Владимирский государственный университет

Н. Ю. Куранова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-практическое пособие

Электронное мультимедийное издание

Владимир 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

13 4 6 8
2 1 0
5 7 11 9
11 1 12 13
Кафедра
ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 2 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Н. Ю. КУРАНОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-практическое пособие

Электронное мультимедийное издание

ISBN 978-5-9984-2161-7

Владимир 2024

УДК 512.5

ББК 22.144

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, доцент

доцент кафедры вычислительной техники и систем управления

Владимирского государственного университета

имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

А. В. Шутов

Кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры специальной техники и информационных технологий

Владимирского юридического института ФСИН России

А. В. Хорошева

Куранова, Н. Ю. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА [Электронный мультимедийный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Н. Ю. Куранова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2024. – 275 с. – ISBN 978-5-9984-2161-7. – Электрон. дан. (222,4 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

В пособии доступно и всесторонне рассмотрены основные понятия линейной алгебры. Упражнения и задачи могут быть использованы как задания контрольных работ. Составлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Алгебра и теория чисел».

Предназначено для студентов 1 – 2-го курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование, может быть адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-9984-2161-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра – один из фундаментальных разделов алгебры, изучающий объекты линейной природы. Первым по времени возникновения вопросом, относящимся к линейной алгебре, была теория линейных уравнений, развитие которой привело к созданию теории определителей, а затем теории матриц и связанной с ней теории векторных пространств и линейных преобразований в них.

Предлагаемое учебно-практическое пособие должно оказать помощь в овладении основными понятиями, утверждениями и методами линейной алгебры, а также умении применять их при решении различных математических задач.

Материал пособия разбит на главы, в которых приведены основные теоретические сведения (определения, утверждения, свойства, теоремы и правила), примеры и задачи с подробными решениями, а также упражнения для самостоятельного решения. Такое изложение материала позволит студентам, изучающим вопросы линейной алгебры, овладеть стандартными приёмами и навыками и впоследствии творчески применять их в решении сложных задач.

ГЛАВА 1. АЛГЕБРА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1.1. Понятие матрицы. Операции над матрицами

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размеров* $m\times n$. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент. В дальнейшем будем обозначать матрицы большими буквами латинского алфавита: A, B и т.д.

Часто вместо подробной записи употребляют сокращенную:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n} \text{ или даже } A = \left(a_{ij}\right).$$

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ считаются *равными*, если совпадают их размеры и $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Матрица, столбцами которой являются строки матрицы A (т.е. столбцы и строки меняются местами), называется *транспонированной* к A и обозначается через A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число n ее строк (равное числу столбцов) – *порядком* квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Начало
Содержание
Страница 10 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Диагональ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, называется *единичной матрицей* и обозначается E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

Определение 1. ***Суммой*** двух $(m \times n)$-матриц $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ называется такая матрица $C = (\gamma_{ij})$, элемент которой $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$, т.е. $A+B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$ для любых наборов $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров.

Определение 2. Пусть F — некоторое поле. ***Произведением*** $(m \times n)$- матрицы $A = (\alpha_{ij})$ ***на скаляр*** $\lambda \in F$ называется такая $(m \times n)$ матрица λA, что $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$, где $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $(*)$

Пример 1. Вычислите $A+B$ для матриц из $(*)$.

Решение.

Суммой матриц будет матрица, элементы которой получены суммированием элементов слагаемых.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 2+1 & 1+(-1) \\ -1+4 & 0+3 & 2+1 \\ 2+(-2) & 5+1 & -3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Вычислите $3A+2B$ для матриц из (*).

Решение.

Найдем сначала матрицы $3A$ и $2B$. При умножении матрицы на число необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$3A = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$2B = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Сложим результаты:

$$3A+2B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Выполнить действия:

а) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

b) $2A-3B+4$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение.

a) $$4\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot(-1)\\ 4\cdot2 & 4\cdot1 & 4\cdot1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-1) & 3\cdot3 & 3\cdot1\\ 3\cdot2 & 3\cdot1 & 3\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot2 & 2\cdot4 & 2\cdot1\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot3 & 2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ 8 & 4 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 9 & 3\\ 6 & 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 8 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3-4 & 9 & -3\\ 8+6-2 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -3\\ 16 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

b) Так как в данное выражение вместо переменных A и B подставляются матрицы, то можно считать, что число 4 есть $4E$, где E — единичная матрица. Таким образом,

$$2A-3B+4=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 4 & 9\end{pmatrix}.$$

Операция произведения определяется не для всех матриц, а лишь для согласованных.

Матрицы A и B называются *согласованными*, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Так, если A_{mxn}, B_{nxk}, $m\neq k$, то матрицы A и B согласованные, так как $n=n$, а в обратном порядке матрицы B и A несогласованные, так как $m \neq k$. Квадратные матрицы согласованы, когда у них одинаковый порядок n, причем согласованы как A и B, так и B, и A. Если A_{mxn}, а B_{nxm}, то будут согласованы матрицы A и B, а также матрицы B и A, так как $n = n$, $m = m$.

Определение 3. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{np} \end{pmatrix},$$

причем число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

обозначаемая через AB, элементы которой вычисляются по формулам:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\beta_{sj} \quad (i=1, 2, \ldots, m; j=1, \ldots, p).$$

Начало
Содержание
Страница 15 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Для удобства запоминания запишем это кратко: $\underbrace{A\,B = C}_{(m\times n)(n\times k)=m\times k}$.

Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i-й строки и j -го столбца матрицы $C = AB$ равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B. Другими словами, элемент c_{ij} является результатом скалярного произведения i-й вектор-строки и j -го вектор-столбца.

Замечание. Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что оба произведения AB и BA можно определить лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, а число строк матрицы A совпадает с числом столбцов матрицы B. А именно, матрица A имеет размеры $m\times n$, а B – размеры $n\times m$. При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Свойства операций над матрицами

1. $0 \cdot A = \theta$.
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
5. $A + B = B + A$.
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
7. $A + \theta = \theta + A = A$.
8. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.
9. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
10. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
11. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

Свойства 4 и 5 называются соответственно *ассоциативностью и коммутативностью сложения* матриц.

Свойство 9 носит название *ассоциативности умножения*, а свойства 10 и 11–*дистрибутивности умножения относительно сложения* матриц.

12. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Т. е. умножение матриц некоммутативно, например,

Кафедра ФМО и ИТ

Начало

Содержание

Страница 17 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

13. $A\cdot E = E\cdot A = A$.

Если A матрица порядка $m\times n$, а B матрица порядка $n\times m$, причём $a_{ij}=b_{ji}$, то B называют *транспонированной* матрицей по отношению к A и обозначают через A^T.

14. $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^T=\alpha\cdot A^T+\beta\cdot B^T$.

15. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Доказательство свойств 14 и 15 заключается в рассмотрении i,j-го элемента в правой и левой частях этих равенств.

Пусть A квадратная матрица порядка n. Она называется *симметрической,* если $A=A^T$; *кососимметрической,* если $A=-A^T$.

Пример 4. Вычислите $A\cdot B$ и $B\cdot A$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}\text{ и } B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 7\end{pmatrix}\ (*).$$

Решение.

Перемножить матрицы можно, если количество столбцов первого сомножителя совпадает с количеством строк второго сомножителя. Если умножается матрица порядка $m\times k$ на матрицу порядка $k\times n$, то в результате получится матрица порядка $m\times n$. Для получения ее i,j-го элемента необходимо элементы i-ой строки левой матрицы умножить на соответствующие элементы j-го столбца правой матрицы и сложить полученные результаты.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&0&2\\2&5&-3\end{pmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&3&1\\-2&1&7\end{pmatrix}_{3\times 3}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 0+2\cdot 4+1\cdot(-2)&3\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 1&3\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 7\\-1\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot(-2)&-1\cdot 1+0\cdot 3+2\cdot 1&-1\cdot(-1)+0\cdot 1+2\cdot 7\\2\cdot 0+5\cdot 4+(-3)\cdot(-2)&2\cdot 1+5\cdot 3+(-3)\cdot 1&2\cdot(-1)+5\cdot 1+(-3)\cdot 7\end{pmatrix}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}6&10&6\\-4&1&15\\26&14&-18\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&3&1\\-2&1&7\end{pmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&0&2\\2&5&-3\end{pmatrix}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}-3&-5&5\\11&13&7\\7&31&-21\end{pmatrix}.$$

Произведение матриц не коммутативно, то есть для любых матриц A и B: $A\cdot B\neq B\cdot A$, что и показывают полученные результаты.

Пример 5. Вычислите A^2 для матрицы из (*).

Возвести матрицу в *n-ую* степень, значит умножить ее на себя *n* раз.

Решение.

$$A^2=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&0&2\\2&5&-3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}9-2+2&6+0+5&3+4-3\\-3+0+4&-2+0+10&-1+0-6\\6-5-6&4+0-15&2+10+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8&4\\1&8&-7\\-5&-11&21\end{pmatrix}.$$

Пусть $C=\begin{pmatrix}5&4&1\\-3&1&2\end{pmatrix}_{2\times3}$ и $D=\begin{pmatrix}8&-3\\4&-1\end{pmatrix}_{2\times2}$ (**)

Пример 6. Вычислите $C\cdot D$ и $D\cdot C$ для матриц из (**).

Решение.

Произведение $C\cdot D$ не определено, так как число столбцов матрицы $C=\begin{pmatrix}5&4&1\\-3&1&2\end{pmatrix}_{2\times3}$, которых три, не совпадает с числом строк матрицы $D=\begin{pmatrix}8&-3\\4&-1\end{pmatrix}_{2\times2}$, которых два. Если умножается матрица порядка $2\times\underline{2}$ на матрицу порядка $\underline{2}\times3$, то в результате получится матрица порядка 2×3.

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 20 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}8\cdot 5-3\cdot(-3) & 8\cdot 4-3\cdot 1 & 8\cdot 1-3\cdot 2\\ 4\cdot 5-1\cdot(-3) & 4\cdot 4-1\cdot 1 & 4\cdot 1-1\cdot 2\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}49 & 29 & 2\\ 23 & 15 & 2\end{pmatrix}$$

Пример 7. Вычислите $C^T\cdot D$ для матриц из (**).

Решение.

При выполнении операций над матрицами в первую очередь выполняется транспонирование, затем умножение матриц. Для того чтобы найти транспонированную матрицу надо строки матрицы записать в столбцы (или наоборот, столбцы в строки).

$$C^T\cdot D=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}40-12 & -15+3\\ 32+4 & -12-1\\ 8+8 & -3-2\end{pmatrix}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}28 & -12\\ 36 & -13\\ 16 & -5\end{pmatrix}$$

Пример 8. Вычислите $D\cdot E$ для матриц из (**).

Решение.

На главной диагонали матрицы E стоят 1, другие элементы равны нулю.

$$D\cdot E=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot 1-3\cdot 0 & 8\cdot 0-3\cdot 1\\ 4\cdot 1-1\cdot 0 & 4\cdot 0-1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=D\,.$$

Единичная матрица E при умножении матриц играет роль числа 1 при умножении чисел.

Пример 9. Найти значение многочлена $f(x)=x^2+x+2$ для матрицы $\cdot D$ (**).

Решение.

Запись $f(D)=D^2+D+2$ будет не корректна: выражение D^2+D есть матрица размера 2×2, к которой нельзя прибавить число 2. А потому $f(D)=D^2+D+2E$, где E - единичная матрица подходящего размера.

$$f(D)=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64-12 & -24+3\\ 32-4 & -12+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}52 & -21\\ 28 & -11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60 & -24\\ 32 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}62 & -24\\ 32 & -10\end{pmatrix}}.$$

Пример 10. Вычислите:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 7\\ 7 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\ 1\\ -2\\ 8\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&0&7\\7&0&2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&2&3&1\\1&4&3&3\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\8\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1&2&0&7\\7&0&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&6&9&3\\3&12&9&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&10&10&10\\10&10&10&10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\8\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}10&8&9&10\\10&12&11&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&10&10&10\\10&10&10&10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-1&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}_{2\times4}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\8\end{pmatrix}_{4\times1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Пример 11.

Вычислить AB и BA, если они существуют, если:

a) $A=\begin{pmatrix}-1&2&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\\0&2\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-f&e&-d\\f&0&-c&b\\-e&c&0&-a\\d&-b&a&0\end{pmatrix}$.

Решение.

$$\text{a) } AB=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}=(-1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot(-2))=7$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2\\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 2 & 3 & -1\\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot 2 & -6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ -2 & 4 & 6 & -2\\ -1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{b) } AB=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0 & 9\\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 9\\ 3 & 3\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3 & 2\\ 9 & -1 & 6\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } AB=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix},$$ произведение BA не существует.

$$\text{d) } AB=\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -f & e & -d\\ f & 0 & -c & b\\ -e & c & 0 & -a\\ d & -b & a & 0\end{pmatrix}=(af-be+cd)\cdot E=BA,$$

c) $AB=\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix}$, произведение BA не существует;

d) $AB= =(af-be+cd)\cdot E=BA$, где E — единичная матрица.

Пример 12. Выполнить действия: a) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n$.

Решение.

a) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 20\\ 20 & 35\end{pmatrix}$.

b) Заметим, что при n=2 имеем:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\\ \sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}.$$

При n=3 аналогично получаем:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}.$$

В результате: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$

Задача 1. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым

$$4X-2Y+3X+2Y=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};7X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы

$$Y=2X-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц не подчиняется перестановочному (коммутативному) закону, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$. Однако может оказаться, что $AB=BA$. В таких случаях матрицы A и B называются *перестановочными*. Очевидно, что это имеет место только в том случае, когда A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка.

Задача 2. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

От нас требуется найти все матрицы A второго порядка такие, что

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 2x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 & 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 - x_3 & -x_2 - x_4 \end{pmatrix}$.

Равенство двух матриц означает равенство их элементов, занимающих одинаковые места. Следовательно, имеем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 = -x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_4 = -x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Проводя соответствующие вычисления, находим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_4 = x_1 + 2x_3 \end{cases}.$$

Таким образом, общий вид матрицы A будет $A = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

Упражнения

1. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить выражения:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n$, где $a^2 + bc = 1$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. Найти все матрицы $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$, удовлетворяющие уравнению $f(X) = 0$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Кафедра ФМО и ИТ

4. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} \\ 2X+(n+2)Y=\begin{pmatrix} n & 0 \\ 2 & n-2 \end{pmatrix} \end{cases},$$ где n – номер варианта.

5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Как изменится матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, если ее умножить справа (слева) на одну из матриц:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{d)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

7. Можно ли рассматривать действие добавить к первой строке матрицы все остальные как умножение (слева или справа) на некоторую вспомогательную матрицу?

1.2. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}: $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Заметим, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2.$$

Величина Δ называется определителем матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Вообще определителем произвольной матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например, $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$.

Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 тоже являются определителями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Левую часть выражения назвали *определителем 2-го порядка*, правая часть выражает *правило его вычисления*.

Начало
Содержание
Страница 32 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

При внимательном рассмотрении нетрудно заметить правило использования элементов определителя для записи суммы левой части выражения. Для записи положительного члена определителя $(a_{11} \cdot a_{22})$ используют схему:

a_{11}	a_{12}	Отмечено направление, выделяющее элементы для положительного члена определителя: схема C_1.
a_{21}	a_{22}	

Для записи отрицательного члена определителя $(-a_{21} \cdot a_{12})$ используют схему:

a_{11}	a_{12}	Отмечено направление, выделяющее элементы для отрицательного члена определителя: схема C_2.
a_{21}	a_{22}	

Определение. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, где α_{ij} — некоторые числа $i, j \in \{1,2\}$. Выражение $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$ называется *определителем 2-го порядка матрицы A.*

Обозначение: $|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка можно изобразить следующим образом:

Совершенно аналогично для произвольной квадратной матрицы A третьего порядка можно рассмотреть *определитель 3-го порядка матрицы A*.

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

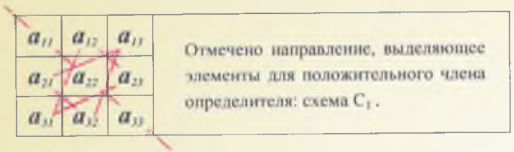
Для определителей 3-го порядка можно было, как и для определителей 2-го порядка, начинать с системы 3-х уравнений с тремя неизвестными. Реализуя идею: разделить переменные так, чтобы в одно уравнение входила только одна неизвестная величина, мы обязательно придём к конструкции определитель 3-го порядка. Тогда

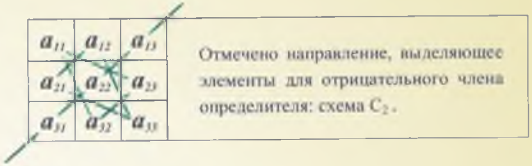
$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} - -\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

Кафедра
ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 34 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Представленное соответствие, то есть формула для вычисления определителя, легко запоминается, если использовать геометрическую схему составления членов определителя:





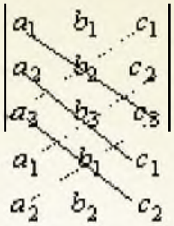
Схематически правило для вычисления определителей третьего порядка может быть изображено следующим образом:

Правило треугольника:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2;$$

Правило Саррюса:

Припишем первую и вторую строчки снизу определителя.



Проводим главную диагональ и две линии ей параллельные. Проводим побочную диагональ и две линии ей параллельные. Перемножаем числа, стоящие на каждой из трех первых линий, и домножаем каждое такое произведение на +1. Произведение чисел, стоящих на побочной диагонали или линии ей параллельной, домножаем на -1. Сумма полученных шести слагаемых и есть определитель третьего порядка.

Пример 1. Вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix};\ 2)\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix},\ \text{где } \varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};\ 3)\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

1) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})-(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = (1-2)-(4-5) = 0$

2) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2+1 = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)+1 =$

$= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.$

3) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + (1-i)\cdot i\cdot 0 + (1+i)\cdot(-i)\cdot 0 - (1-i)\cdot 1\cdot(1+i) -$

$1\cdot(-i)\cdot i - 1\cdot 0\cdot 0 = 1+0+0-(1-i^2)-(-i^2)-0 = 1-1-1-1 = -2.$

Упражнения

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x+7y+13=0 \\ 5x+8y+14=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax-by=2a \\ bx+ay=2b \end{cases}$.

3. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна другой. То же самое для столбцов.

4. Доказать, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (где, по крайней мере, одно из чисел c, d отлично от нуля) тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

5. Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2+2bx+c$ тогда и только тогда будет полным квадратом, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$, считая неизвестные x и y действительными числами.

7. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

8. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 3x + y + 4z = -13 \\ 8x + 9y + 5z = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x - y + z = 9 \\ x - 4y + 2z = 11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} bx + ay = -2ab \\ -2cy + bz = 3bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$,

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

9. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc$.

1.3. Перестановки и подстановки

Определение 1. Пусть M – некоторое множество, состоящее из n элементов, т.е. $M=\{1,2,\ldots,n \mid n\in\mathrm{N}\}$. *Подстановкой* множества M называется взаимно однозначное отображение множества M на себя.

Обозначение: $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ или $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Определение 2. *Перестановкой n* чисел называется всякое расположение чисел от 1 до n в каком либо порядке. В общем виде она записывается так $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Говорят, что в перестановке $i_1, i_2, \ldots, i_n$ числа i_s и i_t образуют *инверсию*, если $s \le t$, но $i_s > i_t$. Перестановку называют *чётной* (*нечётной*), если количество всех её инверсий есть число чётное (соответственно нечётное). Оно обычно подсчитывается так: берём число i_1 и находим количество чисел, лежащих правее и меньших i_1, т.е. число инверсий, которое образует i_1 с остальными. Затем поступаем аналогично с числами $i_2, \ldots, i_{n-1}$. Сумма этих чисел и будет количеством всех её инверсий.

Например, в перестановке 3, 1, 2, 5, 4 три инверсии; в перестановке 2, 6, 3, 1, 4, 5 – шесть инверсий, в перестановке 5, 3, 1, 4, 2 число инверсий равно 7 и поэтому она нечётная.

Если в перестановке поменять местами два элемента, то говорят, что в ней совершена *транспозиция*.

Лемма (о транспозиции). *При совершении одной транспозиции чётность перестановки изменяется.*

Доказательство. Это почти очевидно, если в перестановке совершить транспозицию двух соседних элементов.

Предположим теперь, что совершена транспозиция элементов i_s и i_t, где $s<t$. Будем совершать транспозицию элемента i_t с i_{t-1}, затем с i_{t-2}, пока i_t не займёт место элемента i_s. При этом будет совершено $t-s$ транспозиций соседних элементов. Затем совершаем транспозицию элемента i_s с i_{s+1}, затем с i_{s+1}, пока i_s не займёт бывшее место элемента i_t. При этом будет совершено $t-s-1$ транспозиций, а всего $2(t-s)-1$ таких транспозиций. Это число нечётное, а поэтому чётность перестановки изменяется.

Задача 1. Определить число инверсий в перестановках:

a) (5 4 1 7 6 3 2); b) (n n−1 … 2 1).

Решение.

a) Первое число в перестановке есть 5. Определяем, в скольких инверсиях участвует это число. Число 5 образует инверсии с 1, 2, 3, 4. Таким образом, число 5 участвует в четырех инверсиях. Вычеркиваем (мысленно) число 5 и обращаемся к следующему числу, 4. Оно образует инверсии с 1, 2, 3 — всего 3 инверсии. Вычеркиваем число 4 и обращаемся к следующему, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел, иначе говоря, число таких инверсий равно нулю. Зачеркиваем 1 и т. д. Суммарное число инверсий равно: 4+3+0+3+2+1 = 13. Поскольку 13 — число нечетное, данная перестановка является нечетной.

b) На первом месте в данной перестановке стоит число n. Оно образует инверсию с любым из последующих чисел: $n-1$, $n-2$, …, 2, 1. Следовательно, число n входит в $n-1$ инверсию. Вычеркиваем n и обращаемся к следующему числу — $(n-1)$. Оно также образует инверсию с любым из последующих чисел; число таких инверсий равно $n-2$ и т. д. Всего в данной перестановке имеется

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \text{ инверсий.}$$

Это число будет четным, если произведение $n(n-1)$ делится на 4. Но из двух сомножителей n, $n-1$ один обязательно является нечетным; следовательно, для того чтобы произведение делилось на

4, нужно, чтобы другой сомножитель делился на 4. Итак, перестановка будет четной, если одно из чисел n или $n-1$ делится на 4, и нечетной в противном случае. Очевидно, в данной перестановке любые два числа образуют инверсию. Следовательно, число всех инверсий равно числу сочетаний из n элементов по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Определение 3. Подстановка называется *четной,* если обе перестановки (верхняя и нижняя) имеют одинаковую четность.

Задача 2. Определить, четна или нечетна подстановка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данном случае число инверсий в верхней перестановке равно 10, в нижней — 6. Следовательно, подстановка четная.

Упражнения

1. Определить число инверсий в перестановках:

a) (7 6 9 1 2 3 5 4 8);

b) ($2n$ $2n-1$ … $n+2$ $n+1$ n $n-1$ … 2 1);

c) (1 3 5 7 … $2n$-1 2 4 6 … $2n$).

2. Подобрать i и k так, чтобы:

a) перестановка (1 2 7 4 i 5 6 k 9) была четной;

b) перестановка (1 i 2 5 k 4 8 9 7) была нечетной.

3. Решить вопрос о четности подстановок:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

1.4. Определители *n*-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(\alpha_{ij})$ порядка n. Выберем по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы и составим произведение этих элементов, называемое членом определителя: $\alpha_{1j}\alpha_{2k}\dots\alpha_{nr}$, где вторые индексы j, k, …, r образуют перестановку чисел 1, 2, …, n.

Определение 1. Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется сумма $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строчки и из каждого столбца, помноженное на +1, если подстановка, образованная индексами элементов, входящих в произведение, четна и на -1, если нечетна.

Определитель матрицы A обозначается через $|A|$ или *detA*, и если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то по определению $|A| = \sum\limits_{<i_1,\dots,i_n>} (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$,

где значок сокращенного суммирования берется по всем перестановкам $i_1 i_2 \dots i_n$.

Определитель матрицы A порядка n записывается так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Задача 1. С каким знаком входит в определитель 5-го порядка следующее произведение: $a_{51}a_{23}a_{34}a_{45}a_{12}$?

Решение.

Напомним правило знака. Если $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ — какой-либо член определителя *n-го* порядка, то знак, с которым это произведение входит в определитель, зависит от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Точнее, если эта подстановка четная, произведение берется со знаком плюс, если подстановка нечетная — со знаком минус. В данном случае имеем четную подстановку

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение берется со знаком плюс.

Задача 2. Пользуясь только определением, доказать, что определитель 5-го порядка равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Определитель 5-го порядка представляет собой сумму произведений вида $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$, каждое из которых берется с определенным знаком (правило знака сейчас не играет роли). Здесь $(j_1j_2j_3j_4j_5)$ – любая перестановка из чисел 1, 2, 3, 4, 5; поэтому всего в таком определителе должно быть 5! = 120 членов. Однако, в данном случае многие члены определителя будут равны нулю.

Посмотрим, какие члены могут быть отличны от нуля. Для этого нужно, чтобы все пять сомножителей $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ были отличны от нуля. Но $a_{5j_5} \neq 0$ возможно только при $j_5 = 1$ или $j_0 = 2$ (элементы a_{63}, a_{64}, a_{66} по условию равны нулю). То же самое относится к a_{4j_4} и a_{3j_3}.

Итак, рассматриваемое произведение может быть отлично от нуля лишь в том случае, когда любое из чисел j_3, j_4, j_6 равняется 1 или 2. Но это невозможно, так как j_3, j_4, j_6 — три различных числа. Следовательно, все члены данного определителя равны нулю, а вместе с ними равен нулю и сам определитель.

Задача 3. Пользуясь только определением, вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \text{ b) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

в которых все элементы по одну сторону от главной (побочной) диагонали равны нулю.

Решение.

а) Выясним, какие из членов $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$, в данном определителе могут быть отличны от нуля. Для этого нужно, чтобы j_1 равнялось 1, j_2 – 1 или 2, j_3 − 1, 2 или 3 и т. д. Так как $j_2 \neq j_1$, то отсюда j_2=2. Так как j_3 не равно ни j_1 ни j_2, то отсюда , j_3= 3, и т. д. В результате приходим к выводу, что единственным отличным от нуля членом в данном определителе может быть только $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Это произведение входит в определитель со знаком плюс. Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

b) Рассуждая аналогично, приходим к тому, что единственным ненулевым членом данного определителя может быть лишь $a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$. Так как первые индексы сомножителей члена определителя располагаются в порядке возрастания, то знак определяется чётностью перестановки из вторых индексов $(n\ n{-}1\ n{-}2\ \ldots\ 1)$.

Определим количество инверсий в ней.

1 соответствует $(n-1)$ инверсия,

2 соответствует $(n-2)$ инверсии,

… … …

$(n-1)$ соответствует 1 инверсия.

Всего: $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{1+n-1}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ инверсий.

Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на побочной диагонали со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Упражнения

1. Определить, с каким знаком входит в определитель 7-го порядка произведение: $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

2. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ было членом определителя (какого порядка?) и входило в него со знаком плюс.

3. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за скобки?

4. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

5. Найти члены определителя:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \text{ содержащие } x^4 \text{ и } x^3.$$

6. Пользуясь только определением, вычислить определители:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$$

7. Дан определитель *n-го* порядка:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доказать, что он равен произведению двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Дан определитель порядка $2n$:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{matrix}} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)} \end{matrix}} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы, расположенные вне указанных n «блоков», равны нулю. Доказать, что он равен произведению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{vmatrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)} \end{vmatrix}$$

определителей 2-го порядка, соответствующих всем «блокам».

1.5. Основные свойства определителей *n*-го порядка

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство. Каждое слагаемое определителя транспонированной матрицы $(-1)^{Inv\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ равно соответственно слагаемому исходной матрицы А - $(-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$. Если слагаемые соответственно равны, то и их суммы равны, отсюда следует равенство $|A| = |A|^T$.

Замечание. Свойство 1 означает, что с точки зрения вычисления определителей строчки и столбцы квадратной матрицы равноправны, т.е. свойство определителей, доказанное для строчек, выполняется и для столбцов. Это позволяет формулировать свойства как для строчек, так и для столбцов, ограничиваясь доказательствами, скажем, для строчек.

Свойство 2. Если в определителе поменять местами две строчки (столбца), то знак определителя изменится на противоположный.

Доказательство. В квадратной матрице А поменяем местами строчки j и k. Для слагаемого определителя преобразованной матрицы A_1 имеем

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} \dots & j & \dots & k & \dots \\ \dots & i_k & \dots & i_j & \dots \end{pmatrix}} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ji_j} \dots a_{ni_k} = -(-1)^{Inv\begin{pmatrix} \dots & k & \dots & j & \dots \\ \dots & i_k & \dots & i_j & \dots \end{pmatrix}} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ji_j} \dots a_{ni_j}.$$

Просуммировав левые и правые части таких равенств соответственно, мы и получим, что $|A_1| = -|A|$.

Свойство 3. Если квадратная матрица имеет две одинаковые строчки (столбца), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Поменяв местами эти две равные строчки матрицы А, мы получим матрицу В, которая ничем не отличается от матрицы А, поэтому $|A| = |B|$. С другой стороны, по предыдущему свойству $|B| = -|A|$. Следовательно, $|A| = -|A|, 2 \cdot |A| = 0, |A| = 0$.

Свойство 4. Если все элементы строчки (столбца) квадратной матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. В каждое произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца, входит элемент из этой строчки, т.е. ноль, поэтому все слагаемые определителя равны нулю; их сумма тоже равна нулю.

Свойство 5. Если все элементы строчки (столбца) квадратной матрицы умножить на число, то и определитель матрицы домножится на это число.

Доказательство. Каждое слагаемое определителя матрицы A домножается на это число λ, так как в него обязательно входит в качестве множителя элемент выбранной строчки. Следовательно, и вся сумма домножается на λ.

Замечание. Свойство 5 при вычислении определителей удобно использовать и в такой переформулировке:

Постоянный множитель строчки (столбца) определителя выносится за знак определителя.

Если найдется такое число $\lambda \neq 0$, что каждый элемент одной строчки получается домножением на λ соответствующего элемента другой строчки (столбца), то такие строчки (столбцы) называются пропорциональными с коэффициентом пропорциональности λ.

Свойство 6. Если две строчки (столбца) квадратной матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Вынесем за знак определителя коэффициент пропорциональности λ. Получим определитель матрицы с двумя равными строчками (столбцами). По свойству 3 такой определитель равен нулю.

Свойство 7. Если все элементы i-ой строки матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то ее определитель можно представить в виде суммы определителей двух матриц, у которых элементами i-ой строки являются соответственно первые и вторые слагаемые разложения, а все остальные строки – такие же, как у исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место и для столбцов.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$a_{1i_1}\ldots a_{k-1\,i_{k-1}}\left(b_{i_k}+c_{i_k}\right)a_{k+1\,i_{k+1}}\ldots a_{ni_n} = a_{1i_1}\ldots a_{k-1\,i_{k-1}}b_{ki_k}a_{k+1\,i_{k+1}}\ldots a_{ni_n} + a_{1i_1}\ldots a_{k-1\,i_{k-1}}c_{ki_k}a_{k+1\,i_{k+1}}\ldots a_{ni_n}.$$

Ясно, что аналогичное свойство верно и для столбцов.

Будем понимать под линейной комбинацией строчек. $a_1=(a_{11}a_{12}\dots a_{1n})$ и $a_k=(a_{k1}a_{k2}\dots a_{kn})$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ строчку

$$\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_k a_k=(\lambda_1 a_{11}+\dots+\lambda_k a_{k1},\dots,\lambda_1 a_{1n}+\dots+\lambda_k a_{kn})$$

Свойство 8. Если к строчке (столбцу) квадратной матрицы прибавить линейную комбинацию остальных строчек (столбцов), то ее определитель не изменится.

Доказательство. Определитель преобразованной матрицы можно представить в виде суммы определителей, один из которых есть определитель исходной матрицы, а остальные – определители матриц, имеющих пропорциональные строчки (равные нулю по свойству 6).

Свойство 9. Если строчка (столбец) квадратной матрицы есть линейная комбинация остальных строчек (столбцов), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Определитель равен сумме определителей матриц с пропорциональными строчками, каждый из которых равен нулю.

Пример. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&-1&-2\\3&3&7&5\\4&4&4&9\end{vmatrix}$.

Решение.

Вычитая из второй строчки первую, домноженную на 2, из третьей первую же, домноженную на 3, из четвертой первую, домноженную на 4, получим определитель треугольной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20.$$

1.6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа

Пусть дана матрица A n*-го* порядка. *Минором* любого элемента a_{ij} называют определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Возьмем квадратную матрицу *n-го* порядка. Вычеркнем k строчек и k столбцов и, не нарушая порядка, сдвинем оставшиеся элементы. Определитель M полученной матрицы $(n - k)$ *– го* порядка называется *дополнительным минором.*

Пусть $S_M = i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$ – сумма номеров вычеркнутых строчек и столбцов. Тогда произведение дополнительного минора на $(-1)^{S_M}$ называется *алгебраическим дополнением минора* M: $A^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k} = (-1)^{S_M} \cdot M'$.

Теорема. *Произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя исходной матрицы.*

Доказательство. Предположим вначале, что минор взят в левом верхнем углу

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\
\hline
a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & \dots & a_{k+1\,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right).$$

Произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения имеет вид:

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \cdot (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}} (-1)^{2(1+2+\dots+k)} a_{k+1\,k+j_1} \dots a_{n\,k+j_n} =$$

$$= (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} + Inv\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ k+j_1 & k+j_2 & \dots & k+j_{n-k} \end{pmatrix}} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} a_{k+1\,k+j_1} \dots a_{n\,k+j_{n-k}} =$$

$$= (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}.$$

Последнее произведение и есть слагаемое определителя исходной матрицы $i_{k+1} = k + j_1, \ldots, i_n = k + j_{n-k}$.

Пусть теперь $i_1, \ldots, i_k$ – номера вычеркнутых строчек, а $j_1, \ldots, j_k$ – номера вычеркнутых столбцов. Переместим строчку i_1 на первое место, переставляя ее последовательно с соседней строчкой $i_1 - 1$, строчку i_2 на второе место, переставляя ее последовательно с соседней строчкой $i_2 - 2$ раза и т.д. Переместим столбец j_1 на первое место, столбец j_2 на второе место и т.д. Пусть d – определитель исходной матрицы, а d_1 – определитель преобразованной матрицы. Тогда

$$d_1 = (-1)^{S_M - 2(1+2+\ldots+k)} \cdot d, d_1 = (-1)^{S_M} \cdot d, d = (-1)^{S_M} \cdot d_1.$$

В определителе d_1 выбранный минор оказался в левом верхнем углу и по доказанному при рассмотрении первого случая произведение с слагаемого a этого минора на слагаемое b его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя d_1: $c = ab$. А из равенства $d = (-1)^{S_M} \cdot d_1$ следует, что произведение слагаемого a минора на слагаемое $(-1)^{S_M} \cdot b$ его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя d. ■

Теорема Лапласа. *Сумма произведений всех миноров k-го порядка,стоящих на фиксированных k строчках, на их алгебраические дополнения равна определителю исходной матрицы.*

Доказательство. В миноре k-го порядка $k!$ разных слагаемых, а в его алгебраическом дополнении $(n-k)!$ разных слагаемых.

Перемножая минор и его алгебраическое дополнение, мы получим $k!(n-k)$ разных слагаемых определителя. А для всех C_n^k миноров k-го порядка, стоящих на фиксированных k строчках, получим $C_n^k k!(n-k)! = n!$ разных слагаемых исходного определителя, т.е. сам определитель. Ясно, что аналогичное утверждение верно и для столбцов. ■

Следствие 1. *Определитель матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. для любого $i = 1,2,\dots,n$ имеет место равенство $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, называемое разложением определителя $|A|$ по элементам i-й строки.*

Аналогично для $k = 1,2,\dots,n$ имеет место разложение определителя $|A|$ по элементам k-го столбца: $|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = d.$$

Доказательство. Сформулирован частный случай теоремы Лапласа при $k = 1$ – разложение определителя по строчке (столбцу).

Следствие 2. *Сумма произведений всех элементов строчки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строчки (столбца) равна определителю*

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} A_{jl} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу, имеющую две одинаковые строчки i и j, на месте строчки i находится строчка j. Ее определитель равен нулю. Разложив определитель по строчке i, получим сформулированное равенство.

Матрица, составленная из блоков A, B, нулевого и произвольного

$$F = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ X & B \end{array}\right),$$

где A и B – квадратные матрицы, называется, *ступенчатой.*

Теорема (об определителе ступенчатой матрицы)

$$|F| = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство. Зафиксируем n строчек, на которых расположена матрица А. Все миноры *n-го* порядка, стоящие на этих строчках, содержат столбец из нулей и поэтому равны нулю, кроме одного, равного определителю матрицы A. Алгебраическое дополнение этого минора равно определителю матрицы B. По теореме Лапласа $|F| = |A| \cdot |B|$. ■

Теорема. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.*

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую матрицу

$$F = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right).$$

По теореме Лапласа | | | | | | Определитель этой же матрицы F, пользуясь свойствами определителей, можно преобразовать к виду

$$|F| = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}$$

(прибавляя к первой строчке $(n+1)$-ю, умноженную на a_{11}, $(n+2)$-ю, умноженную на a_{12} и т.д.). Отсюда вновь по теореме Лапласа

$$|F| = |A \cdot B| \cdot |-E| \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n} = |AB|, \square |A| \cdot |B| = |AB|. \ ■$$

В теореме Лапласа и следствиях 1 и 2 слово «строки» можно заменить на слово «столбцы».

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив его по элементам второй строки, получим:

$$\Delta = aA_{21} + bA_{22} + cA_{23} + dA_{24} = -a\Delta_{21} + b\Delta_{22} - c\Delta_{23} + d\Delta_{24} = -a\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ b\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 12b - 9c + 3d.$$

Задача 2. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

В данном случае для разложения целесообразно выбрать третий столбец, так как наличие нулевых элементов дает возможность не вычислять соответствующих алгебраических дополнений.

$$\Delta = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 3 \cdot A_{43} = -3\Delta_{43} = -3\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} = 3x^3 + 9x.$$

Задача 3. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив наш определитель по элементам первого столбца, получим:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Так как в первом определителе нули — под главной диагональю, а во втором — над главной диагональю, то оба они равны произведению элементов, расположенных на главной диагонали. Таким образом,

$$\Delta = a \cdot a^{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}(-b)^{n-1} = a^n - b^n.$$

Задача 4. Найти значение определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы первого столбца являются здесь суммами двух слагаемых, поэтому согласно свойству 3, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый столбец пропорционален последнему, во втором же первый столбец пропорционален третьему. Следовательно, по свойству 7 оба они равны нулю, а значит, $\Delta = 0$.

Задача 5. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & n+x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы последней строчки представимы в виде сумм:

$$0 + x,\ 0 + x,\ \dots,\ n + x.$$

Тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе под главной диагональю везде нули, поэтому он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. $1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)n = n!$. Второй определитель равен нулю, так как у него первая и последняя строки пропорциональны. Таким образом, $\Delta = n! + 0 = n!$.

Задача 6. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Здесь целесообразно первую строку, умноженную на 2, прибавить к четвертой. Так как при таком преобразовании определитель не меняется, то:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54.$$

Задача 7. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Легко можно получить нули над главной диагональю. Для этого первый столбец, умноженный на –2, прибавим ко второму. Затем в полученном определителе первый столбец, умноженный на –3, прибавим к третьему. Во вновь полученном определителе опять первый столбец, умноженный на –4, прибавим к последнему. Так как, по свойству 4, при наших преобразованиях матрицы определитель не меняется, то в результате этих трех последовательно выполненных преобразований мы получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20.$$

Задача 8. Вычислить определитель *n*-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычтем здесь из первого столбца второй (т. е. к первому прибавим второй, умноженный на –1), затем из второго столбца вычтем третий, из третьего – четвертый и т. д., наконец, из предпоследнего столбца вычтем последний.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & n-1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}.$$

В определителе первую строку прибавим ко всем остальным:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 2 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot (n+1) = 2^{n-2}(n+1).$$

Задача 9. Вычислить определитель матрицы n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{pmatrix},$$

представив A в виде произведения двух матриц более простого устройства.

Решение.

Элемент матрицы A, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце, имеет вид $a_{ij} = 1 + x_iy_j = 1\cdot 1 + x_iy_j$. Следовательно, если ввести в рассмотрение матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то a_{ij} будет равняться сумме произведений элементов i-ой строки матрицы B на соответствующие элементы j-ой строки матрицы C.

Так как при перемножении матриц приходится умножать строки первой матрицы на столбец второй, то отсюда видно, что матрица A равна произведению B и C^T, где C^{T} — транспонированная матрица для C. Отсюда $|A|=|B|\cdot|C^{\mathrm{T}}|=|B|\cdot|C|$, так как от транспонирования определитель не меняется.

Но при $n > 2$ оба определителя $|B|$ и $|C|$ равны, очевидно, нулю. Следовательно, и определитель $|A|$ также равен нулю. Исключением является случай n=2; тогда $| A | = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Упражнения

1. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен Δ. Чему равен определитель: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$?

2. Доказать, что, если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

3. Как изменится определитель матрицы, n-го порядка, если ее столбцы записать в обратном порядке?

4. Изменится ли определитель, если его матрицу транспонировать относительно побочной диагонали? Относительно главной диагонали?

5. Что произойдет с определителем, если его матрицу повернуть на 90^0 против часовой стрелки?

6. Вычислить определитель *задачи 3*, пользуясь лишь определением определителя.

7. Вычислить определители, разложив их:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки;

c) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$ по элементам последнего столбца.

Начало
Содержание
Страница 75 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

9. Используя свойства определителей, вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определители n-го порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & a & a & \dots & a & a \\ -x & -x & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & a & a \\ -x & -x & -x & \dots & -x & a \end{vmatrix}; \ \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

11. Проверьте утверждение теоремы об умножении определителей для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$ путём возведения его в квадрат.

Указание. Примените теорему об умножении определителей к произведению AA^T, где A^{T} — транспонированная матрица.

13. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix},$$

представив его в виде произведения двух определителей.

14. Докажите, что если A – невырожденная матрица ($|A| \neq 0$), то $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

15. Пусть B — невырожденная матрица. Докажите, что для любой матрицы A имеет место равенство: $|B^{-1}AB| = |A|$.

1.7. Вычисление определителей *n* порядка

Вычисление определителей основано на формуле разложения определителя по элементам строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

и аналогичной формуле разложения по элементам столбца. Учитывая связь между алгебраическими дополнениями и минорами

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} ,$$

можно записать:

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in} .$$

С помощью этой формулы вычисление определителей *n*-го порядка Δ сводится к вычислению ряда определителей $(n-1)$-го порядка — миноров $M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{in}$. Каждый из этих определителей, в свою очередь, можно свести к определителям $(n-2)$-го порядка, эти последние — к определителям порядка $(n-3)$ и т. д.

В конечном счете, вычисление Δ сводится таким путем к вычислению ряда определителей 3-го порядка, или, при желании, даже 2-го. Последние вычисляются непосредственно.

Особенно простой вид принимает разложение определителя по i-ой строке в случае, когда все элементы этой строки, кроме одного a_{ij}, равны нулю. Тогда имеем:

$$\Delta = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij},$$

благодаря чему вычисление Δ сводится к вычислению единственного определителя $(n-1)$-го порядка M_{ij}.

Хотя в наперед заданном определителе Δ может и не оказаться строки с нужным количеством нулей, тем не менее всегда можно, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной строке все элементы оказались равными нулю, кроме одного.

Это преобразование основано на одном из свойств определителя, а именно: определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, или, выражаясь короче, если к одной строке прибавить другую, умноженную на любое число.

Конкретно способ преобразования определителя к нужному виду объяснён в решении следующей задачи.

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Во второй строке определителя уже имеются два нуля, поэтому выберем ее. Постараемся, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы оказались нулями, кроме a_{24}, равного 1. Очевидно, для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему столбцу — четвертый, умноженный на (–2). После таких преобразований получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Раскладываем его по элементам второй строки:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В этом определителе удобно выбрать второй столбец, поскольку в нем уже имеется один нуль и, кроме того, элементы этого столбца невелики. Преобразуем определитель так, чтобы все элементы второго столбца, кроме $a_{12} = -1$, стали равными нулю. Для этой цели из третьей строки вычитаем первую, а из четвертой — удвоенную первую. Получаем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный Δ. Разлагая его по элементам второго столбца, находим:

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Упражнения

1. Вычислить определители:

$$a)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix};\ b)\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 3\\ 5 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 6 & 3\\ 1 & 5 & -1 & 2\end{vmatrix};\ c)\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix};\ d)$$

2. Вычислить определители:

$$a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix};\ b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix};\ c)\begin{vmatrix}3 & 4 & 6 & 7\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ 5 & -1 & 2 & 4\\ 8 & 7 & 1 & 5\end{vmatrix};\ d)\begin{vmatrix}1\\ 5\\ 8\\ 4\\ 1\end{vmatrix}$$

$$e)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 5 & 6\\ -3 & -5 & 1 & 7\\ -4 & -6 & -7 & 1\end{vmatrix};\ f)\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix};\ h)\begin{vmatrix}23 & 11 & 48 & 106\\ 19 & 32 & 45 & 116\\ 7 & 25 & 43 & 83\\ 67 & 73 & 81 & 289\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix};$$

Начало
Содержание
Страница 82 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

3. Вычислить определители:

$$
\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix};
$$

$$
\text{c)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix};\ \text{d)}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}
$$

4. Вычислить определители:

$$
\text{a)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix}.
$$

5. Вычислить определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -2 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & 1 & \frac{1}{5} \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{8} & \frac{6}{9} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{7} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\sqrt{7} & 0 \end{vmatrix};\ \text{d)}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{10} & -\sqrt{7} & -\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}.$$

1.8. Обратная матрица

Определение 1. Квадратная матрица A называется ***невырожденной,*** если её определитель не равен нулю. Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A называется ***вырожденной*** или ***особенной***.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица.

Теорема (о произведении определителей). *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка равен произведению их определителей, т.е.* $A \cdot B = A \cdot B$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный определитель порядка $2n$

$$|D| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & \theta \\ \hline -E & B \end{array}\right|$$

Используя теорему Лапласа, вычислим $|D|$, разлагая его по первым n строкам. Так как в них лишь один минор $|A|$ может быть не равен 0, а его алгебраическое дополнение есть $(-1)^{1+2+\ldots+n+1+2+\ldots+n}\cdot|B|$, то $|D|=|A||B|$. Используя свойство определителей, добьемся, что все элементы b_{ij} обратились в 0. Для этого $i-ый$ столбец $|D|$ умножим на b_{ij} и прибавим к $n+j-ому$ столбцу $|D|$, и так для каждых $1\le i\le n$ и $1\le j\le n$. Получим

$$|D|=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & C & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline -E & \theta \end{array}\right|$$

Вычислим $|D|$, разлагая его по последним n столбцам. Получим $|D|=|C|(-1)^s(-1)^n$, где $s=1+2+\ldots+n+(n+1)+\ldots+2n=\dfrac{(2n+1)2n}{2}=2n^2+n$.

Тогда $(-1)^s(-1)^n=(-1)^{s+n}=(-1)^{2n^2+2n}=1$ и $|D|=|C|$. Но нетрудно проверить, что $C=AB$. □

Пусть A и B матрицы порядка n. Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если $AB = BA = E$. Матрица A называется *невырожденной*, если $A \neq 0$.

Лемма (к теореме об обратной матрице).

(а) если A имеет обратную матрицу, то А - невырожденная;

(б) если обратная матрица для А существует, то она единственна.

Доказательство. (а) Имеем $AB = E$. По теореме о произведении определителей получаем $|A||B| = |AB = E = 1$. Значит $A \neq 0$.

(б) Пусть C также обратная матрица для A. Используя ассоциативность умножения матриц, имеем

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C\ . \ \square$$

Теорема (об обратной матрице). *Если матрица A - невырожденная матрица, то она имеет обратную матрицу A^{-1}, где*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \cdots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \cdots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \dots A_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Иными словами, ij – ый элемент A^{-1} равен алгебраическому дополнению ij - го элемента А, деленному на $|A|$.

Доказательство. Найдем ij – ый элемент произведения матрицы A на указанную матрицу A^{-1}. Он равен

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left(a_{i1}A_{j1}+a_{12}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}\right).$$

Но по следствиям 1 и 2 из теоремы Лапласа сумма в скобках равна $|A|$, если $i=j$, и равна 0, если $i\neq j$. Следовательно, $AA^{-1}=E$. Аналогично, используя замечание после следствия 2, доказывается, что $A^{-1}A=E$. □

Нахождение обратной матрицы

Вычисления обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

Пусть *А* – квадратная матрица *n-го* порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Вычисляем определитель d матрицы А. Если $d = 0$, то матрица А вырожденная и для нее обратной нет.

2. Если $d \neq 0$, то вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем эту матрицу. Матрица

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *присоединенной* или *взаимной для матрицы А*.

4. Домножим матрицу A на величину $\frac{1}{d}$. Матрица $\frac{1}{d}\widetilde{A}$ и есть обратная для A, т. е.

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\widetilde{A}.$$

Кафедра ФМО и ИТ

Для доказательства данного равенства достаточно проверить, что $\widetilde{A}\cdot A = dE$, $A\cdot\widetilde{A} = dE$.

$$\widetilde{A}\cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}a_{11}+\ldots+A_{n1}a_{n1} & \dots & A_{11}a_{1n}+\ldots+A_{n1}a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}a_{11}+\ldots+A_{nn}a_{n1} & \dots & A_{1n}a_{1n}+\ldots+A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = dE.$$

Аналогично проверяется, что $A\cdot\widetilde{A} = dE$. Итак, для всякой невырожденной матрицы существует обратная (и наоборот, как было отмечено раньше). Равенство $A\cdot\widetilde{A} = dE$ в дальнейшем будет также востребовано.

Формула для вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}.

Решение:

1. Находим определитель $|A|$ матрицы A. Имеем $|A|=-1\neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4;\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=5;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-6;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4.$$

3. Запишем теперь обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$. $|A|=5$, поэтому обратная матрица A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

Нахождение обратной матрицы путём элементарных преобразований

Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} необходимо:

1. Приписать к матрице A слева единичную матрицу E соответствующей размерности;

2. Путём элементарных преобразований над строками всей составной матрицы привести матрицу A к единичной матрице E;

Тогда на месте единичной матрицы будет обратная матрица A^{-1}.

Задача. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Поскольку $|A| = 1 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Упражнения

1. Найти матрицу A^{-1}, если:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad - bc \neq 0$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1}, если:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \left(\begin{matrix} 3 & - \\ 2 & - \\ 3 & - \end{matrix}\right.$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Проверьте, что если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{4} A.$$

$$\begin{matrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{matrix}\Biggr);$$

Разъяснение. Под kA, где k — число, понимается матрица, полученная из A умножением всех элементов на k.

4. Найти A^{-1}, если A — матрица n-го порядка:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти обратные матрицы для следующих:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.9. Ранг матрицы

<u>*Метод элементарных преобразований*</u>

Определение. Рангом матрицы называется максимальное число её линейно независимых строк (столбцов).

Наиболее удобным способом вычисления ранга является способ элементарных преобразований.

Элементарные преобразования матриц

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;

4) вычёркивание строки (столбца), состоящей сплошь из нулей.

5) ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.

Теорема. *С помощью элементарных преобразований в матрице можно поменять местами две строчки (столбца).*

Доказательство. $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i \to j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$

Замечание. Удобно при решении примеров перемену местами строчек и перемену местами столбцов называть пятым и шестым элементарными преобразованиями, хотя по структуре они вовсе не элементарные. Иногда седьмым и восьмым элементарными преобразованиями называют приписывание строчки или столбца из нулей, при которых, очевидно, ранг не меняется.

Если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью цепочки элементарных преобразований, то будем называть матрицу *B эквивалентной матрице A* и обозначать это так: B~A.

Легко видеть, что каждое элементарное преобразование обратимо, т.е. если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью элементарных преобразований, то и от матрицы B к матрице A тоже можно перейти с помощью элементарных преобразований. Значит, если $B \sim A$, то $A \sim B$; матрицы A и B эквивалентны друг другу.

Теорема. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Доказательство. При переходе от матрицы A к матрице B с помощью первого и третьего элементарных преобразований все миноры, отличные от нуля в матрице A, остались отличными от нуля и в матрице B. Все миноры, равные нулю в матрице A, остались равными нулю и в матрице B. Таким образом, первое и третье элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Пусть матрица B получена из матрицы A прибавлением к её строчке i другой строчки j, домноженной на число $\lambda \neq 0$. Все миноры, не затрагивающие строчку i в матрице остались равными нулю или отличными от нуля, т.е. такими же какими были в матрице A. Минор же, затрагивающий строчку i в матрице B, представим в виде суммы $M=M_1+\lambda M_2$, которая может оказаться равной нулю, несмотря на то, что миноры M_1 и M_2 матрицы A отличны от нуля. Таким образом, $rB \leq rA$. В силу обратимости элементарных преобразований отсюда следует, что $rA \leq rB$, т.е. $rA = rB$.

Аналогично утверждение доказывается и для четвертого элементарного преобразования. ■

Вместе с тем, любую ненулевую матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Отметим, что в матрице B система всех строк линейно независима. Поэтому её ранг равен r. Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, можем записать: $rank\ A = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r + 1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

В принципе безразлично, проводятся элементарные преобразования над строками или над столбцами матрицы. Однако мы будем пользоваться только преобразованиями строк, допуская исключение для столбцов в случае 1), т.е. допуская перестановку столбцов. Для приведения любой матрицы к виду B этих действий достаточно.

Задача 1. Найти ранг матрицы путём элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

1. Постараемся сначала при помощи элементарных преобразований добиться того, чтобы первый элемент в первом столбце был отличен от нуля, в то время как остальные элементы этого столбца обратились в нуль. С этой целью оставим первую строку без изменения, а к каждой из остальных строк прибавим первую, умноженную на подходящее число; ко второй — первую, умноженную на (–3), к третьей — первую, также умноженную на (–3), наконец, к четвёртой — первую, умноженную на (–5). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на (–2). Получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Третья строка состоит сплошь из нулей; вычёркиваем её, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

имеющую тот же ранг. Третий элемент в третьем столбце здесь равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Получится матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (*)$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг B равен трём, следовательно, и ранг исходной матрицы A также равен трём.

2. Как видно из первой части решения, матрица A после ряда элементарных преобразований переходит в матрицу B вида (*). При этом в процессе перехода от A к B третья строка обратилась в нулевую (и была отброшена). Если удалить из матрицы A третью строку, то останется матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу матрицы A, т.е. 3. Значит, система всех строк матрицы A' линейно независима. Отсюда следует, что 1-ая, 2-ая и 4-ая строки матрицы A образуют максимальную линейно независимую подсистему строк.

Вывод. *Чтобы найти максимальную линейно независимую подсистему строк в произвольной матрице A, нужно с помощью элементарных преобразований вида 3) привести эту матрицу к виду* (1) *(см. начало пункта) и затем исключить из неё те строки, которые в процессе перехода к матрице* (1) *превратились в нулевые. Тогда оставшиеся строки матрицы A будут составлять максимальную линейно независимую подсистему.*

Задача 2. Чему равен ранг матрицы при различных a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix}?$$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&3&a&2\\-2&7&5&1&3\\-1&2&1&8&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&4&3&a&2\\0&-1&-1&1-2a&-1\\0&-2&-2&8-a&a-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&4&3&a&2\\0&-1&-1&1-2a&-1\\0&0&0&6+3a&a\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что если хотя бы одно из чисел $(6 + 3a)$ или a отлично от нуля, то ранг A равен 3; если же оба эти числа равны нулю, то ранг A равняется 2. Однако последний случай невозможен, так как при $a = 0$ имеем: $6+3a = 6 \neq 0$. Поэтому ранг A равен 3 во всех случаях.

Задача 3. Чему равен ранг A при различных значениях a и b:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&a&b&-1\\-1&0&3&-5&1\\2&1&-1&0&-2\\1&1&-3&4&-2\end{pmatrix}$$

Решение.

Первую строку матрицы A делаем последней; столбцы, содержащие параметры a и b делаем, соответственно, предпоследним и последним.

Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 2 & 1 & a- \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & a-4 & b+10 \end{pmatrix} \underset{+}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Отсюда: ранг A равен 3, если $a = 9$ и $b =$
в остальных случаях.

$$\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ 5 & -10 \\ 0 & -1 \\ +6 & b-10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ 5 & -10 \\ -5 & 9 \\ -9 & b+19 \end{array}\right).$$

$= -19$, ранг A равен 4 —

Упражнения

1. При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix};\ b)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ c)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};\ e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ f)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix};\ h)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

l) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; m) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ a & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2a \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}$

при различных значениях a.

Метод окаймляющих миноров

По теореме о базисах любая максимальная линейная независимая система векторов из A содержит одно и то же число векторов. Поэтому корректно следующее определение: число столбцов, образующих в матрице максимальную линейно независимую систему, называется *рангом матрицы по столбцам.* Аналогично определяется и *ранг матрицы по строкам*.

Теорема (о ранге матриц). *Ранг матрицы по столбцам равен ее минорному рангу.*

Доказательство. Если в матрице любые $r+1$ столбцов линейно зависимы, то, по свойству определителя, любой минор $(r+1)-ого$ порядка равен нулю. Поэтому минорный ранг не больше ранга по столбцам.

Обратно, пусть минорный ранг матрицы A порядка $m \times n$ равен r. Так как при расстановке строк и столбцов матрицы ее ранг не меняется, то можно считать, что минор M $r-$ го порядка, не равный 0, находится на пересечении первых r столбцов и строк. Рассмотрим *«окаймляющий»* его минор.

$$D = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & M & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{array} \right|$$

Здесь $j > r$. Если $i \le r$, то D содержит две равные строки и, по свойству определителей, равен 0. Если же $i > r$, то D минор $(r+1)-ого$ порядка и равен 0 по предположению. Вычислим D методом разложения по последней строке:

$$a_{ij}A_1 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ij}M = 0$$

Заметим, что $A_1, \ldots, A_r$, M не зависят от i. Из равенства получаем:

$$a_{ij} = \left(-\frac{A_1}{M}\right) \cdot a_{i1} + \ldots + \left(-\frac{A_r}{M}\right) \cdot a_{ir}$$

Это равенство справедливо при любом i. Поэтому $j-ый$ столбец исходной матрицы равен линейной комбинации ее первых r столбцов, взятых с коэффициентами:

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \ldots, \quad -\frac{A_r}{M}$$

Итак, первые r столбцов образуют максимальную линейную независимую систему столбцов. Значит ранг по столбцам не выше минорного ранга, что заканчивает доказательство теоремы. □

Так как при транспонировании матрицы ее минорный ранг не меняется, то получаем:

Следствие 1. *Ранг матрицы по строкам равен ее рангу по столбцам.*

Следствие 2. *Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) образуют линейно независимую систему строк (столбцов).*

Доказательство теоремы о ранге дает и метод вычисления ранга матрицы. Именно, найдя минор $r-ого$ порядка, не равный 0, надо перебрать все его окаймляющие (в теореме надо брать $i, j > r$), и, если все они равны 0, то ранг матрицы равен r.

Она дает также и способ нахождения максимальной линейно независимой системы строк (столбцов) матрицы. Именно, это будут те строки (столбцы), в которых лежит минор наивысшего порядка, не равный нулю.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы отличен от нуля. $d=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2.$

Минор третьего порядка $d'=\begin{vmatrix}3 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}=1,$ окаймляющий d, отличен от нуля, однако оба минора четвёртого порядка, окаймляющие d', равны нулю:

Определение. Матрица имеет ранг r, если среди её миноров существует хотя бы один минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $(r + 1)$ и выше равны нулю или не существуют.

Метод окаймляющих миноров состоит в следующем:

1. Выбираем некоторый минор матрицы (как правило, берут минор в левом верхнем углу), который не равен нулю. Затем вычисляют ***все*** миноры, окаймляющие этот минор, порядок которых на 1 больше данного. Если ***все*** они равны нулю, то ранг матрицы равен порядку выбранного минора.

2. Если хотя бы один из окаймляющих миноров не равен нулю, то вычисляют все окаймляющие его миноры. Если они все равны нулю, то ранг матрицы равен порядку этого окаймляющего минора, если хотя бы один отличен от нуля, то берут этот окаймляющий минор и т.д.

Задача 1. Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

Начинаем с миноров первого порядка, т.е. с элементов матрицы A. Среди них явно имеются отличные от нуля.

Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и второго столбца, получаем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, равный нулю. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, отличный от нуля. Переходим теперь к минорам третьего порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвёртый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен 2. Максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, первая и вторая строки.

Задача 2. Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Легко находим минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

отличный от нуля. Окаймляя его при помощи четвёртого столбца и четвёртой строки, получаем минор 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

равный нулю. Однако второй окаймляющий минор:

Кафедра
ФМО и ИТ

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Для этого минора в матрице A уже не существует окаймляющих миноров. Следовательно, ранг A равен 4.

Задача 3. Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$ в зависимости от значений a.

Решение.

В качестве минора 1-го порядка, не равного нулю, возьмём элемент M_1=1, расположенный в третьей строке и первом столбце. Окаймляющие его миноры 2-го порядка суть:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Единственное значение a, при котором все эти миноры равны нулю, есть $a = 1$; тогда ранг A равен 1. Если же $a \neq 1$, то отличным от нуля будет хотя бы первый из указанных миноров. Окаймляющий его минор третьего порядка есть сам определитель матрицы A. Он равен

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

Выясним, при каких значениях a это выражение равно нулю. Для этого решим уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

$$x^3 - 3x + 2 = (x^3 - x) - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2),$$

откуда следует $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Следовательно, если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то ранг A равен 3.

Упражнения

1. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$a)\begin{pmatrix}3 & 2 & -5 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -3\\ 3 & 5 & -13 & 11\end{pmatrix};\ b)\begin{pmatrix}8 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 2 & -3\end{pmatrix};\ c)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};$$

$$d)\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -7\end{pmatrix};\ e)\begin{pmatrix}5 & -3 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 4 & -3 & -5 & -7\\ 1 & 0 & 7 & 11\end{pmatrix};\ f)\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 5 & -3 & -1 & 8\\ 3 & 8 & -9 & -5\end{pmatrix};$$

$$g)\begin{pmatrix}2 & 2 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix};\ h)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1\\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix};\ f)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -7 & 8 & -15 & 6 & -5\\ 5 & 5 & -6 & 11 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Указать в каждом случае максимальную линейно независимую подсистему строк.

2. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix};\text{d)}\begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix},$$

в зависимости от значений a.

3. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

в зависимости от значений a, b, c и d.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

В самом общем случае *система линейных уравнений* имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - *неизвестные.*

Как видно из структуры системы, в общем случае число неизвестных не обязательно должно быть равно числу уравнений самой системы.

Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются *коэффициентами системы*, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - её *свободными членами.* Для удобства коэффициенты системы a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ и свободные члены b_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ снабжены индексами.

Первый индекс коэффициентов a_{ij} соответствует номеру уравнения, а второй индекс – номеру неизвестной x_i, при которой коэффициент поставлен. Индекс свободного члена b_i соответствует номеру уравнения, в которое входит b_i.

Дадим определения некоторых понятий, необходимых при изучении системы уравнений.

Решением системы уравнений называется всякая совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$, которая будучи поставлена в систему на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращает все уравнения системы в тождества.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет одно единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет по крайней мере два различных решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имеют одно и тоже множество решений.

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 120 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Общий вид СЛУ задается системой:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

Набор чисел $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ такой, который при подстановке вместо $x_1, \ldots, x_n$, каждое из уравнений системы обращает в тождество, называется ее *частным решением*. Найти *общее решение* СЛУ, значит указать метод, позволяющий получить все частные ее решения. СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной*– иначе.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной.*

Доказательство. Пусть СЛУ (*) имеет частное решение $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$. Видно, что столбец из свободных членов СЛУ является линейной комбинацией столбцов ее основной матрицы. Поэтому ранг основной матрицы равен рангу расширенной.

Обратно, пусть ранг основной матрицы СЛУ равен рангу расширенной. С точностью до перестановки уравнений и переименования неизвестных можно считать, что минор наивысшего порядка r находится на пересечении первых r строк и столбцов основной матрицы. Следовательно, существуют такие числа $\overline{x_1},\dots,\overline{x_r}$, что столбец из свободных членов равен линейной комбинации первых r столбцов основной матрицы. Полагая $\overline{x}_{r+1}=\dots=\overline{x}_n=0$, видно, что $n-$ка $(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ является решением СЛУ (*). □

Две СЛУ от одного и того же числа неизвестных называются *равносильными*, если они обе не совместны, либо множества их частных решений равны. Нетрудно показать, что полученная СЛУ равносильна исходной, если

- *из СЛУ вычеркнуть уравнение вида 0=0;*
- *обе части какого-то уравнения СЛУ умножить на число, отличное от нуля;*
- *прибавить к одному из уравнений другое, умноженное на некоторое число.*

Изложим один метод решения СЛУ (*), называемый *методом последовательного исключения переменных или методом Гаусса.* Будем считать, что $a_{11}\neq 0$ (этого можно всегда добиться с помощью перестановок строк). Попытаемся теперь, умножая первое уравнение на подходящие числа и прибавляя его к последующим, уничтожить в них слагаемые, содержащие x_1. Для этого, умножаем первое уравнение на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавляем ко второму, и так далее, пока не умножим первое уравнение на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ и не прибавим к последнему. Получим равносильную СЛУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Полагаем, что $a'_{22} \neq 0$(этого можно добиться, переставляя строки или переименовывая переменные). Затем временно «забываем» про первое уравнение и продолжаем такую процедуру с оставшимися уравнениями.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

В результате придем к ступенчатой СЛУ, которая имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases}$$

Эта часть метода Гаусса часто носит название «прямого хода». Заметим, что число r является рангом основной матрицы СЛУ и он равен рангу расширенной. Теперь для нахождения общего решения СЛУ (*) воспользуемся «обратным ходом». Для этого из последнего уравнения системы выразим x_r через $x_{r+1},\ldots,x_n$. Зная это выражение из предпоследнего уравнения можно выразить x_{r-1} также через $x_{r+1},\ldots,x_n$, и так далее. Наконец получим систему

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r + d_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Она равносильна исходной и называется *общим решением* СЛУ (*). Теперь подставляя вместо неизвестных произвольные значения $x_{r+1},\ldots,x_n$ и вычисляя $x_1, x_2,\ldots,x_r$ можно получить все частные решения $x_1, x_2,\ldots,x_n$ СЛУ (*).

Если все свободные члены СЛУ $b_1,\ldots,b_m$ равны 0, то СЛУ называется *системой линейных однородных уравнений* (СЛОУ). СЛОУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Несложно проверить истинность следующих утверждений:

- *сумма двух частных решений СЛОУ также является ее частным решением;*
- *если число умножить на частное решение СЛОУ, то получится также ее частное решение.*

В частности, если СЛОУ зависит от *n* неизвестных, то множество всех частных решений ее образует подпространство в пространстве R^n. Базис этого подпространства называется *фундаментальной системой решений* СЛОУ.

Теорема. *Фундаментальная система решений СЛОУ со-стоит из n − r некоторых ее частных решений, где n число неизвестных СЛОУ, а r ранг ее основной матрицы.*

Начало
Содержание
Страница 125 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Доказательство. Рассмотрим СЛОУ (*), считая, что $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Найдем ее общее решение, которое будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = d_{1r+1}x_{r+1} + d_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{1n}x_n \\ x_2 = d_{2r+1}x_{r+1} + d_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{rr+1}x_{r+1} + d_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далее свободным неизвестным $x_{r+1},\ldots,x_n$ будем приписывать последовательно 1, а всем остальным 0. Получим $n-r$ частных решений.

Покажем, что векторы

$$e_1 = (d_{1r+1}, d_{2r+1}, \ldots, d_{rr+1}, 1, 0, \ldots, 0);$$

$$e_2 = (d_{1r+2}, d_{2r+2}, \ldots, d_{rr+2}, 0, 1, \ldots, 0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_{n-r} = (d_{1n}, d_{2n}, \ldots, d_{rn}, 0, 0, \ldots, 1)$$

образуют фундаментальную систему СЛОУ (*).

Минор, стоящий на пересечении всех ее решений и последних их $n-r$ столбцов не равен 0. Значит, решения линейно независимы. Пусть теперь $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_n) = e$ какое-то ее частное решение. Докажем, что вектор e линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$.

Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_{r+1}e_1 + \alpha_{r+2}e_2 + \ldots + \alpha_n e_{n-r} = e'$, вектор e' тоже является решением СЛОУ.

Имеем, $e' = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n)$. Но $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и $\beta_1, \ldots, \beta_r$ однозначно определяются в общем решении через значения $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$, придаваемых свободным неизвестным. Поэтому $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_r = \beta_r$. Таким образом, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ являются и системой порождающих подпространства решений СЛОУ, т.е. ее базисом. □

Следствие. *СЛОУ имеет тривиальное решение в том и только в том случае, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.* □

Теорема (о числе решений). *Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е. ранг r матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы. Тогда, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение. Если же ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система имеет бесконечное множество решений, а именно: некоторым $n - r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.*

Пример 1. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11} \neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}.$$

Системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{array}\right).$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Если матрица *A* является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица *A* переводится в матрицу *B*, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, треугольной матрицей. Матрица коэффициентов системы – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Пример 2. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}.$$

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

Начало
Содержание
Страница 132 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел x_1, x_2, …, x_5, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению

$$x_3–2x_4+3x_5=–4.$$

Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4=r$; $x_5=s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3=–4+2r–3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2=–3+2–2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1=4–r+s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу A, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу A можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу А назовем трапециевидной или трапецеидальной. Очевидно, что матрица в данном примере — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1+0x_2+\ldots 0x_n=b_j \ (b_j\neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел x_1, x_2, …, x_n не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет бесконечно много решений.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются базисными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются свободными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется *частным решением*.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется *общим решением*.

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется *базисным*.

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, в матрице можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы. Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1 и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое рангом системы.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Решение.

Проведем преобразование матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4.

Решение исходной системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{14}{3} - \dfrac{3}{2}r - \dfrac{11}{6}s \\ x_2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}r + \dfrac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 138 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 48. \end{cases}$$

Решение.

Подвергнем преобразованиям расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 13 & 48 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен двум. Приходим, следовательно, к системе уравнений, равносильной исходной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases},$$

в которой одна переменная является независимой. В качестве независимой переменной возьмём x_3, и выразим через неё остальные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 12 - \dfrac{11}{3}x_3 \\ x_2 = 4 - \dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}.$$

Полагая, например, $x_3 = 3$, получим одно из частных решений системы: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Это система однородных уравнений, причём число уравнений меньше числа неизвестных; она будет иметь множество решений. Так как все свободные члены равны нулю, то будем подвергать преобразованиям лишь матрицу из коэффициентов системы:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}.
$$

Мы пришли к системе уравнений

$$
\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}
$$

В качестве независимых выберем две переменные, например x_3, x_4
Выразим остальные переменные через независимые. Получим

$$
\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 19x_4 \\ x_2 = -5x_3 + 11x_4. \end{cases}
$$

Тогда фундаментальная система будет иметь следующий вид:

x_1	x_2	x_3	x_4
-8	-5	1	0
19	11	0	1

Любое частное решение системы может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальных решений, т. е. общее решение системы

$$
\bar{x} = \alpha(-8, -5, 1, 0) + \beta(19, 11, 0, 1);\ \alpha,\ \beta \in R.
$$

Упражнения

1. Исследовать совместность и найти общее и одно частное решение системы уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 - 3x_5 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 27 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$;

$$\text{k)}\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1\\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7\\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases};\quad \text{l)}\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21\\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10\\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=15\\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18 \end{cases}.$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ:

$$\text{a)}\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3\\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1\\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda \end{cases};\quad \text{b)}\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9\\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11 \end{cases}.$$

3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\text{a)}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases};\quad \text{b)}\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\\ 2x_1-4x_2+12x_3+8x_4=0 \end{cases};$$

$$
c)\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases};\quad
d)\ \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases};\quad
e)\ \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases};
$$

$$
f)\ \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases};\quad
g)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.
$$

2.2. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Системой линейных уравнений (*СЛУ*) *n* неизвестных $x_1,\ldots,x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Данная СЛУ состоит из m уравнений от n неизвестных. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной*, а если к ней приписать столбец из $b_1,\ldots,b_m$ - свободных членов СЛУ, то полученную матрицу называют *расширенной*. СЛУ можно записать и в матричном виде

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

СЛУ называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных $m = n$ и основная матрица ее невырожденная.

Правило Крамера. *Крамеровская СЛУ имеет единственное решение* $(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$, *которое находится по формулам*

$$\overline{x_1}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\overline{x_2}=\frac{\Delta_2}{\Delta},\dots,\overline{x_n}=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta-$ *определитель основной матрицы СЛУ, а* Δ_i *получается из* Δ *в результате замены в* Δ $i-$*го столбца на столбец из свободных членов.*

Доказательство. Так как $|A|\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Домножая обе части равенства слева на A^{-1}, получим

$$E\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Вспоминая, чему равна матрица A^{-1} и находя произведение в правой части получаем $\overline{x_i}=\dfrac{b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}}{|A|}$.

Но по следствию 1 из теоремы Лапласа числитель есть Δ_i, если вычислить Δ_i, разлагая Δ_i по $i-$*му* столбцу. □

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+3y+z=2. \end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3$$

т. о. $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-1}{1} = -1; \quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{1} = 1; \quad z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{0}{1} = 0.$$

Упражнения

Решить СЛУ методом Крамера:

a) $\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y-z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$.

2.3. Решение систем линейных уравнений в матричном виде

Рассмотрим снова произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными, которую запишем, как и раньше, в матричной форме:

$$A\bar{x}=\bar{b},$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матрицу A называют матрицей системы, а матрицу, полученную из матрицы A добавлением столбца свободных членов $\bar{b}$ – *расширенной матрицей системы*. Обозначим расширенную матрицу системы символом $(A|b)$:

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранги матриц A и $(A|b)$ связаны неравенством

$$r(A\,|\,b) \geq r(A).$$

При решении матричных уравнений вида $AX=B$ или $YA=B$, где A, B — квадратные матрицы n-го порядка, а X — искомая квадратная матрица того же n-го порядка, надо различать два случая:

Случай 1. A — невырожденная матрица. В этом случае каждое из уравнений $AX = B$ и $YA = B$ имеет единственное решение $A=AA^{-1}B$ и $Y=BA^{-1}$. В самом деле, легко проверить, что $A^{-1}B$ удовлетворяет уравнению $AX=B$ и BA^{-1} удовлетворяет уравнению $YA=B$.

Если X_1 и X_2 — решения уравнения $AX=B$, то $AX_1=B$ и $AX_2=B$, откуда $AX_1=AX_2$. Умножая обе части равенства слева на обратную матрицу A^{-1}, получаем $X_1=X_2$. Аналогично убеждаемся в единственности решения уравнения $YA=B$.

$$A\bar{X} = \bar{B} \Leftrightarrow A^{-1}A\bar{X} = A^{-1}\bar{B} \Leftrightarrow E\bar{X} = A^{-1}\bar{B} \Leftrightarrow \bar{X} = A^{-1}\bar{B}.$$

Пример 1. Решить СЛУ с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x+4y+3z=18 \\ 2x+2y+3z=15 \\ 4x+4y+z=15 \end{cases}$$

Решение.

Кафедра
ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 150 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Матричный вид системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\bar{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ -\frac{11}{30} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{matrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Начало

Содержание

Страница 151 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

2.4. Решение матричных уравнений

Матричным уравнением называется выражение вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

или в краткой записи: $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$

A, B – заданные матрицы, $det A \neq 0$, X –неизвестная матрица, которую надо найти. Под решением матричного уравнения будем понимать матрицу X, которая обращает матричное уравнение в тождество.

Искать решение матричного уравнения будем с помощью обратной матрицы

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Пример 1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

Искать решение будем по формуле: $X = A^{-1}B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Найти матрицу X второго порядка, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — невырожденная. Находим, что:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

Случай 2. A — вырожденная матрица. В этом случае предыдущий способ непригоден и приходится пользоваться другим приёмом, который мы поясним с помощью следующей задачи.

Задача 2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Решение.

Полагаем $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Тогда после перемножения матриц $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и X получаем:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 6x_2 & 4y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}; \text{ (I)} \qquad \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}. \text{ (II)}$$

Системы (I) и (II) являются совместными и неопределёнными. Находим, что

$x_1 = \dfrac{1 - 3x_2}{2}$ — общее решение системы (I) и

$y_1 = \dfrac{2 - 3y_2}{2}$ — общее решение системы (II).

Полагая $x_2 = 2a + 1$, $y_2 = 2b$, получаем:

$X = \begin{pmatrix} -3a - 1 & 1 - 3b \\ 2a + 1 & 2b \end{pmatrix}$, где a и b — произвольные числа.

Упражнения

1. Решить системы уравнений, используя обратную матрицу:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 4x+5y+6z=8 \\ 7x+8y \quad\;\; =2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7 \\ x_1+2x_2-3x_3=14 \\ -x_1-x_2+5x_3=-18 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+3x_2+2x_3=-1 \\ x_1+x_2 \quad\;\; =5 \end{cases}$.

2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу X из следующих уравнений:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; f) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

$$\text{g)}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix};\ \text{h)}\, X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & \\ 1 & -3 & -\\ -5 & 2 & \end{pmatrix}$$

$$\text{i)}\, X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & -8\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 9 & -3 & 6\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix};\ \text{k)}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}\cdot X\cdot$$

$$\text{l)}\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМ ВЕКТОРОВ. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

3.1. Линейная зависимость и независимость систем векторов

Пусть L – произвольное вещественное векторное пространство, $\{x_i\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset L$, $\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset R$. *Линейной комбинацией* векторов $\{x_i\}$ с коэффициентами $\{\alpha_i\}$ называется вектор $x \in L$, получаемый по правилу

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i .$$

Линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ называется *нетривиальной*, если в ней хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля. Линейная комбинация вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$ называется *тривиальной*; она, очевидно, равна нулевому вектору $\overline{0}$.

Определение. Система векторов $\{x_i\}$ называется *линейно зависимой*, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. В противном случае, т.е. если только тривиальная линейная комбинация данных векторов равна нулевому вектору, векторы называются *линейно независимыми*.

Теорема (критерий линейной зависимости). *Для того чтобы система векторов $\{x_i\}$ линейного пространства была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы, т.е. справедливо равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

в котором хотя бы одно из чисел α_i отлично от нуля. Пусть, для определенности, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда, разделив обе части последнего равенства на α_1, мы можем переписать его в виде

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n .$$

Последнее и означает, что вектор x_1 есть линейная комбинация векторов $\{x_i\}$.

Достаточность. Пусть один из векторов (например, x_1) является линейной комбинацией остальных. Это означает, что найдутся числа $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ такие, что справедливо равенство

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n .$$

Это равенство можно переписать в виде

$$(-1)x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_nx_n=\overline{0}\,.$$

Так как среди чисел $(-1),\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ по крайней мере одно отлично от нуля, то последнее равенство устанавливает линейную зависимость векторов $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Докажем еще два простых, но важных предложения о линейной зависимости.

1) Если среди векторов $x_1,x_2,\ldots,x_n$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то вся система векторов линейно зависима.

В самом деле, если, например, $x_1=\overline{0}$, то, полагая $\alpha_1=1,\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, имеем нетривиальную линейную комбинацию $1\cdot\overline{0}+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=\overline{0}$

2) Если среди векторов $x_1,x_2,\ldots,x_n$ некоторые образуют линейно зависимую систему, то и вся система $x_1,x_2,\ldots,x_n$ линейно зависима.

Действительно, пусть векторы $x_1,x_2,\ldots,x_k$, $k\le n$, линейно зависимы. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_kx_k$, равная нулевому вектору. Но тогда, полагая $\alpha_{k+1}=\ldots=\alpha_n=0$, получим также нетривиальную линейную комбинацию $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_kx_k+0\cdot x_{k+1}+\ldots+0\cdot x_n$, равную нулевому вектору.

Пример 1. Даны векторы

$a_1 = (3, 2, -1, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 4, 1)$, $a_3 = (-2, -2, -3, -1)$.

Найти вектор $b = 2a_1 - a_2 - a_3$.

Решение.

$$b=2a_1-a_2-a_3=2(3, 2, -1, 0)+(-1)(-1, 0, 4, 1)+(-1)(-2, -2, -3, -1)=$$

$$(6, 4, -2, 0)+(1, 0, -4, -1)+(2, 2, 3, 1)=(9, 6, -3, 0).$$

Пример 2. Даны векторы

$a_1=(6, 4, -2)$, $a_2=(-1, 0, 4)$, $a_3=(-2, -2, -3)$.

Найти вектор $b=a_1+2a_2+2a_3$.

Решение.

$$b=a_1+2a_2+2a_3=(6, 4, -2)+2(-1, 0, 4)+2(-2,-2, -3)=$$

$$(6, 4, -2)+(-2, 0, 8)+(-4, -4, -6)=(0, 0, 0)=o.$$

Пример 3. Выяснить является ли система векторов

$a_1=(2, 2, 7, -1)$, $a_2=(3, -1, 2, 4)$, $a_3(1, 1, 3, 1)$ линейно зависимой.

Решение.

Составим линейную комбинацию данных векторов. $k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + k_3 \cdot a_3 = 0$; подставим вместо векторов их координаты:

$$k_1 \cdot (2, 2, 7, -1) + k_2 \cdot (3, -1, 2, 4) + k_3 \cdot (1, 1, 3, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0, \\ 2k_1 + (-1)k_2 + k_3 = 0, \\ 7k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ (-1)k_1 + 4k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 30 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ k_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, данная система векторов линейно независима.

3.2. Базис и размерность векторного пространства

Фундаментальным вопросом теории векторных пространств является вопрос о том, можно ли, а если можно, то как, произвольный вектор пространства представить в виде линейной комбинации фиксированного набора векторов из этого пространства. Далее мы получим ответ на этот вопрос.

Определение. Система линейно независимых векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторного пространства L называется *базисом* этого пространства, если любой вектор из L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы, т.е. для каждого вектора $x \in L$ существуют вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что имеет место равенство

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n .$$

Это равенство называется *разложением вектора x* по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора x относительно базиса* (или *в базисе*) $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теорема (о единственности разложения по базису). *Каждый вектор x пространства L может быть разложен по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ единственным образом, т.е. координаты каждого век-тора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяются однозначно.*

Начало
Содержание
Страница 163 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Доказательство.

Допустим, что для некоторого элемента $x \in L$ существуют два разложения по одному и тому же базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \text{ и } x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n .$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = \overline{0} .$$

В силу линейной независимости базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$ или $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Единственность разложения по базису доказана.

Главное значение базиса заключается в том, что операции сложения векторов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами – координатами этих векторов. А именно, справедлива следующая

Теорема. *При сложении двух любых векторов линейного пространства L их координаты (относительно любого базиса пространства) складываются; при умножении произвольного вектора на любое число λ все координаты этого вектора умножаются на λ.*

Доказательство.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольный базис пространства L, а

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \text{ и } y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

– любые два элемента этого пространства. Тогда из аксиом векторного пространства получаем:

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n)e_n.$$

В силу единственности разложения по базису теорема доказана.

Пример. Исследуем вопрос о базисе пространства R^n, введенного ранее при рассмотрении примеров векторных пространств. Покажем, что n элементов

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0,0),\ e_2 = (0,1,0,\ldots,0,0), \ldots,\ e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$$

указанного пространства образуют базис.

Решение.

Во-первых, эти векторы линейно независимы. Проверка линейной независимости набора $\{e_i\}$ состоит в определении значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при которых возможно равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \overline{0} = (0,0,\ldots,0).$$

Но в силу только что доказанной теоремы

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

а последний вектор является нулевым лишь при условии

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Во-вторых, всякий вектор $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ заведомо представим в виде линейной комбинации векторов $\{e_i\}$:

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

и,значит, набор $\{e_i\}$ образует базис.

Определение. Векторное пространство L называется *n-мерным*, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов уже являются линейно зависимыми. При этом число n называется *размерностью* пространства L.

- Размерность векторного пространства, состоящего из одного нулевого вектора, принимается равной нулю.
- Размерность пространства L обозначают символом $\dim L$.

Определение. Векторное пространство L называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых векторов. В этом случае пишут $\dim L = \infty$.

Выясним связь между понятиями базиса и размерности пространства.

Теорема. *Если L – векторное пространство размерности n, то любые n линейно независимых векторов этого пространства образуют его базис.*

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ – произвольная система n линейно независимых векторов пространства L (существование хотя бы одной такой системы следует из определения n-мерного пространства). Если x – любой вектор пространства L, то согласно определению система из $n+1$ векторов $x, e_1, e_2, ..., e_n$ линейно зависима, т.е. найдутся не все равные нулю числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что справедливо равенство

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = \bar{0}.$$

Заметим, что число α_0 заведомо отлично от нуля (ибо в противном случае из равенства вытекала бы линейная зависимость векторов $e_1, e_2, ..., e_n$). Но тогда, деля равенство на α_0 и полагая

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_0},$$

получаем $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$.

Так как x – произвольный элемент из L, то последнее равенство доказывает, что система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является базисом пространства L.

Теорема. *Если векторное пространство L имеет базис, состоящий из n векторов, то* $\dim L = n$.

Упражнения

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

a) $\mathbf{a}=\{1,\ 4,\ 6\},\quad \mathbf{b}=\{1,\ -1,\ 1\},\quad \mathbf{c}=\{1,\ 1,\ 3\}.$

b) $\mathbf{a}=\{2,\ -3,\ 1\},\quad \mathbf{b}=\{3,\ -1,\ 5\},\quad \mathbf{c}=\{1,\ -4,\ 3\}.$

c) $\mathbf{a}=\{5,\ 4,\ 3\},\quad \mathbf{b}=\{3,\ 3,\ 2\},\quad \mathbf{c}=\{8,\ 1,\ 3\}.$

d) $\mathbf{a}=\{-2,\ 1,\ 5\},\quad \mathbf{b}=\{4,\ -3,\ 0\},\quad \mathbf{c}=\{0,\ -1,\ 10\}.$

2. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

a) $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0,\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0,\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0.\end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0,\\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0,\\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0,\\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0.\end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0,\\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0,\\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0.\end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4. Найти координаты вектора x в базисе (e'_1, e'_2, e'_3), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

a) $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{6, \ -1, \ 3\}$. b) $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{1, \ 2, \ 4\}$.

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Основные понятия

Пусть дано множество L; его элементы будут обозначаться малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$ Пусть, далее, в множестве L определены *операция сложения*, ставящая в соответствие всякой паре элементов a, b из L однозначно определенный элемент $a + b$ из L, называемый их *суммой*, и *операция умножения на действительное число*, причем *произведение $\alpha \cdot a$ элемента a* на число α, однозначно определено и принадлежит к L.

Два линейных пространства L и L' называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $f: L \to L'$, ставящее в соответствие каждому вектору x пространства L вектор $f(x)$ пространства L', такое что:

$$f(a+b) = f(a) + f(b);$$
$$f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a).$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ − базис L и $x \in L$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ − система порождающих, то найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Если также $x=\beta_1 e_1+..+\beta_n e_n$, то имеем $x-x=\theta=(\alpha_1-\beta_1)e_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)e_n$

Но $e_1,\ldots,e_n$ линейно независимая система, откуда $\alpha_1-\beta_1=\ldots=\alpha_n-\beta_n=0$

Значит $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_n=\beta_n$.

Итак, представление вектора x в виде линейной комбинации базисных векторов возможно и единственно. Набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ называется *координатами* вектора x в базисе $e_1,\ldots,e_n$.

Отображение $\varphi: L\to L$ называется *линейным оператором*, если выполнены условия: для всех $x,y\in L$ и числа α:

- $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;
- $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$,

которые можно заменить одним: для всех $x,y\in L$ и чисел α,β, верно

- $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$.

Отсюда следует равенство

- $\varphi(\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n)=\alpha_1\varphi(a_1)+\ldots+\alpha_n\varphi(a_n)$,

широко используемое в дальнейшем.

Справедлива следующая

Теорема (о существовании и единственности φ). *Пусть $e_1,\ldots,e_n$ − базис L и $a_1,\ldots,a_n$ − произвольные векторы из L. Тогда существует единственный линейный оператор φ такой, что $\varphi(e_1)=a_1,\ldots,\varphi(e_n)=a_n$.*

Доказательство. Если $x=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n$, то зададим $\varphi : L\to L$ так: $\varphi(x)=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$. Проверим, что φ − линейный оператор. Если $y=\beta_1 e_1+\ldots+\beta_n e_n$ и γ,δ − произвольные числа, то

$$\varphi(\gamma x+\delta y)=\varphi((\gamma\alpha_1 e_1+\ldots+\gamma\alpha_n e_n)+(\delta\beta_1 e_1+\ldots+\delta\beta_n e_n))=$$
$$=\varphi((\gamma\alpha_1+\delta\beta_1)e_1+\ldots+(\gamma\alpha_n+\delta\beta_n)e_n)=(\gamma\alpha_1+\delta\beta_1)a_1+\ldots+(\gamma\alpha_n+\delta\beta_n)a_n=$$
$$=(\gamma(\alpha_1 a_1)+\ldots+\gamma(\alpha_n a_n)+(\delta(\beta_1 a_1)+\ldots+\delta(\beta_n a_n))=\gamma\varphi(x)+\delta\varphi(y).$$

Предположим, что ψ также линейный оператор L, причем $\psi(e_1)=a_1,\ldots,\psi(e_n)=a_n$.

Имеем $\psi(\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n)=\alpha_1\psi(e_1)+\ldots+\alpha_n\psi(e_n)=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$. Итак $\varphi(x)=\psi(x)$ для любого $x\in L$. Значит $\varphi=\psi$. □

Примеры.

1. Рассмотрим произвольное линейное пространство V и в нем два оператора.

$\varphi_1(x)=0\ \forall\ x\in V$. φ_1 называется нулевым оператором.

$\varphi_2(x) = x \ \forall\ x \in V$. φ_2 называется тождественным оператором и обозначается id.

Линейность этих операторов проверяется без труда.

2. Рассмотрим линейное пространство $V = \mathrm{R}^2$, т.е. множество всех векторов плоскости, и отображение φ – поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{6}$. Это отображение является линейным оператором. Проверяем свойства:

$$\varphi\,(x_1 + x_2) = \varphi\,(x_1) + \varphi\,(x_2),$$

$$\varphi\,(\lambda x_1) = \lambda\varphi(x_1).$$

3. Пусть $V = \mathrm{R}^3$ – множество всех векторов трехмерного пространства. Отображение φ – ортогональное проектирование на плоскость OXY.

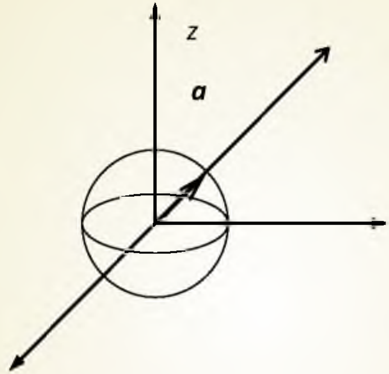
Для проверки линейности этого оператора воспользуемся известными свойствами проектирования.

$$\varphi(a + b) = \text{пр}_{OXY}\,(a + b) = \text{пр}_{OXY}\,a + \text{пр}_{OXY}\,b = \varphi(a) + \varphi(b);$$

$$\varphi(\lambda a) = \text{пр}_{OXY}\,(\lambda a) = \lambda\text{пр}_{OXY}\,a = \lambda\varphi(a).$$

φ – оператор проектирования на плоскость – линейный оператор (проектор).

4. Не все отображения являются линейными. В том же векторном пространстве $V = \mathrm{R}^3$ рассмотрим единичную сферу, задаваемую в декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и отображение φ, переводящее вектор a в вектор $\varphi(a)$, сонаправленный вектору a и имеющий единичную длину.



Отображение φ не является линейным оператором, так как $\varphi(\lambda a) \neq \lambda\varphi(a)$ при $\lambda \neq 1$.

5. Рассмотрим $V = P_{\mathrm{n}}[x]$, т.е. линейное пространство всех многочленов степени не выше n:

$P_n[x] = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in P\}$, и φ – отображение дифференцирования: $\varphi(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$.

Мы знаем свойства производной:

$$(p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x) \text{ и } (\lambda p(x))' = \lambda p'(x);$$

следовательно, отображение дифференцирования является линейным оператором, который обозначается $\varphi = d$.

6. Пусть $V = M_n$ – линейное пространство квадратных матриц порядка n, A – фиксированная матрица, φ – отображение $M_n \to M_n$, действующее следующим образом: для произвольной матрицы $B \in M_n$ образ $\varphi(B) = A\cdot B$.

Проверим линейность этого отображения, используя известные свойства умножения матриц:

$$\varphi(B+C) = A(B+C) = AB + AC = \varphi(B) + \varphi(C);$$

$$\varphi(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda\varphi(B).$$

Если $n = 2$, а матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то для любой матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\varphi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие операторы:

a)
$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\quad -3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2x_3),$$
$$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2),$$
$$Cx = (x_3^4,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2x_3).$$

b)
$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2),$$
$$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 0,\quad x_2^4 + 2x_3),$$
$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2x_3).$$

c)
$$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3),$$
$$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3),$$
$$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3).$$

d)
$$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3),$$
$$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad 1,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4),$$
$$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3).$$

$$Ax = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6\right),$$

$$Bx = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3\right),$$

e) $$Cx = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3\right).$$

$$Ax = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3\right),$$

$$Bx = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3\right),$$

f) $$Cx = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5\right).$$

2. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $Bx = (x_2, 2x_3, x_1)$.
Найти:

1. ABx; 2. A^2x; 3. $(A^2 - B)x$; 4. B^2x; 5. $(2A + 3B^2)x$;

6. $(A^2 + B^2)x$; 7. $(B^2 + A)x$; 8. BAx; 9. $B(2A - B)x$;

10. $A(2B - A)x$; 11. $2(AB + 2A)x$.

Кафедра
ФМО и ИТ

4.2. Матрица линейного оператора в данном базисе

Доказанная ранее теорема показывает, что линейный оператор однозначно определяется в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ своими значениями $\varphi(e_1),\ldots,\varphi(e_n)$. Приходим к определению: *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$ называется такая матрица $A_\varphi = (a_{ij})$ $(i = \overline{1..n};\ j = \overline{1..n})$, у которой $i-$*ый* столбец есть координаты вектора $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Т. е.,

$$\begin{pmatrix}\varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \ldots & \varphi(e_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1 & e_2 & \ldots & e_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $[x]$ столбец из координат вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, т.е. $[x] = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$. В частности, $[\varphi(x)]-$столбец из координат вектора $\varphi(x)$ в этом же базисе.

Имеет место следующее равенство $[\varphi(x)] = A_\varphi \cdot [x]$. Действительно,

$$\varphi(x)=\varphi(\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n)=\alpha_1\varphi(e_1)+\ldots+\alpha_n\varphi(e_n)=\alpha_1(\alpha_{11}e_1+\ldots+\alpha_{n1}e_n)+\ldots+$$
$$+\alpha_n(\alpha_{1n}e_1+\ldots+\alpha_{nn}e_n)=(\alpha_{11}\alpha_1+\ldots+\alpha_{1n}\alpha_n)e_1+\ldots+(\alpha_{n1}\alpha_1+\ldots+\alpha_{nn}\alpha_n)e_n$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1,\ldots,e_n$ как раз есть координаты вектора $\varphi(x)$ в базисе $e_1,\ldots,e_n$. Из правила умножения матрицы A_φ на столбец $[x]$ получаем искомое равенство. □

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис линейного пространства V, т.е. линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства V; φ – линейный оператор. Образы базисных векторов $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$, как и все векторы пространства V, линейно выражаются через базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$:

$$\varphi(e_1) = a_1^1 e_1 + \ldots + a_n^1 e_n;$$

$$\varphi(e_2) = a_1^2 e_1 + \ldots + a_n^2 e_n;$$

$$\ldots$$

$$\varphi(e_n) = a_1^n e_1 + \ldots + a_n^n e_n.$$

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного оператора в данном базисе. В столбцах этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов в рассматриваемом базисе.

Примеры.

1. Пусть $V = \mathrm{R}^3$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис.

Решение.

Рассмотрим нулевой и тождественный операторы. В первом случае $\varphi(x) = 0\ \forall\ x$ и, следовательно,

$$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3;$$

$$\varphi(e_2) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3;$$

$$\varphi(e_3) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3;$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица нулевого оператора.

Если $\varphi = id$, то $id(x) = x \; \forall \, x$ и, следовательно,

$$id(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3;$$

$$id(e_2) = e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3;$$

$$id(e_3) = e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3.$$

Следовательно, матрицей оператора id будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Заметим, что матрицами нулевого и тождественного оператора в любом базисе будут нулевая и единичная матрицы соответственно.

2. $V = \mathrm{R}^2$, $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства R^2. Оператор φ – поворот на угол $\frac{\pi}{6}$:

Решение.

$$\varphi(i) = (\cos\frac{\pi}{6})\, i + (\sin\frac{\pi}{6})\, j; \quad \varphi(j) = (-\sin\frac{\pi}{6})\, i + (\cos\frac{\pi}{6})\, j.$$

Следовательно, матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно получить матрицу поворота на любой угол α:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. $V = \mathrm{R}^3$, φ – оператор проектирования на плоскость OXY. Найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе

$$e_1 = i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как $\varphi(i) = i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(j) = j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(k) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В столбцах матрицы A стоят образы базисных векторов i, j, k в координатной форме.

4. $V = P_3[x]$ – линейное пространство многочленов степени не выше 3, $\varphi = d$ – оператор дифференцирования; $1, x, x^2, x^3$ – стандартный базис пространства V.
Решение.

Напомним, что любой многочлен $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в рассматриваемом базисе может быть записан в координатной форме как четырехмерный вектор $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$d(1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d(x) = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d(x^2) = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d(x^3) = \ = 3x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица оператора d имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $V = \mathrm{R}^3$, φ_A – оператор умножения на матрицу A. Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Рассмотрим $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства R^3; вектор $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Действие оператора φ_A описывается следующим образом:

$$\varphi(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: $\varphi\,(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(j) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица оператора φ_A совпадает с исходной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Этот пример показывает, что любая матрица является матрицей некоторого оператора, а именно, оператора умножения на эту матрицу.

Каждый линейный оператор φ однозначно определяется своей матрицей. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

– матрица оператора φ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$. Столбцы матрицы представляют собой координатную запись образов базисных векторов.

Если известны векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$, то известно, куда отображается любой вектор x. Действительно, пусть

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ – разложение вектора x по базису $e_1, \dots, e_n$;

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \dots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_1^2 \\ \dots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_1^n \\ \dots \\ a_n^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

То есть каждый оператор является оператором умножения на свою матрицу A.

Так, рассмотренный нами в примере 4 оператор дифференцирования d имеет в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если многочлен $p(x) \in P_3[x]$ имеет вид $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то координатная запись этого многочлена в базисе $1, x, x^2, x^3$ такова:

$$p(x) = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}; \; d(p(x)) = p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Координатная запись многочлена $p'(x) = \begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Этот вектор получается из вектора $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$, как и утверждает теория, умножением на матрицу A:

$$\begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$$x' = x + y$$

$$y' = y + z$$

$$z' = z + x$$

Решение.

$$x' = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z$$

$$z' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Определение. Если вектор $\bar{x}$ переводится в вектор $\bar{y}$ линейным преобразованием с матрицей А, а вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$ линейным преобразованием с матрицей В, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$ (оно называется произведением составляющих преобразований).

$$C = B \cdot A$$

Пример. Задано линейное преобразование A, переводящее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ и линейное преобразование B, переводящее вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y\ = 3x\ - 5x\ + 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z\ = 3y\ + 6y\ + 7y \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$$

Кафедра ФМО и ИТ

4.3. Матрица оператора в различных базисах

Определение. Матрицы, задающие одно и то же линейное преобразование в разных базисах, *подобны* между собой. При этом матрица линейного преобразования φ в базисе e' получается трансформированием матрицы этого преобразования в базисе e матрицей перехода от базиса e' к базису e.

Пусть $e'_1,\dots,e'_n$ – другой базис L. *Матрицей перехода от одного базиса* $e_1,\dots,e_n$ *к другому* $e'_1,\dots,e'_n$ называется такая матрица $T=(\tau_{ij})$ $(i=\overline{1..n}\,;\, j=\overline{1..n})$, у которой *i-ый* столбец есть координаты вектора e'_i в базисе $e_1,\dots,e_n$, т. е.

$$\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Фактически матрица T есть матрица линейного оператора, переводящего векторы $e_1,\dots,e_n$ в $e'_1,\dots,e'_n$.

Пусть $[y]=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ – столбец из координат вектора x в базисе $e_1^{/},\dots,e_n^{/}$.

Тогда имеет место следующее равенство

$$[x]=T\cdot[y]$$

Действительно, имеем

$$x=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n=\beta_1 e_1^{/}+\ldots+\beta_n e_n^{/}.$$

Но $e_i^{/}=\tau_{1i}e_1+\ldots+\tau_{ni}e_n$, откуда

$$x=\beta_1(\tau_{11}e_1+\ldots+\tau_{n1}e_n)+\ldots+\beta_n(\tau_{1n}e_1+\ldots+\tau_{nn}e_n)=$$
$$=(\tau_{11}\beta_1+\ldots+\tau_{1n}\beta_n)e_1+\ldots+(\tau_{n1}\beta_1+\ldots+\tau_{nn}\beta_n)e_n.$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1,\dots,e_n$ как раз и есть координаты вектора x в базисе $e_1,\dots,e_n$. Применяем правило умножения матрицы T на столбец $[y]$.

По следствию из теоремы о ранге матриц T невырожденная матрица, т.к. её столбцы, будучи координатами базисных векторов линейно независимы. Поэтому T имеет обратную матрицу T^{-1}. Умножая обе части равенства слева на T^{-1}, получаем $[y]=T^{-1}\cdot[x]$.

Пример 1.

Векторы $e_1' = (1, 1, 1)$; $e_2' = (1, 1, 2)$; $e_3' = (1, 2, 3)$; $x = (6, 9, 14)$ заданы своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Показать, что векторы e_1', e_2', e_3' сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение.

Составим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к системе векторов e_1', e_2', e_3':

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

она невырожденная, значит векторы e_1', e_2', e_3' линейно независимы и могут образовывать базис трёхмерного пространства. Тогда

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём координаты вектора x в базисе e_1', e_2', e_3':

$$\begin{pmatrix} x_1^{/} \\ x_2^{/} \\ x_3^{/} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора, заданными в разных базисах.

Теорема (о связи матриц линейного оператора). *Пусть A и B – матрицы линейного оператора φ в базисах $e_1,\ldots,e_n$ и $e_1^{/},\ldots,e_n^{/}$ со-ответственно и T – матрица перехода о первого базиса ко вто-рому. Тогда $B = T^{-1}AT$ (матрицы A и B называются подобными).*

Доказательство. Если $x \in L$, то обозначим через $[x]_1$ и $[x]_2$ столбцы из координат вектора x в первом и во втором базисах, а через $[\varphi(x)]_1$ и $[\varphi(x)]_2$ – координаты образа этого вектора в первом и во втором базисах. Из равенства имеем

$$T \cdot [\varphi(x)]_2 = [\varphi(x)]_1.$$

Из равенства получаем $[\varphi(x)]_1 = A \cdot [x]_1$ и $[\varphi(x)]_2 = B \cdot [x]_2$.

Из этих трех равенств заключаем, что

$$T \cdot B \cdot [x]_2 = A \cdot [x]_1.$$

Но $[x]_1 = T\cdot[x]_2$, откуда $T\cdot B\cdot[x]_2 = A\cdot T\cdot[x]_2$. Домножая обе части этого равенства на T^{-1} слева, получаем равенство

$$B\cdot[x]_2 = T^{-1}\cdot A\cdot T\cdot[x]_2,$$

Которое имеет место при любом векторе $x\in L$. Это означает равенство матриц *B* и $T^{-1}AT$. □

В доказательстве теоремы молчаливо использовался тот факт, что если для любого вектора *x* выполнено $A\cdot[x] = B\cdot[x]$, то $A = B$.

Пример 2. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти его матрицу B в базисе $\begin{matrix} e_1' = (1,1,-1);\\ e_2' = (1,-2,1);\\ e_3' = (0,-1,1).\end{matrix}$

Решение.

Составим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3':

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для *T*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = T^{-1}\cdot A\cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ 16 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Линейный оператор f пространства R^3 имеет в базисе

$e_1 = (8, -6, 7)$, $e_2 = (-16, 7, -13)$, $e_3 = (9, -3, 7)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B того же преобразования в базисе:

$e_1' = (1, -2, 1)$, $e_2' = (3, -1, 2)$, $e_3' = (2, 1, 2)$.

Решение.

Находим матрицу перехода T от базиса е к базису е′. Получаем:

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3,$$

$$e_2' = e_1 + 2e_2 + 3e_3,$$

$$e_3' = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3.$$

Выпишем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Матрица B находится по формуле $B = T^{-1}AT$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

Найти матрицу линейного оператора в базисе (e'_1, e'_2, e'_3), где

$$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ e'_2 = -e_1 + e_2 - 2e_3,\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$

если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3).

1\. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4\. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7\. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.4. Ранг, ядро и дефект линейного оператора

Для доказательства основной теоремы потребуется понятие прямой суммы подпространств.

Пусть L_1 и L_2 – два подпространства линейного пространства L. Их *суммой* $L_1 + L_2$ называется множество всех векторов $a + b$, где $a \in L_1$ и $b \in L_2$, т.е. $L_1 + L_2 = \{a + b : a \in L_1, b \in L_2\}$

Легко проверить, что $L_1 + L_2$ также будет подпространством L.

Сумма $L_1 + L_2$ называется *прямой*, если из того, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определим также и пересечение двух подпространств $L_1 \cap L_2$, которое также будет подпространством L. Именно

$$L_1 \cap L_2 = \{x : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

Теорема (о прямых суммах подпространств). *Сумма подпространств L_1 и L_2 будет прямой тогда и только тогда, когда* $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство. Пусть $L_1 + L_2$ – прямая сумма подпространств L_1 и L_2, но есть вектор $a \neq \theta$ такой, что $a \in L_1 \cap L_2$. Тогда, так как

Начало
Содержание
Страница 199 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

$L_1 \cap L_2$ – также является подпространством, то $(-a) \in L_1 \cap L_2$, и получается, что нулевой вектор можно представить двумя различными способами $\theta + \theta = a + (-a)$. Таким образом, приходим к противоречию определения прямой суммы.

Обратно, пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, но сумма $L_1 + L_2$ не прямая. Значит найдется $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ такие, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, но $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$. Так как $a_1 - a_2 \in L_1$ и $b_2 - b_1 \in L_2$, то $L_1 \cap L_2$ содержит ненулевой вектор $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$. Опять приходим к противоречию. □

Теорема (о размерности суммы двух подпространств). *Размерность суммы двух подпространств пространства L равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 – подпространства, r и s их размерности, а t размерность их пересечения. Рассмотрим некоторый базис $L_1 \cap L_2$, скажем $c_1, \dots, c_t$, и дополним его до базисов $c_1, \dots, c_t, a_{t+1}, \dots, a_r$ и $c_1, \dots, c_t, b_{t+1}, \dots, b_s$ пространств L_1 и L_2.

Докажем, что система $c_1, \dots, c_t, a_{t+1}, \dots, a_r, b_{t+1}, \dots, b_s$, состоящая из $r + s - t$ векторов является базисом подпространства $L_1 + L_2$, тем самым будет доказана и теорема.

Ясно, что любой вектор $x \in L_1$ и $y \in L_2$, а значит и вектор $x + y \in L_1 + L_2$ линейно выражается через векторы системы, т.к. содержит базисы L_1 и L_2. Осталось проверить, что система линейно независима. Предположим, что

$$\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_t c_t + \alpha_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \alpha_r a_r + \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s = \theta$$

Пусть $b = \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s$. Понятно, что $b \in L_2$. Но

$$b = -\gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_t c_t - \alpha_{t+1} a_{t+1} - \ldots - \alpha_r a_r .$$

Правая часть этого равенства есть вектор из L_1, т.е. $b \in L_1$. Окончательно, $b \in L_1 \cap L_2$. Значит в выражении отсутствуют члены с $a_{t+1}, \ldots, a_r$, т.е. $\alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_r = 0$. Отсюда заключаем, что

$$\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_t c_t + \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s = \theta .$$

Так как система $c_1, \ldots, c_t, b_{t+1}, \ldots, b_s$ является базисом L_2, то она линейно независима и поэтому $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = \beta_{t+1} = \ldots = \beta_s = 0$. □

Если сумма $L_1 + L_2$ прямая, то размерность $L_1 \cap L_2$ по теореме о прямых суммах равна 0, и поэтому получаем

Следствие. *Размерность прямой суммы двух подпространств равна сумме их размерностей.* □

Пусть $\varphi-$ линейный оператор L и

$$R=\{\varphi(x):x\in L\},$$
$$K=\{x:\varphi(x)=\theta\}.$$

Нетрудно проверить, что R и K подпространства L, называемые *областью значений* и *ядром* линейного оператора φ. Размерность R называется *рангом*, а размерность K — *дефектом* φ.

Теорема (о ранге и дефекте). *Сумма ранга и дефекта линейного оператора φ равна размерности пространства L.*

Доказательство. Пусть r и d — ранг и дефект φ. Выберем в R базис $b_1,\ldots,b_r$ и обозначим через $a_1,\ldots,a_r$ векторы такие, что

$$\varphi(a_1)=b_1,\ldots,\varphi(a_r)=b_r.$$

Они линейно независимы, т.к. из равенства $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_r a_r=\theta$ следует, что $\varphi(\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n)=\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_n b_n=\varphi(\theta)=\theta$, а поскольку $b_1,\ldots,b_r$ линейно независимы, то $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

Обозначим через A подпространство, порожденное векторами $a_1,\ldots,a_r$. Они образуют базис A и поэтому размерность подпространства A равна r. По предыдущему следствию достаточно доказать, что L является прямой суммой A и K. Покажем, что $A \cap K = \{\theta\}$. Любой вектор $a \in A$ имеет вид $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$. Если $a \in K$, то $\varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r = \theta$. Но векторы $b_1, \ldots, b_r$ линейно независимы и поэтому $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, откуда $a = 0$.

Покажем теперь, что $L = A + K$. Возьмем вектор $x \in L$. Но $\varphi(x) \in R$ и поэтому $\varphi(x) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r$. Пусть $y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$ и $x - y = c$. Так как $\varphi(y) = \varphi(x)$, то $\varphi(c) = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \theta$. Следовательно $c \in K$. Имеем $x = y + c$, где $y \in A$ и $c \in K$, что и требовалось доказать. □

С каждым оператором φ связаны два важных множества векторов из V. Первое, называемое *ядром* оператора - $Ker\,\varphi$, состоит из множества всех векторов, отображаемых в нулевой вектор 0:

$$Ker\,\varphi = \{x\colon \varphi(x) = 0\}.$$

Второе, называемое *образом* оператора - $Im\,\varphi$, состоит из множества всех образов векторов пространства V:

$$Im\,\varphi = \{y\colon y = \varphi(x)\}.$$

Для любого линейного оператора φ ядро $Ker\,\varphi \neq \varnothing$, т.к. обязательно содержит нулевой вектор: $0 \in Ker\,\varphi$. Действительно, возьмем произвольный вектор $a \in V$ и запишем:

$0 = 0 \cdot a$; $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot a) = 0 \cdot \varphi(a) = 0$. Из равенства $\varphi(0) = 0$ следует, что и образ линейного оператора φ ($Im\ \varphi$) также непуст: $0 \in Im\ \varphi$.

Проверим, что ядро и образ являются линейными подпространствами V, т.е. подмножествами, замкнутыми относительно линейных операций в пространстве V.

Пусть $x, y \in Ker\ \varphi$, т.е $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$; $\alpha x + \beta y$ – линейная комбинация рассматриваемых векторов.

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = 0, \text{ т.е. } \alpha x + \beta y \in Ker\ \varphi.$$

Если же $x, y \in Im\ \varphi$, то $x = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$, т.е. x и y – образы каких-то векторов a и b. Рассмотрим вектор $\alpha a + \beta b$ – линейную комбинацию векторов a и b – и найдем его образ:

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha x + \beta y.$$

Вектор $\alpha x + \beta y$ является образом вектора $\alpha a + \beta b$ и, следовательно, принадлежит образу оператора $Im\ \varphi$.

Примеры.

1. φ – нулевой оператор в R^3. $Ker\ \varphi = R^3$, $Im\ \varphi = \{0\}$.

2. $\varphi = id$. $Ker\ \varphi = \{0\}$, $Im\ \varphi = R^3$.

3. Поворот на некоторый угол в R^2. $Ker\ \varphi = \{0\}$, $Im\ \varphi = R^2$.

4. φ – проекция в R^3 на плоскость OXY. $Ker\ \varphi = \{\lambda k\}$ – ось OZ, $Im\ \varphi = \langle i, j\rangle$ – линейная оболочка векторов i и j, т.е. плоскость OXY.

5. φ – дифференцирование в $P_3[x]$. $Ker\ \varphi = \{\text{const.}\} = \langle 1\rangle$, $Im\ \varphi = \langle 1, x, x^2\rangle = P_2[x]$, т.е. множество многочленов степени не выше 2.

Найдем $Ker\ \varphi$ и $Im\ \varphi$ для произвольного оператора φ, который в фиксированном базисе есть оператор умножения на матрицу A.

$Ker\ \varphi$ – это такие векторы $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, для которых

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + & \dots & + a_1^n x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 x_1 + & \dots & + a_n^n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ядро оператора совпадает с $V(\hat{A})$ – множеством всех решений однородной системы

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + & \dots & + a_1^n x_n & = 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 x_1 + & \dots & + a_n^n x_n & = 0. \end{cases}$$

Для определения размерности ядра мы можем воспользоваться формулой: $\dim Ker\ \varphi = \dim V(\hat{A}) = n - r$, где n – размерность пространства V, а r – ранг матрицы A.

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 205 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Если $V(\hat{A}) = \{0\}$, то $Ker\ \varphi = \{0\}$ и любой ненулевой вектор x переходит под действием оператора φ в ненулевой вектор. В этом случае, если $x_1 \neq x_2$, то $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Действительно, рассмотрим вектор $x = x_1 - x_2 \neq 0$. Из сказанного выше следует, что $\varphi(x) \neq 0$, но $\varphi(x) = \varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, т.е. $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Такие отображения φ, для которых образы различных векторов различны, называются *инъективными*.

Пример. Найти ядро и образ линейного оператора φ, заданного в некотором базисе пространства R^4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим ранг матрицы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -14 & -2 \end{pmatrix}.$$

$rank\ A = 2.$

Начало
Содержание
Страница 206 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Значит, размерность образа линейного оператора $Im\ \varphi$ равна 2, размерность ядра $Ker\ \varphi$ равна $4 - 2 = 2$.

Базис образа можно, например, составить из векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, координаты которых записаны в первых двух столбцах матрицы A.

$$Im\ \varphi = \langle \varphi e_1, \varphi e_2 \rangle.$$

Для отыскания ядра решаем однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы: $(-4\alpha - 2\beta, -7\alpha - \beta, 5\alpha, 5\beta)$. Базис ядра составляют, например, векторы $(-4, -7, 1, 0)$ и $(-2, -1, 0, 1)$.

4.5. Действия над линейными операторами

Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы в векторном пространстве V. *Суммой* этих линейных операторов называется оператор φ, действующий следующим образом:

$$x \to \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Оператор φ обозначается $\varphi_1 + \varphi_2$.

Проверим, что φ – линейный оператор, т.е.

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Согласно определению,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi_1(\alpha x + \beta y) + \varphi_2(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_1(y) + \alpha\varphi_2(x) + \beta\varphi_2(y) = \alpha(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) + \beta(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Мы воспользовались линейностью операторов φ_1 и φ_2.

В фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ каждый оператор описывается своей матрицей. Пусть A – матрица оператора φ_1, B – матрица оператора φ_2 и C – оператора $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Столбцы этих матриц – образы базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ в координатной записи:

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 208 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

$$A=\begin{pmatrix}\dots\\ \varphi_1(e_i)\\ \dots\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}\dots\\ \varphi_2(e_i)\\ \dots\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}\dots\\ \varphi_1(e_i)+\varphi_2(e_i)\\ \dots\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C = A + B$, при сложении операторов их матрицы складываются.

Пусть φ – произвольный линейный оператор, λ – число из рассматриваемого поля P. *Произведением оператора φ на число λ* называется оператор ψ, обозначаемый λφ и действующий следующим образом: $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$. Несложно проверить, что если φ – линейный оператор, то ψ – также линейный оператор.

Если A – матрица оператора φ в базисе $e_1, \dots, e_n$, то B – матрица оператора ψ в этом же базисе – имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots\\ \lambda\varphi(e_1) & \dots & \lambda\varphi(e_n)\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}=\lambda A.$$

Таким образом, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число.

Произведением операторов φ_1 и φ_2 называется оператор φ, действующий следующим образом: $\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$.

Оператор φ обозначается $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и является композицией отображений φ_1 и φ_2.

Проверим линейность оператора φ:

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha x + \beta y)) =$ (линейность φ_1) $= \varphi_2(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_1(y))$ $=$ (линейность φ_2) $= \alpha\varphi_2(\varphi_1(x)) + \beta\varphi_2(\varphi_1(y)) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Пусть A – матрица оператора φ_1, B – матрица оператора φ_2, а C – матрица оператора $\varphi_1\varphi_2$ в фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Выясним, как связаны между собой эти матрицы. Воспользуемся матричной записью действия оператора.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогда $\varphi_1(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Согласно определению произведения операторов,

$$\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = B\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi_1(x) = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(x) = B\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны, $\varphi(x) = C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Итак, мы имеем равенство

$$C\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=B\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix},$$

справедливое для любого вектора $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$. То есть, с одной стороны, φ – оператор умножения на матрицу C, а с другой стороны, φ – оператор умножения на $B\cdot A$.

Мы знаем, что матрица линейного оператора определена однозначно, т.к. ее столбцами являются столбцы $\varphi(e_1)$, …, $\varphi(e_n)$. Следовательно, $C = B\cdot A$. Таким образом, матрица оператора $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ произведения линейных операторов φ_1 и φ_2 является произведением матриц этих операторов, взятых в обратном порядке.

Оператор ψ называется *обратным* к оператору φ, если

$$\psi\cdot\varphi = \varphi\cdot\psi = = id,$$

т.е. их произведение дает тождественный оператор.

Если φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц выполняется равенство:

$$A_\varphi\cdot A_\psi = A_\psi\cdot A_\varphi = E,\ \text{т.е.}\ A_\psi = A_\varphi^{-1}.$$

Если оператор φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц A и B в произвольном фиксированном базисе $e_1, \dots, e_n$ выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A = E$. ($E$ – матрица оператора id.)

Следовательно, $B = A^{-1}$ и оператор ψ однозначно определяется по оператору φ (если он, конечно, существует) и обозначается φ^{-1}. Для существования же оператора φ^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A оператора φ в каком-либо базисе (а следовательно, и в любом) была бы обратима, что равносильно, как мы знаем, условиям $|A| \neq 0 \Leftrightarrow rang\ A = n$. В этом случае $Im\ \varphi = V$, $Ker\ \varphi = \{0\}$ и отображение φ является изоморфизмом.

Пример. Линейный оператор f в базисе $a_1 = (2,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор g в базисе $b_1 = (5, 2)$, $b_2 = (1, 0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу линейного оператора $f + g$ в базисе b_1, b_2.

Решение.

Найдем сначала матрицу A_b линейного оператора f в базисе b_1, b_2.

$$A_b = T^{-1} A_a T,$$

где T – матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Так как

$$b_1 = 3a_1 - a_2,\ b_2 = a_1 - a_2, \text{ то}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\quad A_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & -1{,}5 \\ -6{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица суммы линейных операторов имеет вид:

$$A_b + B_b = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.6. Инвариантные подпространства. Собственные векторы

Пусть A - линейный оператор. Пусть $x \in E_1$, где E_1 некоторое подпространство пространства E^n. Вектор $y = Ax$ может принадлежать подпространству E_1, а может и не принадлежать.

Определение 1. Подпространство E_1 называется инвариантным по отношению к оператору A, если $Ax \in E_1$, $\forall x \in E_1$.

Определение 2. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора A, если найдётся такое число λ, что будет выполняться *равенство*

$$Ax = \lambda x.$$

При этом число называют *собственным значением* (*собственным числом*) *оператора*, соответствующим вектору. Множество всех собственных значений оператора называется его спектром.

Пусть $A = (\alpha_{ij})$ квадратная матрица порядка n с действительными элементами. Пусть, с другой стороны, λ некоторое неизвестное. Тогда матрица $(A - \lambda E)$, где E единичная матрица порядка n, называется *характеристической матрицей* матрицы A. Так как в матрице (λE) по главной диагонали стоит λ, все же остальные элементы равны нулю, то

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $(A-\lambda E)$ будет многочленом от λ, притом степени n. В самом деле, произведение элементов, стоящих на главной диагонали, будет многочленом от λ, со старшим членом $(-1)^n \lambda^n$, все же остальные члены определителя не содержат по меньшей мере двух из числа элементов, стоящих на главной диагонали, и поэтому их степень относительно λ, не превосходит $n-2$. Коэффициенты этого многочлена можно было бы легко найти. Так, коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})$, а свободный член совпадает с определителем матрицы A.

Многочлен n – ой степени $|A-\lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а его корни, которые могут быть как действительными, так и комплексными, называются *характеристическими корнями* этой матрицы.

Теорема (о характеристических многочленах). *Подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими многочленами и, следовательно, одинаковыми характеристическими корнями.*

Доказательство. Пусть, в самом деле, $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$. Тогда, учитывая, что матрица (λE) перестановочна с матрицей Q, а $|Q^{-1}| = |Q|^{-1}$ получаем:

$$|B - \lambda E| = |Q^{-1}AQ - \lambda E| = |Q^{-1}(A - \lambda E)Q| = |Q|^{-1}|A - \lambda E||Q| = |A - \lambda E|,$$

что и требовалось доказать. □

Из этого результата вытекает, ввиду доказанной ранее теоремы о связи матриц линейного оператора в разных базисах:

Следствие. *Линейный оператор φ может задаваться в разных базисах различными матрицами, однако все эта матрицы имеют один и тот же набор характеристических корней.* □

Эти корни можно называть поэтому *характеристическими корнями самого оператора* φ. Весь набор этих характеристических корней, причем каждый корень берется с той кратностью, какую он имеет в характеристическом многочлене, называется *спектром линейного оператора* φ.

Укажем одно из применений характеристических корней. Пусть в линейном пространстве L задан линейный оператор φ. Если вектор b, отличный от нуля, переводится оператором φ в вектор, пропорциональный самому b,

$$\varphi(b) = \lambda_0 b,$$

где λ_0 – некоторое действительное число, то вектор b называется *собственным вектором* оператора φ, а число λ_0 – *собственным значением* этого оператора, причем говорят, что собственный вектор b относится, к собственному значению λ_0.

Заметим, что так как $b \neq \theta$, то число λ_0, удовлетворяющее условию, определяется для вектора b однозначно. Подчеркнем, далее, что нулевой вектор не считается собственным вектором оператора φ, хотя он удовлетворяет условию, притом для любого λ_0.

Теорема (о собственных значениях). *Действительные характеристические корни линейного оператора φ, если они существуют, и только они служат собственными значениями этого оператора.*

Доказательство. Пусть, в самом деле, оператор φ имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицу $A = (\alpha_{ij})$ и пусть вектор $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$ является собственным вектором оператора φ, $\varphi(b) = \lambda_0 b$.

Как доказано ранее, $[\varphi(b)] = A \cdot [b]$. Равенства приводят к системе равенств

$$\begin{cases} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n} = \lambda_0\beta_1 \\ \beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{2n} = \lambda_0\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = \lambda_0 b_n. \end{cases}$$

Так как $b \neq \theta$, то не все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ равны нулю. Таким образом система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda_0)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda_0)x_n = 0. \end{cases}$$

обладает ненулевым решением, а поэтому ее определитель равен нулю,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda_0 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda_0 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda_0 \end{vmatrix} = 0,$$

или $|A-\lambda_0 E|=0$, т. е, собственное значение λ_0 на самом деле оказалось характеристическим корнем матрицы A и, следовательно, линейного оператора φ, притом, понятно, действительным.

Обратно, пусть λ_0 будет любым действительным характеристическим корнем оператора φ и, следовательно, матрицы A. Отсюда следует, что система линейных однородных уравнений обладает ненулевым решением, притом даже действительным, так как все коэффициенты этой системы действительны. Если это решение обозначим через $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$,

то имеют место исходные равенства. Обозначим через b вектор пространства L, имеющий в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ строку координат; ясно, что $b \neq 0$. Вектор b оказался, таким образом, собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ_0. Теорема доказана. □

В заключении отметим, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ, относящихся к собственному значению λ_0, совпадает с совокупностью ненулевых действительных решений системы линейных однородных уравнений. Отсюда следует, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ, относящихся к собственному значению λ_0, будет, после добавления к ней нулевого вектора, линейным подпространством пространства L.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение $-\lambda^3+\lambda^2=0$, корни которого $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=1$ являются собственными значениями линейного оператора φ.

Найдём собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2}=0$. Для этого решим систему, считая $\lambda_0=0$.

$$\begin{cases}4x_1-5x_2+2x_3=0\\ 5x_1-7x_2+3x_3=0\\ 6x_1-9x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

После преобразования получим:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Собственный вектор $\bar{x}_{\lambda=0} = \alpha(1, 2, 3); \alpha \neq 0.$

Аналогично, для $\lambda_3 = 1$, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальным решением которой будет: $\bar{x}_{\lambda=1} = \beta(1, 1, 1); \beta \neq 0$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 1.$

Упражнения

1. Векторы e'_1, e'_2, e'_3 и x заданы своими координатами в базисе e_1, e_2, e_3. Показать, что векторы e'_1, e'_2, e'_3 сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе:

a) $e_1' = (1, 1, 1), e_2' = (1, 1, 2), e_3' = (1, 2, 3); \quad x = (6, 9, 14).$

b) $e_1' = (2, 1, -3), e_2' = (3, 2, -5), e_3' = (1, -1, 1); \quad x = (6, 2, -7).$

c) $e_1' = (1, 1, 2), e_2' = (2, -1, 0), e_3' = (-1, 1, 1); \quad x = (6, -1, 3).$

d) $e_1' = (1, 1, 3), e_2' = \left(\frac{3}{2}, -1, 0\right), e_3' = (-1, 1, 1); \quad x = (1, 2, 4).$

e) $e_1' = (1, 1, 4), e_2' = \left(\frac{4}{3}, -1, 0\right), e_3' = (-1, 1, 1); \quad x = (1, 3, 6).$

f) $e_1' = (1, 2, -1, -2), e_2' = (2, 3, 0, -1), e_3' = (1, 2, 1, 4), e_4' = (1, 3, -1, 0); \; x = (6, 9, 14).$

2. Доказать, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 образуют базис и найти матрицу перехода от одного базиса к другому:

a) $e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1);$

b) $e_1' = (3, 1, 4), e_2' = (5, 2, 1), e_3' = (1, 1, -6).$

c) $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1, 1), e_3 = (1, 1, 2, 1), e_4 = (1, 3, 2, 3);$

d) $e_1' = (1, 0, 3, 3), e_2' = (-2, -3, -5, -4), e_3' = (2, 2, 5, 4), e_4' = (-2, -3, -4, -4).$

3. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу A, найти матрицу этого линейного оператора в базисе e'_1, e'_2, e'_3:

a) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}; e_1' = (3, 1, 4), e_2' = (5, 2, 1), e_3' = (1, 1, -6).$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}; e_1' = (1, -2, 1), e_2' = (3, -1, 2), e_3' = (2, 1, 2).$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

a) $e_1' = (1, 0, 0, 0), e_2' = (0, 1, 0, 0), e_3' = (0, 0, 0, 1), e_4' = (0, 0, 1, 0);$

б) $e_1' = (1, 0, 0, 0), e_2' = (1, 1, 0, 0), e_3' = (1, 1, 1, 0), e_4' = (1, 1, 1, 1).$

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$
\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.\ \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\ \text{c) } \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\ \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

$$
\text{e) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.\ \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.\ \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.\ \text{h) } \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.
$$

$$
\text{k) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ \text{l) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ \text{m) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.\ \text{n) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Начало
Содержание
Страница 224 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

ГЛАВА 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

5.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Теория квадратичных форм берёт своё начало в аналитической геометрии, а именно в теории кривых второго порядка. Известно, что уравнение центральной кривой второго порядка на плоскости, после перенесения начала прямоугольных координат в центр этой кривой, имеет вид

$$A x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 = D .$$

Известно, далее, что можно совершить такой поворот осей координат на некоторый угол α (величина которого зависит от коэффициентов A, B, C), т.е. такой переход от координат x_1, x_2 к координатам y_1, y_2:

$$x_1 = y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha$$
$$x_2 = y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha,$$

что в новых координатах уравнение нашей кривой будет иметь «канонический» вид

$$A' {y_1}^2 + C' {y_2}^2 = D ,$$

в этом уравнении коэффициент при произведении неизвестных y_1, y_2 равен, следовательно, нулю.

Рассмотрим общий случай, когда число неизвестных вместо двух равно любому n, а коэффициенты являются или действительными, или же любыми комплексными числами. Обобщая выражение, состоящее в левой части уравнения, приходим к следующему понятию.

Квадратичной формой n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающих числовые значения , называется числовая функция вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots$$

$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

где a_{ij} - числа, называемые коэффициентами квадратичной формы.

Считая, что в квадратичной форме f уже сделано приведение подобных слагаемых, введем следующие обозначения для коэффициентов этой формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при произведении $x_i x_j$ для $i \neq j$ через $2a_{ij}$. Так как, однако, $x_i x_j = x_j x_i$, то коэффициент при этом произведении мог бы быть обозначен и через $2a_{ij}$, т.е. введенные нами обозначения предполагают справедливость равенства $a_{ji} = a_{ij}$.

Слагаемое $2a_{ij}x_ix_j$ можно записать теперь в виде $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, а всю квадратичную форму f в виде суммы всевозможных слагаемых $a_{ij}x_ix_j$, где i и j уже независимо друг от друга принимают значения от 1 до n:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

в частности, при $i = j$ получается слагаемое $2a_{ij}x_i^2$.

Из коэффициентов a_{ij} можно составить, очевидно, квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n, она называется *матрицей квадратичной формы* f, а ее ранг r *рангом* этой квадратичной формы. Если, в частности, $r = n$, т.е. матрица – невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*. Ввиду равенства элементы матрицы A, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой, т.е. матрица A - *симметрическая*. Обратно, для любой симметрической матрицы A n *−го* порядка можно указать вполне определенную квадратичную форму от n неизвестных, имеющую элементы матрицы A своими коэффициентами.

Лемма 1. *Матрица, полученная транспонированием произведения, равна произведению матриц, получающихся транспонированием сомножителей, притом взятых в обратном порядке,*

$$(AB)' = B'A'.$$

Доказательство. Действительно, если произведение AB. определено, то будет определено, как легко проверить, и произведение $B'A'$: число столбцов матрицы B' равно числу строк матрицы A'. Элемент матрицы $(AB)'$, стоящий в ее i –ой строке и j –ом столбце, в матрице AB расположен в j –ой строке и i –ом столбце. Он равен, поэтому, сумме произведений соответственных элементов j –ой строки матрицы A и i –го столбца матрицы B, т.е. равен сумме произведений соответственных элементов j –го столбца матрицы A' и i –ой строки матрицы B'. □

Лемма 2. *Матрица A тогда и только тогда будет симметрической, когда она совпадает со своей транспонированной, т.е.*

$$A' = A.$$

Обозначим теперь через X столбец, составленный из неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Транспонируя эту матрицу, получим матрицу

$$X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$ может быть записана теперь в виде следующего произведения:

$$f = X'AX.$$

Действительно, произведение AX будет матрицей, состоящей из одного столбца:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу слева на матрицу X', мы получим «матрицу», состоящую из одной строки и одного столбца, а именно правую часть равенства.

Рассмотрим, далее, линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящих в квадратичную форму f.

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = \overline{1..n}$$

Матрицей этого преобразования будет $Q = (q_{ik})$. Преобразование называется *невырожденным*, если матрица Q невырожденная. При этом считаем, что если форма f действительная, то и элементы матрицы Q должны быть действительными.

Обозначая через Y столбец из неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_n$, запишем линейное преобразование в виде матричного равенства:

$$X = QY.$$

Теорема. *Квадратичная форма от n неизвестных, имеющая матрицу A, после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных, причем матрицей этой формы служит произведение $Q'AQ$.*

Доказательство. Так как $X = QY$, то имеем:

$$X' = Y'Q'. \; f = Y'(Q'AQ)Y, \text{ или}$$

$$f = Y'BY, \text{ где } B = Q'AQ.$$

Матрица B будет симметрической, так как ввиду равенства, справедливого, очевидно, для любого числа множителей, и равенства $A' = A$, равносильного симметричности матрицы A, имеем:

$$B' = Q'A'Q = Q'AQ = B. \ \square$$

Лемма 3. *Ранг квадратичной формы не меняется при выполнении невырожденного линейного преобразования.*

Доказательство. Докажем вначале, что ранг произведения матриц не выше ранга сомножителей. Действительно, каждая строка произведения двух матриц: X и Y является линейной комбинацией строк матрицы Y, а поэтому, ранг XY не выше ранга Y. Аналогично, столбцы матрицы XY являются линейными комбинациями столбцов матрицы X, значит, ранг XY не выше ранга X.

Пусть теперь $B = Q'A'Q$, где Q невырожденная матрица, тогда ранг B не выше ранга A. Аналогично, $A = (Q')^{-1}BQ^{-1}$, следовательно, ранг A не выше ранга B. $\square$

Рассмотрим теперь, по аналогии с указанной в начале параграфа геометрической задачей, вопрос о приведении произвольной квадратичной формы некоторым невырожденным линейным преобразованием к виду

Вид квадратичной формы называется *каноническим,* если коэффициенты $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, то есть, если матрица квадратичной формы диагональная и ,следовательно,

$$f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2\ ,$$

где не все коэффициенты a_{ii} равны нулю.

Лемма 4. *Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равно рангу r формы f.*

Доказательство. Пусть квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже приведена невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ новые неизвестные. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ могут быть нулями. Матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 эта матрица имеет ранг r, что равносильно утверждению, что на ее главной диагонали стоит ровно r отличных от нуля элементов. □

Кафедра ФМО и ИТ

5.2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема. (основная о квадратичных формах). *Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Если при этом рассматривается действительная квадратичная форма, то все коэффициенты указанного линейного преобразования можно считать действительными.*

Доказательство. Эта теорема верна для случая квадратичных форм от одного неизвестного, так как всякая такая форма имеет вид ax^2, являющийся каноническим. Будем вести доказательство индукцией по числу неизвестных, т. е. доказывать теорему для квадратичных форм от n неизвестных, считая ее уже доказанной для форм с меньшим числом неизвестных.

Пусть дана квадратичная форма

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

от n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Определим такое невырожденное линейное преобразование, которое выделило бы из f квадрат одного из неизвестных, т. е. привело бы f к виду суммы этого квадрата и некоторой квадратичной формы от остальных не-известных. Эта цель легко достигается в том случае, если среди коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, стоящих в матрице формы f на главной диагонали, есть отличные от нуля, т. е. отличным от нуля коэффициентом квадрат хотя бы одного из неизвестных x_i.

Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Тогда, как легко проверить, выражение ${a_{11}}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2$, являющееся квадратичной формой, содержит такие же члены с неизвестным x_1, как наша форма f, а поэтому разность

$$f - {a_{11}}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 = g$$

будет квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, x_3, \dots, x_n$, но не x_1. Отсюда

$$f = {a_{11}}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + g$$

Если введем обозначения

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, y_i = x_i$$

при $i = 2, 3, \dots, n$, то получим $f = {a_{11}}^{-1}{y_1}^2 + g$, где g будет теперь квадратичной формой от неизвестных $y_2, y_3, \dots, y_n$. Выражение есть искомое выражение для формы f, так как оно получено невырожденным линейным преобразованием, а именно преобразованием, обратным линейному преобразованию, которое имеет своим определителем a_{11} и поэтому не вырождено.

Если же имеют место равенства $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = 0$, то предварительно нужно совершить вспомогательное линейное преобразование, приводящее к появлению в нашей форме f квадратов неизвестных. Так как среди коэффициентов этой формы должны быть отличные от нуля, иначе нечего было бы доказывать, то пусть, например, $a_{12} \neq 0$, т. е. f является суммой слагаемого $2a_{12}x_1x_2$ и слагаемых, в каждый из которых входит хотя бы одно из неизвестных $x_3, x_4, \dots, x_n$. Совершим теперь линейное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ x_i = z_i,\ i = 3, \dots, n.$$

Оно будет невырожденным, так как имеет определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

В результате этого преобразования слагаемое $2a_{12}x_1x_2$ нашей формы примет вид

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}{z_1}^2 - 2a_{12}{z_2}^2,$$

т. е. в форме f появятся, с отличными от нуля коэффициентами, квадраты сразу двух неизвестных, причем они не могут сократиться ни с одним из остальных членов, так как в каждый из этих последних входит хотя бы одно из неизвестных $z_3, z_4, \dots, z_n$.

Теперь мы находимся в условиях уже рассмотренного выше случая, т. е. еще одним невырожденным линейным преобразованием можем привести форму f к каноническому виду.

Для окончания доказательства остается отметить, что квадратичная форма g зависит от меньшего, чем n, числа неизвестных и поэтому, по предположению индукции, некоторым невырожденным преобразованием неизвестных $y_2, y_3, \dots, y_n$ приводится к каноническому виду. Это преобразование, рассматриваемое как (невырожденное, как легко видеть) преобразование всех n неизвестных, при котором y_1 остается без изменения, приводит, следовательно, к каноническому виду. Таким образом, квадратичная форма f двумя или тремя невырожденными линейными преобразованиями, которые можно заменить одним невырожденным преобразованием − их произведением, приводится к виду суммы квадратов неизвестных с некоторыми коэффициентами. Число этих квадратов равно, как мы знаем, рангу формы r. Если, сверх того, квадратичная форма f действительная, то коэффициенты как в каноническом виде формы f, так в линейном преобразовании, приводящем f к этому виду, будут действительными; в самом деле, и линейное преобразование, обратное, и линейное преобразование имеют действительные коэффициенты. □

Метод Лагранжа, использованный в этом доказательстве, может быть применен в конкретных примерах для действительного приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нужно лишь вместо индукции, которую мы использовали в доказательстве, последовательно выделять изложенным выше методом квадраты неизвестных.

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

Решение.

Ввиду отсутствия в этой форме квадратов неизвестных мы выполним сначала невырожденное линейное преобразование

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего получим:

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

Теперь коэффициент при $y_1{}^2$ отличен от нуля, и поэтому из нашей формы можно выделить квадрат одного неизвестного. Полагая

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3,$$

т. е. совершая линейное преобразование, для которого обратное будет иметь матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем f к каноническому виду

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Линейное преобразование, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, будет иметь своей матрицей произведение

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно и непосредственной подстановкой проверить, что невырожденное (так как определитель равен 2) линейное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3,$$
$$x_2 = z_1 + z_2 - z_3,$$
$$x_3 = z_3$$

превращает исходную квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 2. Привести форму к каноническому виду

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4$$

Решение.

$$
\begin{aligned}
f &= 4\left(x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4\right) + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4 = \\
&= 4\left[\left(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2\right] + \\
&+ 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4 = \\
&= 4\left(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2 + \\
&\quad + \left[(x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_3 + x_4)^2\right] - 2x_3x_4 = \\
&= 4\left(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\
&\quad - x_3^2 - 4x_3x_4 - x_4^2 = \\
&\quad 4\left(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\
&\quad - \left[(x_3 + 2x_4)^2 - 4x_4^2\right] - x_4^2 = \\
&= 4\left(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_3 + 2x_4)^2 + 3x_4^2
\end{aligned}
$$

Пример 3. Привести форму к каноническому виду

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение.

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 3x_3)^2 + x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 4x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - 2x_2x_3 - 13x_3{}^2
\end{aligned}
$$

В соответствии с алгоритмом, на следующем шаге нужно выделять слагаемые, содержащие переменную x_2, но коэффициент при $x_2{}^2$ в правой части формулы обратился в нуль. Поэтому — в соответствии с пунктом 2 метода — приходится выделять квадрат на основе переменной x :

$$(x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - 13\left(x_3 - \frac{1}{13}x_2\right)^2 + 13 \cdot \frac{1}{13^2}x_2{}^2.$$

Пример 4. Привести форму к каноническому виду

$$f = x_1x_2 - 3\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3.$$

Решение.

Коэффициенты при квадратах переменных все равны нулю. Действуем в соответствии с пунктом 3 метода Лагранжа. Поскольку коэффициент при x_1x_2 отличен от нуля, делаем замену переменной $x_2 = X_2 - x_1$ при $X_2 = x_1 + x_2$:

$$f \equiv -x_1^2 + x_1X_2 - 5\,x_1x_3 + 2\,X_2x_3\ .$$

Дальнейший ход решения — в соответствии с пунктом 1 метода Лагранжа:

$$-\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + 2\,X_2x_3 \equiv$$

$$\equiv -\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{4}X_2^2 - \frac{1}{2}X_2x_3 + \frac{25}{4}x_3^2 \equiv$$

$$\equiv -\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{4}\left(X_2 - x_3\right)^2 + 6\,x_3^2$$

$$f = -\left(\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{5}{2}x_3\right)^2 + \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 6\,x_3^2.$$

5.3. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теория приведения квадратичной формы к каноническому виду, изложенная в предыдущем параграфе, построена по аналогии с геометрической теорией центральных кривых второго порядка, но не может считаться обобщением этой последней теории. В самом деле, в нашей теории допускается использование любых невырожденных линейных преобразований, в то время как приведение кривой второго порядка к каноническому виду достигается применением линейных преобразований весьма специального вида, являющихся вращениями плоскости. Эта геометрическая теория может быть, однако, обобщена на случай квадратичных форм от n неизвестных с действительными коэффициентами, если потребовать, чтобы матрица преобразования Q была ортогональной. Такое преобразование называется *ортогональным*, а сама процедура − *приведением квадратичных форм к главным осям*.

Теорема. *Каждая квадратичная форма некоторым ортогональным преобразованием может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство. Будем смотреть на матрицу квадратичной формы как на матрицу некоторого линейного оператора в евклидовом пространстве. Если A матрица квадратичной формы, то она симметрическая порядка n. Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ некоторый ортонормированный базис n мерного евклидова пространства, то матрица A задаёт в этом базисе симметрический оператор φ. По основной теореме о симметрических операторах в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ его матрица B будет диагональной. Пусть Q матрица перехода от $e_1, e_2, \dots, e_n$ к $f_1, f_2, \dots, f_n$, тогда $B = Q^{-1}AQ$.

Но матрица Q, как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, будет ортогональной, а значит, $Q^{-1} = Q'$. Поэтому $B = Q'AQ$. А именно так преобразуется матрица A квадратичной формы, подвергнутой линейному преобразованию неизвестных с матрицей Q.

Итак, преобразование неизвестных, имеющее матрицу Q – ортогонально, а матрица B, будучи диагональной, соответствует квадратичной форме канонического вида. □

Тот факт, что матрица линейного оператора φ в базисе, составленном из собственных векторов, имеет диагональный вид (с собственными значениями по главной диагонали), даёт нам метод практического отыскания канонического вида квадратичной формы, а также самого этого ортогонального преобразования.

Пример 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Решение.

Матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Найдём её характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5).$$

Таким образом, матрица A имеет двукратный корень -1 и простой корень 5. Следовательно, канонический вид данной квадратичной формы будет

$$f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$$

Найдём ортогональное преобразование, осуществляющее это приведение. Для этого найдём собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 5$, т.е. решим системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E|0)$ для каждого λ.

При $\lambda_{1,2} = -1$ имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Откуда $x_1 = -x_2 - x_3$, т. е. имеются 2 независимые переменные, и фундаментальный набор решений будет:

$$b_1 = (-1, 1, 0),$$
$$b_2 = (-1, 0, 1).$$

Применив к ним процесс ортогонализации, получим:

$$c_1 = (-1, 1, 0),$$
$$c_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Кафедра ФМО и ИТ
Начало
Содержание
Страница 245 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

При $\lambda_3 = 5$ имеем

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

решением которой будет

$$c_3 = (1, 1, 1).$$

Остаётся нормировать систему c_1, c_2, c_3:

$$d_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$d_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right),$$

$$d_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Начало

Содержание

Страница 246 из 275

Назад

На весь экран

Закрыть

Таким образом искомое преобразование имеет вид:

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2,$$
$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3,$$
$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3.$$

Для того чтобы найти матрицу преобразования Q, нужно выразить переменные x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3, т. е. найти матрицу, обратную матрице преобразования . А так как $Q^{-1} = Q'$, то достаточно транспонировать матрицу преобразования. Окончательно имеем:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3,$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3,$$
$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3.$$

Пример 2. Найдем канонический вид в ортонормированном базисе квадратичной формы

$$f = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_3 + 3x_2^{\,2} + 3x_3^{\,2}.$$

Решение.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Для определения канонических коэффициентов составим и решим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -2$, и канонический вид квадратичной формы

$$f = 4y_1^{\,2} + 4y_2^{\,2} - 2y_3^{\,2}.$$

Найдем связь между старыми и новыми координатами вектора $\bar{x}$. Собственные векторы матрицы A при $\lambda = 4$ определяются уравнением $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, линейно независимые решения которого, например, векторы

$$\bar{f}_1 = (0, 1, -1)^T,\ \ \bar{f}_2 = (1, 0, 2)^T.$$

Координаты третьего собственного вектора определяются системой

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение $\bar{f}_3 = (-2,1,1)^T$. Применяя к полученным векторам процесс ортогонализации Грама - Шмидта, получим искомый ортонормированный базис

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и связь между старыми и новыми координатами вектора $\bar{x}$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3, \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ y_2 &= \frac{-2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3. \end{aligned}$$

5.4. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Метод Якоби позволяет найти канонические коэффициенты невырожденной квадратичной формы по ее коэффициентам в произвольном базисе, не строя сам канонический базис.

Обозначим через Δ_k главный минор k - го порядка матрицы квадратичной формы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, т. е.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Если все главные миноры Δ_k матрицы квадратичной формы отличны от нуля, то существует канонический базис, в котором данная форма имеет вид $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$, где $\lambda_k = \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\Delta_0 = 1$.

Пример. Приведем к каноническому виду методом Якоби квадратичную форму $f = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$.

Решение.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Главные миноры матрицы

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{17}{4}.$$

Поэтому $f = \frac{y_1^2}{2} - 8y_2^2 + \frac{y_3^2}{17}$, где y_1, y_2, y_3 - координаты вектора $\bar{x}$ в каноническом базисе.

5.5. Закон инерции действительных квадратичных форм

Канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, определяется неоднозначно. Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими различными способами. Возникает вопрос, что общего у тех различных канонических квадратичных форм, к которым приводится данная форма f? Этот вопрос тесно связан с другим вопросом: при каком условии одна из двух данных квадратичных форм может быть переведена в другую невырожденным линейным преобразованием? Ответ на эти вопросы, оказывается, зависит от того, рассматриваются ли комплексные или действительные квадратичные формы.

Рассмотрим вначале произвольные комплексные квадратичные формы, допуская употребление невырожденных линейных преобразований также с произвольными комплексными коэффициентами. Известно, что всякая квадратичная форма f от n неизвестных, имеющая ранг r, приводится к каноническому виду

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_r y_r^2,$$

где все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ отличны от нуля. Пользуясь тем, что из всякого комплексного числа извлекается квадратный корень, выполним следующее невырожденное линейное преобразование:

$$z_i = \sqrt{c_i} y_i$$

при $i = 1, 2, \ldots, r$; $z_j = y_j$ при $j = r + 1, \ldots, n$.

Оно приводит форму f к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2,$$

называемому *нормальным*; это − просто сумма квадратов r неизвестных с коэффициентами, равными единице.

Из равенства видно, что нормальный вид зависит лишь от ранга r формы f. Тогда, если формы f и g от n неизвестных имеют одинаковый ранг r, то можно перевести f в g, т. к. преобразование, обратное невырожденному, также невырожденное. Таким образом, существует невырожденное линейное преобразование, переводящее f в g. Так как, с другой стороны, никакое невырожденное линейное преобразование не изменяет ранга формы, то мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Две комплексные квадратичные формы от n неизвестных тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами, если эти формы имеют один и тот же ранг.*

Следствие. *Каноническим видом комплексной квадратичной формы ранга r может служить всякая сумма квадратов r неизвестных с любыми отличными от нуля комплексными коэффициентами.*

Иная ситуация в том случае, когда рассматриваются действительные квадратичные формы и допускаются лишь линейные преобразования с действительными коэффициентами. В этом случае уже не всякую форму можно привести к виду, так как это могло бы потребовать извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Если, однако, мы назовем теперь нормальным видом квадратичной формы сумму квадратов нескольких неизвестных с коэффициентами +1 или -1, то легко показать, что всякую действительную квадратичную форму f можно привести невырожденным линейным преобразованием с действительными, коэффициентами к нормальному виду.

В самом деле, форма f ранга r от n неизвестных приводится к каноническому виду, который можно записать следующим образом (меняя, если нужно, нумерацию неизвестных):

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2, \quad 0 \le k \le r,$$

где все числа $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_r$ отличны от нуля и положительны. Тогда невырожденное линейное преобразование с действительными коэффициентами: $z_i = \sqrt{c_i} y_i$

при $i = 1, 2, \dots, r$; $z_j = y_j$ при $j = r + 1, \dots, n$ приводит f к нормальному виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2 .$$

Общее число входящих сюда квадратов будет равно рангу формы. Действительная квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду многими различными преобразованиями, однако с точностью до нумерации неизвестных она приводится лишь к одному нормальному виду. Это показывает следующая:

Теорема (закон инерции действительных квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным невырожденным линейным преобразованием, не зависят от выбора этого преобразования.*

Доказательство.

Пусть квадратичная форма f ранга r от n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ двумя способами приведена к нормальному виду:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2$$

Так как переход от неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к неизвестным $y_1, y_2, \dots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то обратное преобразование, выражающее $y_1, y_2, \dots, y_n$ через $x_1, x_2, \dots, x_n$ также будет невырожденным:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = \overline{1..n} \qquad z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t, \quad j = \overline{1..n}$$

причем определители из коэффициентов отличны от нуля. Коэффициенты же − действительные числа.

Предположим теперь, что $k < l$, и напишем систему равенств

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_k = 0, z_{l+1} = 0, \dots, z_r = 0, \dots, z_n = 0.$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями получим систему $n - l + k$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$. Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, поэтому, как мы знаем система обладает ненулевым действительным решением $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Заменим теперь в равенстве все y и все z их выражениями, а затем подставим вместо неизвестных числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.Если для краткости через $y_i(\alpha)$, и $z_j(\alpha)$ будут обозначены значения неизвестных y_i и z_j, получающиеся после такой подстановки, то получаем равенство

$$-y_{k+1}^2(\alpha)-\ldots-y_r^2(\alpha)=z_1^2(\alpha)+\ldots+z_l^2(\alpha).$$

Так как все коэффициенты действительные, то все квадраты, входящие в равенство, положительны, а поэтому оно влечет за собой равенство нулю всех этих квадратов; отсюда следуют равенства

$$z_1(\alpha)=0,\ldots,z_l(\alpha)=0.$$

С другой стороны, по самому выбору чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$z_{l+1}(\alpha)=0,\ldots,z_r(\alpha)=0,\ldots,z_n(\alpha)=0.$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений

$$z_i=0, \quad i=\overline{1..n},$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ обладает ненулевым решением $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е. определитель этой системы должен быть равен нулю. Это противоречит, однако, тому, что преобразование предполагалось невырожденным. К такому же противоречию мы придем при $l < k$. Отсюда следует равенство $k = l$. □

Начало
Содержание
Страница 257 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

Число положительных квадратов в той нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции* этой формы, число отрицательных квадратов − *отрицательным индексом инерции*. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции − *сигнатурой* формы f.

Теорема. *Две квадратичные формы от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

Доказательство. Действительно, пусть форма f переводится в форму g невырожденным действительным преобразованием. Мы знаем, что это преобразование не меняет ранга формы. Оно не может менять и сигнатуры, так как в противном случае f и g приводились бы к различным нормальным видам, а тогда форма f приводилась бы, в противоречие с законом инерции, к этим обоим нормальным видам. Обратно, если формы f и g имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, то они приводятся к одному и тому же нормальному виду и поэтому могут быть переведены друг в друга. □

5.6. Положительно определенные формы

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т. е. если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Теорема. *Квадратичная форма f от n неизвестных x_1, x_2, ... , x_n с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, когда при всяких действительных значениях этих неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает положительные значения.*

Доказательство. Пусть форма f положительно определенная, т. е. приводится к нормальному виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2,$$

причем

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1..n}$$

с отличным от нуля определителем из действительных коэффициентов a_{ij}. Подставим в f произвольные действительные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Заметим, что значения, полученные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$, не могут все сразу равняться нулю, так как иначе мы получили бы, что система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = \overline{1..n}$$

обладает ненулевым решением, хотя её определитель отличен от нуля. Подставляя найденные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения, мы получим значение формы f, равное сумме квадратов n действительных чисел, которые не все равны нулю; это значение будет, следовательно, строго положительным.

Обратно, пусть форма f не является положительно определенной, т. е. или ее ранг, или положительный индекс инерции меньше n. Это означает, что в нормальном виде этой формы, к которому она приводится, скажем, невырожденным линейным преобразованием, квадрат хотя бы одного из новых неизвестных, например y_n , или отсутствует совсем, или же содержится со знаком минус.

Покажем, что в этом случае можно подобрать такие действительные значения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не все равны нулю, что значение формы f при этих значениях неизвестных равно нулю или даже отрицательно. Такими будут, например, те значения, для $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые мы получим, решая по правилу Крамера систему линейных уравнений, получающихся при $y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 0, y_n = 1$. Действительно, при этих значениях неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ форма f равна нулю, если ${y_n}^2$ не входит в нормальный вид этой формы, и равна -1, если ${y_n}^2$ входит в нормальный вид со знаком минус. □

С помощью доказанной теоремы нельзя, к сожалению, по коэффициентам формы установить, будет ли эта форма положительно определенной. Для этой цели служит другая теорема, которую мы сформулируем и докажем после того, как введем одно вспомогательное понятие.

Пусть дана квадратичная форма f от n неизвестных с матрицей $A = (a_{ij})$. Миноры порядка $1, 2, \dots, n$ этой матрицы, расположенные в ее левом верхнем углу, т. е. миноры

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает, очевидно, с определителем матрицы A, называются *главными минорами* формы f.

Лемма. *Если квадратичная форма f с действительными коэффициентами, составляющими матрицу A, подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то знак определителя формы (т. е. определителя ее матрицы) не меняется.*

Доказательство. Действительно, после преобразования мы получаем квадратичную форму с матрицей $Q'AQ$, однако, ввиду $|Q'| = |Q|$, $|Q'AQ| = |Q'||A|\,|Q| = |A||Q|^2$, т. е. определитель $|A|$ умножается на положительное число. □

Теорема (Критерий Сильвестра). *Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если все ее главные миноры строго положительны.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по количеству неизвестных. При $n = 1$ теорема верна, так как форма имеет в этом случае вид ax^2 и поэтому положительно определена тогда и только тогда, если $a > 0$. Будем, поэтому доказывать теорему для случая n неизвестных, предполагая, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных она уже доказана.

Пусть дана квадратичная форма

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Ее можно записать в виде

$$f=\varphi\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2$$

где φ будет квадратичной формой от $n-1$ неизвестных, составленной из тех слагаемых формы f, в которые не входит неизвестная x_n.

Главные миноры формы φ совпадают, очевидно, со всеми, кроме последнего, главными минорами формы f.

Пусть форма f положительно определена. Форма φ также будет в этом случае положительно определенной: если бы существовали такие значения неизвестных $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ не все равные нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то, полагая дополнительно $x_n=0$, мы получили бы также не строго положительное значение формы f, хотя не все значения неизвестных $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ равны нулю. Поэтому, по индуктивному предположению, все главные миноры формы φ, т. е. все главные миноры формы f, кроме последнего, строго положительны. Что же касается последнего главного минора формы f, т. е. определителя самой матрицы A, то его положительность вытекает из следующих соображений: форма f, ввиду ее положительной определенности, невырожденным линейным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов. Определитель этого нормального вида строго положителен, а поэтому ввиду сделанного выше замечания положителен и определитель самой формы f.

Пусть теперь строго положительны все главные миноры формы f. Отсюда вытекает положительность всех главных миноров формы φ, т. е., по индуктивному предположению, положительная определенность этой формы.

Существует, следовательно, такое невырожденное линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых неизвестных $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Это линейное преобразование можно дополнить до (невырожденного) линейного преобразования всех неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, полагая $x_n = y_n$. Форма f приводится указанным преобразованием к виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2$$

точные выражения коэффициентов b_{in} для нас несущественны. Так как

$$y_i^2 + 2b_{in} y_i y_n = (y_i + b_{in} y_n)^2 - b_{in}^2 y_n^2,$$

то невырожденное линейное преобразование

$$z_i = y_i + b_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$z_n = y_n$$

приводит форму f к каноническому виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + c z_n^2$$

Для доказательства положительной определенности формы f остается доказать положительность числа c. Определитель формы, стоящей в правой части равенства, равен c. Этот определитель должен, однако, быть положительным, так как правая часть равенства получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был, как последний из главных миноров этой формы, положительным. □

Пример 3. Квадратичная форма

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

положительно определена, так как ее главные миноры положительны.

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Пример 4. Квадратичная форма

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

не будет положительно определенной, так как ее второй главный минор отрицателен:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

По аналогии с положительно определенными квадратичными формами можно ввести *отрицательно определенные* формы, т. е. такие невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, нормальный вид которых содержит лишь отрицательные квадраты неизвестных. Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются иногда *полуопределенными*. Наконец, *неопределенными* будут такие квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты неизвестных.

Упражнения

1. Записать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если:

а) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$;

в) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$;

г) $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2$;

д) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$;

ж) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2$;

з) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3$;

и) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_3x_4$;

к) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - x_1x_4$.

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 267 из 275
Назад
На весь экран
Закрыть

2. Записать квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

по заданной матрице A, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Определить ранг квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если:

а) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2$.

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и найти выражение новых неизвестных через старые, если:

а) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$;

г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$.

5. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид, если:

а) $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$;

б) $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2\sqrt{6}x_1x_2$;

в) $f(x_1,x_2)=2x_1x_2$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

з) $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

и) $f(x_1,x_2,x_3)=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

к) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

л) $f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

6. Исследовать на знакоопределённость каждую из данных квадратичных форм:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

в) $x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3$;

г) $6x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

д) $-8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

е) $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3$.

7. Исследовать, при каких значениях λ является знакоопределённой каждая из данных квадратичных форм:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2$;

б) $2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_1x_2 + x_2x_3$;

в) $\lambda x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$;

г) $-3x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_1x_2$;

д) $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda\, x_1x_3 - 4x_2x_3$;

е) $5x_1^2 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

ж) $\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

9. Привести к каноническому виду методом Лагранжа следующие квадратичные формы:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
2. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
3. $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
4. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$.
5. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

10. Привести к каноническому виду методом Якоби, если это возможно, следующие квадратичные формы:

1. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
2. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_3x_4$.
3. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
4. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.
5. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_2x_3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие включает в себя достаточный теоретический материал, а также примеры и задачи по курсу высшей алгебры, программа которого предусмотрена подготовкой дипломированных специалистов вузов, изучающих дисциплины «Алгебра», «Алгебра и теория чисел».

Рассмотренные примеры и задачи призваны помочь студентам в овладении важными вопросами линейной алгебры. Пособие направлено на формирование основных понятий линейной алгебры, а также умений и навыков работы с математическим аппаратом, что поможет студенту освоить существующие методы, а также разработать новые методы и решать новые профессиональные задачи.

С точки зрения полноты представленного материала издание не претендует на то, чтобы заменить учебники по алгебре. Однако студентам математических специальностей оно будет интересно тем, что в нем изложен не только теоретический материал, но и приведены решения многочисленных примеров и задач, в том числе повышенного уровня сложности, поэтому пособие может быть полезно при самостоятельном изучении алгебры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боревич, З.И. Определители и матрицы / З. И.Боревич. — М. : Наука, 1988. — 356 с.

2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру/ А.И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2001. —436 с.

3. Куликов, Л. Я. Алгебра и теория чисел : учебник / Л. Я. Куликов. — М. : Высш. шк., 1979. - 456 с.

4. Куликов, Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. — М.: Просвещение, 1993. — 512 с.

5. Винберг, Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Винберг. — М.: Факториал Пресс, 2001. — 270 с.

6. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. — Минск: Выш. шк., 1982. —346 с.

7. Курош , А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М.: Наука, 1975. —348 с.

8. Кострикин, А.И. Сборник задач по алгебре / А.И. Кострикина. —М.: Физ-матлит, 2001. —360 с.

9. Фадеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фадеев. — М.: Наука, 1984. — 458 с.

Учебное электронное мультимедийное издание

КУРАНОВА Наталья Юрьевна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогические институт

кафедра ФМОиИТ
natali_math@mail.ru