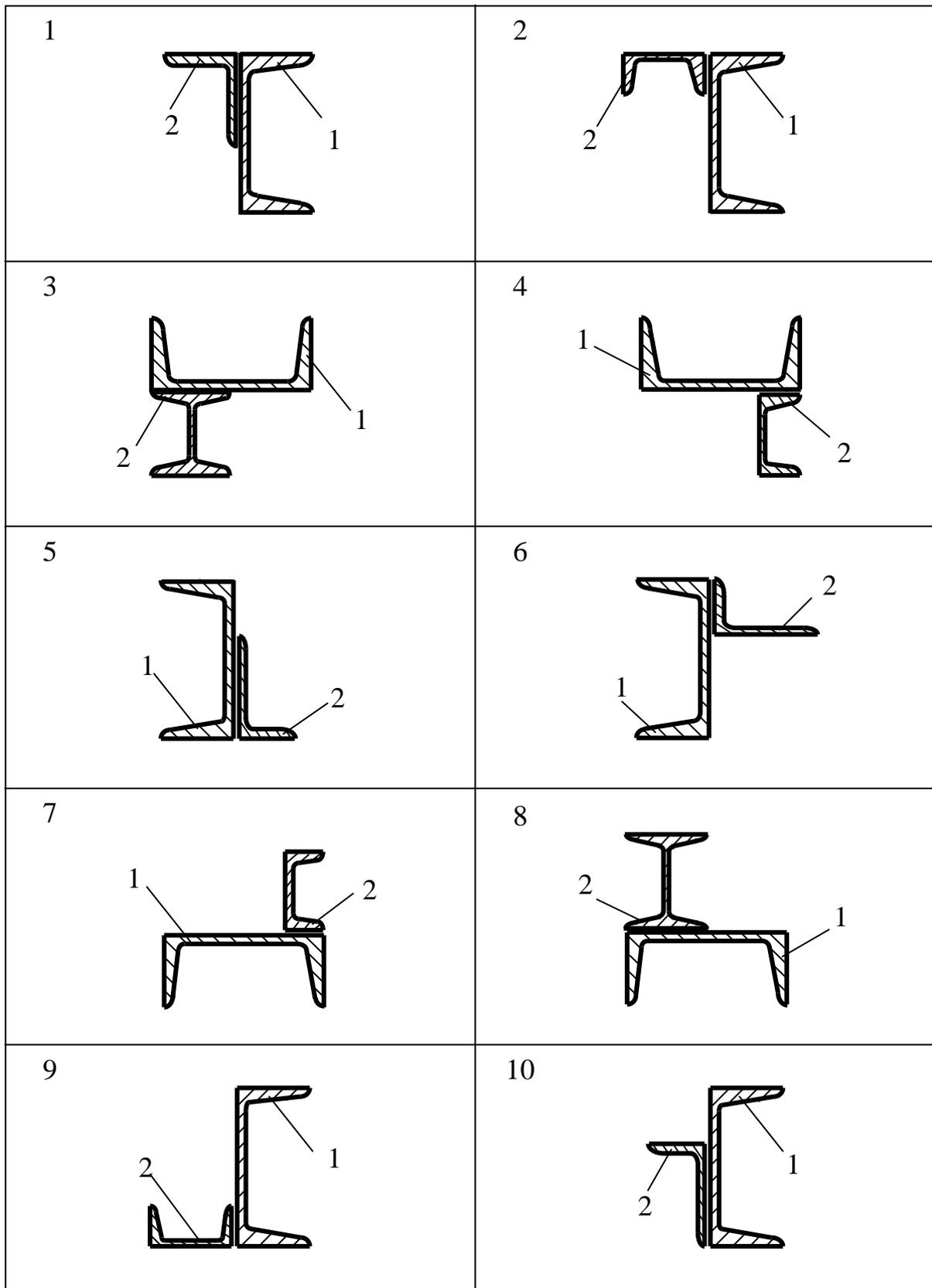


Рис. 2



a)
Рис. 3



б)
Рис. 3 (окончание)

Указания к выполнению задания

Вычисление геометрических характеристик заданного плоского сечения, составленного из n простых фигур, рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. Вычертить заданное сечение в масштабе, указать его размеры, выбрать вспомогательные оси координат z, y , параллельные сторонам сечения. Необходимые геометрические характеристики заданных прокатных профилей (задачи № 3 и 4) выписать из соответствующих ГОСТов.

2. Нанести на чертеж центры тяжести C_i каждой простой фигуры и определить их координаты z_i, y_i относительно выбранной системы координат $z, y; i=1, 2, \dots, n$.

3. Определить в выбранной системе координат z, y положение центра тяжести C составного сечения по формулам:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где A_i – площадь i -й простой фигуры.

4. Нанести на чертеж центр тяжести C и центральные оси составного сечения z_c, y_c с началом в центре тяжести C , определить координаты z_{c_i}, y_{c_i} точек C_i в центральных осях z_c, y_c .

5. Определить для каждой простой фигуры осевые моменты инерции J_{z_i}, J_{y_i} и центробежный момент инерции $J_{z_i y_i}$ относительно центральных осей фигуры z_i, y_i . При определении по таблицам ГОСТов моментов инерции прокатных профилей (задачи № 3 и 4) относительно их собственных центральных осей учитывать, что ориентация этих осей в заданной схеме сечения может измениться.

6. Найти осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно его центральных осей z_c, y_c :

$$J_{z_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{z_i} + y_{c_i}^2 A_i \right); \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n \left(J_{y_i} + z_{c_i}^2 A_i \right);$$

$$J_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^n J_{z_i y_i} + y_{c_i} z_{c_i} A_i ,$$

где y_{c_i} , z_{c_i} – координаты центров тяжести простых фигур в системе осей $z_c y_c$.

7. Найти положение главных центральных осей составного сечения и нанести их на чертеж. Эти оси повернуты по отношению к центральным осям z_c, y_c на угол α , который определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} .$$

8. Определить главные центральные моменты инерции составного сечения J_u и J_v по формуле

$$J_{u,v} = \frac{1}{2} (J_{z_c} + J_{y_c}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2} .$$

Проверить правильность вычисления

$$J_u + J_v = J_{z_c} + J_{y_c} .$$

9. Для сечений, имеющих ось симметрии (задачи № 1, 3), одна из главных центральных осей совпадает с осью симметрии, другая перпендикулярна ей, в этом случае главные центральные моменты инерции составного сечения

$$J_u = J_{z_c} ; J_v = J_{y_c} .$$

Задание 2

ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ

Цель работы – освоение метода сечений для определения внутренних силовых факторов в стержнях и рамах.

Задачи № 1 - 3. Для стержней, изображенных соответственно на рис. 4, 5, 6, построить эпюры продольных сил.

Данные для расчета взять из табл. 4 по номеру варианта. Силы F_i действуют вдоль оси стержня, $i = 1, 2, 3, 4$.

Задачи № 4 - 6. Для валов, изображенных соответственно на рис. 7, 8, 9, построить эпюры крутящих моментов.

Данные для расчета взять из табл. 5 по номеру варианта.

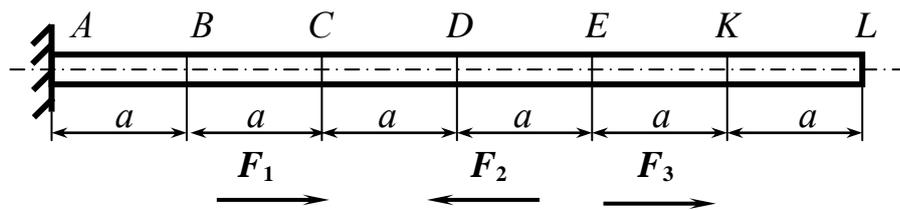


Рис. 4

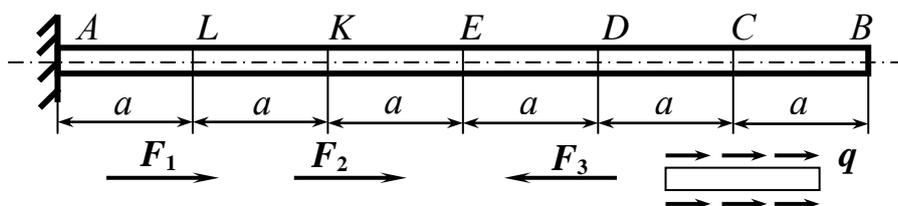


Рис. 5

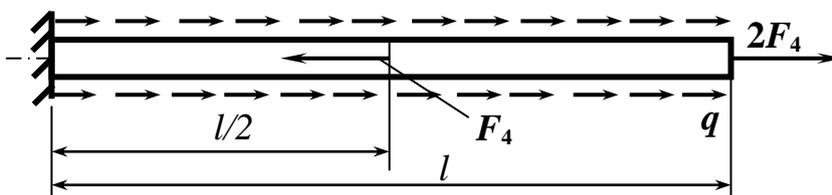


Рис. 6

Таблица 4

Номер строки	I			II		III		IV			
	Силы приложены в сечениях							F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН
	F_1	F_2	F_3								
1	B	C	D	20	-10	12	15	20	1,0	0,2	AK
2	K	C	L	30	-40	14	25	30	1,2	0,3	LE
3	B	E	L	40	-20	16	35	40	1,5	0,4	KD
4	K	E	D	-20	30	-18	-15	50	2,0	0,15	EC
5	B	C	D	-30	40	-20	-25	60	1,6	0,25	DB
6	K	C	L	-40	20	-10	-35	-10	0,8	0,2	AK
7	B	E	D	50	-20	36	45	-20	1,4	0,4	LE
8	K	E	L	60	10	48	-5	-30	1,8	0,25	KD
9	B	C	L	10	50	-18	15	-40	0,8	0,3	EC
0	K	C	D	-50	20	-12	-25	-50	1,5	0,15	DB

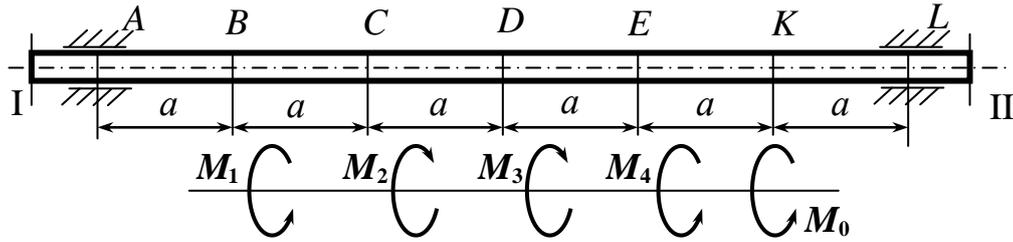


Рис. 7

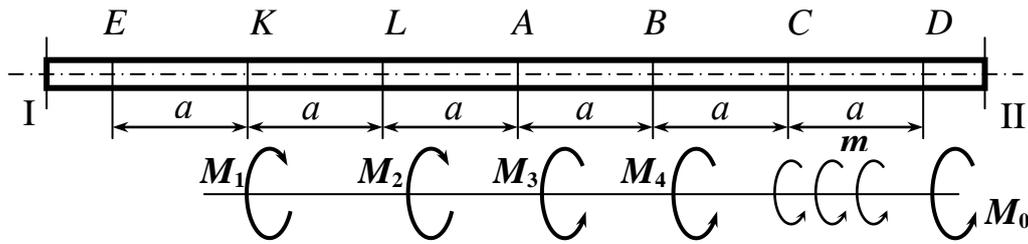


Рис. 8

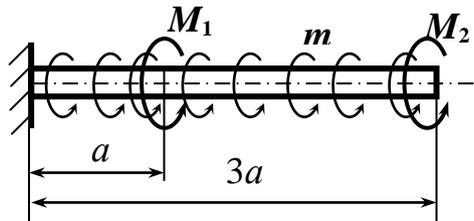


Рис. 9

Таблица 5

Номер строки	I					II		III		IV		
	Момент в сечении					$M_1,$ Н·м	$M_2,$ Н·м	$M_3,$ Н·м	$M_4,$ Н·м	$m,$ Н	$a,$ м	Участок действия m (задача № 5)
	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4							
1	I	A	B	E	K	400	1000	-320	540	1000	0,2	AC
2	II	C	B	L	E	500	800	-480	130	1200	0,3	BD
3	I	A	D	L	K	600	300	540	-810	-1500	0,4	EL
4	II	C	D	E	L	700	400	-620	420	-2000	0,1	AK
5	I	A	D	E	K	800	1200	740	-980	3000	0,25	BL
6	II	C	B	L	E	900	1300	-820	720	1600	0,15	AC
7	I	A	B	L	K	1000	600	960	640	-1800	0,1	BD
8	II	C	D	E	L	600	700	-440	360	-1200	0,2	BL
9	I	A	D	E	L	800	1500	560	-880	900	0,15	AK
0	II	C	B	L	K	500	900	340	-660	-1400	0,25	EL

Задачи № 7 - 12. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, изображенных соответственно на рис. 11, 12, 13, 14, 15 и 16.

Данные для расчета взять согласно номеру варианта из табл. 6.

Задачи № 13 - 14. Построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рам, изображенных на рис. 17, 18.

Данные для расчета взять согласно номеру варианта из табл. 6.

Таблица 6

Номер строки	I	II		III			IV	
	Номер схемы	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м	c , м	h , м
1	1	12	5	10	1,5	0,8	1,2	2,0
2	2	16	7	12	1,6	0,6	1,0	2,2
3	3	10	9	18	1,8	1,2	0,8	2,6
4	4	14	8	4	1,2	1,4	0,6	2,8
5	5	18	15	8	1,0	1,6	1,4	3,0
6	6	20	14	20	1,4	1,5	1,6	1,8
7	7	8	12	14	0,8	1,8	2,0	1,6
8	8	6	18	15	2,0	0,9	1,8	2,4
9	9	15	6	6	2,2	0,5	0,9	2,6
0	10	24	18	16	1,2	2,0	0,4	1,2

Указания к выполнению задания

Определение внутренних силовых факторов и построение эпюр рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. Составить расчетную схему стержня или рамы согласно номеру (шифру) варианта.

2. Определить реакции опор из уравнений равновесия, составленных для стержня или рамы в целом.

3. Разбить стержень на участки, границами их принять сечения, в которых приложены внешние силы, начинается или заканчивается распределенная нагрузка, действуют сосредоточенные пары сил. Рамы разбить на прямолинейные участки.

4. При определении внутренних силовых факторов используется метод сечений. Мысленно провести секущую плоскость на каждом участке перпендикулярно его продольной оси и составить расчетную схему отсеченной части стержня или рамы. На этой схеме изобразить нагрузку, приложенную к рассматриваемой отсеченной части, и внутренние силовые

факторы, возникающие в поперечном сечении стержня (рамы). Внутренние силовые факторы показать в положительном направлении (рис. 10), на котором обозначены: N – продольная сила; Q_y, Q_z – поперечные силы; M_k – крутящий момент; M_y, M_z – изгибающие моменты. Силы и моменты показаны в положительном направлении.

5. Для отсеченной части стержня или рамы составить уравнения равновесия. В эти уравнения входят искомые внутренние силовые факторы и нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части стержня или рамы.

6. Из уравнений равновесия найти искомые внутренние силовые факторы на каждом участке. Выражения для внутренних силовых факторов представляют собой аналитические зависимости этих усилий от координаты, определяющей положение сечения на участке.

7. Построить эпюры внутренних силовых факторов как графики полученных зависимостей. Ось эпюры провести параллельно оси стержня, для рам – параллельно оси соответствующего участка. Ординаты эпюр отложить от оси эпюры по перпендикуляру. Численно ординаты равны соответствующему внутреннему силовому фактору в масштабе. На эпюре проставить численные значения ординат, равные величине внутреннего силового фактора в характерных сечениях, в начале и конце участков, экстремальные значения. Поле эпюры штрихуют тонкими линиями перпендикулярно оси и на нем проставляют в кружочке знак внутреннего силового фактора. Рядом с эпюрой проставляют ее обозначение и размерность внутреннего силового фактора.

8. Проверить правильность построения эпюры, используя зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки и внутренними силовыми факторами, а также свойства эпюр.

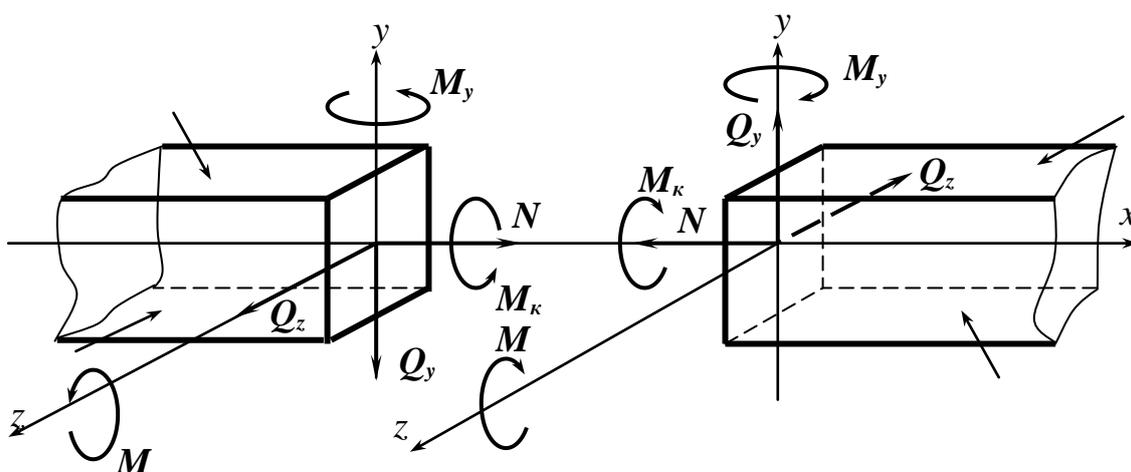


Рис. 10

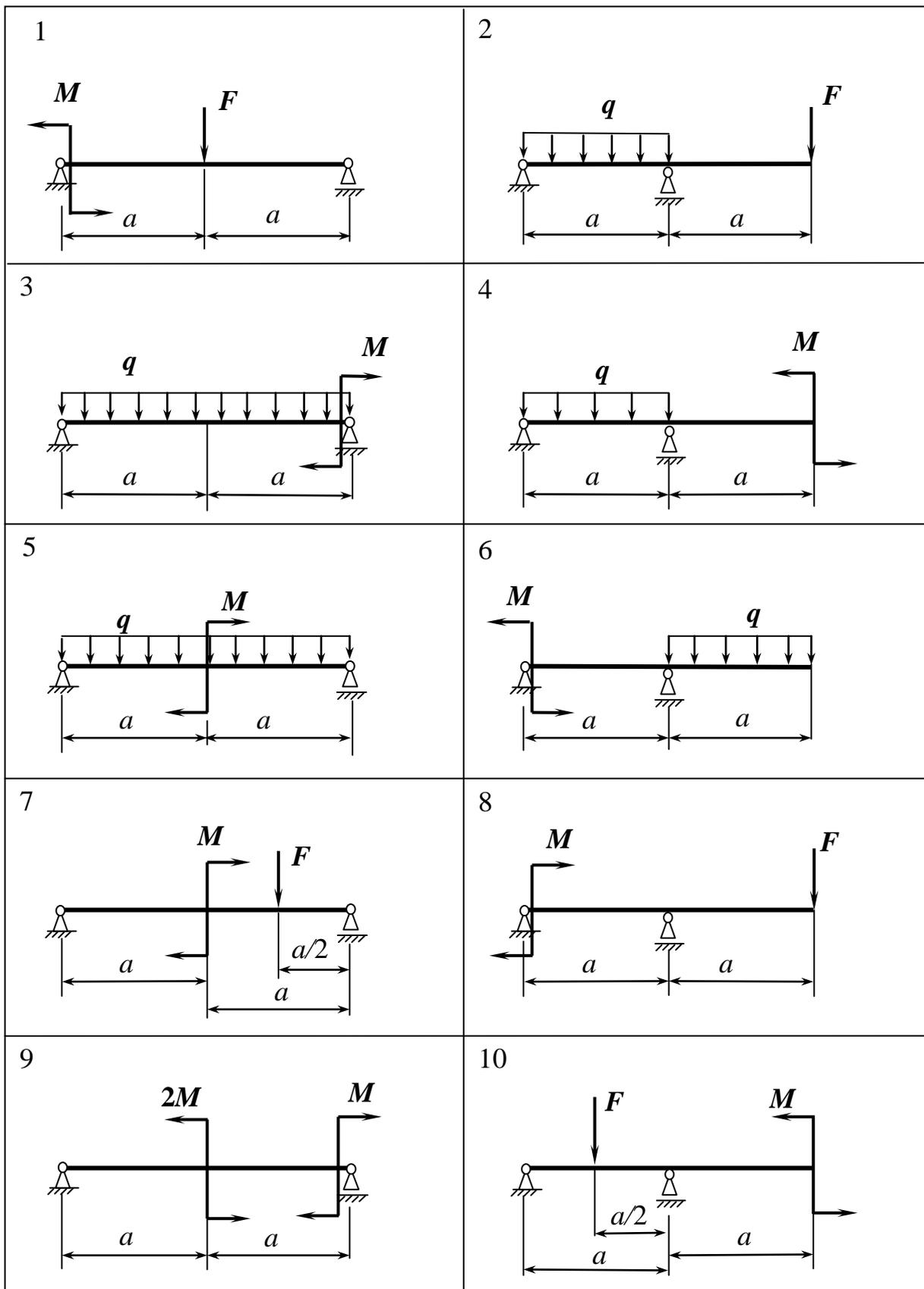


Рис. 11

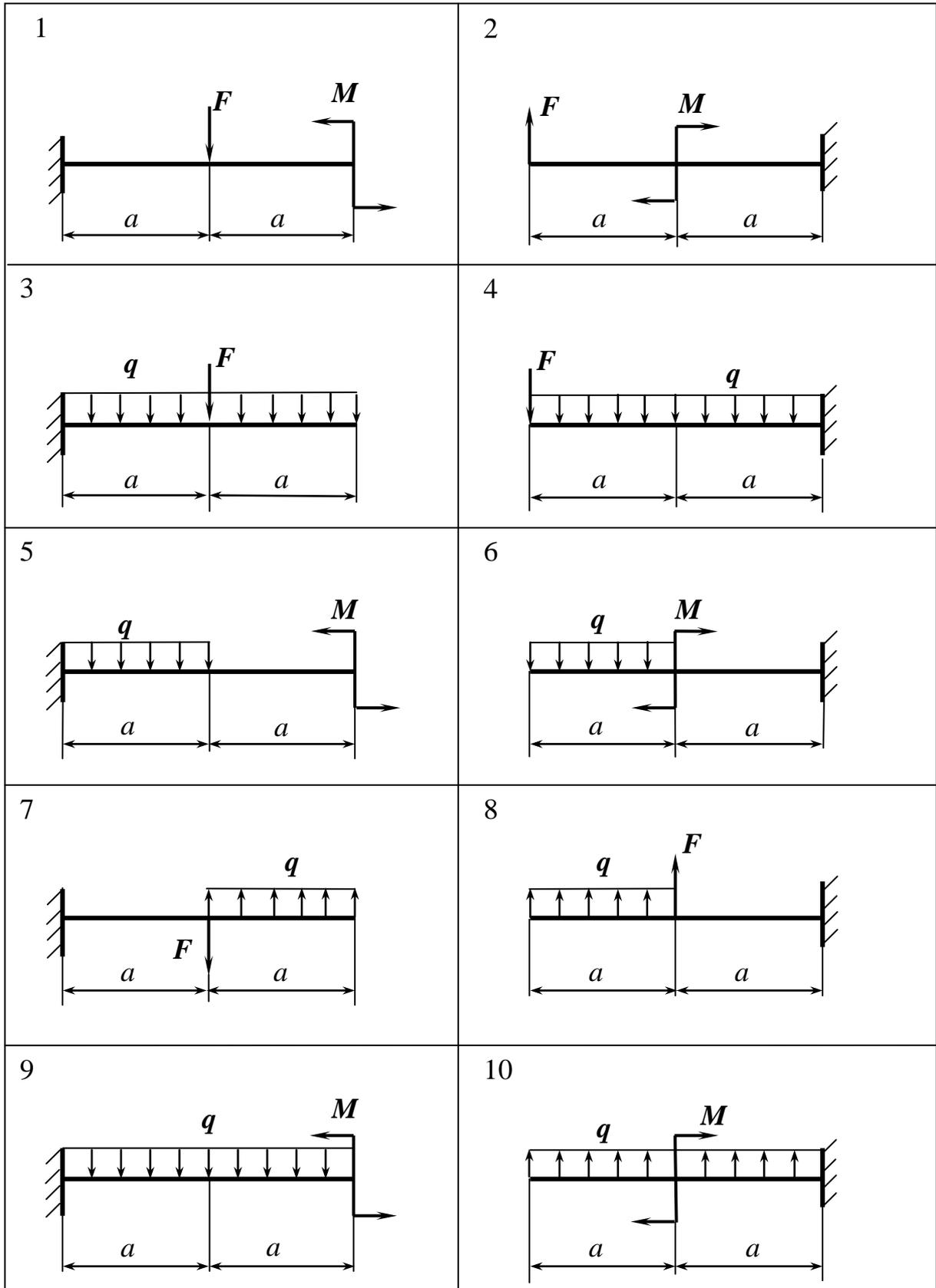


Рис. 12

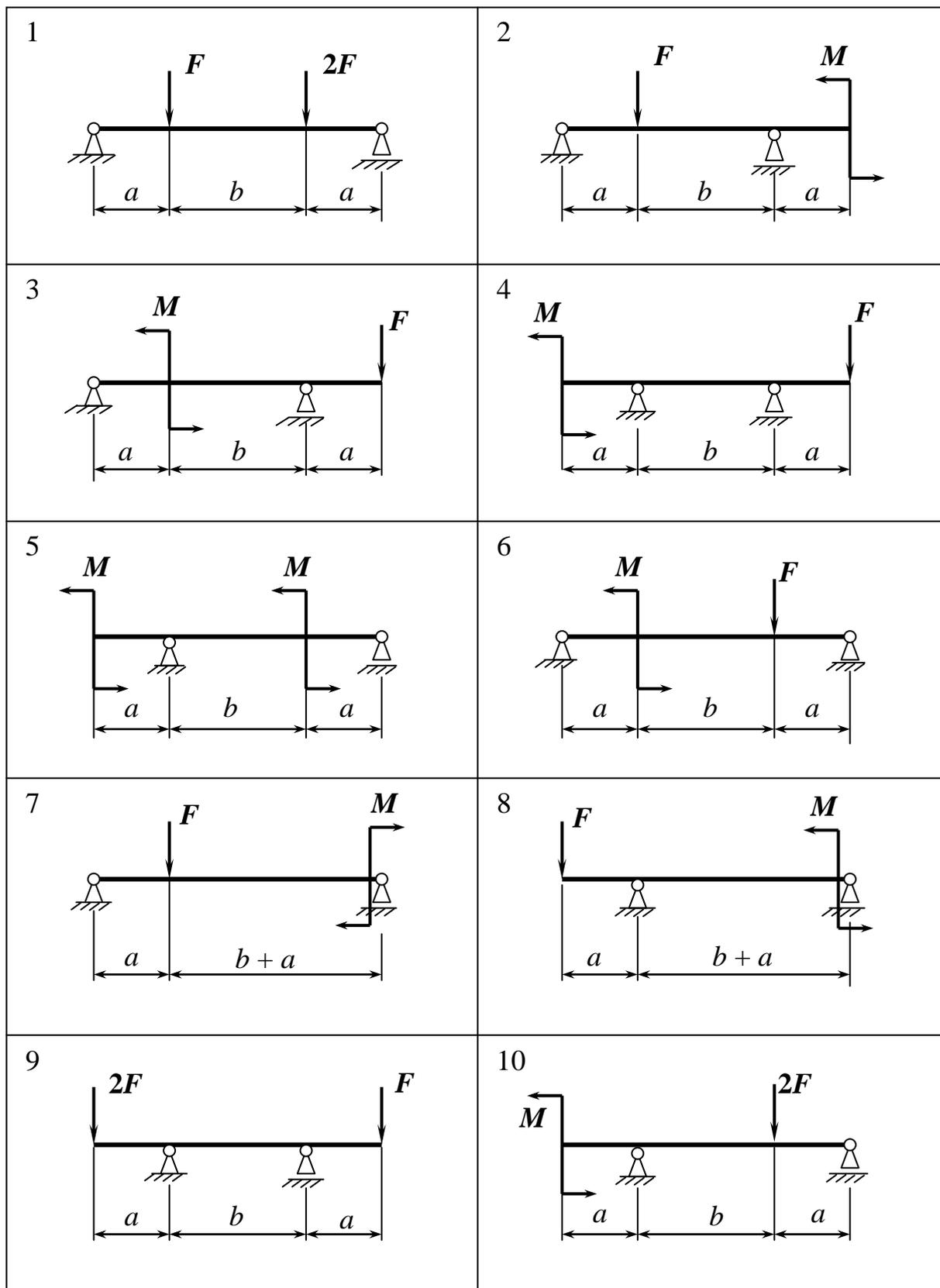


Рис. 13

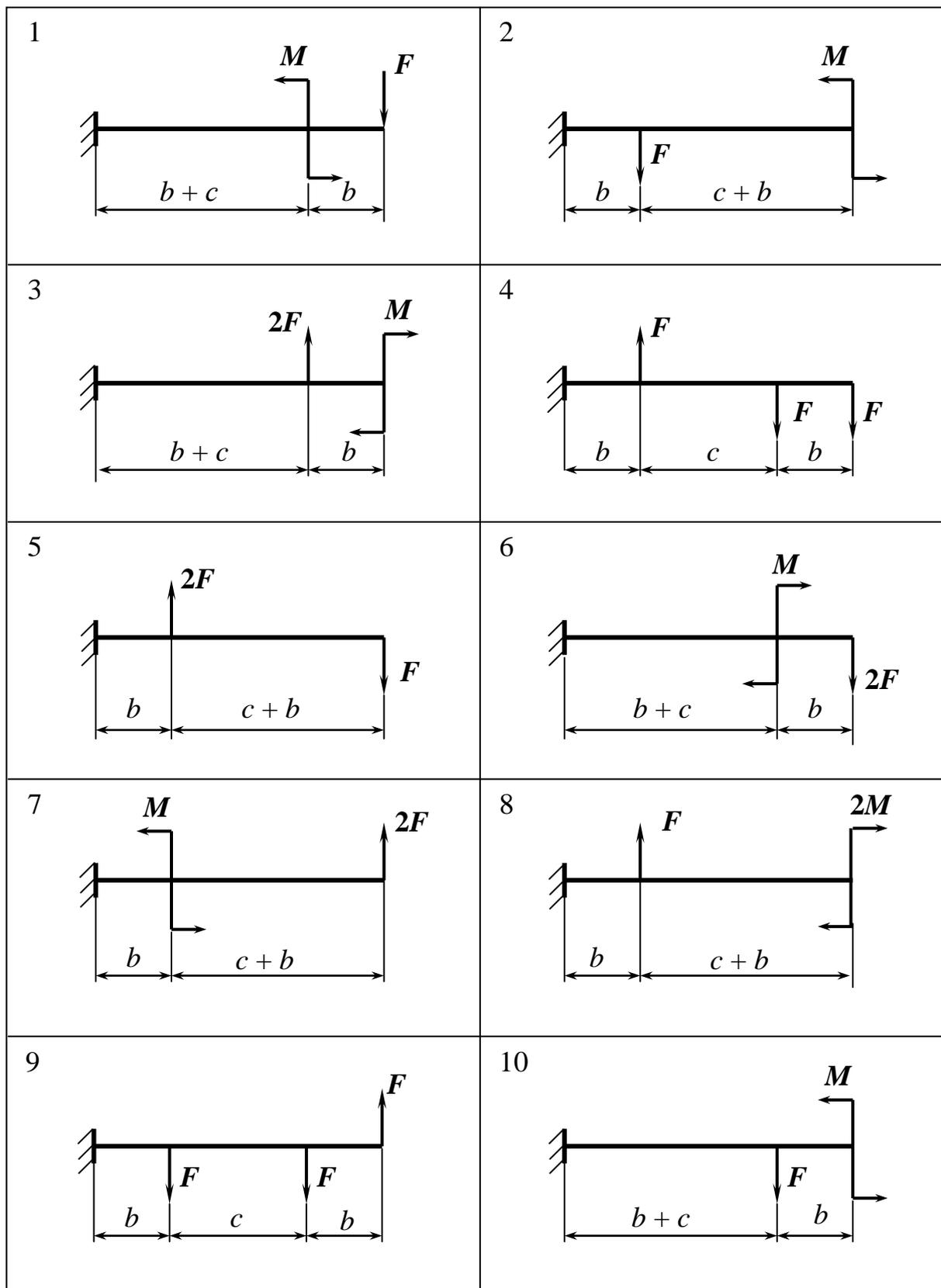


Рис. 14

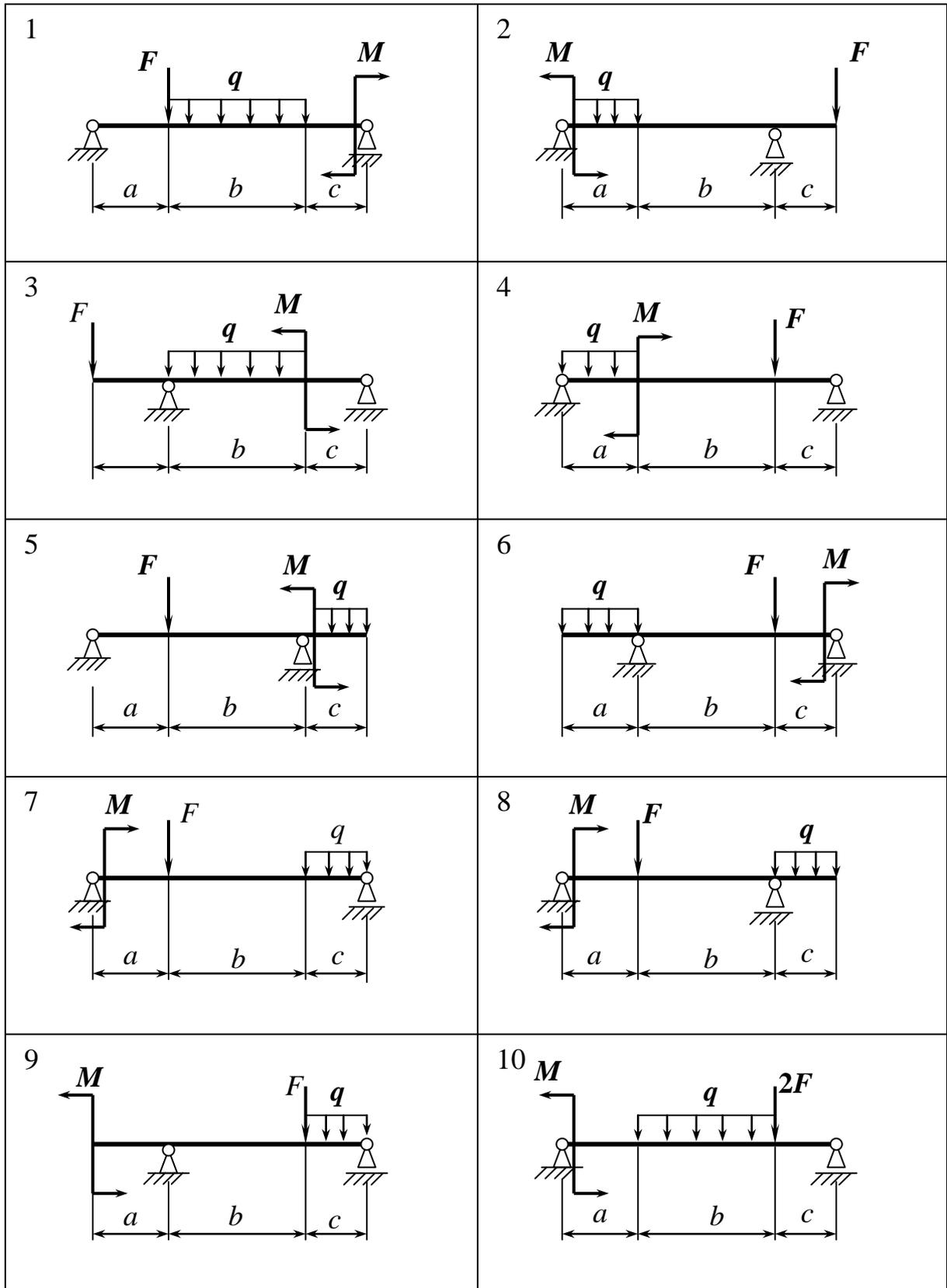


Рис. 15

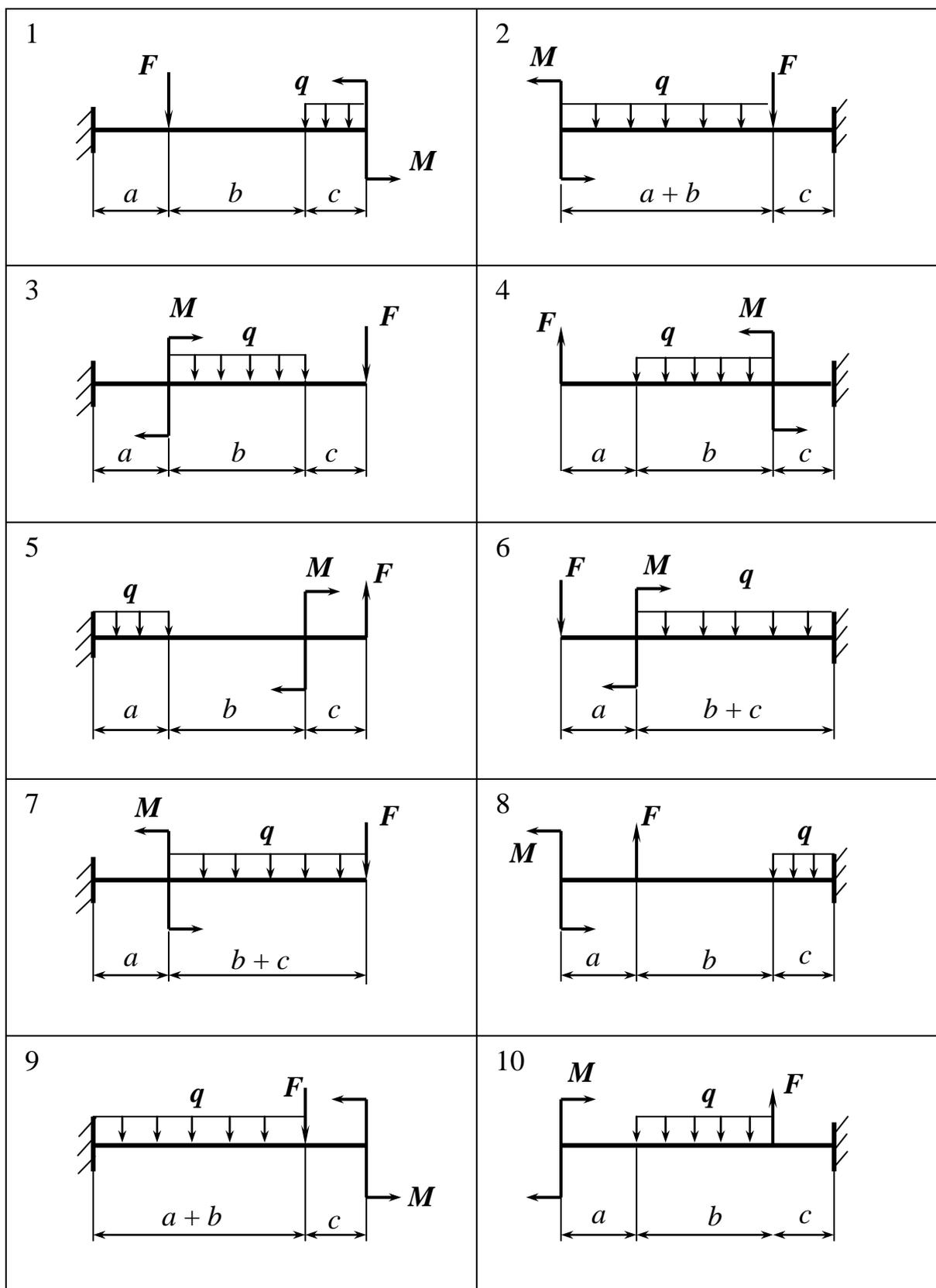


Рис. 16

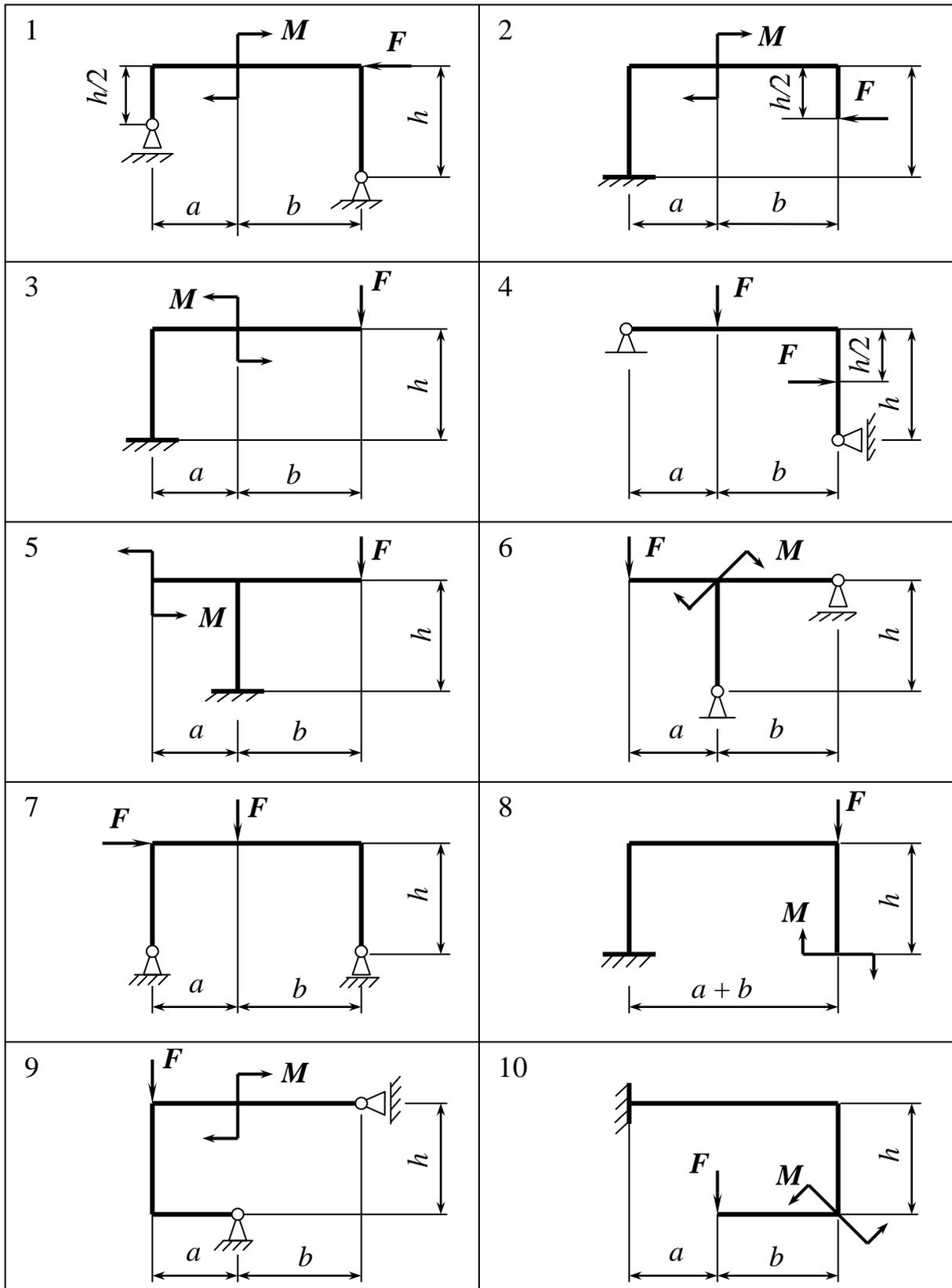


Рис. 17

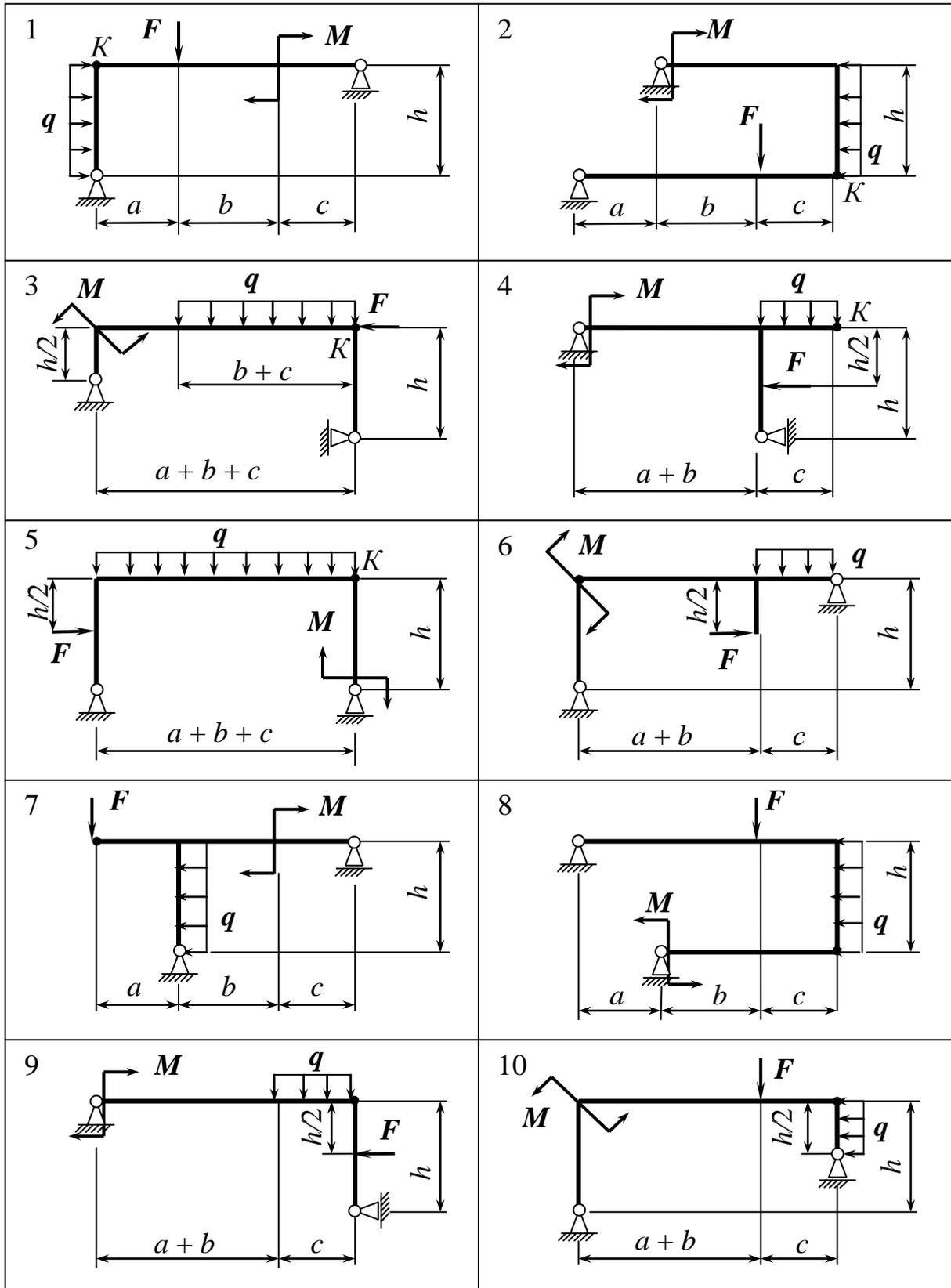


Рис. 18

Задание 3

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Цель работы – овладение навыками самостоятельного расчета на прочность и жесткость элементов конструкций при растяжении-сжатии, закрепление знаний основных положений теории растяжения-сжатия прямых стержней.

Задача № 1. Для стержня, изображенного на рис. 19, требуется:

- построить эпюры продольной силы N , нормальных напряжений σ , перемещений поперечных сечений u ;

- определить площадь поперечного сечения стержня из условия прочности.

Схему стержня, данные для расчета взять из табл. 7 согласно номеру варианта, выданного преподавателем.

При расчете принять $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Значения сил определить по формулам:

$$F_1 = k_1 F ; F_2 = k_2 F ;$$

$$q_1 = n_1 F / a ; ; q_2 = n_2 F / a ; .$$

Таблица 7

Номер строки	I	II		III		IV	
	Номер схемы	k_1	k_2	n_1	n_2	F , кН	a , м
1	2	3	4,0	2,5	3,0	8	0,4
2	1	2	4,5	2,0	5,0	10	0,5
3	4	5	3,5	4,0	2,5	5	0,3
4	3	4	2,5	3,0	4,5	6	0,6
5	6	3	2,5	1,5	3,5	12	0,2
6	5	5	3,5	3,5	1,5	4	0,5
7	8	2	5,0	4,5	3,0	6	0,4
8	7	3	4,5	2,5	4,0	10	0,6
9	10	4	3,0	5,0	2,0	9	0,2
0	9	5	2,5	3,0	3,5	12	0,3

Задача № 2. Для стального ступенчатого стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) круглого сечения, жестко закрепленного одним концом и нагруженного сосредоточенными силами (рис. 20), требуется:

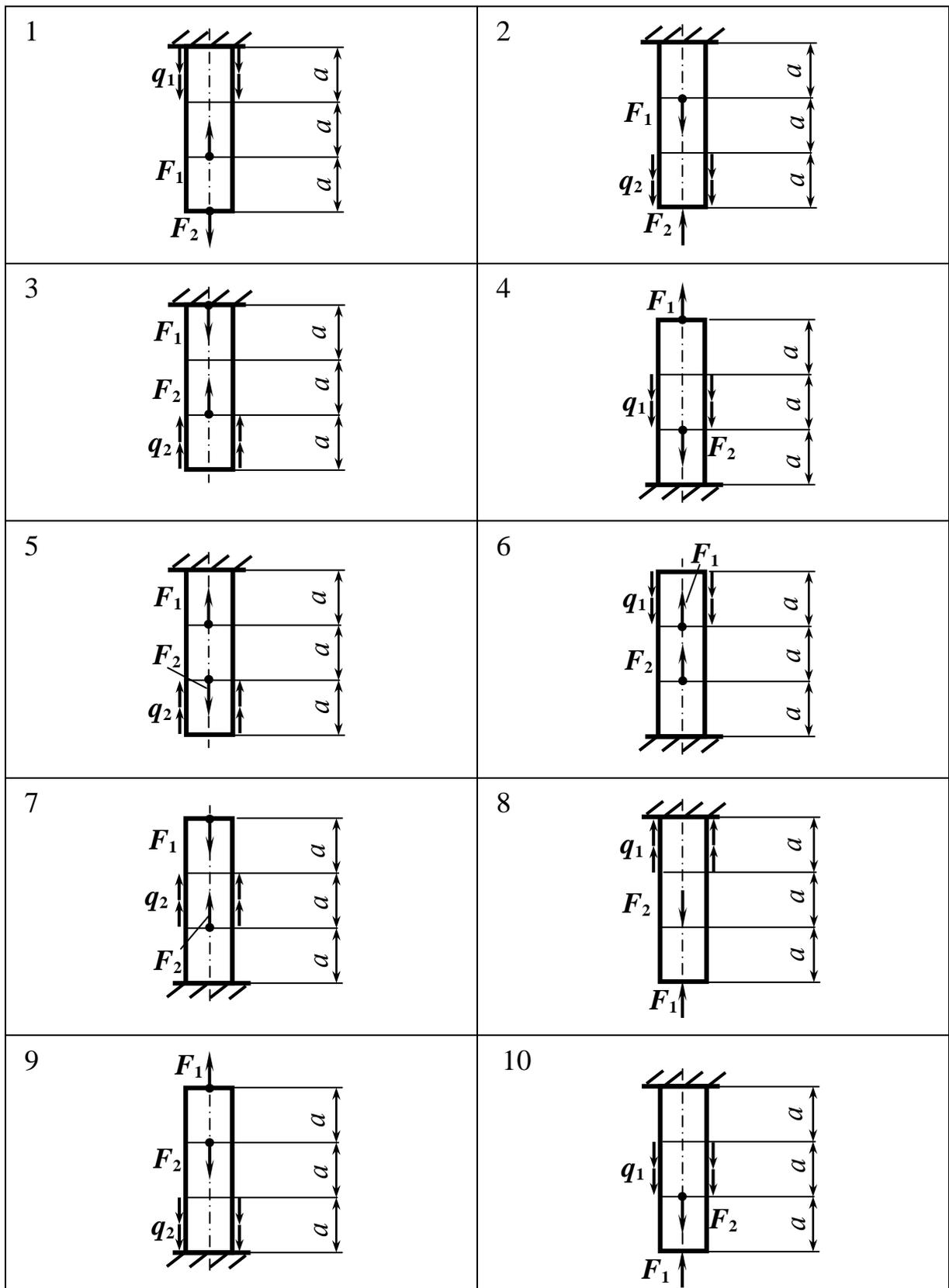


Рис. 19

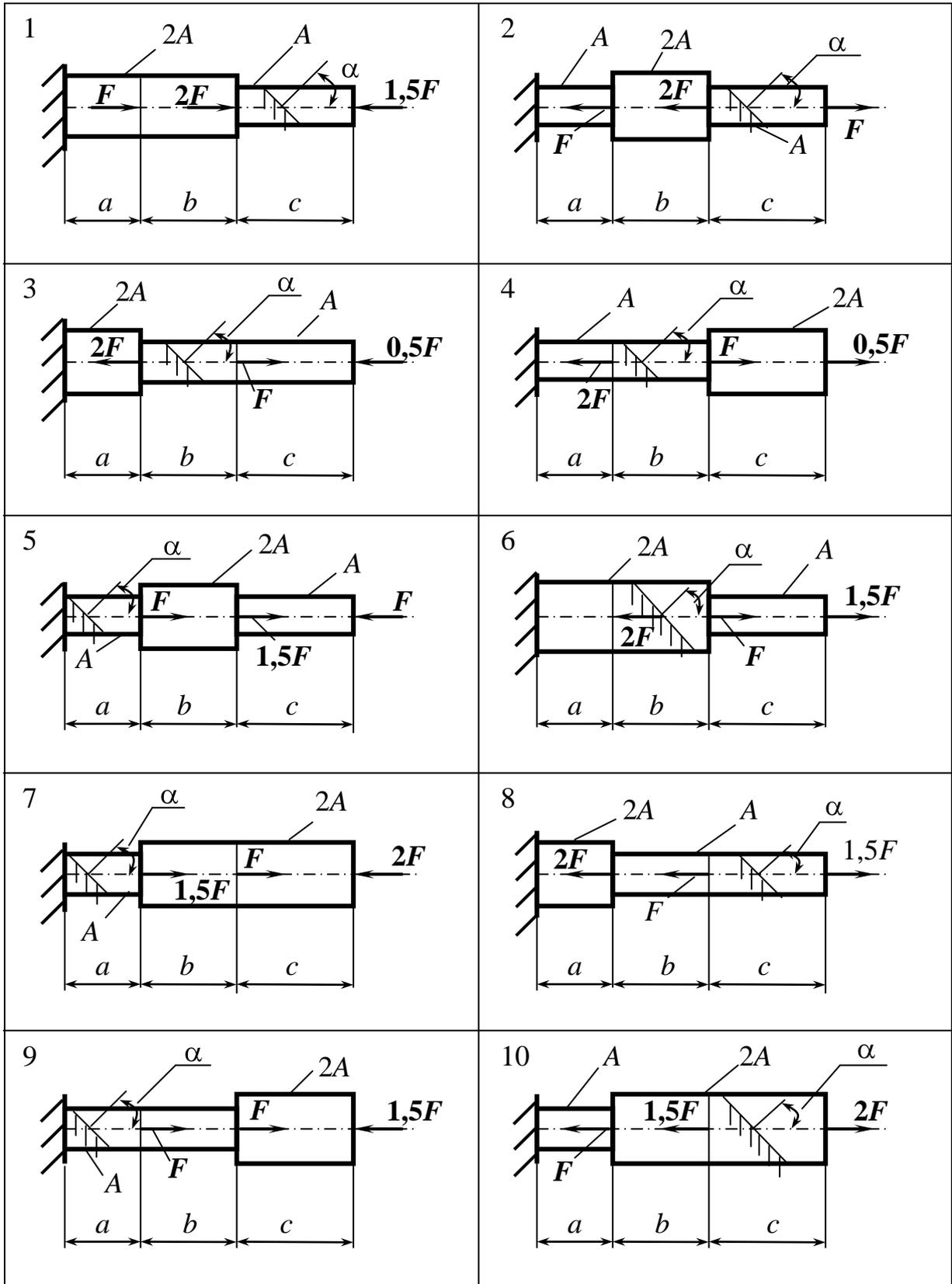


Рис. 20

- определить реакцию заделки;
- построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений u ;
- определить общее удлинение (укорочение) стержня;
- оценить прочность стержня, $[\sigma] = 160$ МПа;
- определить нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке с нормалью под углом α и $90^\circ + \alpha$ к продольной оси стержня;
- дать характеристику напряженного состояния.

Схему стержня (см. рис. 20), данные для расчета взять из табл. 8 согласно номеру варианта, выданного преподавателем.

Таблица 8

Номер строки	I	II			III	IV	
	Номер схемы	a , м	b , м	c , м	F , кН	A , см ²	α , град.
1	1	0,24	0,35	0,50	11	2,0	15
2	2	0,23	0,34	0,60	12	2,2	30
3	3	0,22	0,33	0,70	13	2,4	45
4	4	0,21	0,32	0,80	14	2,6	60
5	5	0,20	0,31	0,90	15	2,8	75
6	6	0,18	0,29	1,10	17	2,8	30
7	7	0,17	0,28	1,20	18	2,6	45
8	8	0,16	0,27	1,30	19	2,5	60
9	9	0,15	0,26	1,40	20	2,2	75
0	10	0,13	0,20	0,60	10	2,1	30

Задача № 3. Для стального прямого стержня, жестко заделанного левым концом, нагруженного сосредоточенными силами (рис. 21), требуется:

- определить реакцию заделки;
- построить эпюру продольных сил N и нормальных напряжений σ ;
- определить площадь поперечного сечения стержня из условия прочности;
- найти удлинения (укорочения) участков стержня a , b , c и полное изменение длины стержня Δl .

Схему стержня, данные для расчета взять из табл. 9 согласно номеру варианта, выданного преподавателем.

При расчете принять $\left[\frac{\sigma_T}{n} \right], E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

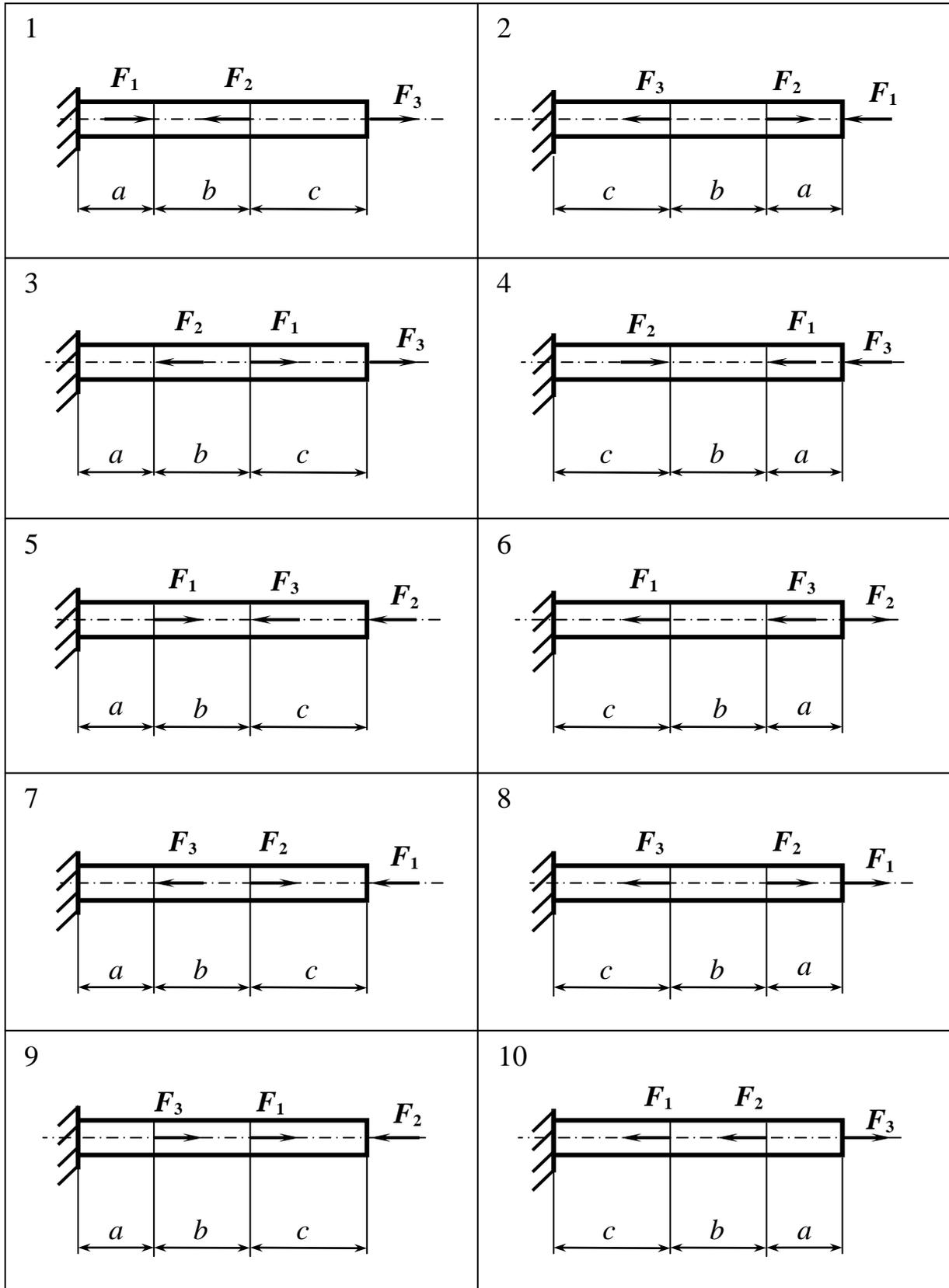


Рис. 21

Таблица 9

Номер строки	I	II			III		IV		
	Номер схемы	a , м	b , м	c , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	σ_T , МПа	n
1	1	0,5	1,0	0,4	12	6	2	420	2,0
2	3	0,4	0,9	1,1	14	8	4	360	1,8
3	5	0,3	0,8	1,0	16	5	6	320	2,0
4	7	0,2	0,7	0,9	8	10	8	340	1,7
5	9	0,1	0,6	0,8	10	4	10	400	2,5
6	2	0,6	0,4	0,7	15	7	12	380	2,0
7	4	0,7	0,3	0,6	18	3	14	280	1,5
8	6	0,8	0,2	0,5	20	2	16	320	1,6
9	8	0,9	0,1	0,4	10	12	18	400	2,2
0	10	1,0	0,2	0,3	6	9	20	300	1,5

Задача № 4. Для стержневой системы (рис. 22) требуется:

- найти внутренние усилия в стержнях 1 и 2 и построить эпюры продольных сил N ;

- определить площади поперечных сечений стержней 1 и 2 из условия прочности, найти размеры d , $D = 2d$, a ;

- найти перемещение точки B .

Номер схемы стержневой системы (см. рис. 22), данные для расчета взять из табл. 10 согласно номеру варианта, выданного преподавателем.

Таблица 10

Номер строки	I	II		III	IV	
	Номер схемы	α , град.	Длина стержня l , м	F , кН	$[\sigma]$, МПа	$E \cdot 10^5$, МПа
1	1	60	0,5	20	160	2,0
2	2	30	0,6	30	140	0,8
3	3	45	0,4	40	120	1,2
4	4	50	1,0	25	140	0,8
5	5	20	0,8	10	160	2,0
6	6	30	0,7	15	120	1,2
7	7	45	0,5	18	140	2,0
8	8	40	0,8	12	160	2,0
9	9	25	0,9	14	160	2,0
0	10	60	1,1	10	140	0,8

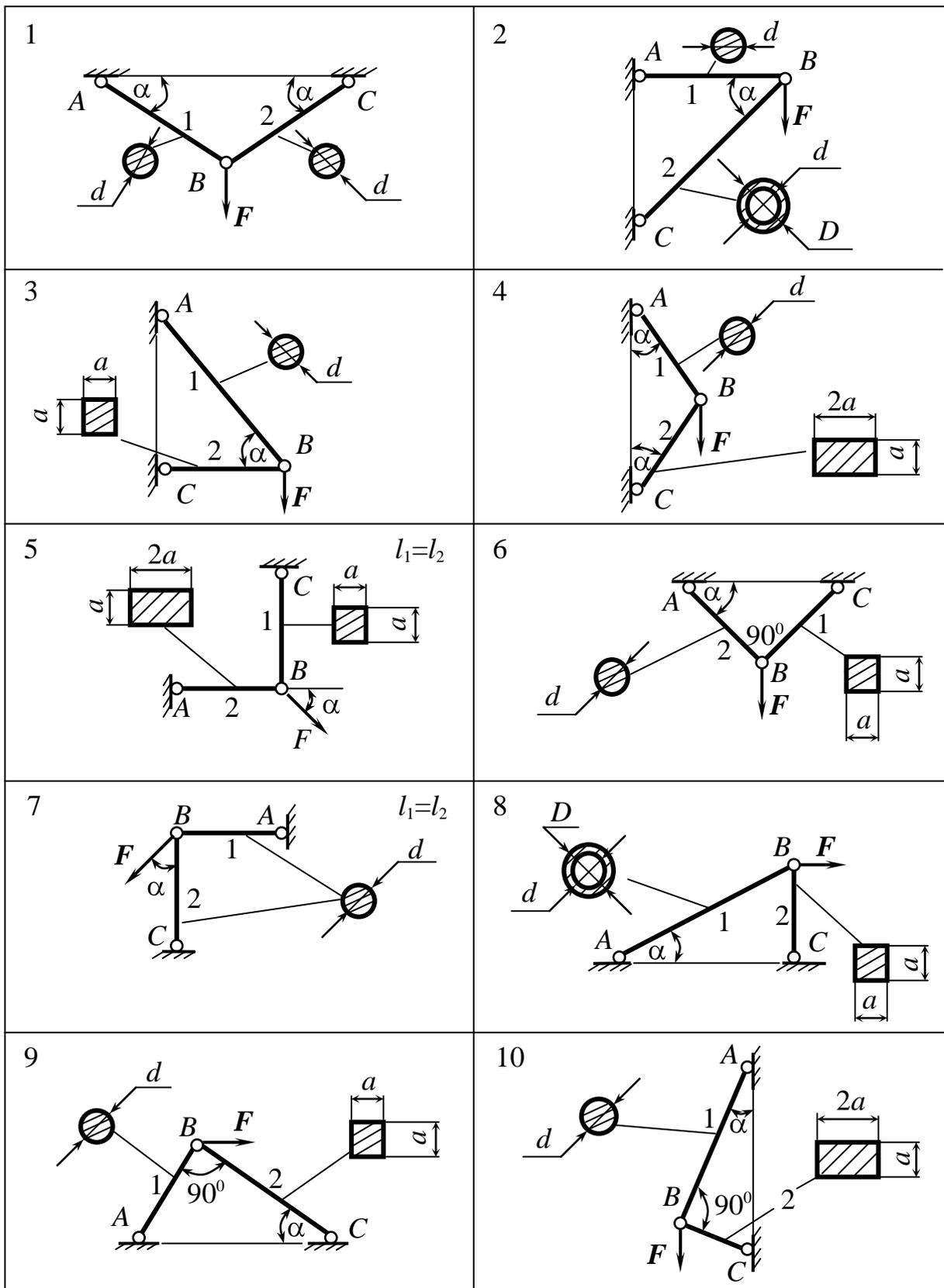


Рис. 22

Указания к выполнению задания

Расчет на прочность и определение перемещений прямого стержня при растяжении (сжатии) рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Определить реакцию заделки.

2. Разбить стержень на участки, границами их принять сечения, в которых приложены внешние силы или изменяются геометрические размеры поперечного сечения стержня.

3. Методом сечений по формуле $N_k = - \left[\sum_{i=1}^k F_i + q_k x - a_k \right]$ опреде-

лить продольную силу на каждом участке, где k – номер участка; F_i , q_k – силы, действующие на отсеченную часть стержня; a_k – координата сечения, в котором начинается распределенная нагрузка; x – координата, определяющая положение данного сечения относительно начала координат.

4. Определить нормальное напряжение на каждом участке по формуле $\sigma_k = \frac{N_k}{A_k}$, где A_k – площадь поперечного сечения на k -м участке.

5. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений по длине стержня.

6. По эпюре нормальных напряжений, а при $A = \text{const}$ – по эпюре продольных сил, найти опасное сечение, в котором возникает наибольшее по модулю нормальное напряжение σ_{\max} .

7. При проектировочном расчете (задачи № 1, 3, 4) из условия прочности определить площадь поперечного сечения стержня:

$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]_{-}$, $A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]_{-}}$, где N_{\max} – продольная сила в опасном сечении; A – площадь поперечного сечения стержня. При проверочном расчете (задача № 2) проверить выполнение условия прочности $\sigma_k \leq [\sigma]_{-}$.

8. Определить перемещение k -го сечения по формуле

$$u_k(x) = \int \frac{N_k}{E_k A_k} dx_k + u_{k-1}.$$

Здесь u_{k-1} – перемещение начала k -го участка; x_k – координата, определяющая положение сечения относительно начала этого участка.

Найти удлинение (укорочение) k -го участка: $\Delta l_k = \int_0^{l_k} \frac{N_k}{E_k A_k} dx_k$. При

$$N_x = \text{const} \quad \Delta l_k = \frac{N_k l_k}{EA_k}.$$

Удлинение (укорочение) всего стержня определить по формуле $\Delta l = \sum_{k=1}^n \Delta l_k$, где n – число участков. Построить эпюру перемещений.

Задание 4

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ ПРЯМОГО ВАЛА

Цель работы – усвоение методики расчета на прочность и жесткость прямых стержней (валов) при кручении.

Задача № 1. Для вала, изображенного на рис. 23, требуется:

- найти момент M_0 ;
- построить эпюры крутящего момента и максимальных касательных напряжений;
- определить из условия прочности диаметр вала;
- найти углы закручивания на участках вала и полный угол закручивания вала. Построить эпюру углов закручивания по длине вала.

Номер схемы вала, параметры нагрузки и материала выбрать по номеру варианта из табл. 11. При расчете принять $M_i = n_i M$; $i = 1, 2, 3, 4$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Таблица 11

Номер строки	I	II		III		IV		
	Номер схемы	n_1	n_2	n_3	n_4	M , Н·м	a , м	$[\tau]$, МПа
1	8	2	3	4	0	50	0,35	20
2	9	5	4	0	5	80	0,20	25
3	2	3	5	3	0	60	0,40	30
4	7	6	2	0	4	40	0,25	45
5	3	7	1	5	0	70	0,50	35
6	1	2	4	0	3	90	0,30	40
7	10	4	3	2	0	40	0,45	50
8	4	3	5	0	2	100	0,25	40
9	5	6	3	1	0	50	0,40	30
0	6	5	4	0	1	60	0,30	20

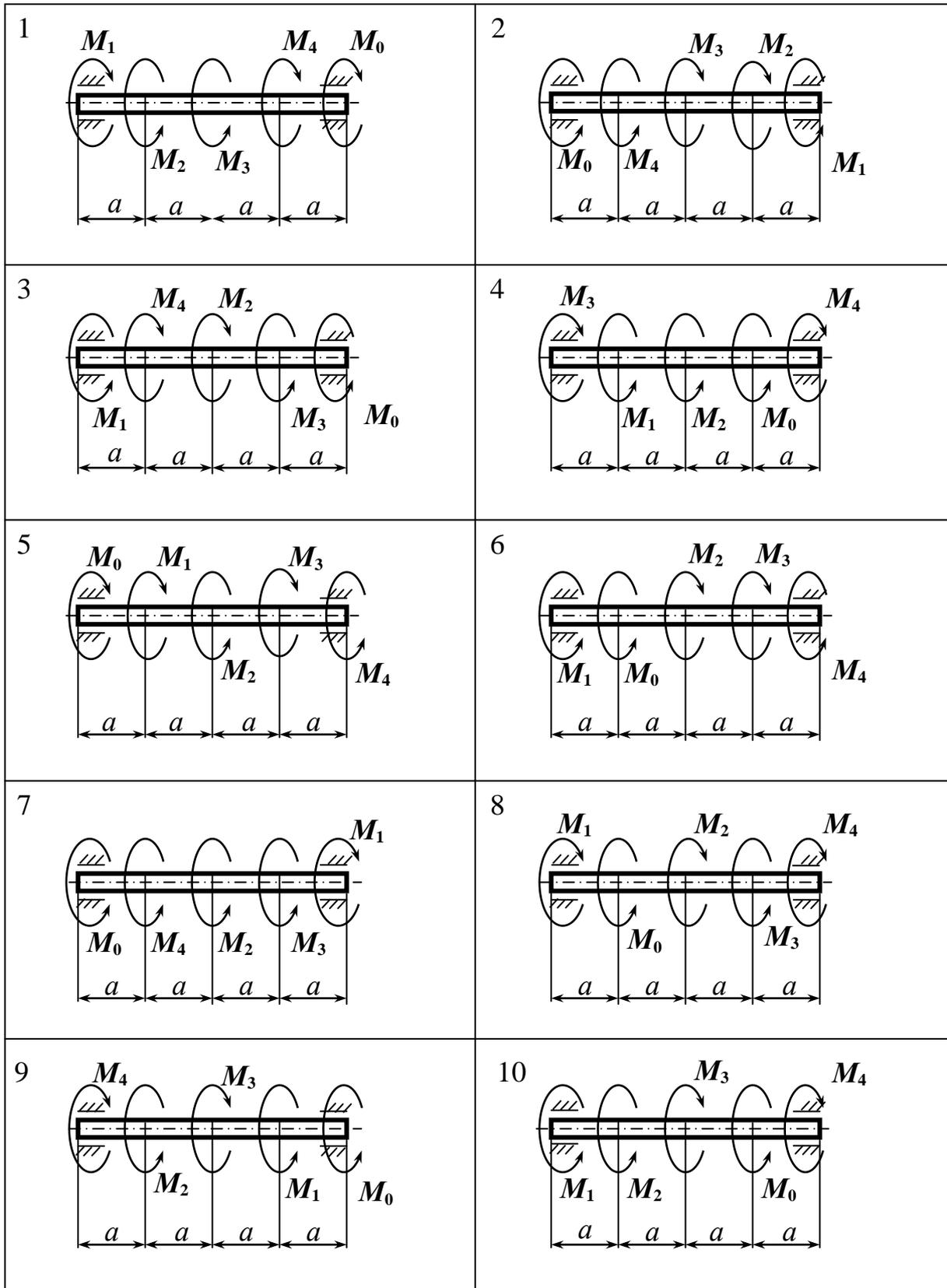
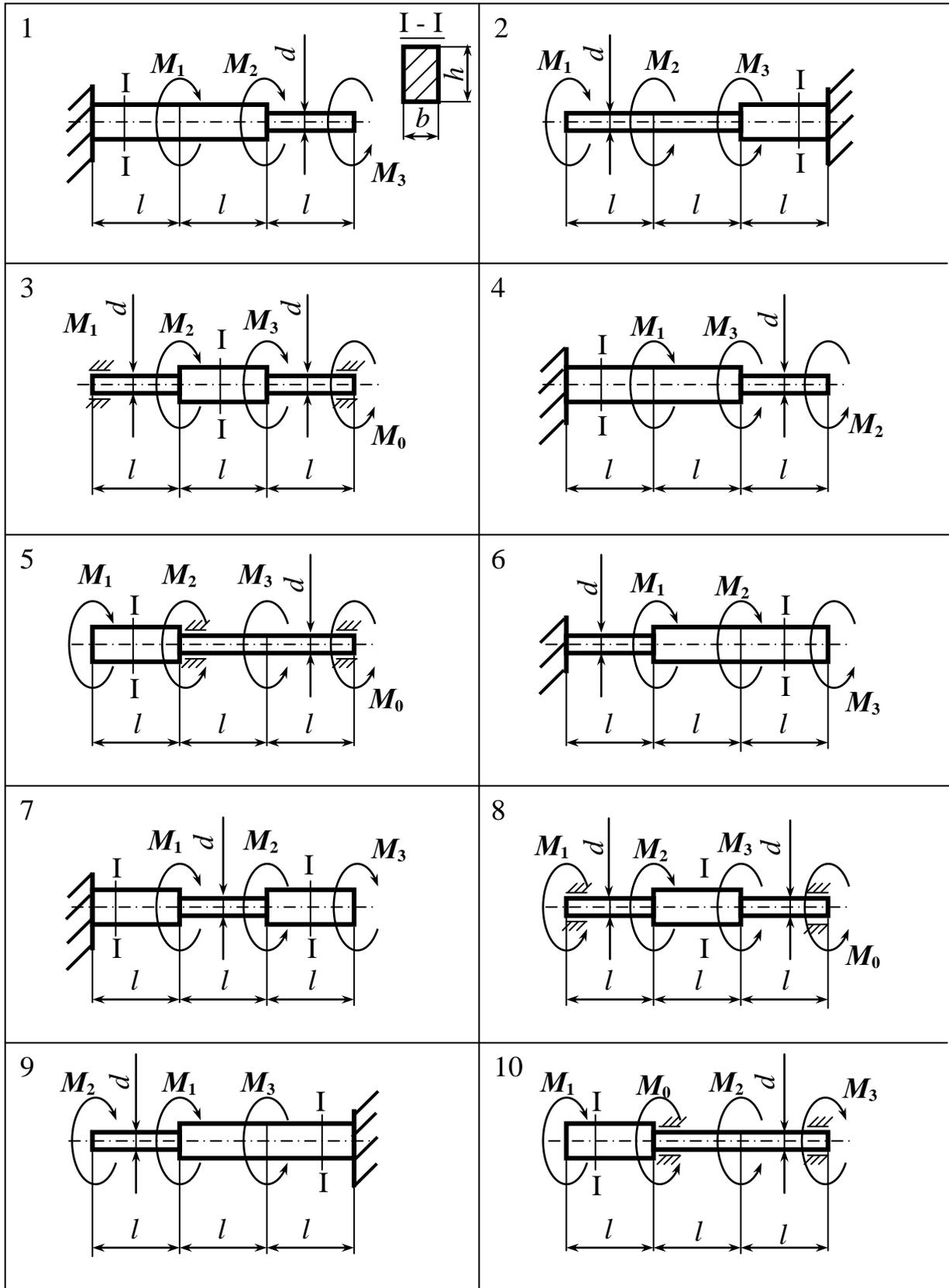


Рис. 23



Задача № 2. Для ступенчатого вала (рис. 24) требуется:

- построить эпюры крутящего момента и максимальных касательных напряжений;

- найти размеры поперечных сечений из условия прочности;

- определить полный угол закручивания вала.

Номер схемы вала, параметры нагрузки и материала выбрать по номеру варианта из табл. 12. При расчете принять $M_i = n_i M$; $i = 1, 2, 3$; $h/b = k$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Таблица 12

Номер строки	I	II			III	IV		
	Номер схемы	n_1	n_2	n_3	k	M , Н·м	l , м	$[\tau]$, МПа
1	1	2	4	3	1,6	300	0,36	80
2	2	4	5	2	1,8	200	0,40	60
3	3	3	1	2	1,4	150	0,25	50
4	4	5	2	1	2,2	400	0,50	70
5	5	6	4	3	2,0	250	0,60	40
6	6	3	5	2	2,5	350	0,45	80
7	7	4	3	1	1,2	100	0,20	50
8	8	2	6	4	3,0	180	0,30	60
9	9	7	4	5	1,8	200	0,28	40
0	10	5	3	4	1,6	160	0,40	70

Задача № 3. Для стального вала механической передачи (рис. 25) требуется:

- построить эпюру крутящего момента;

- определить из расчетов на прочность и жесткость размеры поперечного сечения вала;

- определить полный угол закручивания вала.

Номер схемы вала, данные для расчета выбрать по номеру варианта из табл. 13. Форма сечения вала показана на рис. 26.

При расчете принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4); W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4); c = \frac{d}{D}.$$

Здесь D – наружный диаметр кольцевого сечения вала; d – внутренний диаметр кольцевого сечения вала.

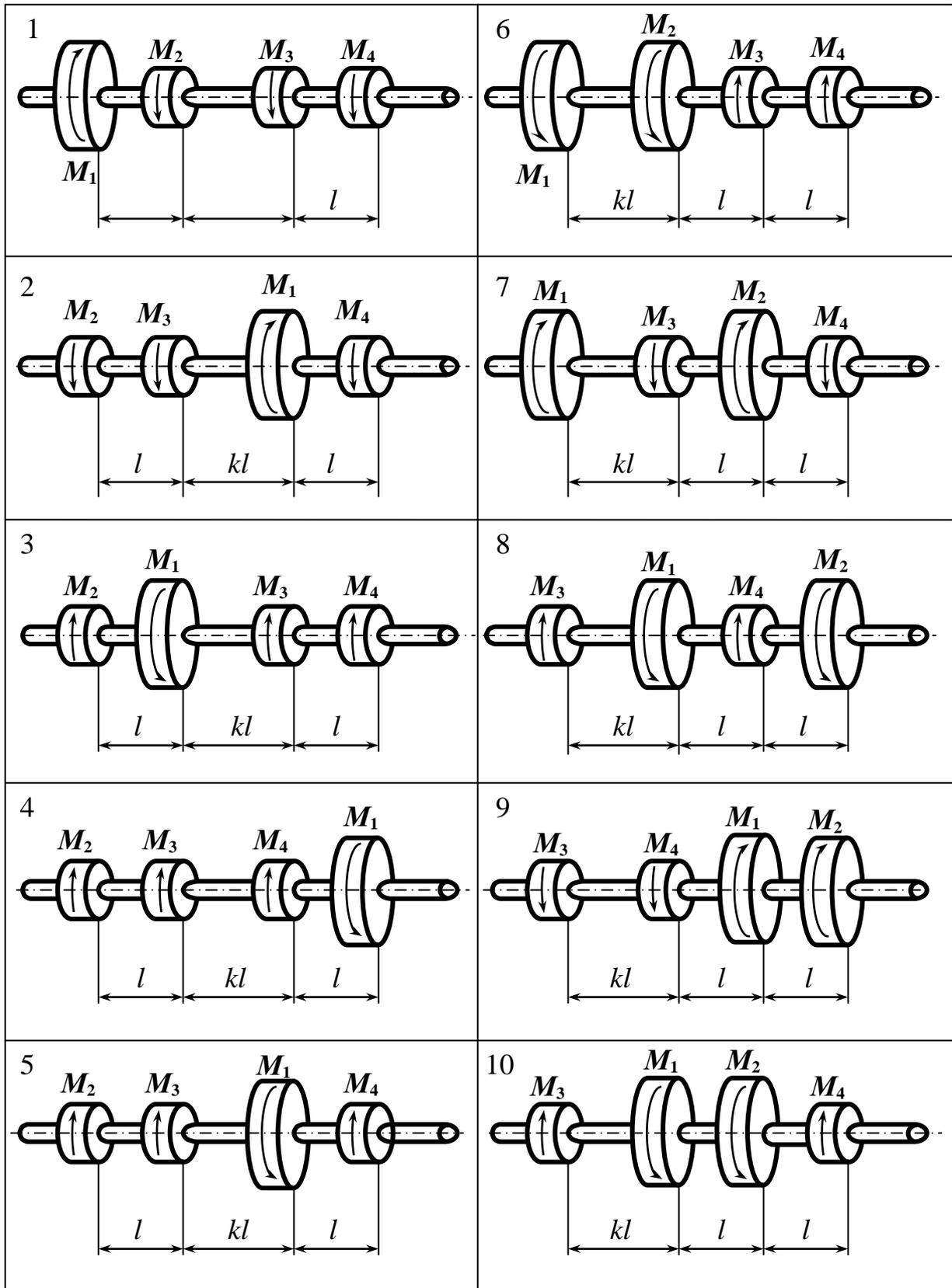


Таблица 13

Номер строки	I				II		III		IV	
	Номер схемы	M_1 , Н·м	M_2 , Н·м	M_3 , Н·м	M_4 , Н·м	l , м	k	$[\tau]$, МПа	$[\Theta]$, град/м	$c=d/D$
1	1	2400	400	1200	800	0,20	1,2	30	0,4	0,7
2	2	1800	600	800	400	0,30	1,5	40	0,5	0,6
3	3	2000	500	700	800	0,15	1,3	25	0,6	0
4	4	1200	300	400	500	0,25	1,4	20	0,7	0,4
5	5	1600	800	400	400	0,18	1,1	35	0,8	0,3
6	6	900	700	1000	600	0,16	1,6	45	0,9	0
7	7	1000	1200	600	1600	0,24	1,7	32	1,0	0,6
8	8	800	1400	1200	1000	0,10	1,8	28	0,4	0,7
9	9	500	1500	800	1200	0,28	1,9	42	0,8	0
0	10	1100	900	600	1400	0,14	2,0	45	0,5	0,5

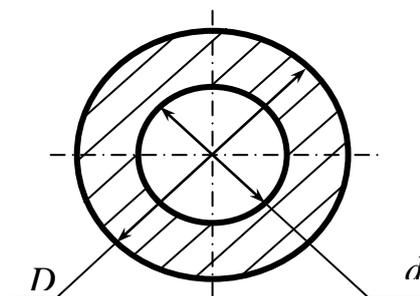


Рис. 26

Задача № 4. Для стального круглого вала постоянного сечения, нагруженного сосредоточенными моментами (рис. 27), требуется:

- определить реакцию заделки;
- построить эпюру крутящих моментов;
- определить диаметр вала из условий прочности и жесткости и подобрать ближайший стандартный диаметр (30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200 мм);
- построить эпюру относительных углов закручивания и эпюру углов поворотов сечений φ по длине вала.

Номер схемы вала, данные для расчета выбрать по номеру варианта из табл. 14. При расчете принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Таблица 14

Номер строки	I			II		III		IV		
	Номер схемы	a , м	b , м	c , м	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	M_4 , кН·м	$[\tau]$, МПа	$[\Theta]$, град/м
1	1	0,5	0,5	0,5	1,1	1,1	1,1	1,1	35	0,6
2	2	0,6	0,6	0,7	1,2	1,2	1,2	1,2	40	0,7
3	3	0,6	0,7	0,9	1,3	1,3	1,3	1,3	45	0,8
4	4	0,7	0,7	1,0	1,4	1,4	1,4	1,4	50	0,9
5	5	0,7	0,8	0,8	1,5	1,5	1,5	1,5	55	1,0
6	6	0,8	0,8	0,9	1,6	1,6	1,6	1,6	60	0,6
7	7	0,8	0,9	1,0	1,7	1,7	1,7	1,7	65	0,7
8	8	0,9	0,9	1,1	1,8	1,8	1,8	1,8	70	0,8
9	9	0,9	1,0	1,2	1,9	1,9	1,9	1,9	75	0,9
0	10	1,0	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0	80	1,0

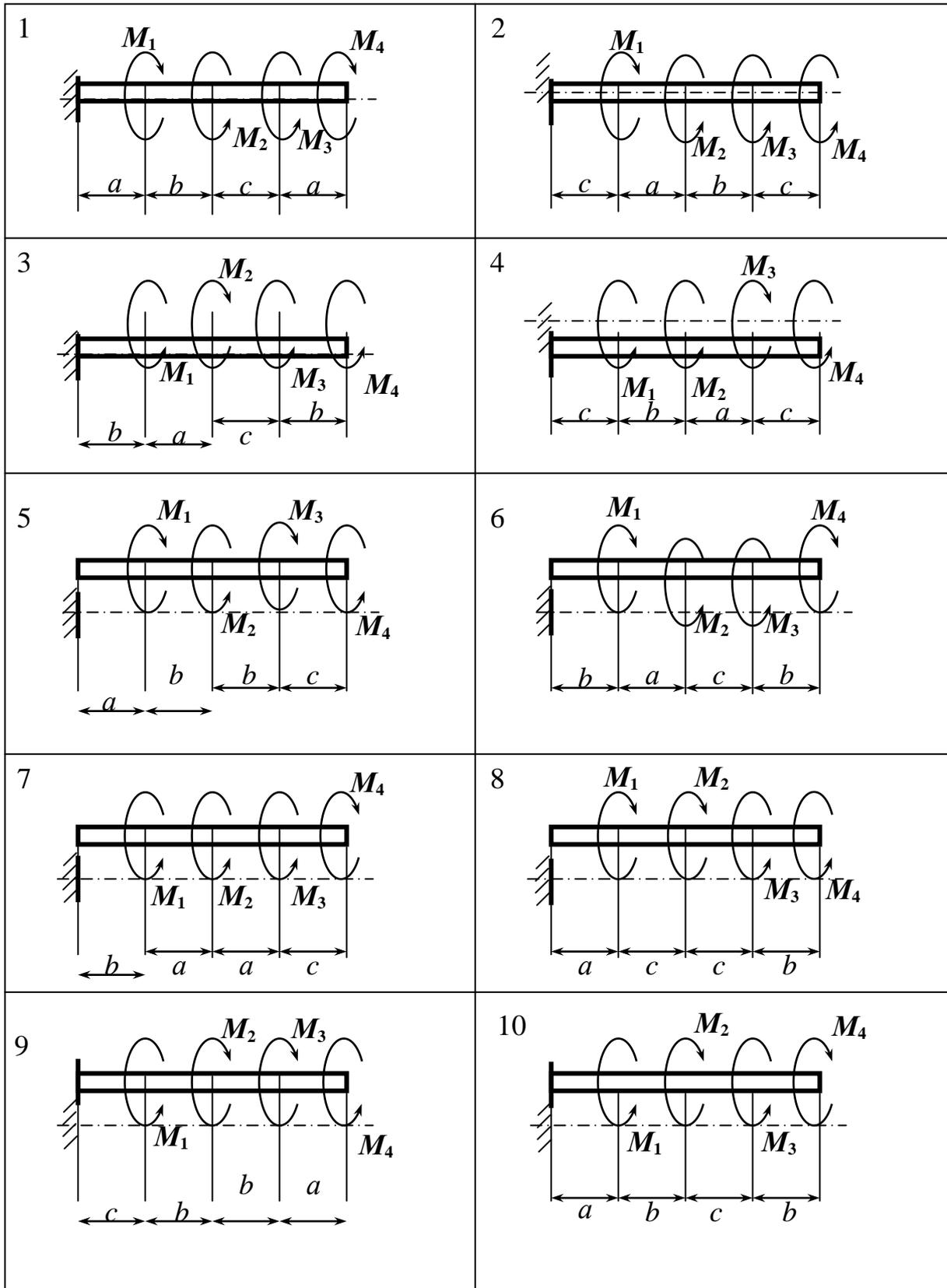


Рис. 27

Указания к выполнению задания

1. Составить уравнения равновесия внешних моментов относительно оси вала и найти момент M_0 или момент заделки:

$$M_0 = - \sum_{i=1}^m M_i,$$

где m – число внешних моментов; M_i – внешний момент.

2. Разбить вал на участки и методом сечений определить крутящий момент на каждом участке по формуле

$$M_{kj} = - \sum_{i=1}^j M_i,$$

где j – номер участка; M_i – внешние моменты, приложенные к отсеченной части вала.

3. Построить эпюры крутящих моментов и наибольших касательных напряжений. Наибольшие касательные напряжения в точках, наиболее удаленных от центра сечения, найти по формуле

$$\tau_{\max j} = \frac{M_{kj}}{W_k},$$

где W_k – момент сопротивления сечения при кручении, для круглого

сплошного сечения $W_k = W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, где d – диаметр вала; для прямо-

угольного сечения - $W_k = \alpha h b^2$; h – высота сечения; α – коэффициент, зависящий от формы сечения [1, 2]; b – ширина сечения.

4. По эпюре наибольших касательных напряжений, а при $d = \text{const}$ – по эпюре крутящих моментов найти опасное сечение вала и подобрать размеры поперечного сечения вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k \max}}{W_k} \leq [\tau],$$

отсюда

$$W_k \geq \frac{M_{k \max}}{[\tau]}.$$

Для круглого сплошного сечения $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{k \max}}{\pi [\tau]}}$, для прямоуголь-

ного - $b \geq \sqrt[3]{\frac{M_{k \max}}{\alpha k [\tau]}}$, где $k = \frac{h}{b}$.

5. Определить углы закручивания сечений на участках вала:

$$\varphi_j = \frac{M_{kj} l_j}{GJ_{kj}},$$

где M_{kj} - крутящие моменты на участках; l_j - длина участков; G - модуль сдвига; J_{kj} - моменты инерции сечения при кручении. Для круглого сплошного сечения $J_k = J_p = \frac{\pi d^4}{32}$, для прямоугольного - $J_k = \beta hb^3$ [1, 2].

По формуле

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi_j$$

найти полный угол закручивания вала, где n – число участков вала.

6. Определить относительный угол закручивания на j -м участке по формуле

$$\Theta_j = \frac{M_{kj}}{GJ_k},$$

или

$$\Theta_j = \frac{\varphi_j}{l_j}.$$

Построить эпюру относительных углов закручивания.

7. Найти диаметр вала из условия жесткости (задачи № 3, 4):

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{k \max}}{GJ_p} \leq [\Theta],$$

отсюда $J_p \geq \frac{M_{k \max}}{G[\Theta]}$, и для кольцевого сечения (задача № 3) $D_{\text{ж}} = \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi(c^4 - c^4)}}$;

для сплошного круглого сечения (задача № 4) $d_{\text{ж}} \geq \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi}}$.

Выбрать окончательно наибольший диаметр вала из двух значений, найденных из условий прочности и жесткости.

Задание 5

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

Цель работы – усвоение методики расчета на прочность балок при прямом изгибе.

Задача № 1. Для балки (рис. 28) требуется:

- построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента;
- из условия прочности определить размеры прямоугольного и двутаврового сечений балки и сравнить балки с этими сечениями по расходу материала;
- определить наибольшие касательные напряжения в обоих сечениях балки, проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям;
- построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки.

Схему балки и параметры нагрузки выбрать из табл. 15 по номеру варианта. При расчетах принять $\sigma_{\text{ср}} = 160$ МПа, $\tau_{\text{ср}} = 0,5 \sigma_{\text{ср}}$.

Таблица 15

Номер строки	I	II			III		IV		
	Номер схемы	h/b	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м
1	3	2,0	22	12	14	10	10	1,2	2,8
2	4	2,5	20	25	15	8	8	1,4	2,6
3	1	1,8	18	9	18	6	9	1,6	2,4
4	6	1,6	16	14	16	12	6	1,8	2,2
5	9	2,0	14	10	24	8	12	2,0	1,8
6	8	2,2	15	12	12	18	9	2,4	1,6
7	10	2,4	12	24	9	15	12	2,5	1,5
8	2	1,8	10	15	10	24	8	2,6	1,4
9	7	1,6	8	20	24	9	6	2,8	1,2
0	5	2,5	24	8	20	6	10	3,0	1,5

Задача № 2. Для балки (рис. 29) требуется:

- построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента;
- определить из условия прочности размеры квадратного сечения балки;
- определить прогиб и угол поворота сечения D .

Номер схемы балки и параметры нагрузки выбрать по номеру варианта из табл. 16. При расчетах принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

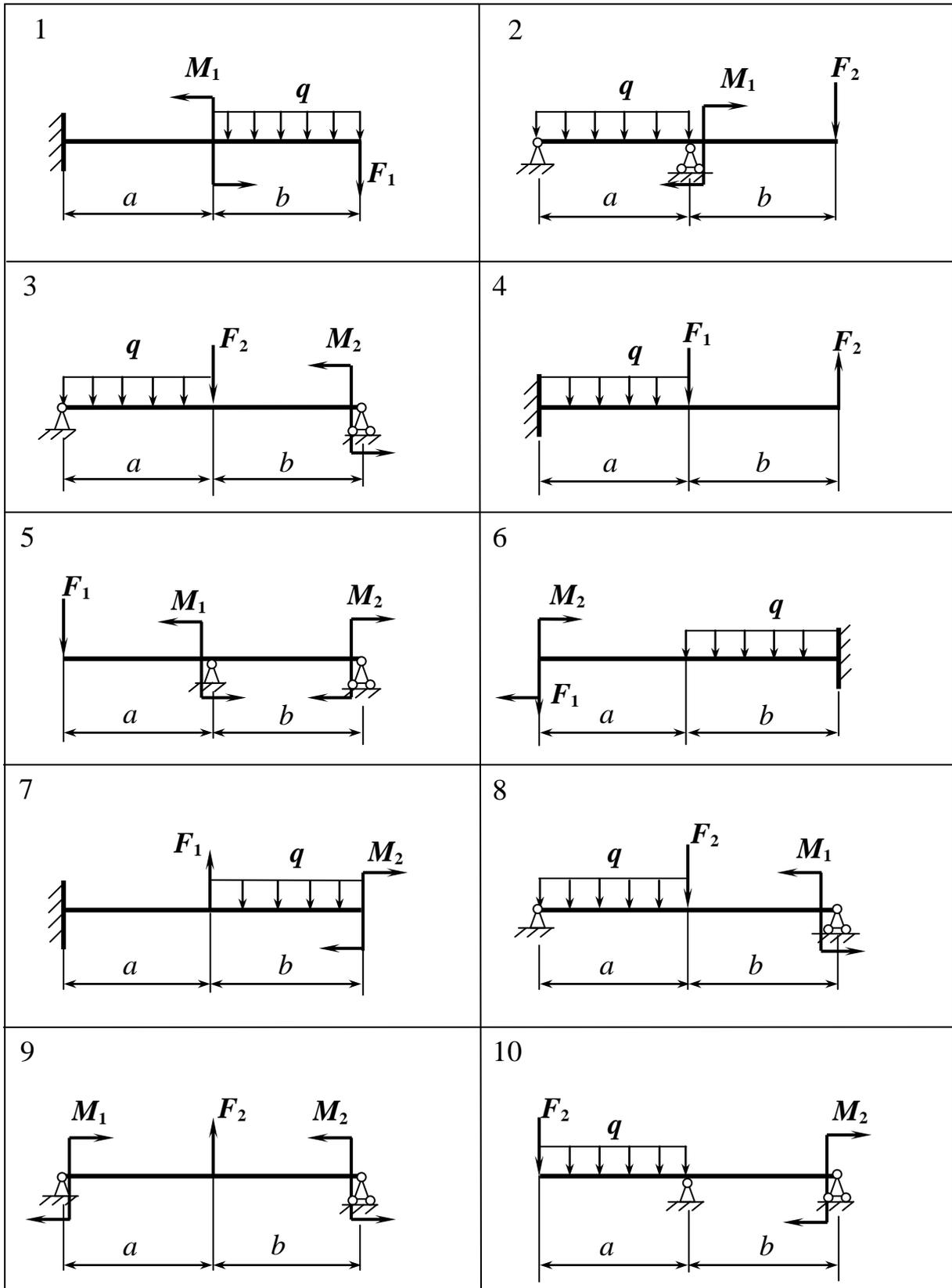


Рис. 28

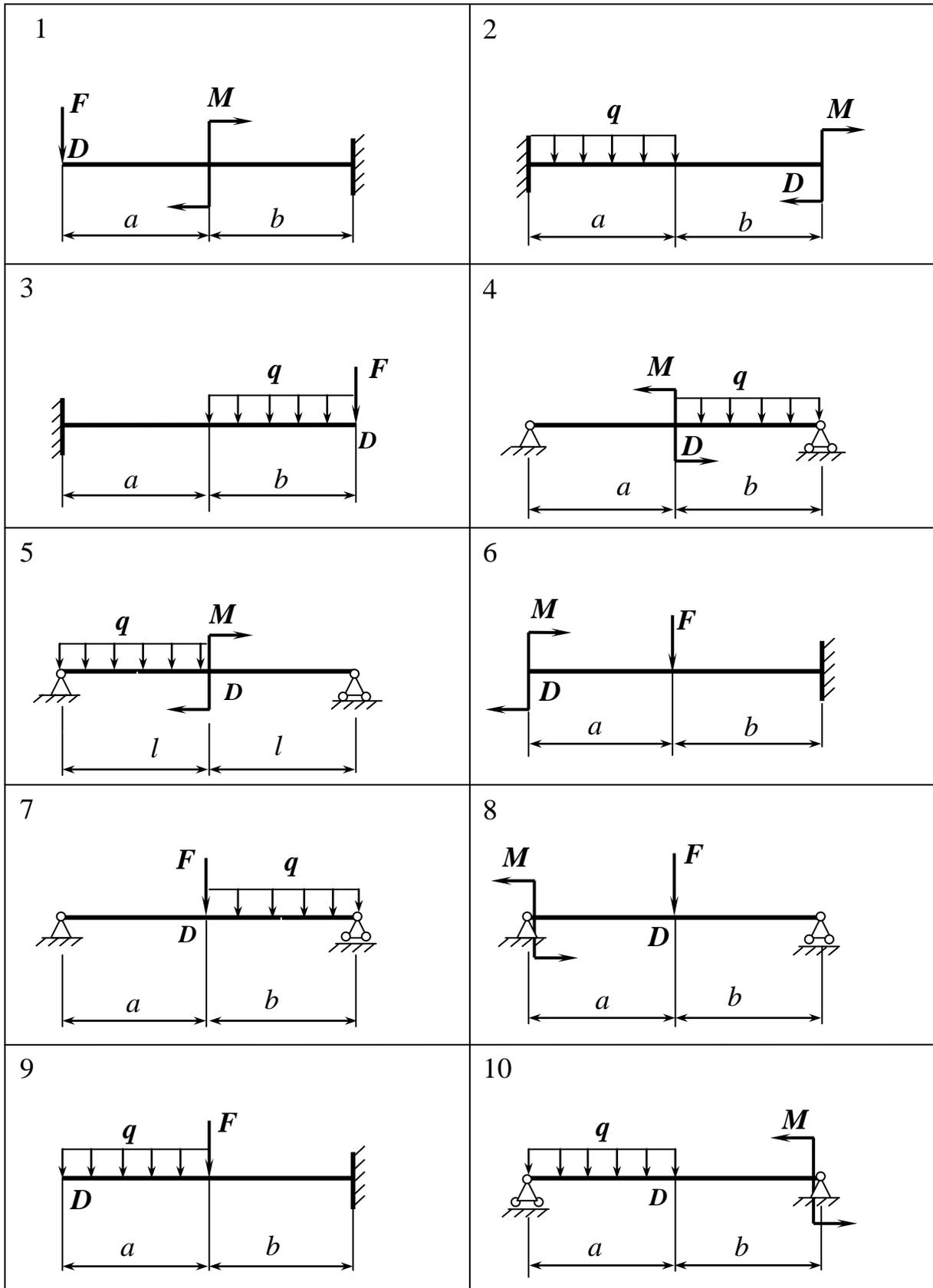


Рис. 29

Таблица 16

Номер строки	I	II		III	IV		
	Номер схемы	a , м	b , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	$[\sigma]$, МПа
1	9	1,8	2,4	12	9	10	160
2	8	1,5	3,0	10	5	8	180
3	10	1,6	2,0	14	8	6	200
4	7	2,0	2,5	8	12	4	150
5	3	1,2	2,4	16	15	9	210
6	1	1,4	2,8	18	10	2	160
7	5	2,2	3,3	9	8	5	180
8	6	0,8	3,2	24	14	4	200
9	4	1,2	3,6	20	18	8	150
0	2	1,6	2,4	15	16	6	170

Задача № 3. Для балки (рис. 30) требуется:

- построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента;
- из условия прочности найти момент сопротивления поперечного сечения балки. Определить диаметр круглого поперечного сечения и номер стандартной двутавровой балки. Сравнить балки с круглым и двутавровым сечениями по расходу материала;
- определить наибольшие касательные напряжения в опасном сечении балки для обоих сечений и проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям;
- построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки.
- найти прогиб и угол поворота сечения D .

Данные для расчета выбрать по номеру варианта из табл. 17. При расчете принять $\mu = 0,6$.

Таблица 17

Номер строки	I	II			III		IV
	Номер схемы	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м	$[\sigma]$, МПа
1	1	16	3,6	20	1,2	1,8	200
2	2	12	4,8	10	0,8	1,6	180
3	3	18	5,4	15	1,0	2,4	160
4	4	24	6,0	18	0,6	1,4	140
5	5	20	7,2	22	1,6	1,8	120
6	6	10	8,4	16	0,6	2,2	210
7	7	8	9,6	12	1,4	2,0	140
8	8	25	2,4	8	0,5	1,5	160
9	9	6	3,2	24	2,0	2,8	180
0	10	15	4,5	6	1,2	2,6	140

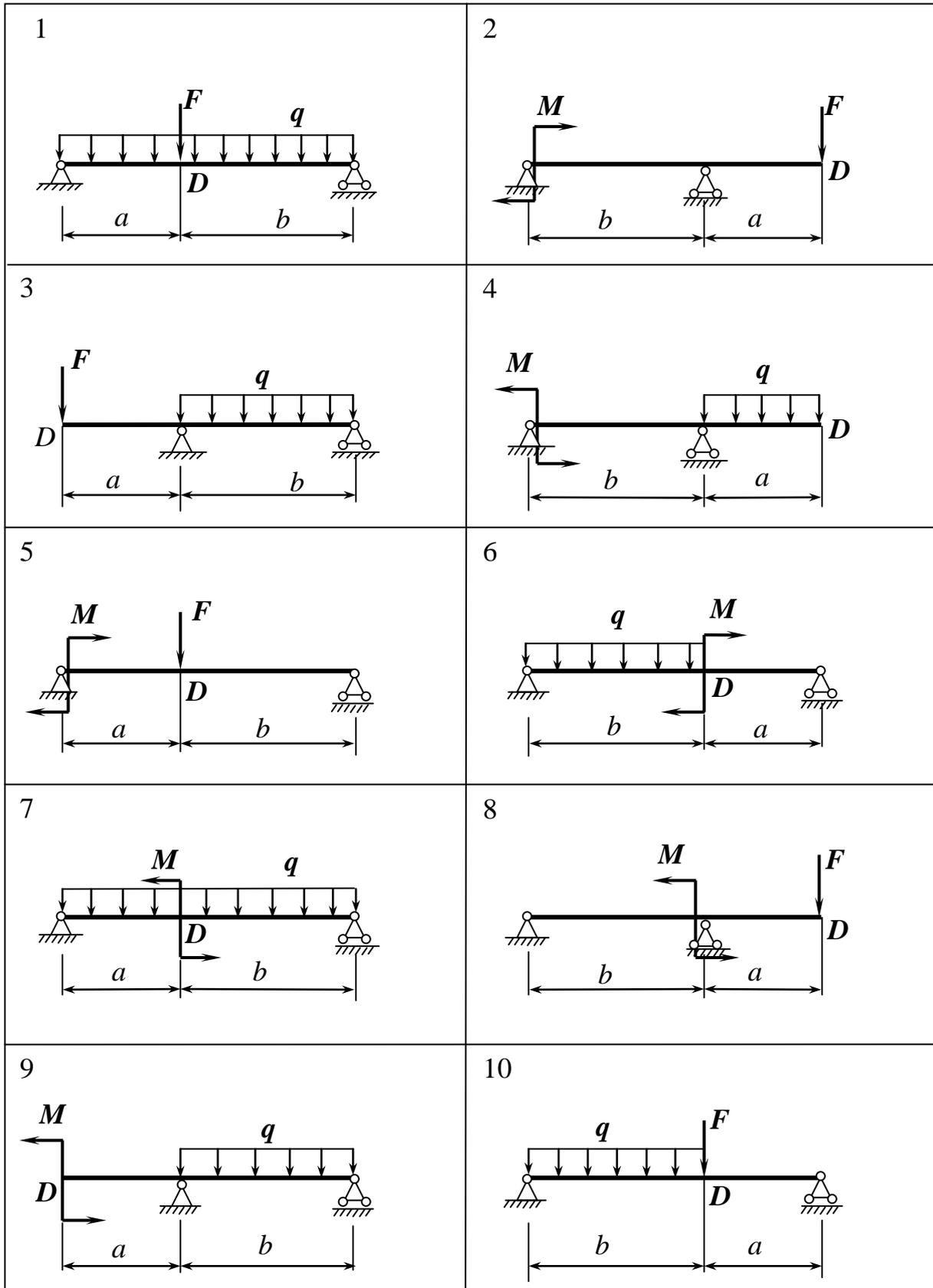


Рис. 30

Задача № 4. Для балки (рис. 31) требуется:

- построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента;
- определить из условия прочности момент сопротивления поперечного сечения балки и найти размеры поперечного квадратного сечения балки;
- определить прогиб и угол поворота на свободном конце балки.

Схему балки и данные для расчета выбрать по номеру варианта из табл. 18. При расчете принять $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблица 18

Номер строки	I	II		III	IV	
	Номер схемы	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	l , м	a , м
1	1	25	10	16	3,2	2,0
2	2	20	12	20	3,6	2,2
3	3	18	14	15	2,8	1,5
4	4	24	16	6	2,7	1,4
5	5	28	8	8	3,6	1,8
6	6	30	18	10	3,0	1,6
7	7	32	20	9	3,5	2,0
8	8	10	24	12	4,0	2,5
9	9	12	22	18	4,2	2,6
0	10	8	30	14	3,4	1,8

Задача № 5. Балка (рис. 32, а) изготовлена из материала, у которого $[\sigma_p] = \nu \sigma_c$. Требуется:

- построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента;
- из условия прочности по нормальным напряжениям найти размер a заданного сечения балки и определить высоту h и ширину b сечения, расположить поперечное сечение относительно нагрузки рационально с учетом условия экономичного использования материала;
- построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях.

Схему балки, вид поперечного сечения (рис. 32, б), значения сил и длину балки выбрать по номеру варианта из табл. 19.

Указания к выполнению задания

Расчет на прочность и определение перемещений балки постоянного сечения рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Определить реакции опор.

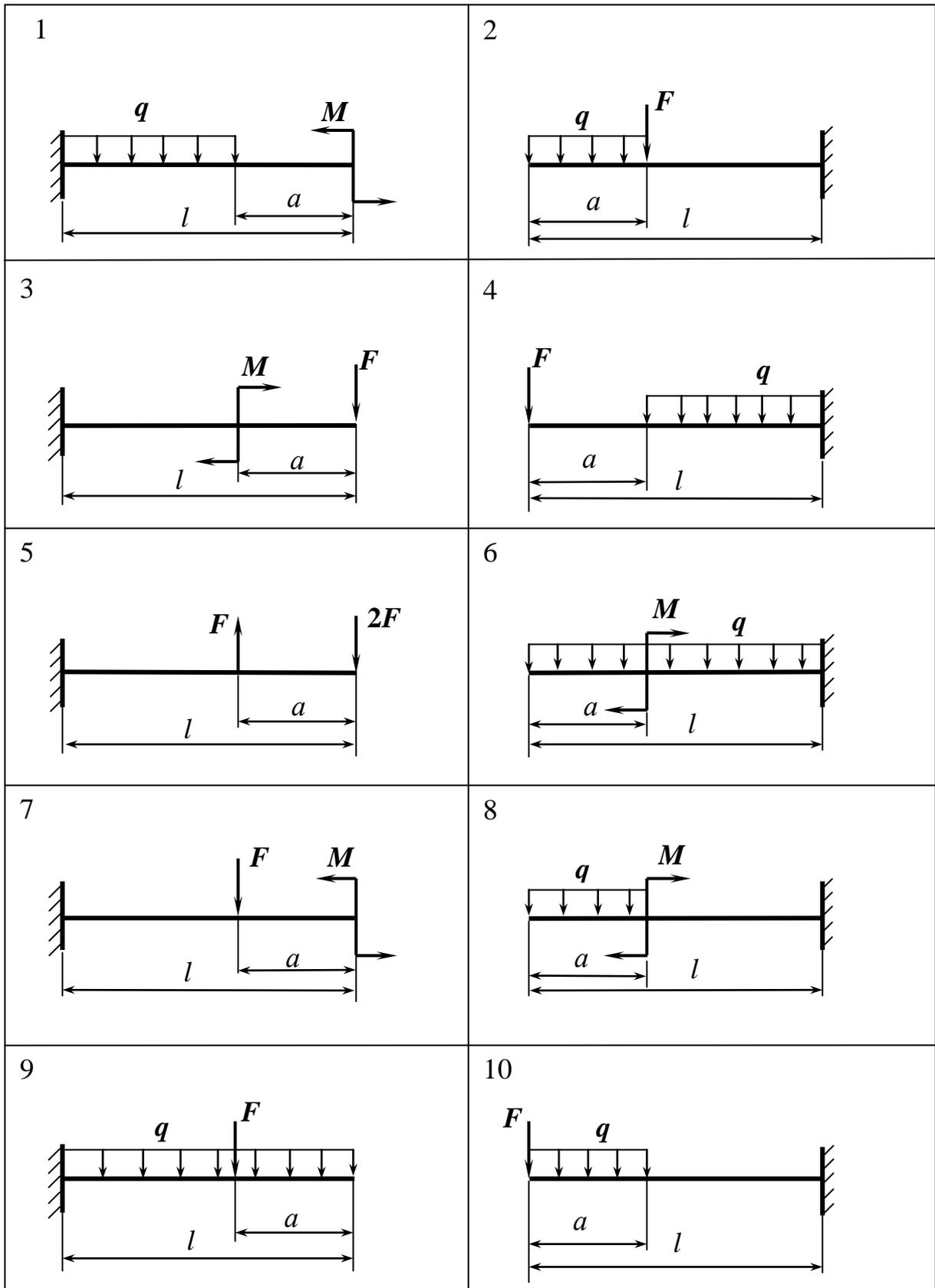
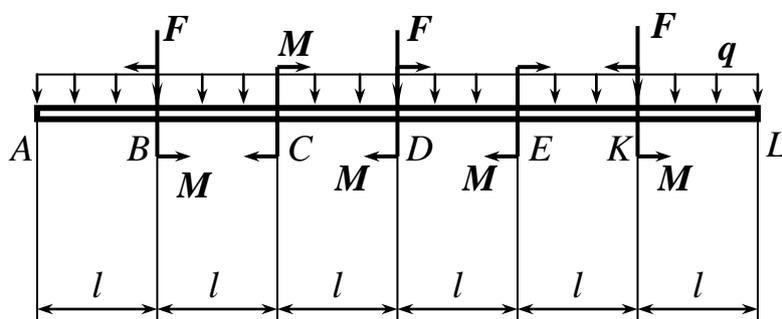


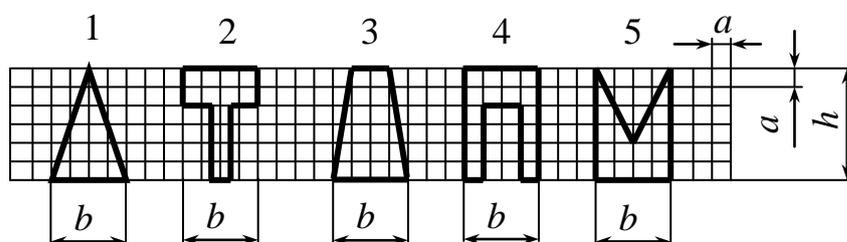
Рис. 31

Таблица 19

Номер строки	I			II			III			IV			
	l , м	Опоры			Сечение	Нагрузка в сечении			F , кН	M , кН·м	q , кН/м	$[\sigma_c]$, МПа	ν
						F	M	q на участке					
1	0,5	A	E		1	B	C	AB	12	5	18	140	0,5
2	0,6	A	L		2	D	B	KL	8	10	16	160	0,4
3	0,7	C	L		3	K	D	BC	16	8	14	100	0,3
4	0,8	C	E		4	D	K	EL	10	8	12	180	0,6
5	0,9			A	5	B	D	AC	15	10	20	90	0,3
6	1,0			L	1	B	C	BD	8	12	18	120	0,4
7	0,5	A	E		2	K	B	CE	6	10	16	130	0,5
8	0,6			L	3	D	K	BC	9	12	10	80	0,3
9	0,7	C	L		4	B	D	DE	14	6	12	150	0,5
0	0,8			A	5	K	B	CD	18	9	24	100	0,4



а)



б)

Рис. 32

2. Разбить балку на участки, ось x совместить с продольной осью балки, а начало координат взять на левом конце балки. Составить аналитические выражения поперечной силы и изгибающего момента в продольном сечении на каждом участке по формулам

$$Q_{yj} = \sum_{i=1}^j F_i + q_j (x - c_j); \quad M_{zj} = \sum_{i=1}^j \left[-M_i + F_i (x - b_i) + \frac{q_j (x - c_j)^2}{2} \right],$$

где j – номер участка; x – координата, определяющая положение сечения; M_i, F_i, q_j – факторы внешней нагрузки, действующие на отсеченную левую часть балки; c_j, b_i – координаты сечений, в которых начинается распределенная нагрузка q_j и приложена внешняя сила F_i .

3. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

4. По эпюре изгибающего момента найти опасное сечение, в котором возникает наибольший изгибающий момент $M_{z \max}$. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить момент сопротивления поперечного сечения балки W_z :

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{z \max}|}{W_z} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

отсюда $W_z \geq \frac{|M_{z \max}|}{\sigma_{\text{доп}}}$.

По найденному значению W_z найти размеры поперечного сечения: для прямоугольного – b и h , для круглого – диаметр d . Подобрать по таблице номер стандартного двутаврового сечения. Сравнить балки с заданными сечениями по расходу материала.

5. Определить наибольшее касательное напряжение в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии, которая для симметричного сечения совпадает с осью z :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_z^*}{J_z b_y}$$

Здесь $Q_{y \max}$ – наибольшая поперечная сила, определяемая по эпюре поперечных сил; S_z^*, J_z – статический момент и осевой момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной линии (оси z); b_y – ширина поперечного сечения по нейтральной линии.

Проверить выполнение условия прочности по касательным напряжениям для заданных сечений балки:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{доп}}.$$

6. Построить эпюры σ и τ в опасных сечениях.

7. Определить перемещения в указанных сечениях балки методом Мора, применяя для вычисления интегралов способ Верещагина или Симпсона.

8. Расчет на прочность балки из хрупкого материала, у которого $\sigma_{c-} \geq \sigma_{p-}$ (задача № 5), следует вести с учетом двух условий прочности для сжатых и растянутых волокон:

$$|\sigma_{\max c}| = \frac{|M_{z \max}|}{J_z} y_1 \leq \sigma_{c-}$$

и

$$\sigma_{\max p} = \frac{|M_{z \max}|}{J_z} y_2 \leq \sigma_{p-},$$

где $M_{z \max}$ - наибольший по абсолютному значению изгибающий момент в опасном сечении балки; y_1, y_2 - наибольшие расстояния от сжатых и растянутых волокон до нейтральной линии. Если по длине балки знак изгибающего момента меняется на противоположный, то необходимо проверить выполнение обоих условий прочности для того сечения, в котором этот момент достигает наибольшего абсолютного значения.

Размеры поперечного сечения балки и его положение относительно нагрузки необходимо подобрать так, чтобы выполнялись оба условия прочности и при этом размеры поперечного сечения были бы минимальными, что обеспечивает экономию расхода материала.

Задание 6

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Цель работы – развитие навыков определения главных напряжений при произвольном напряженном состоянии.

Задача № 1, 2 Напряженное состояние в точке тела задано его компонентами (рис. 33, 34). Материал имеет коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Требуется:

- определить главные напряжения и проверить правильность их вычисления;
- определить положение главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к площадкам);
- используя закон Гука, определить главные деформации.

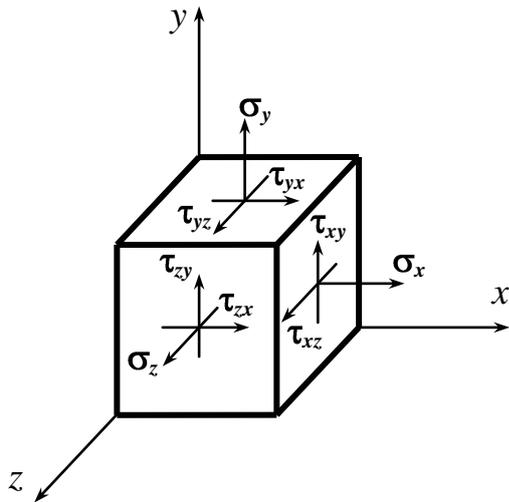


Рис. 33

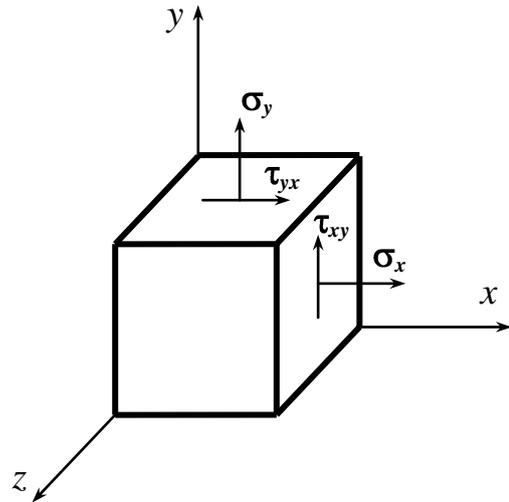


Рис. 34

Исходные данные к задаче № 1 взять из табл. 20, к задаче № 2 – из табл. 21 по номеру варианта.

Таблица 20

Номер строки	I		II	III		IV	
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа	$E \cdot 10^5$, МПа
1	80	-60	120	20	-40	80	2,0
2	100	20	100	40	20	-60	1,2
3	90	-40	30	70	-50	40	0,8
4	-90	10	20	90	110	-20	2,0
5	100	-20	40	50	-70	10	2,0
6	80	100	60	80	10	-30	1,2
7	-60	80	70	60	30	50	2,0
8	-50	90	90	100	-80	-70	0,8
9	20	30	50	120	100	90	2,0
0	10	70	80	10	-120	-100	1,2

Таблица 21

Номер строки	I	II	III	IV
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа	$E \cdot 10^5$, МПа
1	40	-140	90	2,0
2	50	100	80	1,2

Номер строки	I	II	III	IV
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа	$E \cdot 10^5$, МПа
3	-80	80	-70	2,0
4	60	-170	-60	0,8
5	90	120	50	1,2
6	-20	-110	40	2,0
7	30	85	110	1,2
8	100	60	-120	1,4
9	-120	-40	130	2,0
0	-150	25	70	1,2

Указания к выполнению задания

При трехосном (трехмерном) напряженном состоянии нахождение главных напряжений сводится к решению кубического уравнения вида

$$\sigma_k^3 - J_1\sigma_k^2 + J_2\sigma_k - J_3 = 0,$$

где $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$;

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{yx}^2 =$$

$= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ - инварианты кубического уравнения;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения.

При современных вычислительных средствах получить решение кубического уравнения не представляет большой сложности (метод итераций, метод Ньютона - Рафсона и другие методы нахождения корней алгебраических уравнений). Наиболее простое решение получается, если применить подстановку

$$\sigma_k = S_k + \sigma_{cp},$$

$$\text{где } \sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Тогда исходное кубическое уравнение можно записать как

$$S_k^3 + pS_k + q = 0,$$

где $p = J_2 - 3\sigma_{cp}^2$; $q = -J_3 - 2\sigma_{cp}^3 + J_2\sigma_{cp}$.

Корни полученного уравнения

$$S_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varphi/3;$$

$$S_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varphi/3 + 120^\circ ;$$

$$S_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varphi/3 + 240^\circ ;$$

$$\cos \varphi = -\frac{0,5q}{\sqrt{-p^3/27}}.$$

Для нахождения положения главных площадок используем выражения

$$\left(\frac{m_k}{l_k}\right) = \frac{\tau_{xy}\tau_{xz} - \sigma_x - \sigma_k \tau_{zy}}{\tau_{yx}\tau_{zy} - \sigma_y - \sigma_k \tau_{zx}};$$

$$\left(\frac{n_k}{l_k}\right) = \frac{\sigma_x - \sigma_k \tau_{xy} - \sigma_y - \sigma_k \tau_{xy}^2}{\tau_{yx}\tau_{zy} - \sigma_y - \sigma_k \tau_{zx}};$$

$$l_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_k}{l_k}\right)^2 + \left(\frac{n_k}{l_k}\right)^2}};$$

$$m_k = l_k \left(\frac{m_k}{l_k}\right); \quad n_k = l_k \left(\frac{n_k}{l_k}\right).$$

Для двухосного (плоского) напряженного состояния (задача № 2) значения главных напряжений получим из выражения:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Положение главной площадки определяется углом α_k между нормалью к площадке и осью x , которое находим из выражения:

$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_k - \sigma_y}$$

Компоненты главных деформаций находим из выражений обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{aligned} \right\}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящий практикум включает задания, выполнение которых помогает освоению курса сопротивления материалов, позволяет овладеть методикой решения задач, основами инженерных расчетов типовых элементов конструкций на прочность и жесткость. Самостоятельная работа над заданиями поможет студентам приобрести необходимые навыки в решении задач по указанным темам курса. Эти навыки и полученные знания позволят применить изученные методы к решению задач в более сложных расчетах, которым соответствуют задания, включенные во вторую часть практикума, а также послужат основой для решения специальных задач проектирования и конструирования инженерных конструкций и их элементов соответственно специальностям, по которым обучаются студенты.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

КУРСОВАЯ РАБОТА
(РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА)
по _____
(название курса)

(название курсовой или расчетно-проектировочной работы)

Вариант _____

Выполнил: ст-т _____
(Ф.И.О.)

гр. _____

Принял _____
(ФИО.преподавателя)

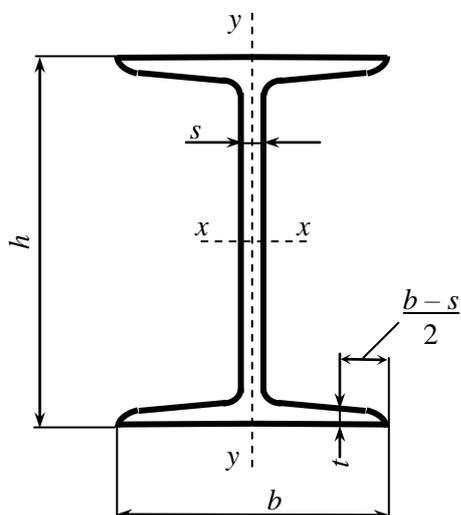
Владимир 2007

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

A – площадь сечения; C – центр тяжести сечения; z, y – центральные оси сечения; J_z, J_y – осевые моменты инерции сечения; J_{zy} – центробежный момент сечения.

Фигура	A	J_z	J_y	$ J_{zy} $
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$\frac{b^2h^2}{72}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$	0
	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	0
	$\frac{\pi R^2}{2}$	$0,11R^4$	$\frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}$	0

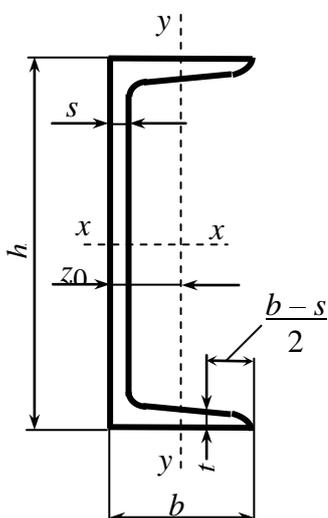
**ДУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
(ГОСТ 8239-89)**



- h - высота двутавра
- b - ширина полки
- s - толщина стенки
- t - средняя толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- W - момент сопротивления
- S - статический момент полусечения
- i - радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	$W_{x,3}$, см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	$W_{y,3}$, см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

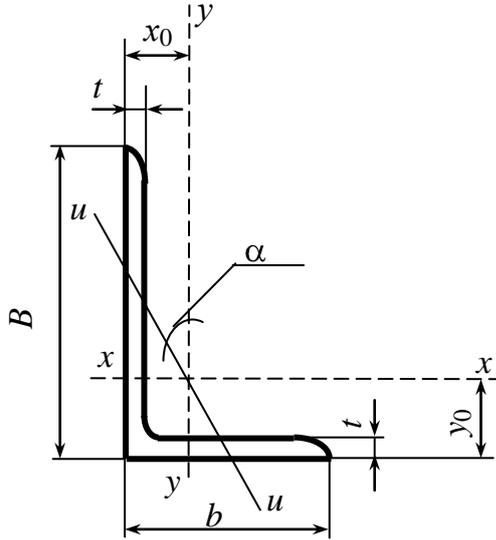
**ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
(ГОСТ 8240-89)**



- h - высота швеллера
- b - ширина полки
- s - толщина стенки
- t - средняя толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- W - момент сопротивления
- S - статический момент полусечения
- i - радиус инерции
- z_0 - расстояние от оси y до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м/кг	Размер, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	5,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	10	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	10	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	11	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	11	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

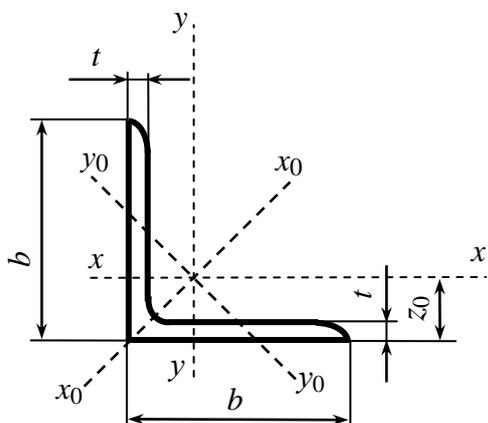
**УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ
(ГОСТ 8510-86)**



- B - ширина большей полки
- b - ширина меньшей полки
- t - толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- i - радиус инерции
- α - угол наклона главной центральной оси
- I_{xy} - центробежный момент инерции
- x_0, y_0 - расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

Но- мер угол- ка	Мас са, 1 м, кг	Размер, мм			$A,$ см ²	$I_x,$ см ⁴	$i_x,$ см	$I_y,$ см ⁴	$i_y,$ см	$I_{umin},$ см ⁴	$i_{umin},$ см	tg α	$I_{xy},$ см ⁴	$x_0,$ см	$y_0,$ см
		B	b	t											
5/3,2	2,40	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,70	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,70			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11,0	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,80	4,01
	12,6			8	16,0	256	4,0	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18,0	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	213	2,28	5,23
	23,6			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,50
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

**УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ
(ГОСТ 8509-93)**



b - ширина полки
 t - толщина полки
 A - площадь поперечного сечения
 I - момент инерции
 i - радиус инерции
 I_{xy} - центробежный момент инерции
 z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размер, мм		A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	I_{y0min} , см ⁴	i_{y0min} , см	$ I_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,90
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3,0

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размер, мм		A, см ²	I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x0max} , см ⁴	i _{x0max} , см	I _{y0min} , см ⁴	i _{y0min} , см	I _{xy} , см ⁴	z ₀ , см
		b	t									
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22,0	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,40
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
	27,0		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34,0		14	43,6	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сопротивление материалов / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Выща шк., 1986. – 775 с.

2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Высш. шк., 1986. – 512 с.

3. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1975 – 654 с.

4. Миролюбов, И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролюбов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1985. – 399 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
<i>Задание 1.</i> ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	4
<i>Задание 2.</i> ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ	11
<i>Задание 3.</i> РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ..	24
<i>Задание 4.</i> РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ ПРЯМОГО ВАЛА	32
<i>Задание 5.</i> РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ	41
<i>Задание 6.</i> ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
Приложения	55
Рекомендательный библиографический список	61

Учебное издание

БУРЛАКОВА Алла Михайловна
КОВАЛЕВ Арнольд Федорович
ТАНКЕЕВА Маргарита Геннадьевна
и др.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Практикум

Часть 1

Редактор Р.С. Кузина
Технический редактор Н.В. Тупицына
Корректор Е.А. Амирсейидова
Компьютерный набор Т.А. Козловой
Компьютерная верстка С.В. Павлухиной

Подписано в печать 11.01.07.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,95. Тираж 300 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.