

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А.Н. ГОЦ

**КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ  
И ТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

Учебное пособие

Владимир 2008

УДК 621.01:539.4.001.2 (075.8)

ББК 31.365 я73

Г 74

Рецензенты:

Доктор технических наук,  
профессор Российского университета дружбы народов  
*В.М. Фомин*

Доктор технических наук,  
начальник центра испытаний двигателей ОАО  
«Владимирский моторотракторный завод»  
*А.Р. Кульчицкий*

Печатается по решению редакционного совета  
Владимирского государственного университета

**Гоц, А. Н.**

Г 74 Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие / А. Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с. – ISBN 978-5-89368-836-8.

Приведен порядок расчета на крутильные колебания систем коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей: составление эквивалентной расчетной схемы, проведение расчетов на собственные колебания, определение амплитуд вынужденных крутильных колебаний и расчет демпферов жидкостных и внутреннего трения.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 140501 – двигатели внутреннего сгорания, направления 140500 – энергомашиностроение. Соответствует требованиям государственных образовательных стандартов указанных специальностей.

Табл. 15. Ил. 85. Библиогр.: 51 назв.

УДК 621.01: 539.4.001.2 (075.8)

ББК 31.365 я73

ISBN 978-5-89368-836-8

© Владимирский государственный университет, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Глава 1. Расчет эквивалентной системы коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей .....	7
1.1. Общие сведения .....	7
1.2. Приведение длин.....	10
1.3. Приведение масс .....	17
1.4. Исследования крутильных систем автомобильных и тракторных двигателей на стадии проектирования.....	24
1.5. Составление расчетной схемы эквивалентной системы коленчатого вала.....	27
Глава 2. Свободные крутильные колебания .....	30
2.1. Основные понятия.....	30
2.2. Одномассовая система.....	31
2.3. Двухмассовая система .....	32
2.4. Трехмассовая система.....	33
2.5. Многомассовая система.....	36
2.6. Анализ форм колебаний .....	40
Глава 3. Вынужденные крутильные колебания.....	42
3.1. Основные понятия.....	42
3.2. Анализ возбуждающих моментов .....	44
3.3. Методика и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента ДВС .....	47
3.4. Работа гармонического крутящего момента поршневого двигателя.....	52
3.5. Энергия, рассеиваемая при крутильных колебаниях.....	64
3.6. Вынужденные колебания одномассовой системы с сопротивлением.....	72
3.7. Вынужденные колебания многомассовой системы с сопротивлением.....	86
3.8. Определение амплитуд колебаний и напряжений при резонансе .....	99
Глава 4. Способы демпфирования крутильных колебаний коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей.....	105

4.1. Способы уменьшения амплитуд и дополнительных напряжений при крутильных колебаниях .....	105
4.2. Демпферы крутильных колебаний .....	106
4.3. Выбор оптимального коэффициента демпфирования и коэффициента жесткости упругого слоя демпферов внутреннего трения.....	112
4.4. Определение демпфирующих свойств и коэффициента жесткости резинового слоя .....	118
4.5. Определение вязкости силиконовой жидкости при изменении градиента скорости сдвига и температуры.....	125
4.6. Расчет параметров демпферов внутреннего трения.....	130
4.7. Метод оценки параметрам демпферов крутильных колебаний жидкостного трения на стадии проектирования .....	135
Глава 5. Матричные методы расчета крутильных колебаний .....	144
5.1. Основные положения.....	144
5.2. Дифференциальные уравнения вынужденных крутильных колебаний многомассовой системы.....	145
5.3. Методика расчета жидкостного демпфера в многомассовой крутильной системе .....	152
5.4. Методика расчета демпферов внутреннего трения в многомассовой крутильной системе .....	160
5.5. Пример расчета частоты свободных колебаний.....	170
5.6. Определение долговечности демпферов крутильных колебаний .....	173
5.7. Прогнозирование долговечности на стадии проектирования.....	177
5.8. Ускоренные методы испытаний демпферов на долговечность демпферов крутильных колебаний на долговечность .....	180
Заключение .....	186
Приложение 1 .....	188
Приложение 2 .....	189
Приложение 3 .....	190
Приложение 4 .....	191
Приложение 5 .....	193
Приложение 6 .....	194
Библиографический список.....	195

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В современных быстроходных автомобильных и тракторных ДВС при расчетах коленчатого вала нельзя пренебрегать крутильными колебаниями, особенно при высокой частоте вращения  $n$ , (в автомобильных дизелях  $n > 4000 \text{ мин}^{-1}$ ). Отметим, что они опасны не только для деталей КШМ, но также и для приводов различных агрегатов двигателя.

Поэтому в настоящее время при проектировании двигателей коленчатые валы рассчитывают на крутильные колебания, а во время испытаний экспериментально измеряют амплитуды крутильных колебаний при работе двигателя на рабочих режимах.

При эксплуатации некоторых автомобильных и тракторных двигателей возможны случаи, когда частота вращения коленчатого вала становится неравномерной, а работа двигателя сопровождается стуками и вибрацией. Если такая работа продолжается в течение длительного времени, то может произойти поломка коленчатого вала, хотя напряжения, полученные при обычном расчете его на прочность, и не превосходят допускаемых. Указанные явления наблюдаются только на определенных скоростных режимах; при увеличении или уменьшении частоты вращения коленчатого вала стуки и вибрация ослабевают, а затем исчезают.

Из этого следует, что неравномерная угловая скорость коленчатого вала происходит не вследствие неуравновешенности двигателя [1], а по другим причинам, иначе с увеличением угловой частоты вращения  $\omega$  усиливались бы стуки и вибрации, так как силы инерции пропорциональны  $\omega^2$ . Этот вывод подтверждается и тем, что в многоцилиндровых (шести- и восьмицилиндровых) однорядных двигателях, в которых на некоторых режимах наблюдается неравномерная частота вращения коленчатого вала, силы инерции первого и второго порядков, центробежные силы, а также их моменты полностью уравновешены.

Большое количество теоретических и экспериментальных исследований показали, что причиной этих явлений, нарушающих нор-

мальную работу двигателя, являются крутильные колебания коленчатого вала, возникающие вследствие недостаточной его жесткости под действием переменных по величине и направлению крутящих моментов двигателя. Колена вала и связанные с ними массы совершают при этом в плоскостях, перпендикулярных оси коленчатого вала, периодические угловые знакопеременные отклонения, при которых промежуточные между массами участки вала скручиваются. С целью снижения уровня крутильных колебаний широко применяются демпферы жидкостного трения (силиконовые) или демпферы внутреннего трения (резиновые). При этом необходимо выбрать такие параметры демпфера при минимально допустимой его массе (моменте инерции маховика), при которых на всех режимах работы двигателя касательные напряжения в узловом сечении вала не превышали бы допустимых значений [2 – 5].

В учебном пособии изложены теория и практические методы расчета крутильных колебаний коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей.

Учитывая, что книга предназначена для первоначального ознакомления с методами расчета на крутильные колебания, автор старался избрать способ изложения от простого к сложному. При этом неизбежны некоторые повторы, но, как показывает опыт преподавания, это оправдывается более быстрым и прочным освоением материала.

Выражаю свою искреннюю признательность официальным рецензентам профессору д-ру техн. наук В.М. Фомину, д-ру техн. наук А.Р. Кульчицкому, а также коллегам по работе, оказавшим неоценимую помощь при подготовке рукописи. Выражаю также признательность коллегам по лаборатории «Динамики и прочности ДВС» НИКТИД за плодотворное сотрудничество в течение многих лет.

Автор заранее благодарен читателям, которые выскажут свои замечания и пожелания по дальнейшему улучшению излагаемых в пособии разделов, и просит направлять их по адресу:

600000, г. Владимир, ул. Горького, 87, кафедра ТДиЭУ,  
E-mail: [hotz@vlsu.ru](mailto:hotz@vlsu.ru); [hotz@mail.ru](mailto:hotz@mail.ru).

# Глава 1. РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ И ТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

## 1.1. Общие сведения

Как известно, вследствие действия на коленчатый вал двигателя внутреннего сгорания (ДВС) непрерывно меняющихся по времени (или по углу поворота его) периодических тангенциальных  $T$  и нормальных  $K$  сил в нем возникают переменные деформации кручения и изгиба, а также возбуждаются под действием этих сил как во всякой упругой системе с материальными массами механические колебания.

*Крутильными колебаниями* называются периодические угловые колебания сосредоточенных на валу масс, вызывающих закручивание отдельных участков вала. При этом все точки крутильной системы совершают движения переменного направления по дугам окружностей вокруг оси коленчатого вала.

Крутильные колебания могут быть двух видов: собственные, или свободные, и вынужденные.

*Собственные, или свободные,* колебания крутильной системы происходят тогда, когда система, выведенная из состояния покоя, совершает движение под действием только моментов сил упругости вала и моментов сил инерции связанных с ним масс, т. е. без воздействия на систему внешних сил и моментов. Характер собственных крутильных колебаний определяется формой, моментами инерции масс, приведенными к оси коленчатого вала, а также крутильной жесткостью коленчатого вала.

Вследствие того что при крутильных колебаниях систем всегда имеют место внутренние (гистерезис, изменение структуры материала) и внешние (трение относительно внешней среды) сопротивления, свободные колебания с течением времени прекращаются (затухают).

*Вынужденные* крутильные колебания системы возникают во время работы двигателя вследствие действия на коленчатый вал пе-

риодически изменяющихся крутящих моментов, вызывающих переменные упругие деформации скручивания отдельных участков вала. Характер вынужденных колебаний определяется величиной и периодичностью действия нагружающих вал моментов, а также величиной и характером изменения моментов сопротивлений колебаниям.

Знакопеременные напряжения, вызываемые крутильными и изгибными колебаниями, при недостаточной прочности коленчатого вала могут привести к усталостной его поломке. Расчеты и экспериментальные исследования показывают, что в коленчатых валах изгибные колебания обычно менее опасны, чем крутильные, поэтому в первом приближении изгибные колебания можно не учитывать.

Обычно расчет на крутильные колебания сводится к определению напряжений в коленчатом валу при резонансе, т. е. при совпадении частоты возбуждающей силы с одной из частот собственных колебаний крутильной системы вала. Если возникает необходимость в уменьшении возникающих напряжений, то на коленчатом валу устанавливают гаситель колебаний (демпфер).

Для расчета на крутильные колебания действительную (сложную) колеблющуюся систему подвижных элементов КШМ двигателя, а иногда и трансмиссии заменяют упрощенной системой, состоящей из одного или нескольких цилиндрических валов с насаженными на них дисками (сосредоточенными массами). При этом необходимо, чтобы основные динамические свойства упрощенной расчетной модели соответствовали действительной системе. Для выполнения этого условия необходимо равенство для расчетной модели и действительной системы, во-первых, кинетической и потенциальной энергии при крутильных колебаниях; во-вторых, моментов сил упругости соответственно для участков коленчатого вала от носка и маховика, передаваемых через сечение, где возникает максимальный угол закручивания вала (узловую точку). Для составления расчетных схем на кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» ВлГУ разработана программа расчета на ЭВМ приведенных длин эквивалентной системы, моментов инерции при приведении масс.

Расчет коленчатого вала на крутильные колебания можно условно разделить на следующие этапы:

- замены реальной системы коленчатого вала, а иногда и трансмиссии упрощенной расчетной или эквивалентной системой;

- определения частот и относительных амплитуд свободных колебаний расчетной системы при отсутствии периодически меняющихся внешних нагрузок на вал;
- гармонического анализа крутящих моментов от сил газов и сил инерции, действующих на колена вала, а также оценки моментов внутренних сопротивлений двигателя;
- определения резонансных режимов и амплитуд колебаний масс расчетной системы при резонансе;
- определения напряжений и запаса прочности коленчатого вала с учетом крутильных колебаний;
- изыскания возможностей устранения или уменьшения недопустимо больших напряжений, возникающих от крутильных колебаний.

Рассматриваемая при расчете приведенная упрощенная колеблющаяся система по собственным частотам и формам крутильных колебаний в динамическом отношении должна быть эквивалентной действительной системе, что обеспечивается, как было сказано ранее, равенством как потенциальных, так и кинетических энергий обеих систем.

Эквивалентную систему принято считать состоящей из отрезков цилиндрического вала постоянного диаметра, не обладающего массой, но имеющего крутильную жесткость участков действительного вала  $GI_p$  ( $G$  – модуль упругости материала вала второго рода;  $I_p$  – полярный момент инерции, определяемый, как правило, по диаметру коренных шеек), а также из сосредоточенных масс, при выборе которых учтены массы всех подвижных элементов рассматриваемой системы (маховик, валы, колена, шатуны, поршни, а иногда и детали трансмиссии).

Обычно такое допущение несущественно влияет на результаты расчета. Приведение действительной колеблющейся системы к эквивалентной расчетной сводится к определению *приведенных длин* и *приведенных моментов инерции*. При этом приведении для большей точности расчетов желательно учитывать не только подвижные элементы двигателя, связанные с его коленчатым валом (детали кривошипно-шатунного механизма и цилиндропоршневой группы), но и подвижные элементы трансмиссии, не изолированные от крутильных колебаний двигателя упругим элементом или карданным валом.

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение крутильным колебаниям.
2. Какие колебания называются собственными, или свободными?
3. Какие колебания называются вынужденными?
4. Какие этапы условно выделяют при расчете коленчатого вала на крутильные колебания?

### 1.2. Приведение длин

Определение длин участков при переходе от действительного вала к эквивалентному базируется на условии, что потенциальная энергия эквивалентного вала должна быть равной потенциальной энергии действительного вала при одних и тех значениях крутящих моментов. Для этого коэффициенты крутильной жесткости отдельных участков эквивалентного вала должны быть такие же, как и коэффициенты жесткости соответствующих участков действительного вала.

Под коэффициентом крутильной жесткости вала<sup>1</sup> понимается отношение приложенных к концам участка крутящих моментов к углу закручивания этого участка или отношение жесткости вала при кручении к соответствующей длине

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{GI_p}{l}, \quad (1)$$

где  $M$  – крутящий момент;  $\varphi$  – угол закручивания;  $G$  – модуль сдвига;  $l$  – длина вала;  $I_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

Полярный момент инерции для различных видов сечений определяется по формулам:

– для сплошного вала

$$I_p = (\pi d^4)/32;$$

– для полого вала с концентричным отверстием

$$I_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - \delta^4);$$

– для полого вала с эксцентричным отверстием (рис. 1)

$$I_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - \delta^4)\lambda,$$

---

<sup>1</sup> Название коэффициента жесткости  $c$  вызвано тем обстоятельством, что в механике «жесткостью» называют величину  $GI_p$ .

где  $\lambda$  – коэффициент, зависящий от относительного эксцентриситета отверстия  $\xi = (2e)/(d - \delta)$  и от относительной величины отверстия в валу  $\rho = \delta/d$ ; этот коэффициент определяют по графику, приведенному на рис. 1.

Численно коэффициент крутильной жесткости равен моменту, вызывающему закручивание вала на угол, равный одному радиану.

Величина  $1/c$ , обратная коэффициенту крутильной жесткости, называется крутильной податливостью вала.

При расчетах крутильных колебаний (хотя это и не имеет принципиального значения) внешний и внутренний диаметры эквивалентного вала принимают равными соответствующим диаметрам коренных шеек коленчатого вала.

Рассмотрим приведение цилиндрического участка вала длиной  $l$ . Из условий равенства коэффициентов крутильной жесткости действительного  $c$  и эквивалентного  $c_0$  валов

$$c = c_0 = GI_p/l = GI_{p0}/l_0$$

следует, что приведенная длина эквивалентного участка вала

$$l_0 = l \frac{I_{p0}}{I_p}, \quad (2)$$

где  $I_p$  и  $I_{p0}$  – полярные моменты инерции соответственно действительного и эквивалентного валов.

Для участка вала с концентричным отверстием (рис. 2) приведенная длина эквивалентного вала, имеющего аналогичное поперечное сечение с диаметрами  $d_0$  и  $\delta_0$ ,

$$l_0 = l \frac{I_{p0}}{I_p} = l \frac{d_0^4 - \delta_0^4}{d^4 - \delta^4}. \quad (3)$$

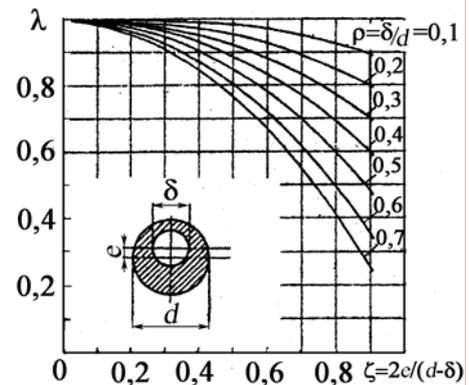


Рис. 1. График для определения коэффициента  $\lambda = f(\xi)$ , учитывающего эксцентриситет отверстия в валу

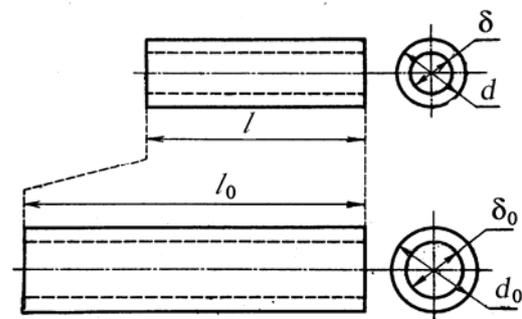


Рис. 2. Приведение прямолинейного участка полого вала

Если вал диаметром  $d_1$  (рис. 3) переходит в вал диаметром  $d_2$ , то влияние перехода на величину деформации при кручении учитывается введением поправочной длины  $l'$ . На эту величину следует укоротить вал большего диаметра и удлинить вал меньшего диаметра, так как ближайшие к месту перехода наружные части вала большего диаметра не участвуют в деформации кручения.

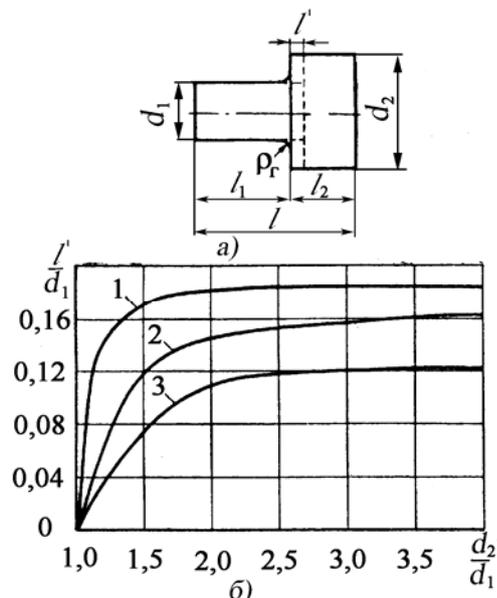


Рис. 3. Вал со ступенчатым переходом: а – эскиз вала; б – график зависимости  $l' / d_1 = f(d_2 / d_1)$  для определения поправки длины элементов вала; 1 – радиус галтели  $\rho_r = 0, l / d_1 < 2$ ; 2 –  $\rho_r = 0, l / d_1 > 2$ ; 3 –  $\rho_r < 0,1 d_1$

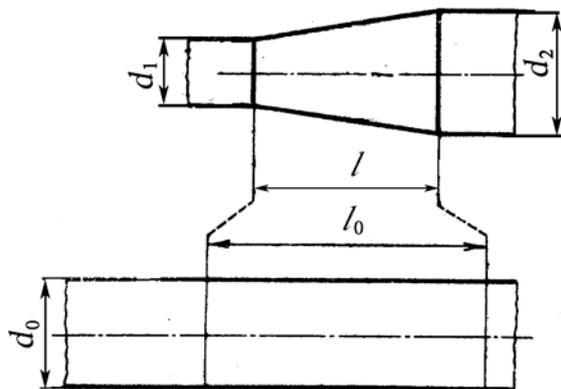


Рис. 4. Приведение конического участка вала

$$l_0 = \frac{l}{3} \cdot \frac{d_0^4}{d_1^4} m(m^2 + m + 1), \quad (6)$$

где  $m = d_1 / d_2$ .

В этом случае приведенные длины эквивалентного вала равны

$$l_{01} = (l_1 + l') \frac{I_{p0}}{I_{p1}}; \quad (4)$$

$$l_{02} = (l_2 - l') \frac{I_{p0}}{I_{p2}}. \quad (5)$$

Поправка длины зависит от отношения внешних диаметров участков вала  $d_2 / d_1$  и радиуса галтели  $\rho_r$  в месте перехода.

На рис. 3 приведены опытные величины относительных поправок длин участков вала  $l' / d_1$  для радиусов галтели  $\rho_r = 0$  и  $\rho_r = 0,1 d_1$  [6].

При увеличении радиуса галтели поправка длины  $l'$  несколько уменьшается. Галтель с большим радиусом можно учесть, заменив ее вписанным в нее коническим участком вала. Приведенная длина участка вала с конусом (рис. 4) определяется по формуле

Для вала, имеющего конус с малым углом ( $m \geq 0,8$ ), конусный участок можно заменить цилиндрическим с наружным диаметром  $d_{cp} = (d_1 + d_2)/2$ . Тогда приведенная длина этого участка

$$l_0 = l \frac{I_{p0}}{I_{p\text{cp}}} \quad (7)$$

Влияние шпоночных канавок и шлицев на валу (рис. 5) учитывает уменьшение действительного наружного диаметра вала  $d$  на величину  $kh$  (где  $k$  – коэффициент, зависящий от числа канавок на валу;  $h$  – глубина канавки). При одной шпоночной канавке (рис. 5, а)  $k = 0,5$ ; при двух шпоночных канавках (рис. 5, б)  $k = 1$  и при шлицах (рис. 5, в)  $k = 2$ .

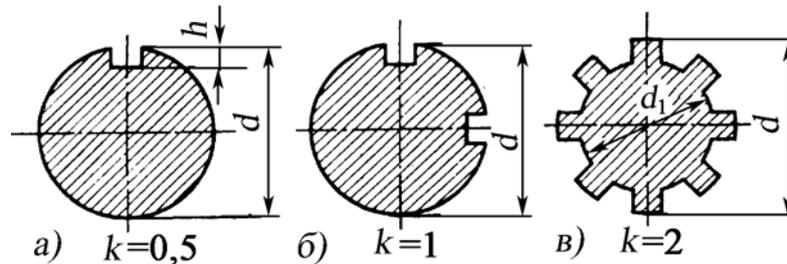


Рис. 5. К определению приведенной длины участков вала со шпоночными или шлицевыми канавками

Сложные участки вала следует разбивать на элементарные. Коэффициент податливости сложного участка вала может быть определен из условия, что угол закручивания его под действием моментов  $M$ , приложенных на концах его, равен сумме углов закручивания его элементарных участков

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots,$$

или в соответствии с (1)

$$M/c = M/c_1 + M/c_2 + M/c_3 + \dots,$$

откуда

$$1/c = \sum_{i=1}^{i=n} 1/c_i \quad (8)$$

Следовательно, податливость сложного участка вала равна сумме податливостей элементов вала. Для кривошипа коленчатого вала

податливость колена  $1/c_k$  равна сумме податливостей коренной  $1/c_{к.ш}$  и шатунной  $1/c_{ш.ш}$  шеек и двух щек  $2/c_{щ}$ , т. е.

$$\frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_{к.ш}} + \frac{1}{c_{ш.ш}} + \frac{2}{c_{щ}}.$$

Приведенная длина сложного участка вала равна сумме приведенных длин его составных частей

$$l_0 = \frac{GI_{p0}}{c} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{GI_{p0}}{c_i} = \sum_{i=1}^{i=n} (l_0)_i. \quad (9)$$

На основании зависимости (9) можно определить и приведенную длину колена вала. Обычно её определяют по следующим полуэмпирическим формулам:

а) по формуле С.П. Тимошенко, учитывающей поправки на переходы от шеек к щеке (рис. 6):

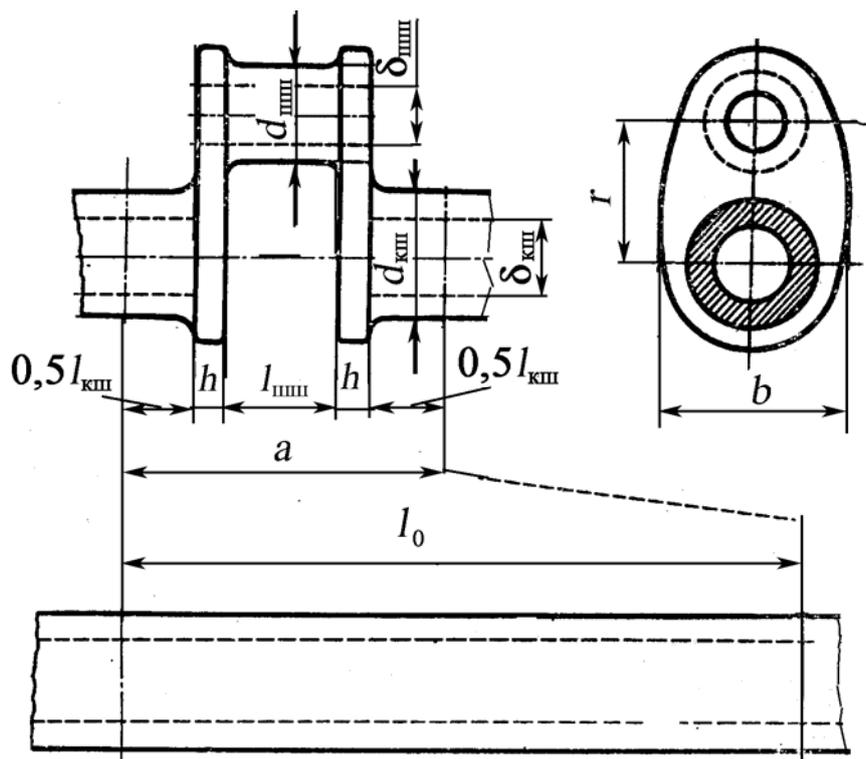


Рис. 6. Приведение длины колена вала

$$l_0 = (l_{к.ш} + 0,9h) + (l_{ш.ш} + 0,9h) \frac{d_{к.ш}^4 - \delta_{к.ш}^4}{d_{ш.ш}^4 - \delta_{ш.ш}^4} + 0,9r \frac{d_{к.ш}^4 - \delta_{к.ш}^4}{hb^3}; \quad (10)$$

б) по формуле В.С. Картера, применяемой для коленчатых валов форсированных двигателей:

$$l_0 = (l_{\text{к.ш}} + 0,8h) + 0,75l_{\text{ш.ш}} \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{d_{\text{ш.ш}}^4 - \delta_{\text{ш.ш}}^4} + 1,5r \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{hb^3}; \quad (11)$$

в) по формуле С.С. Зиманенко, учитывающей влияние не только переходов, но и перекрытия шеек вала:

$$l_0 = \left( l_{\text{к.ш}} + 0,6 \frac{h}{l_{\text{к.ш}}} d_{\text{к.ш}} \right) + \left( 0,8l_{\text{ш.ш}} + 0,2 \frac{b}{r} d_{\text{к.ш}} \right) \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{d_{\text{ш.ш}}^4 - \delta_{\text{ш.ш}}^4} + \frac{r}{\Phi} \cdot \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{hb^3}, \quad (12)$$

где  $\Phi = \sqrt{d_{\text{ш.ш}}/r}$  – коэффициент, характеризующий влияние перекрытия шеек;

г) по формуле Хельдта

$$l_0 = (l_{\text{к.ш}} + 0,4h) + 1,096l_{\text{ш.ш}} \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{d_{\text{ш.ш}}^4 - \delta_{\text{ш.ш}}^4} + 1,284r \frac{d_{\text{к.ш}}^4 - \delta_{\text{к.ш}}^4}{hb^3}. \quad (13)$$

Формула (12) учитывает влияние положительного перекрытия при определении приведенной длины колена вала.

Если на вал посажена с натягом массивная деталь (рис. 7, а), то к каждой длине вала слева и справа добавляется величина  $l'$  при плотной или напряженной посадке  $l' = 0,33d$ , а при прессовой или горячей посадке –  $l' = 0,25d$ .

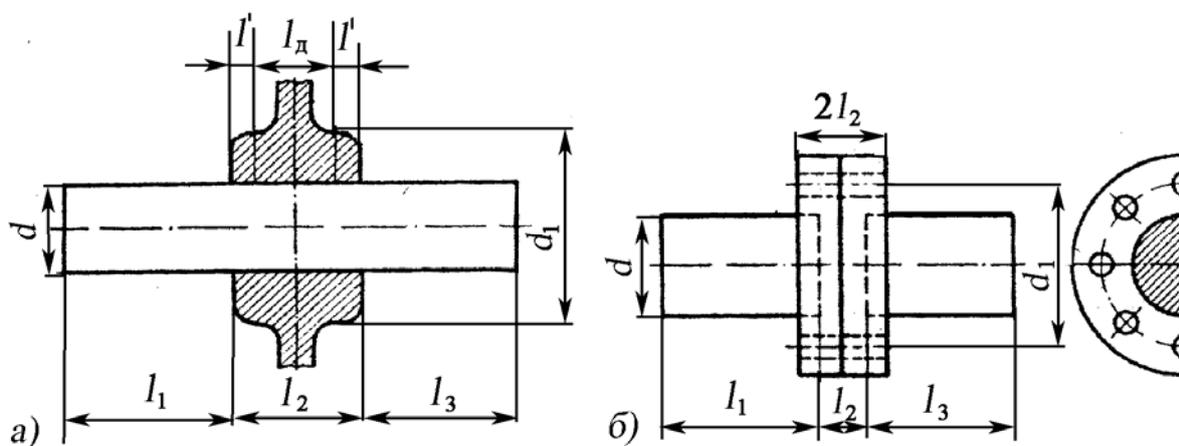


Рис. 7. Участки вала с фланцевыми соединениями

На участке вала длиной  $l_d = l_2 - 2l'$  производят приведение вала от диаметра  $d$  к диаметру ступицы  $d_1$ .

Если деталь посажена на шлицах, то длина деформируемого в ступице участка вала с каждой стороны ступицы  $l' = 0,5d_1$ , где  $d_1$  – диаметр вала по дну шлицевых канавок.

В случае определения приведенной длины участка вала с фланцевым соединением (рис. 7, б) обычно принимают, что до середины толщины фланца деформируется вал диаметром  $d$ , а далее – вал диаметром  $d_1$ , равным диаметру окружности, проведенной по осям болтов соединения. Если между фланцами имеется упругий элемент, то определение приведенной длины вала между серединами толщины фланцев следует производить только по коэффициенту жесткости упругого элемента.

При приведении к валу двигателя элементов, связанных с ним зубчатой передачей, коэффициенты жесткости валов этих элементов (при условии равенства потенциальных энергий валов  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$ ) умножаются на квадрат передаточного числа  $i$  (рис. 8).

Так как потенциальная энергия скручиваемого вала определяется работой, затраченной на деформацию кручения, из условия приведения  $\Pi_a = \Pi_b$  получим:

$$\frac{M_a \varphi_a}{2} = \frac{M_b \varphi_b}{2} \quad \text{или} \quad \frac{c_a \varphi_a^2}{2} = \frac{c_b \varphi_b^2}{2},$$

но  $\varphi_b / \varphi_a = i$ ,

тогда  $c_a = c_b i^2$ . (14)

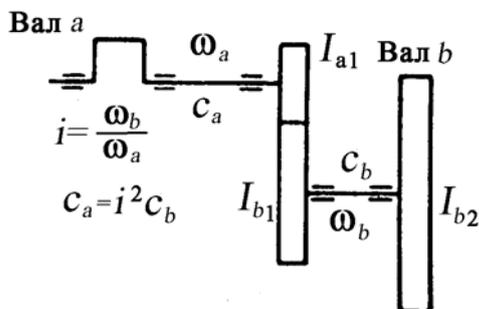


Рис. 8. Расчет коэффициентов жесткости вала с передачей

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» разработана программа «Koleno» расчета на ПЭВМ коэффициентов жесткости и длины колена полноопорного вала в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС. В программу входят файлы:

Имя файла	Назначение файла
Н	Подготовка исходных данных
RKGKV.exe	Запуск программы
REZ.C	Результаты расчета

Исходные данные заполняются в файле «Н» (открывается F4, далее, если шрифт не кириллица, то в меню через «формат» выбрать в подменю «шрифт» с обозначением “terminal”) без смещения строк. Переводом курсора на файл «RKGKV.exe» и нажатием “Enter” программа запускается. Пример подготовки исходных данных приведен в прил. 1. Результаты расчета приводятся в файле «REZ.C» (прил. 2).

### Вопросы для самопроверки

1. Как учитывается при вычислении полярного момента инерции эксцентриситет внутреннего отверстия?
2. Что такое приведенная длина кривошипа?
3. Назовите различия в определении длин кривошипа по зависимостям а-г.

### 1.3. Приведение масс

Для расчета момента инерции всех движущихся масс  $I_0$  поршневого двигателя, приведенных к оси коленчатого вала, действительную систему заменяют эквивалентной или расчетной. Этот выбор проводят из условия, что кинетическая энергия эквивалентной или расчетной системы равнялась бы кинетической энергии элементов действительной системы.

Для расчета эквивалентной системы необходимо определить моменты инерции элементов действительного коленчатого вала и потом заменить их равноценными по моментам инерции дисками или сосредоточенными массами, закрепленными на определенном расстоянии от оси вала.

Обычно моменты инерции отдельных участков коленчатого вала относительно оси вращения подсчитывают по чертежу; в некоторых случаях их определяют экспериментально.

При расчете последовательно определяют моменты инерции относительно оси вращения отдельных элементов вала, имеющих форму простых геометрических тел, а потом их суммированием находят общий момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{i=n} I_i . \quad (15)$$

Момент инерции коренной шейки коленчатого вала равен

$$I_{к.ш} = I_{pк.ш} l_{к.ш} \rho, \quad (16)$$

где  $I_{pк.ш} = \frac{\pi d_{к.ш}^4}{32}$  – полярный момент инерции сечения коренной шейки;  $l_{к.ш}$  – длина коренной шейки;  $\rho$  – плотность металла коленчатого вала.

Момент инерции шатунной шейки коленчатого вала относительно его оси в соответствии с (15) равен

$$\begin{aligned} I_{ш.ш} &= I_{0ш.ш} + m_{ш.ш} r^2 = I_{pш.ш} l_{ш.ш} \rho + F_{ш.ш} l_{ш.ш} \rho r^2 = \\ &= (I_{pш.ш} + F_{ш.ш} r^2) l_{ш.ш} \rho , \end{aligned} \quad (17)$$

где  $I_{0ш.ш}$  – момент инерции шатунной шейки относительно оси, проходящей через ее центр тяжести;  $m_{ш.ш}$  – масса шатунной шейки;  $r$  – радиус кривошипа;  $l_{ш.ш}$  – длина шатунной шейки;  $F_{ш.ш}$  – площадь поперечного сечения шейки.

Момент инерции щеки обычно определяют как алгебраическую сумму моментов инерции элементов простой формы, на которые разбивают щеку:

$$I_{щ} = \sum_{i=1}^{i=n} (I_{0i} + m_i r_i^2),$$

где  $I_{0i}$  – момент инерции элемента относительно оси, проходящей через его центр масс;  $m_i$  – масса элемента;  $r_i$  – радиус инерции (расстояние от центра масс элемента до оси вращения).

Если щека имеет переменную толщину и сложную форму, то ее момент инерции удобно определять как сумму моментов инерции элементарных слоев (рис. 9). Масса такого элементарного слоя (см. обозначения на рис. 9, а)

$$\Delta m_i = \Delta V_i \rho = \frac{2\pi r_i \alpha_i}{360^\circ} h \Delta r \rho.$$

Так как момент инерции элементарного слоя равен  $\Delta I_i = \Delta m_i r_i^2$ , то для всей щеки

$$I_{щ} = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta m_i r_i^2 = \frac{\pi}{180} \rho \sum_{i=1}^{i=n} \Delta r (\alpha_i h r_i^3). \quad (18)$$

В работе [6] сумму  $\sum_{i=1}^{i=n} \Delta r (\alpha_i h r_i^3)$  в зависимости (18) рекомендуется определять как площадь диаграммы, построенной в координатах  $r - \alpha_i h r_i^3$  (рис. 9, б).

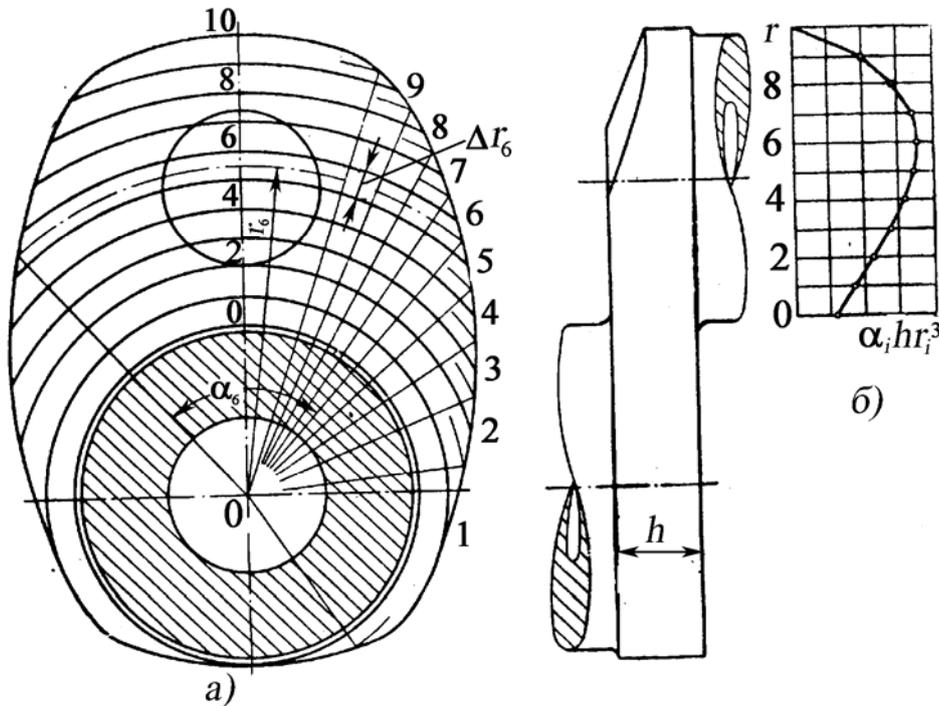


Рис. 9. Определение момента инерции щеки коленчатого вала

Часть массы шатуна  $m_2$ , отнесенную к оси шатунной шейки, учитывают полностью (в V-образном двигателе для каждого колена следует учитывать оба шатуна)

$$I_2 = m_2 r^2.$$

Момент инерции одного кривошипа

$$I_k = I_{к.ш} + I_{ш.ш} + 2I_{щ} + I_2.$$

Если на продолжении щек коленчатого вала установлены противовесы, то их моменты инерции определяют так же, как моменты инерции щеки и прибавляют затем к моменту инерции кривошипа.

При определении полного момента инерции кривошипа необходимо также учитывать массы деталей поршневой группы и шатуна.

Массу деталей, совершающих возвратно-поступательное движение,  $m_j = m_{\text{п}} + m_1$  ( $m_{\text{п}}$  – масса поршневой группы;  $m_1$  – часть массы шатуна, отнесенная к оси поршневого пальца) учитывают частично, так как она при положениях кривошипно-шатунного механизма, близких к мертвым точкам, практически не влияет на величину момента инерции  $I_0$ .

Рассмотрим, как учитывается масса возвратно-поступательно движущихся частей  $m_j = m_{\text{п}} + m_1$ .

Из условия равенства кинетических энергий возвратно-поступательно движущихся масс  $m_j$  и эквивалентной им вращающейся массы  $m_{\text{эк}}$ , сосредоточенной на оси шатунной шейки, можно записать

$$\frac{m_j v_{\text{п}}^2}{2} = \frac{m_{\text{эк}} v^2}{2}, \quad (19)$$

где  $v_{\text{п}}$  – скорость поршня;  $v = r\omega$  – линейная скорость оси шатунной шейки.

Так как  $v_{\text{п}} = r\omega(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi)$  ( $\lambda = r/l$  – безразмерный параметр, зависящий от радиуса кривошипа  $r$  и длины шатуна  $l$ ) [7], то, подставив это значение в (19), получим:

$$m_{\text{эк}} = m_j \frac{v_{\text{п}}^2}{r^2 \omega^2} = m_j (\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi)^2. \quad (20)$$

Таким образом, эквивалентная масса должна иметь переменную величину, зависящую от угла поворота кривошипа  $\varphi$ . Для упрощения задачи переменную массу  $m_{\text{эк}}$  заменим ее средним значением за один оборот двигателя, которое можно определить графически (рис. 10) или аналитически

$$m_{\text{эк.ср}} = \frac{F}{2\pi}, \quad (21)$$

где 
$$F = m_j \int_0^{2\pi} \left( \sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)^2 d\varphi = \pi \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) m_j,$$

тогда

$$m'_{\text{эк.ср}} = \frac{\pi \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) m_j}{2\pi} = 0,5 \left( 1 + 0,25\lambda^2 \right) m_j. \quad (22)$$

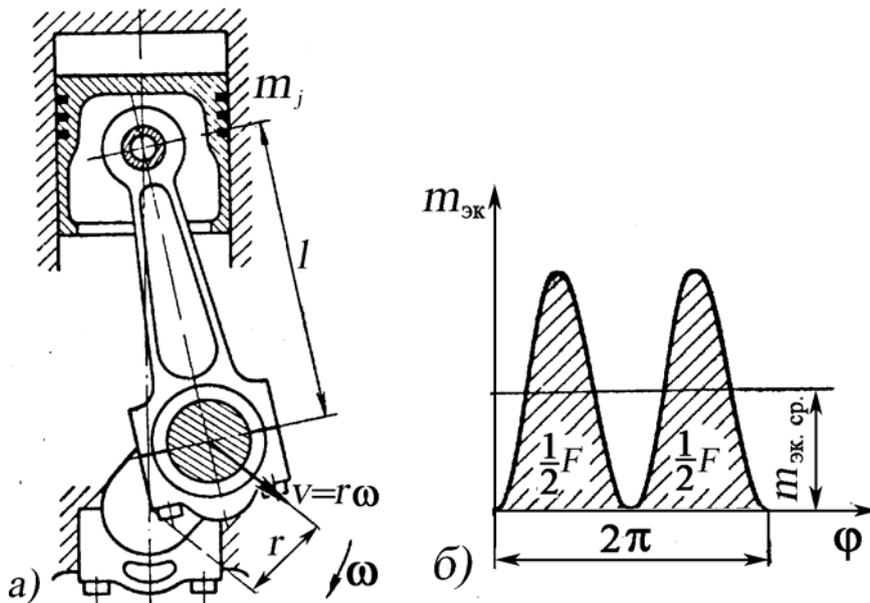


Рис. 10. Определение приведенной массы деталей, совершающих возвратно-поступательное движение

В расчетах, допускающих погрешность не более 3 %, можно принимать длину шатуна бесконечно большой ( $\lambda=0$ ). Тогда эквивалентная масса

$$m_{\text{эк}} \approx 0,5m_j. \quad (23)$$

Вследствие этого полный момент инерции одного колена (его часто называют моментом инерции моторной массы) приближенно определяют по формуле

$$I_{0к} = I_{к} + (m_2 + 0,5m_j)r^2, \quad (24)$$

где  $I_{к} = I_{к.ш} + I_{ш.ш} + 2I_{ш} + I_2$  – момент инерции кривошипа относительно оси коленчатого вала (коренной и шатунной шеек, щек, проти-

вовесов, если они имеются);  $m_2$  – часть массы шатуна, отнесенная к оси шатунной шейки;  $m_j = m_{\text{п}} + m_1$  – масса деталей, совершающая возвратно-поступательное движение.

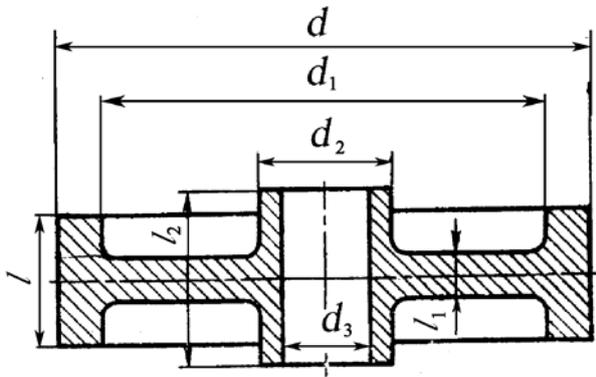


Рис. 11. К определению момента инерции шкива

В V-образном двигателе для каждого колена следует учитывать оба поршня и оба шатуна, сочлененных с коленом вала.

Момент инерции шкива (рис. 11), установленного, например, на носке коленчатого вала, относительно оси вращения складывается из моментов инерции обода, диска и ступицы:

$$I = \rho \frac{\pi}{32} \left[ l(d^4 - d_1^4) + l_1(d_1^4 - d_2^4) + l_2(d_2^4 - d_3^4) \right],$$

где  $\rho$  – плотность (объемная масса) материала шкива, а размеры, определяющие форму, показаны на рис. 11.

Для нахождения  $I_0$  необходимо определить также момент инерции маховика  $I_M$  и вращающихся деталей потребителя  $I_{\text{п}}$ , поскольку

$$I_0 = \sum_{i=1}^k I_{0\text{к}} + I_M + I_{\text{д.н}} + I_{\text{п}}, \quad (25)$$

где  $I_M$  – момент инерции маховика;  $I_{\text{д.н}}$  – момент инерции деталей, установленных на носке коленчатого вала;  $I_{\text{п}}$  – момент инерции вращающихся деталей потребителя.

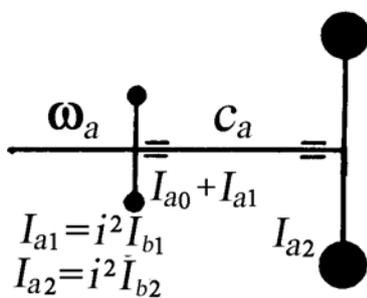


Рис. 12. Приведение масс вала с зубчатой передачей

Если производят приведение к коленчатому валу масс, расположенных на валах, соединенных с ним зубчатой передачей (уравновешивающие валы, валы привода потребителя) (рис. 12), то следует исходить из равенства кинетических энергий, для чего моменты инерции приводимых масс надо умножить на квадрат передаточного числа  $i$ .

Пусть  $I_{12}$  – приведенный момент инерции вала  $b$ , приведенного к валу  $a$  (см. рис. 8).

Тогда  $\frac{I_{a1}\omega_a^2}{2} = \frac{I_{b1}\omega_b^2}{2}$ .

Но  $\omega_2/\omega_1 = i$ , откуда  $I_{a1} = I_{b1} \left( \frac{\omega_b^2}{\omega_a^2} \right) = I_{b1}i^2$ , а  $I_{a2} = I_{b2} \left( \frac{\omega_b^2}{\omega_a^2} \right) = I_{b2}i^2$ .

Следовательно,

$$I_{a1} = I_2 i^2. \quad (26)$$

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» разработана программа расчета на ПЭВМ моментов инерции моторной массы в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС «Moment». В программу входят файлы:

Имя файла	Назначение файла
Н	Подготовка исходных данных
RMIKV.exe	Запуск программы
REZ.C	Результаты расчета

Исходные данные заполняются в файле «Н» (открывается F4, далее, если шрифт не кириллица, то в меню через «формат» выбрать в подменю «шрифт» с обозначением “terminal”) без смещения строк. Переводом курсора на файл «RMIKV.exe» и нажатием “Enter” программа запускается. Пример подготовки исходных данных приведен в прил. 3. Результаты расчета приводятся в файле «REZ.C» (прил. 4).

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое коэффициент жесткости кривошипа?
2. Как определяется момент инерции масс щеки относительно оси, проходящей через коренные шейки коленчатого вала?
3. Как определяется момент инерции масс одного кривошипа?
4. Как учитывается масса возвратно-поступательно движущихся частей кривошипно-шатунного механизма при определении моментов инерции приведенных масс?
5. Как учитываются коэффициенты жесткости и моменты инерции вала с зубчатой передачей?

#### 1.4. Исследования крутильных систем автомобильных и тракторных двигателей на стадии проектирования

Характерной особенностью вновь проектируемых транспортных двигателей является их существенное форсирование по среднему эффективному давлению ( $p_e > 0,9 \dots 1,2$  МПа) и частоте вращения (для дизелей  $n = 3000 \dots 4000$  мин<sup>-1</sup>, для бензиновых двигателей –  $n > 5000$  мин<sup>-1</sup>) при одновременном уменьшении их металлоемкости. В работах [8, 9] приводятся данные для современных транспортных дизелей:  $p_{e\max} / p_{e\text{ном}} = 2,2 / 1,7$  МПа, литровые мощности  $N_{л} \geq 30$  кВт/л. Эта тенденция, несомненно, приводит к значительному повышению динамической нагруженности узлов и деталей двигателя вследствие роста газовых, тепловых и инерционных нагрузок. На стадии проектирования ДВС, когда размеры и массы деталей КШМ неизвестны, часто возникает необходимость провести расчет коленчатого вала на крутильные колебания. При намечаемой степени форсирования уровень касательных напряжений в сечениях коленчатого вала из-за крутильных колебаний может превосходить допустимые. Поэтому актуальным является проверка необходимости установки демпфирующих устройств или других мероприятий для снижения уровня крутильных колебаний. Известно, что опасные крутильные колебания коленчатых валов ДВС устраняются либо смещением резонансных режимов за пределы рабочих частот вращения, либо путем снижения амплитуд колебаний за счет введения в колебательную систему гасителей крутильных колебаний. В транспортных двигателях используются демпферы, в которых уменьшение амплитуды колебаний происходит из-за рассеивания энергии в слое жидкости (жидкостной демпфер) или упругого материала (демпфер внутреннего трения).

Как известно, на резонансных режимах работа возбуждающего момента затрачивается на упругие деформации в резиновом слое. В этих демпферах используется свойство резины (или других материалов) допускать большие деформации с рассеиванием значительного количества энергии за счет гистерезиса. Считается, что резина обладает наибольшим внутренним трением из всех материалов, применяемых в технике. Резиновые демпферы достаточно эффективны. Однако при вулканизации резины, а также под действием температуры меняются ее свойства, а это не позволяет обеспечить стабильность работы демпфера.

Нашими исследованиями было установлено, что использование вместо резины композиций на основе термопластичных полиуретанов (ТПУ) позволяет повысить надежность демпферов внутреннего трения. В частности ТПУ Витур Т-0433-85 может использоваться в диапазоне температур от  $-40$  до  $135^{\circ}\text{C}$ , при этом характеристики его меняются незначительно [5].

Жидкостные силиконовые демпферы не требуют технического обслуживания. Как показывает опыт, на автомобильные и тракторные двигатели мощностью свыше  $100$  кВт целесообразно устанавливать жидкостные демпферы.

На основании анализа конструктивных параметров для большинства однопоршневых дизелей и бензиновых двигателей с демпферами крутильных колебаний установлено [10, 11], что приведенные коэффициенты жесткости кривошипов  $C_{\varphi}$ , моменты инерции моторных масс  $I$  и маховиков  $I_M$  меняются в широких пределах. Введем безразмерные величины: приведенные коэффициенты жесткости кривошипов  $C_{\varphi r}$ , моменты инерции моторных масс  $I_r$ , моментов инерции маховиков  $I_{Mr}$  в зависимости от конструктивных параметров и основных показателей двигателя: диаметра цилиндра  $D$ , хода поршня  $S$ , среднего эффективного давления  $p_e$ , угловой скорости вращения коленчатого вала  $\omega$ , номинальной мощности  $N_e$ :

$$C_{\varphi r} = \frac{C_{\varphi}}{D^2 S p_e}; \quad I_r = \frac{I \omega^2}{D^2 S p_e}; \quad I_{Mr} = \frac{I_M \omega^3}{N_e}. \quad (27)$$

Здесь  $C_{\varphi}$  – приведенный коэффициент жесткости одного кривошипа,  $\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{рад}^{-1}$ ;  $I$  – приведенный момент инерции одной моторной массы двигателя,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$  ( $I/2$  – для  $V$ -образных двигателей, у которых на одном кривошипе расположены два шатуна);  $I_M$  – приведенный момент инерции маховика,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $D$  – диаметр цилиндра, м;  $S$  – ход поршня, м;  $p_e$  – среднее эффективное давление, Па;  $\omega = \pi n_n / 30$  – номинальная угловая скорость вращения коленчатого вала,  $\text{рад}\cdot\text{с}^{-1}$  ( $n_n$  – номинальная частота вращения коленчатого вала,  $\text{мин}^{-1}$ );  $N_e$  – номинальная мощность, Вт.

Безразмерные величины меняются в достаточно узких пределах. Если рассмотреть их как случайные величины, имеющие нормальный закон распределения, то это позволяет найти выборочное среднее значение и доверительные интервалы.

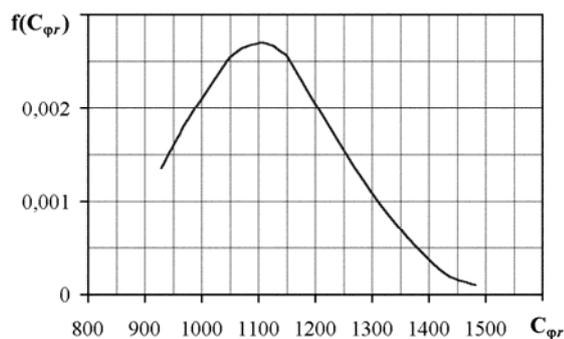


Рис. 13. Функция плотности вероятности нормального распределения безразмерной величины  $C_{\varphi r}$

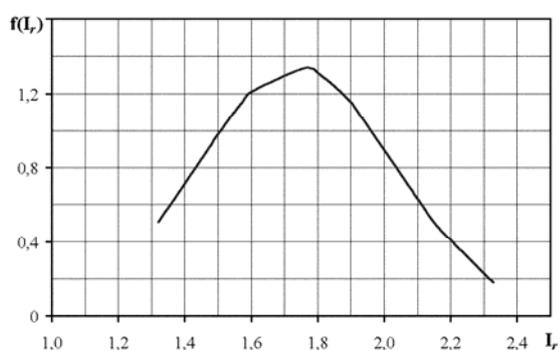


Рис. 14. Функция плотности вероятности нормального распределения безразмерной величины  $I_r$

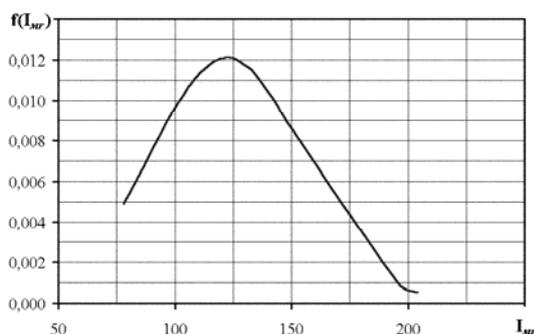


Рис. 15. Функция плотности вероятности нормального распределения безразмерной величины  $I_{mr}$

На рис. 13, 14, 15 представлены плотности вероятностей нормального распределения безразмерных величин  $C_{\varphi r}$ ,  $I_r$  и  $I_{mr}$ . Для вероятности  $P = 0,95$  средние значения и доверительные интервалы этих величин равны:  $\bar{C}_{\varphi r} = 1100 \pm 70$ ;  $\bar{I}_r = 1,735 \pm 0,673$ ;  $\bar{I}_{mr} = 122 \pm 47$ .

Это позволяет на стадии проектирования определить приближенные значения параметров крутильной системы  $C_{\varphi}$ ,  $I$ ,  $I_m$ , а на основании расчетов вынужденных крутильных колебаний приведенной системы – принять решение о необходимости установки демпфера. Заметим, что расчет безразмерных значений  $I_{mr}$  для маховиков по формуле (27) для тракторных и комбайновых дизелей дает весьма близкие результаты по сравнению с расчетом по зависимости Б.М. Покорного [6], которые он получил в результате анализа величин моментов инерции маховиков автомобильных двигателей.

Таким образом, для большинства тракторных и комбайновых двигателей можно рекомендовать следующие приближенные значения величин:  $C_{\varphi r} = 1100$ ;  $I_r = 1,735$ ;  $I_{mr} = 122$ . Анализ приведенных крутильных систем тракторных и комбайновых двигателей [5, 10, 11] свидетельствует о функциональной зависимости между коэффициентами жесткости кривошипов и моментами инерции моторных масс.

Методом регрессионного анализа по данным анализа ряда автомобильных и тракторных двигателей (объем выборки 45) получена зависимость между безразмерными величинами коэффициента жесткости одного кривошипа  $C_{\varphi r}$  и моментом инерции моторной массы  $I_r$

$$C_{\varphi r} = 0,5901 \cdot 10^4 - 1,0326 \cdot 10^4 I_r + 0,6627 \cdot 10^4 I_r^2 - 0,1316 \cdot 10^4 I_r^3. \quad (28)$$

Графики плотности вероятности нормального распределения безразмерных величин  $C_{\varphi r}$ ,  $I_r$  и  $I_{mr}$ , а также зависимость  $C_{\varphi r} = f(I_r)$  позволяют на стадии проектирования двигателя определять коэффициенты жесткости кривошипов коленчатого вала, моменты инерции моторных масс (поступательно движущихся и вращающихся деталей ЦПГ и КШМ) для составления приведенной крутильной системы и ориентировочного расчета на крутильные колебания, в том числе, определить частоту свободных колебаний, а при необходимости и выбрать размеры демпфера крутильных колебаний.

### Вопросы для самопроверки

1. Укажите, от чего зависит момент инерции маховика?
2. Как определяются моменты инерции моторных масс и маховика на стадии проектирования?
3. Для чего определяют ориентировочные значения коэффициентов жесткости кривошипов, моменты инерции моторных масс и маховиков?
4. Каким образом можно уточнить приближенные формулы для определения моментов инерции на стадии проектирования?

### 1.5. Составление расчетной схемы эквивалентной системы коленчатого вала

После того как определены жесткости и моменты инерции элементов действительного вала, следует разместить эквивалентные массы по длине эквивалентного вала таким образом, чтобы получилась равноценная в динамическом отношении колеблющаяся система. На рис. 16 показана приведенная система коленчатого вала однорядного шестицилиндрового двигателя. Сосредоточенные массы следует раз-

мещать на эквивалентном валу в точках, которые соответствуют местам с определенным сосредоточением масс действительного вала. К таким сосредоточенным массам можно отнести колена вала, маховик и шестерни передач. Поскольку действительная длина крутильной системы и эквивалентной разные, то начинать составлять схему рекомендуется с точки, где располагается маховик. Далее по известным приведенным длинам каждого колена, в центре которого располагается сосредоточенная масса, а также с носка коленчатого вала строится схема эквивалентной системы. Составленная таким образом схема эквивалентной системы для большинства поршневых автомобильных и тракторных двигателей получается многомассовой (число сосредоточенных масс больше трех).

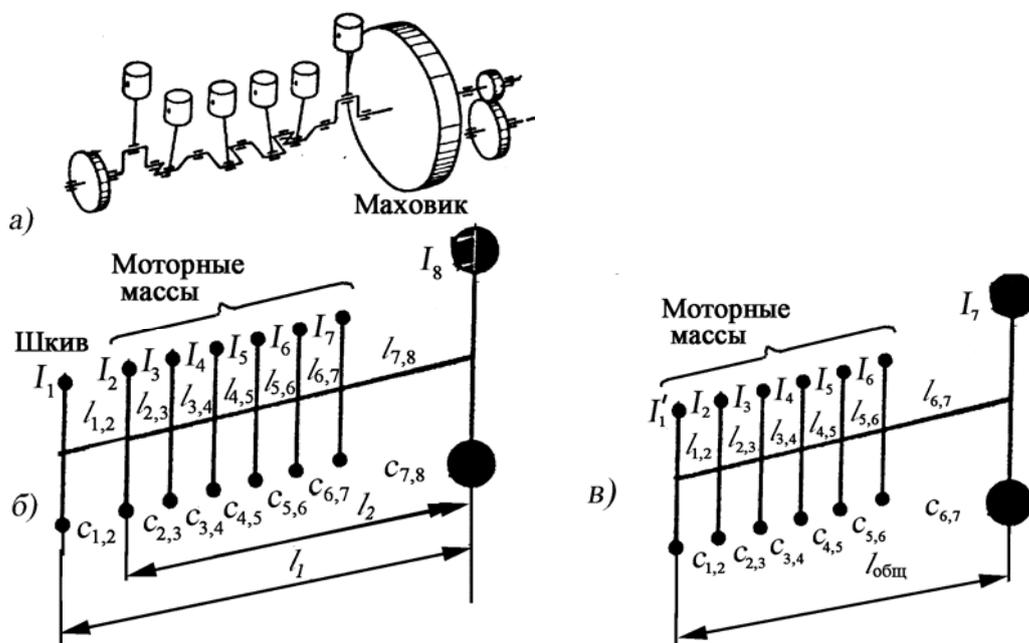


Рис. 16. Схема колеблющейся системы шестицилиндрового двигателя: а – крутильная система; б – эквивалентная восьмимассовая система; в – эквивалентная семимассовая система

Таким образом, для расчета эквивалентной системы коленчатого вала поршневого двигателя необходимо иметь чертежи деталей кривошипно-шатунного механизма, цилиндропоршневой группы, чертежи деталей, установленных на носке, а также на хвостовике. Если на носке коленчатого вала установлены шестерни привода механизма газораспределения (или ременная передача), то соответственно момент инерции первой массы, ее приведенные длина и коэффициент жест-

кости зависят от присоединенных деталей. Для дальнейших расчетов для эквивалентной многомассовой системы необходимо определить момент инерции  $I_i$ , приведенные длины  $l_i$  и коэффициенты жесткости  $c_{ii+1}$ .

Для уменьшения числа масс возможно их объединение. Заменяющая масса находится в центре масс объединяемой группы. Так, если объединяются две массы – шкива  $I_1$  и первая моторная  $I_2$ , удаленные от маховика на расстояния  $l_1$  и  $l_2$ , то коэффициенты жесткости  $c'_{1,2}$ , момент инерции объединенной массы  $I'_1$ , ее расстояние  $l_{\text{общ}}$  от маховика определяются формулами (см. рис. 16, в):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c'_{1,2}} &= \frac{1}{c_{1,2}} + \frac{1}{c_{2,3}}; \\ I'_1 &= I_1 + I_2; \\ l_{\text{общ}} &= \frac{I_1 l_1 + I_2 l_2}{I_1 + I_2}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Расчеты показывают, что переход к упрощенной эквивалентной системе обычно дает небольшую ошибку; переход к такой системе при приближенных расчетах вполне допустим.

### Вопросы для самопроверки

1. Как размещаются сосредоточенные массы в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС?
2. Сколько масс обычно используют для приведенной крутильной системы?
3. Учитываются ли при составлении приведенной крутильной системы шестерни привода, например, механизма газораспределения?
4. Учитываются ли при составлении приведенной крутильной системы приводы вентилятора, стартера?

## Глава 2. СВОБОДНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 2.1. Основные понятия

Любая механическая система, состоящая из масс, соединенных между собой упругими связями, выведенная из состояния равновесия, колеблется относительно равновесного состояния. Эти колебания при отсутствии внешнего воздействия (сопротивлений) могут продолжаться бесконечно долго и называются *свободными* (или *собственными*). В реальной системе под действием внешних и внутренних сопротивлений они постепенно затухают. Чтобы их поддерживать искусственно на определенном уровне, необходимо к колеблющейся системе подводить энергию, равную энергии, затрачиваемой на преодоление сопротивлений. Такие установившиеся колебания можно наблюдать на коленчатых и других валах поршневых двигателей внутреннего сгорания при резонансе.

Если законы изменения возбуждающего момента и момента сопротивления одинаковы и действуют синхронно, то эти моменты взаимно уравновешиваются, и колебания системы происходят по закону свободных колебаний. При свободных колебаниях системы без сопротивления кинетическая энергия отдельных массивных элементов системы периодически переходит в потенциальную энергию упругих связей и обратно; при этом колебания всех масс системы происходят синхронно (с одинаковыми или противоположными фазами). Частота таких переходов (частота колебаний) зависит от моментов инерции отдельных элементов и коэффициентов жесткости их связей.

Расчет свободных колебаний системы заключается в определении частот колебаний, число которых (собственных частот) равно количеству ее степеней свободы. В эквивалентной крутильной системе число частот свободных колебаний на единицу меньше числа сосредоточенных масс эквивалентной системы (одномассовую крутильную систему можно рассматривать как двухмассовую с бесконечно большой одной из масс). Рассмотрим свободные колебания, совершающиеся без трения в различных крутильных системах.

## Вопросы для самопроверки

1. Почему происходит затухание свободных колебаний?
2. Что определяется при расчете собственных колебаний?
3. Как определяется количество частот свободных колебаний в зависимости от числа масс?

### 2.2. Одномассовая система

На выведенную из состояния равновесия одномассовую крутильную систему (рис. 17, а) одновременно действуют два противоположно направленные и взаимно уравнивающиеся момента: момент сил инерции диска  $M_{и} = -I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -I\ddot{\varphi}$  и момент сил упругости вала  $M_y = c\varphi$ , где  $I$  – момент инерции массы диска относительно оси вращения;  $c = (GI_p)/l$  – коэффициент жесткости вала при кручении;  $I_p$  – полярный момент инерции сечения вала;  $\varphi$  – текущее значение угла поворота сечения вала под сосредоточенной массой. Из условия равновесия

$$-M_{и} + M_y = 0. \quad (30)$$

Подставив в (30) значения  $M_{и}$  и  $M_y$ , получим дифференциальное уравнение свободных колебаний одномассовой эквивалентной системы (рис. 17, б):

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$$

или 
$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2\varphi = 0, \quad (31)$$

где  $\omega_c = \sqrt{c/I}$  – круговая частота свободных угловых колебаний,  $c^{-1}$  (число колебаний в  $2\pi$  с).

Как известно, общее решение уравнения (30) имеет вид:

$$\varphi = a \sin(\omega_c t + \varepsilon), \quad (32)$$

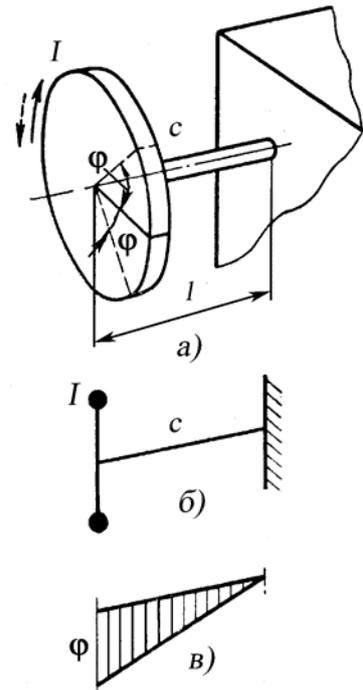


Рис. 17. Одномассовая крутильная система: а – крутильная система; б – эквивалентная система; в – условная диаграмма амплитудных значений при кручении вала

где  $a$  – амплитуда свободных угловых колебаний, рад;  $\varepsilon$  – начальная фаза, рад;  $t$  – время от начала отсчета.

Период одного полного колебания равен  $T = 2\pi / \omega_c$ , а собственная частота колебаний (число колебаний в секунду)  $f_c = 1/T = \omega_c / (2\pi) = 0,159\omega_c$ ,  $\text{с}^{-1}$  (герц) или число колебаний в минуту  $n_c = 60f_c = 60 \cdot 0,159\omega_c = 9,55\omega_c$   $\text{мин}^{-1}$ .

Как видно из полученных уравнений, свободные крутильные колебания (без затухания) являются гармоническими, причем круговая частота  $\omega_c$ , период  $T$  и частота этих колебаний  $f_c$  зависят только от коэффициента жесткости  $c$  крутильной системы и момента инерции колеблющейся массы  $I$ , но не зависят от начальной амплитуды. Следовательно, при предварительном закручивании системы на разные углы амплитуды свободных крутильных колебаний будут различными, а период и частота останутся одними и теми же.

Откладывая по длине эквивалентного вала угловые амплитуды (максимальные угловые отклонения), можно получить график свободных крутильных колебаний вала (рис. 17, в).

### Вопросы для самопроверки

1. Что называется коэффициентом жесткости участка вала?
2. Дайте определение круговой частоты свободных угловых колебаний. Какая размерность этой величины?
3. Что такое период крутильных колебаний?
4. Как составляется дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний?

### 2.3. Двухмассовая система

Расчетная схема приведенной крутильной системы одноколенного вала с маховиком одноцилиндрового двигателя может быть представлена как двухмассовая (рис. 18, а).

Свободные колебания двухмассовой системы можно представить как колебания с одной общей собственной частотой двух одно-массовых систем (рис. 18, б). Поэтому собственная круговая частота колебаний системы

$$\omega_c = \sqrt{c_1/I_1} = \sqrt{c_2/I_2}.$$

Общая податливость вала, соединяющего массы как системы с последовательно соединенными упругими элементами, равна:

$$1/c_{1,2} = 1/c_1 + 1/c_2 = 1/(\omega_c^2 I_1) + 1/(\omega_c^2 I_2).$$

После преобразований находим собственную частоту колебаний двухмассовой системы

$$n_c = 9,55\omega_c = 9,55\sqrt{\frac{c_{1,2}(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}, \text{ мин}^{-1}$$

$$\text{или } f_c = 0,159\omega_c = 0,159\sqrt{\frac{c_{1,2}(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}, \text{ с}^{-1}.$$

График угловых колебаний сечений вала по его длине характеризует так называемую форму свободных колебаний (рис. 18, в). При возникновении свободных крутильных колебаний обе массы системы колеблются в разные стороны относительно сечения, которое в эквивалентной системе и графике угловых амплитуд (рис. 18, б и в) отмечено точкой  $k$ . Ее называют узловой точкой.

### Вопросы для самопроверки

1. Сколько частот свободных колебаний определяется для двухмассовой крутильной системы?
2. Что называют узловой точкой?
3. Что называется круговой частотой собственных колебаний?

## 2.4. Трехмассовая система

Рассмотрим определение частот свободных колебаний трехмассовой системы (рис. 19). Если в одноцилиндровом двигателе (см. рис. 18, а) учесть шкив, установленный на носке коленчатого вала, то при составлении эквивалентной системы придем к трехмассовой крутильной системе. Далее будет показано, что для упрощения расчетов возможно уменьшение числа масс крутильной системы.

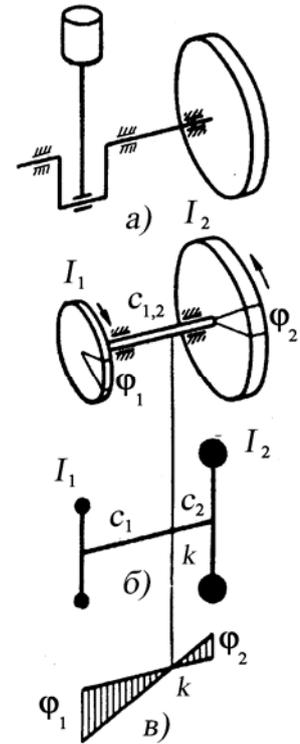


Рис. 18. Двухмассовая крутильная система: а – крутильная система; б – эквивалентная система; в – форма колебаний

Обозначим моменты сил упругости участков вала между первой и второй, второй и третьей массами соответственно

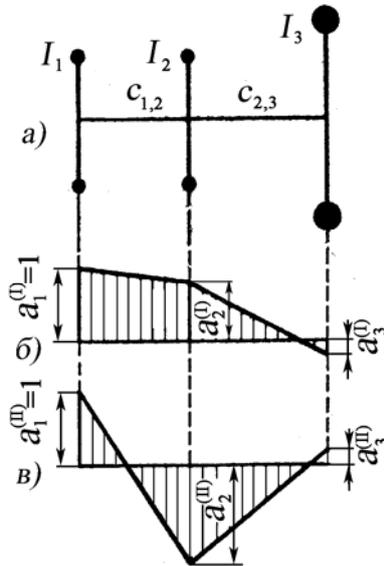


Рис. 19. Трехмассовая крутильная система: а – эквивалентная система; б – одноузловая форма колебаний; в – двухузловая форма колебаний

$$M_{y1,2} = c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

и

$$M_{y2,3} = c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3),$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  – углы поворота при крутильных колебаниях первой, второй и третьей масс.

Из условия равенства моментов сил инерции и упругости для каждой из масс получим дифференциальные уравнения, характеризующие свободные колебания трехмассовой системы:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2) + c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \right\} (33)$$

Решения этих уравнений могут быть найдены в форме

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \\ \varphi_3 &= A_3 \sin(\omega_c t + \varepsilon). \end{aligned} \right\}$$

Эти решения содержат четыре неизвестных:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  – амплитуды крутильных колебаний каждой из масс, а также  $\omega_c$  – собственную частоту колебаний трехмассовой системы. Таким образом, число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Однако выход из этого положения достаточно простой. Мы можем значение одной из амплитуд, например  $A_1$ , задать произвольно.

Чтобы исключить из решения  $A_1$ , разделим все три решения на эту величину и введем обозначения относительных амплитуд

$$A_1/A_1 = a_1 = 1; \quad A_2/A_1 = a_2; \quad A_3/A_1 = a_3.$$

Подставив эти решения в дифференциальные уравнения (33) и сократив последние на  $\sin(\omega_c t + \varepsilon)$ , получим систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -I_1 \omega_c^2 + c_{1,2}(1 - a_2) &= 0; \\ -I_2 \omega_c^2 - c_{1,2}(1 - a_2) + c_{2,3}(a_2 - a_3) &= 0; \\ -I_3 \omega_c^2 - c_{2,3}(a_2 - a_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из первого уравнения следует, что

$$a_2 = 1 - \frac{I_1}{c_{1,2}} \omega_c^2. \quad (35)$$

Подставив значение  $a_2$  в третье уравнение системы (34), получим:

$$a_3 = \frac{a_2}{1 - \frac{I_3}{c_{2,3}} \omega_c^2} = \frac{1 - \frac{I_1}{c_{1,2}} \omega_c^2}{1 - \frac{I_3}{c_{2,3}} \omega_c^2}. \quad (36)$$

Сложив три уравнения системы (34) и подставив в них значения  $a_2$  и  $a_3$ , после преобразований получим частотное уравнение:

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{c_{1,2} c_{2,3}} \omega_c^4 + \left( \frac{I_1 I_2 + I_1 I_3}{c_{1,2}} + \frac{I_3 I_1 + I_3 I_2}{c_{2,3}} \right) \omega_c^2 + (I_1 + I_2 + I_3) = 0. \quad (37)$$

Решая биквадратное уравнение (37), можно определить собственные круговые частоты  $\omega_c$ . Два из четырех корней этого уравнения положительные: обозначим соответствующие им частоты  $\omega_{c I}$  и  $\omega_{c II}$ .

Подставляя последовательно эти положительные значения  $\omega_{c I}$  и  $\omega_{c II}$  в зависимости (35) и (36), получим по два различных значения относительных амплитуд как для  $a_2$ , так и для  $a_3$ , соответствующие двум формам свободных колебаний. Эти формы колебаний можно описать двумя графиками относительных угловых амплитуд (см. рис. 19, б, в).

Колебания с частотой  $\omega_{c I}$  при  $\omega_{c I} < \omega_{c II}$  называются первым главным видом колебаний. При этом амплитуды относятся между собой как  $A_1^I : A_2^I : A_3^I = 1 : a_2^I : a_3^I$ .

Отложив на графике относительные амплитуды угловых колебаний отдельных масс и соединив их ломаной линией, получим форму колебаний, имеющую один узел колебаний (см. рис. 19, б).

Колебания с более высокой частотой  $\omega_{с II}$  называются вторым главным видом колебаний. Эта форма колебаний (см. рис. 19, в) имеет два узла колебаний и поэтому называется двухузловой.

Отношения амплитуд колебаний будут следующими:  
 $A_1^{II} : A_2^{II} : A_3^{II} = 1 : a_2^{II} : a_3^{II}$ .

В общем случае система будет совершать свободные колебания, являющиеся результатом сложения главных колебаний первого и второго видов.

### Вопросы для самопроверки

1. Почему при вычислении частот свободных колебаний трехмассовой системы не определяются амплитуды?
2. Сколько частот свободных колебаний определяют для трехмассовой системы?
3. Что называется частотным уравнением?

## 2.5. Многомассовая система

Прямой путь вычисления собственных частот колебаний многомассовой крутильной системы (рис. 20), рассмотренный в предыдущем под разделе для трехмассовой системы, на практике не применяется.

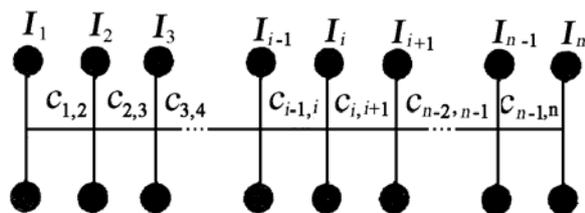


Рис. 20. Многомассовая крутильная система

Это сопряжено с чрезвычайно громоздкими вычислениями и, кроме того, при системе с числом масс более четырех частотное уравнение обычно решают приближенно.

Значительно проще пользоваться методами последовательных приближений (методами подбора частот путем нескольких проб). Наиболее распространенным из них является метод остатка, основанный на том, что сумма моментов сил упругости и сил инерции колеблющихся масс упругой системы при свободных колебаниях должна равняться нулю. По величине остатка от суммы моментов, полученной при произвольном выборе величины круговой частоты  $\omega_{с}$  можно судить об ошибке, допущенной при выборе этой частоты.

Рассмотрим применение метода остатка для определения собственных круговых частот колебаний системы из  $n$  масс. Как известно, в этом случае число частот свободных колебаний (собственных частот) равно  $n - 1$ .

Пусть некоторая  $i$ -я масса колеблется с амплитудой  $\varphi_i$ . На эту массу слева действует момент сил инерции самой массы  $I_i \ddot{\varphi}_i$  и моменты сил упругости  $-c_{i-1,i}(\varphi_i - \varphi_{i-1})$  и  $c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1})$  слева и справа соответственно. Поскольку при гармонических колебаниях моменты сил упругости закрученных участков коленчатого вала изменяются по гармоническому закону, то можно принять, что текущее значение их  $M_{(i-1,i)_x}$  равно  $M_{(i-1,i)_x} = M_{i-1,i}^a \sin \omega_c t$ , где  $M_{i-1,i}^a$  – амплитудное значение момента.

Дифференциальные уравнения, характеризующие свободные колебания многомассовой системы, имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ \dots & \\ I_i \ddot{\varphi}_i - c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= 0; \\ \dots & \\ I_n \ddot{\varphi}_n - c_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

или система уравнений (38) в общем виде

$$I_i \ddot{\varphi}_i - c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, \quad (i = 1, 2, 3 \dots n), \tag{39}$$

где полагается  $c_{0,1} = c_{n,n+1} = 0$ .

Собственные колебания описываются решениями вида

$$\varphi_i = a_i \sin(\omega_c t + \varepsilon), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \tag{40}$$

где  $a_i$  – амплитуда колебаний<sup>2</sup>;  $\omega_c$  – собственная угловая частота колебаний;  $\varepsilon$  – фазовый угол.

Подставив решения (40) в систему уравнений собственных колебаний (39) (с учетом того, что  $\ddot{\varphi}_i = -a_i \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varepsilon)$ ), получим уравнения, связывающие амплитуду  $A_i$  и частоту  $\omega_c$ :

---

<sup>2</sup> Примем, что в решении (40) (как и для трехмассовой системы) после деления на амплитуду первой массы уравнения (40) и (41) записаны в относительных величинах.

$$-I_i a_i \omega_c^2 - c_{i-1,i} (a_{i-1} - a_i) + c_{i,i+1} (a_i - a_{i+1}) = 0 \quad (41)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} -I_1 a_1 \omega_c^2 + c_{1,2} (a_1 - a_2) &= 0; \\ -I_2 a_2 \omega_c^2 - c_{1,2} (a_1 - a_2) + c_{2,3} (a_2 - a_3) &= 0; \\ -I_3 a_3 \omega_c^2 - c_{2,3} (a_2 - a_3) + c_{3,4} (a_3 - a_4) &= 0; \\ \dots & \\ -I_i a_i \omega_c^2 - c_{i-1,i} (a_{i-1} - a_i) + c_{i,i+1} (a_i - a_{i+1}) &= 0; \\ \dots & \\ -I_n a_n \omega_c^2 - c_{n-1,n} (a_{n-1} - a_n) &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

( $i=1,2,3,\dots, n$ ).

В полученной системе (42) из первого уравнения достаточно просто можно определить  $a_2$  через  $a_1$ . Если каждое уравнение, начиная со второго, сложить со всеми предыдущими (второе – с первым и третьим и т.д.), то придем к эквивалентной системе:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - \frac{1}{c_{1,2}} I_1 a_1 \omega_c^2; \\ a_3 &= a_2 - \frac{1}{c_{2,3}} (I_1 a_1 + I_2 a_2) \omega_c^2; \\ a_4 &= a_3 - \frac{1}{c_{3,4}} (I_1 a_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3) \omega_c^2; \\ \dots & \\ a_i &= a_{i-1} - \frac{1}{c_{i-1,i}} (I_1 a_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + \dots + I_{i-1} a_{i-1}) \omega_c^2; \\ \dots & \\ a_n &= a_{n-1} - \frac{1}{c_{\varphi,n-1}} (I_1 a_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + \dots + I_{n-1} a_{n-1}) \omega_c^2; \\ -(I_1 a_1 + I_2 a_2 + \dots + I_n a_n) \omega_c^2 &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

В последнем уравнении системы (43) должен быть опущен множитель  $\omega_c^2$ , поскольку тривиальное решение в рассматриваемой задаче постороннее ( $\omega_c \neq 0$ ).

Наиболее часто употребляемый метод остатка для отыскания собственных угловых частот  $\omega_c$  на ПЭВМ сводится к следующему. Задаваясь какими-либо значениями  $\omega_c$  и относительной амплитудой первой массы  $a_1$  (например,  $a_1=1$ ), рекуррентным образом (последовательной подстановкой в систему (43)) определяем  $a_1, \dots, a_n$ , после чего находим остаток  $R = I_1 a_1 + I_2 a_2 + \dots + I_n a_n$ . Таким образом, задача состоит в подборе  $\omega_c$ , чтобы  $R=0$ . Последнее можно осуществить, просчитывая  $R$ , начиная с произвольного значения  $\omega_c$  с каким-либо шагом  $\Delta\omega_c$ . Замечая перемену знака  $R$ , локализуем исходную частоту на интервале длины  $\Delta\omega_c$ , которую делим до требуемой точности. Интерполяцией можно найти то значение частоты  $\omega_c$ , при котором  $R=0$  (рис. 21). Это и будет искомая собственная частота  $\omega_c$ . Так можно определить и все  $n-1$  частот собственных колебаний. При этом определенными оказываются и относительные амплитуды  $a_i$ , т.е. в сущности форма колебаний собственных колебаний.

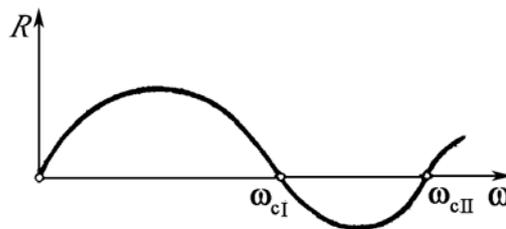


Рис. 21. Определение частот свободных крутильных колебаний многомассовой системы по методу остатка

Сказанное равносильно графическому определению частоты  $\omega_c$  построением  $R = f(\omega_c)$ .

При расчете рекомендуется составлять таблицы или проводить рекуррентным образом расчет аналогично формуле (43).

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» разработана программа расчета на ПЭВМ частот собственных колебаний в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС «Frig». В программу входят файлы:

Имя файла	Назначение файла
INPUT	Подготовка исходных данных
Prgsc.exe	Запуск программы
REZ.C	Результаты расчета

Исходные данные заполняются в файле «INPUT» (открывается F4, далее, если шрифт не кириллица, то в меню через «формат» выбрать в подменю «шрифт» с обозначением “terminal”) без смещения строк. Переводом курсора на файл «Prgsc.exe» и нажатием “Enter” программа запускается. Пример подготовки исходных данных приведен в прил. 5. Результаты расчета приводятся в файле «REZ.C» (прил. 6).

Расчет можно провести также по формуле (43) последовательно, рекуррентным образом вычисляя  $a_i$ , а далее – полученный остаток  $R$ .

Кроме рассмотренного выше метода определения собственных частот, существуют и другие: табличный [6], метод цепных дробей, разработанный В.П. Терских [12].

### **Вопросы для самопроверки**

1. Как составляется дифференциальное уравнение свободных колебаний для многомассовой системы?
2. Почему не составляется частотное уравнение для многомассовой крутильной системы?
3. Как методом последовательных приближений можно определить частоты свободных колебаний?
4. Учитываются ли сопротивления при расчете частот свободных колебаний?

### **2.6. Анализ форм колебаний**

После расчета частот  $\omega_c$  (при  $R=0$ ) строят формы колебаний, характеризующие свободные колебания с данными частотами (рис. 22).

Свободные колебания многомассовой системы являются обычно сложными, возникающими в результате наложения друг на друга отдельных элементарных колебаний, происходящих с каждой из собственных круговых частот системы. Каждое элементарное колебание с одной из собственных круговых частот системы может иметь различные амплитуды<sup>3</sup> в зависимости от величины разового импульса, выведшего вал из равновесия, но форма колебаний при этом будет неизменной (точнее, подобной).

---

<sup>3</sup> При условии, что касательные напряжения в узле колебаний не выходят за напряжения предела пропорциональности материала вала.

Другими словами, относительные амплитуды будут одинаковыми, поскольку при расчете мы приняли  $a_1=1$ . Чаще всего при свободных колебаниях одна из форм колебаний, а именно одноузловая, является доминирующей.

Действительно, в автомобильных и тракторных двигателях без наддува практический интерес представляет только первая форма колебаний – одноузловая с круговой частотой  $\omega_{cI}$ . Для быстроходных двигателей практическое значение может иметь и вторая форма колебаний – двухузловая с частотой  $\omega_{cII}$ . Более высокие формы крутильных колебаний существенной опасности для коленчатого вала не представляют, так как их частота находится за пределами рабочего диапазона частот вращения вала и не может вызвать резонанс.

Как видно из рис. 22, в зоне узлов колебаний линии формы имеют наибольший наклон, определяемый по формуле

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_i - a_{i+1}}{l_{i+1,i}},$$

что характеризует соответственный участок коленчатого вала как наиболее напряженный. На рис. 22 эти участки вала отмечены символом  $A$ .

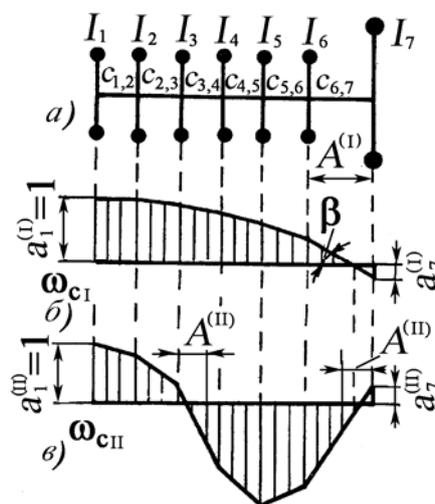


Рис. 22. Форма колебаний шестиколennого вала:  
 а – эквивалентная схема;  
 б – одноузловая форма колебаний;  
 в – двухузловая форма;  
 А – наиболее напряженные участки вала

### Вопросы для самопроверки

1. Как анализируются формы свободных колебаний?
2. Какая из форм колебаний является доминирующей для многомассовой системы?
3. Как определить по форме колебаний наиболее напряженный участок коленчатого вала?
4. Почему амплитуда первой массы крутильной системы принимается за единицу?

## Глава 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 3.1. Основные понятия

Под вынужденными крутильными колебаниями понимают установившиеся угловые колебания упругой крутильной системы, происходящие под действием возбуждающего периодического момента. Периодическое движение обладает тем свойством, что оно полностью воспроизводится по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом движения.

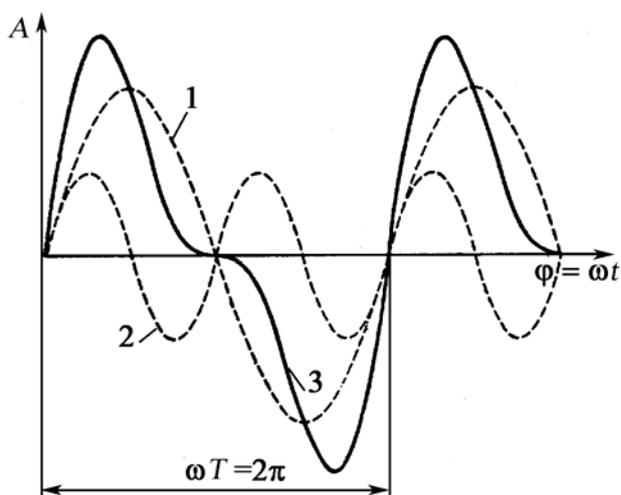


Рис. 23. Сложение двух гармонических движений различных частот: 1 —  $a \sin \omega t$ ; 2 —  $(a/2) \sin 2\omega t$ ; 3 — суммарное (негармоническое)

1 —  $a \sin \omega t$  и 2 —  $(a/2) \sin 2\omega t$  приводит к движению, которое является периодическим, но не является гармоническим (см. рис. 23).

Известно, что периодическая функция  $f(t)$  с частотой  $\omega$  может быть разложена на ряд синусоид с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots, k\omega$ :

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots, \quad (44)$$

Всякое гармоническое движение есть движение периодическое, но не всякое периодическое движение является гармоническим. Например, на рис. 23 изображено движение, представляющее собой наложение двух колебаний, совершающихся по закону синуса, но имеющих различные частоты:

$$\varphi = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Таким образом, сложение двух гармонических движений

где предполагается, что  $f(t)$  повторяет свои значения по истечении каждого промежутка  $T=2\pi/\omega$ . Амплитуды различных колебаний  $A_1, A_2, A_3 \dots$  и их начальные фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  могут быть определены аналитически, если вид функции  $f(t)$  задан. Написанный ряд (44) известен под названием ряда Фурье.

Отметим, что не всякая периодическая функция  $f(t)$  может быть разложена в ряд Фурье, а лишь удовлетворяющая условиям Дирихле: она в рассматриваемом промежутке ограничена, причем этот промежуток может быть разбит на конечное число частей, в каждой из которых данная функция непрерывна и монотонна.

Второй член называется основной или первой гармоникой функции  $f(t)$  и вообще последовательно  $(k+1)$ -й член с частотой  $k\omega$  называется  $k$ -й гармоникой функции  $f(t)$ . Нетрудно заметить, что при разложении периодической функции  $f(t)$  на ряд синусоид с различными амплитудами, начальными фазами и периодами каждая из них укладывается в период исходной кривой разное число раз: 1, 2, 3.... Это математические гармоники 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков.

Так как

$$\sin(k\omega t + \varphi_k) = \sin k\omega t \cos \varphi_k + \cos k\omega t \sin \varphi_k,$$

то написанный ряд можно представить еще так:

$$f(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + a_k \sin k\omega t + \dots + b_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_k \cos k\omega t + \dots \quad (45)$$

Постоянный член  $b_0$  представляет собой “среднюю” высоту кривой  $f(t)$  за время одного колебания. Для кривой, которая на протяжении одного периода отклоняется от нулевой линии на одинаковое расстояние в ту и другую сторону, член  $b_0$  равен нулю. Амплитуды  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$  в (45) могут быть определены по формулам

$$b_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) dt; a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin k\omega t dt; b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos k\omega t dt. \quad (46)$$

С помощью формул (46) мы имеем возможность найти  $a_0, a_k$  и  $b_k$  для любой заданной периодической кривой, удовлетворяющей условиям Дирихле, т.е. провести ее гармонический анализ.

Это относится и к кривой крутящего момента поршневого двигателя, так как вынужденные крутильные колебания происходят с частотой возбуждающего момента. Амплитуда крутильных колебаний отдельных масс при вынужденных колебаниях зависит от соотношения частот гармоник возбуждающих моментов  $k\omega$  и свободных колебаний  $\omega_{ci}$ , а также от соотношения величин возбуждающего момента и момента сопротивления. При равенстве частоты одного из гармонических возбуждающих моментов одной из частот собственных колебаний системы  $k\omega = \omega_{ci}$  возникают резонансные колебания с большой амплитудой.

### Вопросы для самопроверки

1. Каким условиям должна соответствовать периодическая функция для ее разложения в ряд Фурье?
2. Будет ли гармоническим движением сложение двух гармонических движений?
3. Что называется  $k$ -й гармоникой периодической функции?

### 3.2. Анализ возбуждающих моментов

Крутильные колебания валов возникают вследствие неравномерности крутящего момента, которая в основном объясняется тем, что на каждое колено вала действуют непостоянные крутящие моменты, возникающие в результате действия сил газов и сил инерции.

Неравномерность крутящего момента на коленах вала двигателя зависит от тактности двигателя, масс возвратно-поступательно движущихся деталей кривошипного механизма, частоты вращения коленчатого вала и нагрузки на двигатель (сил газов), а для всего двигателя – и от числа цилиндров, а также их расположения.

На рис. 24 изображены кривые крутящих моментов в функции угла поворота коленчатого вала, возникающих от сил газов (кривая 1), от сил инерции (кривая 2) и от суммы этих сил (кривая 3) для одного цилиндра четырехтактного двигателя. Крутящий момент от сил газов, а следовательно, и суммарный крутящий момент полностью проходит цикл изменения за время двух оборотов коленчатого вала, т. е. за время поворота вала на угол  $4\pi$ .

Таким образом, период  $T$  крутящего момента одноцилиндрового четырехтактного двигателя, вращающегося с угловой скоростью  $\omega = (\pi n)/30$ , равен  $T = (4\pi)/\omega = 120/n$ , с.

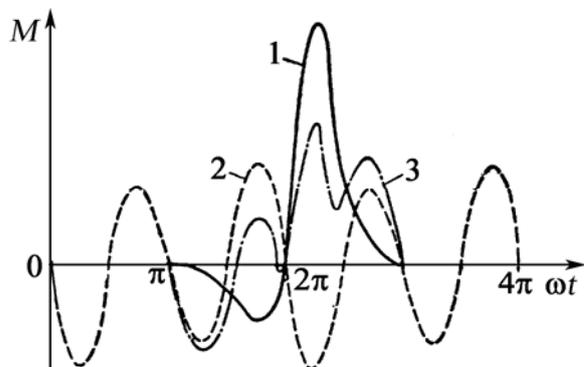


Рис. 24. Кривая крутящих моментов в зависимости от угла поворота кривошипов: 1 – от сил газов; 2 – от сил инерции; 3 – от суммы сил газовых и инерционных

Для двухтактного двигателя период будет в 2 раза меньшим:  $T = (2\pi)/\omega = 60/n$ , с.

Протекание крутящего момента, как видно из рис. 24, имеет периодический, но не синусоидальный (гармонический) характер.

Для того чтобы сделать доступным математическое исследование влияния такого сложного по форме крутящего момента на крутильные коле-

бания коленчатого вала, периодическую кривую, характеризующую крутящий момент, действующий на каждое колено, обычно проводят его гармонический анализ, выделив гармоники, оказывающие наибольшее влияние на амплитуду крутильных колебаний. Как было показано ранее, гармонический анализ – процесс разложения сложной периодической кривой на гармонические составляющие – гармоники.

Каждая гармоническая составляющая крутящего момента (гармоника) возбуждает колебания крутильной системы. Для любого сечения вала, суммируя отдельные угловые отклонения от равновесного положения, вызываемые этими гармониками, можно найти суммарное отклонение вала, которое соответствует действию заданного крутящего момента.

Так как крутящий момент изменяется по периодическому закону, гармонические составляющие любого порядка должны укладываться в основной периоде целое число раз. При исследовании крутильных колебаний порядок гармоник обычно определяют не по периоду рабочего процесса, совершающегося в четырехтактном двигателе в течение двух оборотов коленчатого вала, а по периоду, соответствующему времени одного оборота коленчатого вала, т. е. поря-

док гармоник определяется числом периодов гармонического момента в течение одного оборота коленчатого вала. У четырехтактных двигателей вместо так называемых математических гармоник 1, 2, 3-го и т.д. порядков используют так называемые моторные гармоник  $\frac{1}{2}$ , 1,  $1\frac{1}{2}$ -го и т.д. порядков. У четырехтактных двигателей цикловая угловая скорость в 2 раза меньше угловой скорости коленчатого вала (цикл протекает за два оборота), а в двухтактных – равна ей.

Возмущающий момент от действия газовых сил и сил инерции в  $i$ -м цилиндре представим в виде

$$M_i = \sum_{k=0,5}^N M_{i,k}^a \sin(k\omega t + \beta_{i,k} + k\delta_i) = \sum_{k=0,5}^N (P_i \sin k\omega t + L_i \cos k\omega t); \quad (47)$$

$$P_i = M_{i,k}^a \cos(\beta_{i,k} + k\delta_i); L_i = M_{i,k}^a \sin(\beta_{i,k} + k\delta_i),$$

где  $N$  – число гармоник (для четырехтактных двигателей – 0,5; 1,0; 1,5; ... $N$ , двухтактных – 1, 2,0, ...,  $N$ );  $M_{i,k}^a$  – амплитуда  $k$ -й гармоники возмущающего момента  $M_i$ , действующего в  $i$ -м цилиндре от газовых и инерционных сил, Н·м;  $\beta_{i,k}$  – ее фазовый угол, град;  $\delta_i$  – угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрами двигателя, град.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой цикл изменения крутящего момента от газовых сил у четырехтактного двигателя? А у двухтактного?
2. Какой цикл изменения крутящего момента от сил инерции поршневого двигателя?
3. Проанализируйте по рис. 24, чему равно среднее значение момента сил инерции за период  $4\pi$ ?
4. От чего зависит неравномерность крутящего момента на коленах вала поршневого двигателя?
5. Почему ввели понятие моторных гармоник и чем они отличаются от математических?
6. Как определяется угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрами?

### 3.3. Методика и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента ДВС

Рассмотрим методику и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента для определения амплитудных значений гармонических составляющих момента газовых сил  $M_g$ , момента сил инерции  $M_j$  и суммарного момента  $\bar{M} = \bar{M}_g + \bar{M}_j$ , а также фазовых углов  $\beta_g$  и  $\beta_j$  моментов  $M_g$  и  $M_j$  соответственно. Часто при расчетах рекомендуется ограничиваться гармоническим анализом только  $M_g$  [6]. Однако, как показывают расчеты, пренебрежение силами инерции в случае резонанса 1, 2 и 4-й гармоник дает значения углов закручивания от крутильных колебаний, заниженные на 15 – 20 % [13, 14].

Если использовать для гармонического анализа метод наименьших квадратов [15, 16], то он приводит к следующей вычислительной процедуре. Пусть  $f(\varphi)$ <sup>4</sup> – периодическая функция, заданная на отрезке  $[0, 2l]$  таблицей своих значений в равноотстоящих дискретных точках  $\varphi_i = 2li/n$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ). Коэффициенты тригонометрического многочлена

$$T_N(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^N \left( A_k \cos \frac{\pi k \varphi}{l} + B_k \sin \frac{\pi k \varphi}{l} \right), \quad (48)$$

осуществляющего наилучшее приближение  $f(\varphi)$  в среднем квадратическом, вычисляются по формулам Бесселя:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i); & A_k &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i) \cos \frac{\pi k \varphi_i}{l}; \\ B_k &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i) \sin \frac{\pi k \varphi_i}{l}, \end{aligned} \quad (49)$$

а  $N$  – число гармоник.

В случае, если  $f(\varphi)$  обладает каким-либо свойством четности, формулы (49) упрощаются. Так, например, если  $f(\varphi)$  – нечетная функция, то многочлен (48) принимает вид

$$T_N(\varphi) = \sum_{k=1}^N B_k \sin \frac{\pi k \varphi}{l}, \quad (50)$$

---

<sup>4</sup> В расчетах принимается, что  $\varphi = \omega t$ .

где

$$B_k = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f(\varphi_i) \sin \frac{\pi k \varphi_i}{l}. \quad (51)$$

Здесь предполагается, что  $n$  четно, так что точка  $\varphi = l$  входит в число точек  $\varphi_i$ .

Вычисления по формулам (49) – (51) легко реализуются на ПЭВМ. Для анализа кривой крутящего момента четырехтактного двигателя многочлен (48) запишем в виде

$$T_N(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^N M_k \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{l} + \beta_k\right), \quad (52)$$

где  $M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$  – амплитуда  $k$ -й гармоники;  $\beta_k$  – начальная фаза  $k$ -й гармоники, определяемая из равенств

$$\sin \beta_k = \frac{A_k}{M_k}; \quad \cos \beta_k = \frac{B_k}{M_k}.$$

Известно, что многочлен наилучшего приближения определяется однозначно по формулам (48), (49), если  $2N+1 \leq n$ .

Таким образом, максимальное число гармоник в выражении (52), которое можно получить описанным способом, есть

$$N_{\max} = \left[ \frac{n-1}{2} \right] \quad (53)$$

целая часть числа  $(n-1)/2$ .

Вычислив многочлен  $T_N(\varphi)$ , приближенно полагаем  $f(\varphi) = T_N(\varphi)$ . В дальнейшем, выписывая для различных функций соответствующие им тригонометрические многочлены, мы не будем вводить для них специальных обозначений типа  $T_N(\varphi)$ , а будем использовать обозначения самих функций, так что равенства, аналогичные равенству (52), следует понимать как приближенные.

Пусть  $M_j(\varphi)$ ,  $M_r(\varphi)$  – составляющие крутящего момента от сил инерции и газовых сил соответственно.

Тогда приближенно

$$\left. \begin{aligned} M_j(\varphi) &= P_j(\varphi)r\left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi\right), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \} \\ M_r(\varphi) &= P_r(\varphi)r\left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi\right), \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi \} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где  $P_j(\varphi)$ ,  $P_r(\varphi)$  – силы инерции и газовые силы,  $\lambda = r/l$  ( $l$  – длина ша- туна;  $r$  – радиус кривошипа).

Значения  $P_j(\varphi)$  определяем расчетом, а  $P_r(\varphi)$  – с помощью инди- каторных диаграмм и сводим их в таблицы, шаг которых обозначим через  $\Delta\varphi$ . Формулы (48) – (52) для функций  $M_j(\varphi)$ ,  $M_r(\varphi)$  принимают вид (число гармоник  $N$  для четырехтактных двигателей – 0,5; 1,0; 1,5; ...,  $N$ , а для двухтактных – 1,0; 2,0; ...,  $N$ )

$$M_j(\varphi) = \sum_{k=0,5}^N M_{jk} \sin k\varphi, \quad (55)$$

где 
$$M_{jk} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} M_j(\varphi_i) \sin k\varphi_i, \quad (56)$$

$$\varphi_i = i\Delta\varphi$$

$n=\pi/\Delta\varphi$  (предполагается, что  $\pi/\Delta\varphi$  – целое).

$$M_r(\varphi) = M_0 + \sum_{k=0,5}^{2N} M_{rk} \sin\left(\frac{k\varphi}{2} + \beta_{rk}\right), \quad (57)$$

где 
$$M_0 = \frac{1}{4n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i), \quad M_{rk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2};$$

$$A_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i) \cos \frac{k\varphi_i}{2}; \quad B_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i) \sin \frac{k\varphi_i}{2};$$

$$\sin \beta_{rk} = \frac{A_k}{M_{rk}}; \quad \cos \beta_{rk} = \frac{B_k}{M_{rk}}. \quad (58)$$

Сложив равенства (55) и (57), получим значение суммарного момента:

$$M(\varphi) = M_0 + \sum_{k=1}^{2N} M_k \sin\left(\frac{k\varphi}{2} + \beta_k\right). \quad (59)$$

Несложный подсчет приводит к формулам

$$M_k = M_{rk}; \quad \beta_k = \beta_{rk},$$

если  $k$  нечетно, и

$$M_k = \sqrt{M_{rk}^2 \sin^2 \beta_{rk} + \left(M_{j\frac{k}{2}} + M_{rk} \cos \beta_{rk}\right)^2};$$

$$\sin \beta_k = \frac{M_{rk} \sin \beta_{rk}}{M_k}; \quad \cos \beta_k = \frac{M_{rk} \cos \beta_{rk} + M_{j\frac{k}{2}}}{M_k}, \quad (60)$$

если  $k$  четно.

В силу (60) нужно вычислять только четные  $M_k, \beta_k$ . Из выражения (53) и выбора  $n$  следует, что в формуле (59)  $N \leq n-1$ .

Приведем данные расчета на ПЭВМ для четырехтактного шестицилиндрового двигателя с воздушным охлаждением 6Ч10,5/12,5 (Д160), имеющего следующие показатели: номинальная мощность  $N_e = 76$  кВт;  $p_e = 0,68..0,72$  МПа; номинальная частота вращения  $n = 2200$  мин<sup>-1</sup>, порядок работы цилиндров 1-5-3-6-2=4. В расчетах принималось  $n = 18$  ( $\Delta\phi = 10^\circ$ ), число отыскиваемых гармоник  $N = 9$  (табл. 1).

Таблица 1

Результаты гармонического анализа моментов от газовых и сил инерции дизеля 6Ч 10,5/12 (Д160)

$n=2000$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,72$ МПа				$n=2000$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,76$ МПа		
$k$	$M_{jk}$ , Н·м	$M_{Гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м	$k$	$M_{Гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м
1	31,203	138,856	165,551	1	174,441	203,321
2	-223,765	130,752	95,687	2	149,68	74,659
3	-93,644	102,586	10,211	3	111,522	27,783
4	-8,714	76,734	68,218	4	83,643	75,127
5	-0,0147	56,928	56,916	5	58,802	58,780
6	0,0053	40,993	40,993	6	42,183	42,178
7	0,0072	28,753	28,763	7	27,666	27,672
8	0,0117	20,266	20,266	8	19,364	19,374
9	-0,0055	14,621	14,621	9	13,318	14,317
$n=2200$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,76$ МПа				$n=2200$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,82$ МПа		
$I$	$M_{jk}$ , Н·м	$M_{Гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м	$k$	$M_{Гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м
1	38,641	174,411	21,308	1	186,2	221,617
2	-269,059	149,690	119,805	2	166,53	102,527
3	-110,985	118,795	15,043	3	127,995	23,941
4	-7,830	83,643	75,989	4	86,132	78,537
5	2,832	58,800	61,485	5	56,477	59,172
6	2,704	42,184	44,668	6	39,161	41,611
7	2,322	27,665	29,714	7	26,881	28,919
8	1,744	19,364	20,707	8	18,737	20,129
9	1,048	13,317	15,102	9	13,681	14,376

Для постоянной частоты вращения коленчатого вала  $M_{jk}$  постоянны, так же как при постоянной  $p_z$  постоянны  $M_{Гk}$ . Сравнивая значения  $M_{Гk}$  и  $M_k$ ; (см. табл. 1) для 1, 2 и 4-й целочисленных гармоник,

убеждаемся, что пренебрежение силами инерции дает здесь существенные погрешности; что касается 3-й гармоники, то в этом случае результирующий момент при любом режиме работы оказывается в несколько раз меньше момента газовых сил (величины  $M_{jk}$ ,  $M_{Гк}$  и  $M_k$ , Н·м).

Результаты расчета по приведенным зависимостям полностью подтвердились экспериментальными исследованиями [5].

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» разработана программа «Moment» расчета на ПЭВМ вынуждающих моментов поршневого двигателя. Программа позволяет определить амплитудные значения момента после разложения на гармоники, а также построить графики до 9-го порядка включительно. В программу входят файлы:

Имя файла	Назначение файла
INPUT	Подготовка исходных данных
RVMPD.exe	Запуск программы
REZ.C	Результаты расчета
REZ_1.C	Исходные данные для построения графика

Исходные данные заполняются в файле «INPUT» (открывается F4, далее, если шрифт не кириллица, то в меню через «формат» выбрать в подменю «шрифт» с обозначением “terminal”) без смещения строк. Переводом курсора на файл «RVMPD.exe» и нажатием “Enter” программа запускается. Пример подготовки исходных данных приведен в прил. 3. Результаты расчета приводятся в файле «REZ.C».

### Вопросы для самопроверки

1. Какие гармоники суммируются при учете моментов от газовых и инерционных сил?
2. Проанализируйте табл. 1 и определите, для каких гармоник нельзя не учитывать моменты от сил инерции, поскольку это приведет к грубой ошибке?
3. Какой метод использовался для гармонического анализа кривой крутящего момента поршневого двигателя?

### 3.4. Работа гармонического крутящего момента поршневого двигателя

Итак, для определения амплитуд крутильных колебаний коленчатого вала поршневого двигателя необходимо провести гармонический анализ вынуждающих моментов поршневого двигателя. На рис. 25 приведена кривая крутящего момента от газовых и инерционных сил одного цилиндра четырехтактного дизеля 8ДВТ-330 номинальной мощности  $N_e = 272$  кВт при частоте вращения  $n_H = 1700$  мин<sup>-1</sup> и ее гармонический анализ, рассчитанный по формуле (47).

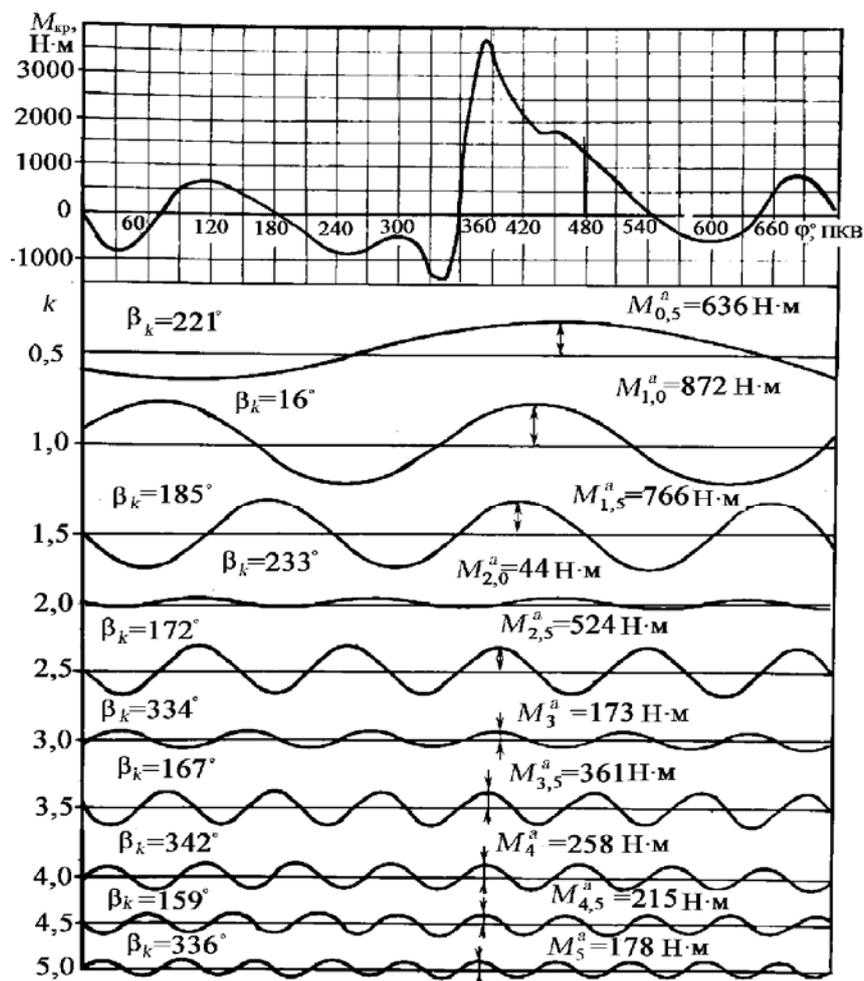


Рис. 25. Кривая крутящего момента от газовых и инерционных сил одного цилиндра дизеля 8 ЧН 15/16 (8ДВТ-330) и ее гармонический анализ

Как было сказано ранее, в случае двухтактных двигателей порядок математических и моторных гармоник совпадает, так как в этих

двигателях рабочий процесс происходит за один оборот коленчатого вала. В дальнейшем как для двухтактных, так и четырехтактных двигателей через  $k$  будет обозначаться порядок моторной гармоника.

При гармоническом анализе крутящего момента от сил газов четырехтактного двигателя ограничиваются шестью порядками и только в отдельных случаях – девятью.

Для приближенных расчетов вынужденных колебаний можно пользоваться амплитудами гармоник крутящего момента от сил газов, взятых из графиков. На рис. 26 приведены графики амплитуд гармоник тангенциальной силы газов  $T$ , приходящейся на  $1 \text{ см}^2$  площади поршня в зависимости от среднего крутящего момента для четырехтактных бензинового двигателя и дизеля.

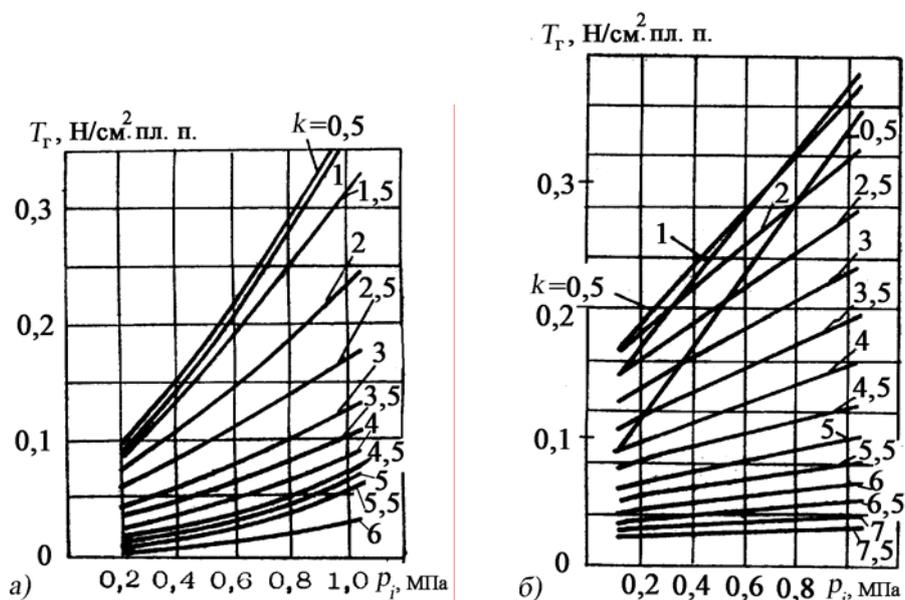


Рис. 26. Амплитуды гармоник тангенциальной силы газов, приходящихся на единицу площади поршня: а – бензинового двигателя; б – дизеля

Крутящий момент от сил инерции (см. рис. 24) имеет период, равный времени одного оборота коленчатого вала, поэтому у четырехтактного двигателя тригонометрический ряд Фурье крутящего момента от сил инерции состоит из моторных гармоник только с целыми порядковыми номерами (см. формулы (55) и (56)) или из математических гармоник с четными порядковыми номерами. Так как закон изменения крутящего момента от сил инерции близок к гармонич-

ческому<sup>5</sup>, амплитуды гармоник момента по мере увеличения порядкового номера быстро уменьшаются (см. табл. 1). Практически можно ограничиться первыми четырьмя гармониками.

Гармонический анализ этого момента в указанных пределах может быть проведен аналитически с использованием зависимостей, полученных для тангенциальной силы  $T$  только от сил инерции [7]:

$$M_j = P_j \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta} r = -m_j r^2 \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta}. \quad (61)$$

Здесь  $\beta$  – угол отклонения оси шатуна в плоскости его качания в сторону от оси цилиндра [7].

Зная, что  $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$ , и полагая, что  $\cos \beta \approx 1$ , имеем

$$\begin{aligned} M_j &= -m_j r^2 \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \frac{\sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta}{\cos \beta} = \\ &= -m_j r^2 \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \left( \sin \varphi + \frac{\lambda \cos \varphi \sin \varphi}{\cos \beta} \right) = \\ &= -m_j r^2 \omega^2 \left( \sin \varphi \cos \varphi + \lambda \sin \varphi \cos 2\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ ;  $\sin 2\varphi \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \sin 4\varphi$ ;

$$\sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi = \sin 3\varphi; \quad \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi.$$

В связи с этим можно записать

$$M_j = -m_j r^2 \omega^2 \left[ \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 3\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) + \frac{\lambda}{4} \sin 4\varphi \right].$$

Так как  $\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$  и  $\varphi = \omega t$ , имеем окончательно:

---

<sup>5</sup> Об этом свидетельствует закон изменения ускорения масс, совершающих возвратно-поступательное движение [7].

$$M_j \approx -m_j r^2 \omega^2 \left( \frac{\lambda}{4} \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t - \frac{3}{4} \lambda \sin 3\omega t - \frac{\lambda^2}{4} \sin 4\omega t \right) = \quad (62)$$

$$= M_{j1} - M_{j2} - M_{j3} - M_{j4} = \sum_{k=1}^{k=4} M_{jk}^a \sin k\omega t.$$

Полученные гармоники – целые числа, т. е. они совпадают с порядками гармоник от газовых сил двухтактного двигателя. В уравнении (62) начальная фаза гармоники первого порядка равна нулю ( $\beta_{j1}=0$ ), а фазы второго, третьего и четвертого порядков равны  $\pi$ , на что указывает знак минус, стоящий перед этими гармониками ( $\beta_{j2}=\beta_{j3}=\beta_{j4}=\pi$ ).

Работа момента  $M_j$  за один оборот коленчатого вала равна нулю, поэтому в разложении (62) средняя величина момента отсутствует. На рис. 27 показано разложение  $M_j = f(\omega t)$ .

Как следует из формул (59) и (60), после того как произведен гармонический анализ моментов  $M_\Gamma$  и  $M_j$ , суммируют гармоники  $M_{\Gamma k}$ , а также  $M_{jk}$  однозначных по порядку  $k$  и по режиму работы двигателя. Еще раз напомним, что гармоники крутящего момента от сил инерции – целые числа (математические гармоники), в то время как гармоники моментов от сил инерции могут быть и не целочисленные (моторные гармоники). Это суммирование можно проводить по формуле (60) или графически сложением векторов, изображающих эти моменты. Поскольку вектор  $\vec{M}_{jk}$  имеет фазовый угол либо 0, либо  $\pi$ , то он всегда направлен по горизонтальной оси. В то же время вектор момента от газовых сил  $\vec{M}_{\Gamma k}$  составляет с горизонтальной осью угол  $\beta_{\Gamma k}$  (см. формулу (58)). Таким образом, вертикальная и

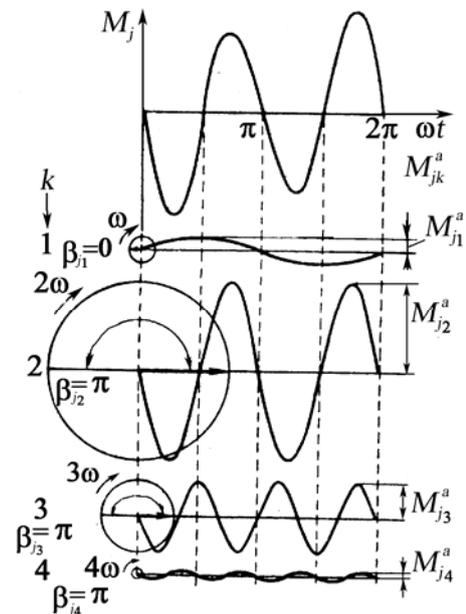
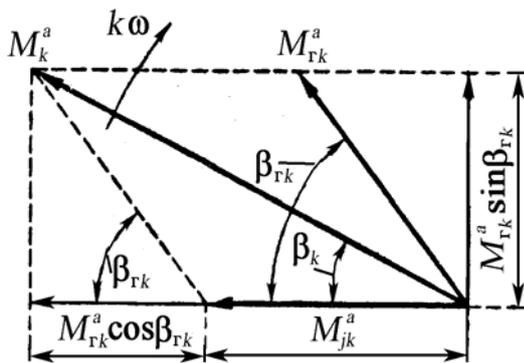


Рис. 27. Разложение на гармонические составляющие крутящего момента  $M_j$  от сил инерции одного цилиндра

горизонтальная составляющие суммарного вектора  $\vec{M}_k^a$  будут следующими (рис. 28):

$$\begin{aligned} M_k^a \sin \beta_k &= M_{\Gamma k}^a \sin \beta_{\Gamma k}; \\ M_k^a \cos \beta_k &= M_{jk}^a + M_{\Gamma k}^a \cos \beta_{\Gamma k}. \end{aligned} \quad (63)$$

Во втором выражении (63) значение  $M_{jk}^a$  записано без учета его действительного направления в зависимости от значения фазового угла (0 или  $\pi$ ). Из (63) легко получаем зависимость (60) и фазовый угол



$$\beta_k = \arctg \left( \frac{M_{\Gamma k}^a \sin \beta_{\Gamma k}}{M_{jk}^a + M_{\Gamma k}^a \cos \beta_{\Gamma k}} \right). \quad (64)$$

Для многоколенного вала гармонические моменты, действующие на колено вала, будут такими же, как и на первом колене, но сдвинутыми по фазе в соответствии с порядком работы цилиндров. Если на первом колене четырехтактного двигателя гармонический момент  $k$ -го порядка

$$M_{k1} = M_{k1}^a \sin(k\varphi + \beta_{k1}),$$

то на  $i$ -м колене гармонический момент этого же порядка

$$M_{ki} = M_{k1}^a \sin \left[ k(\varphi + \delta_i) + \beta_{k1} \right] = M_{k1}^a \sin \left[ k\varphi + (\beta_{k1} + k\delta_i) \right],$$

где  $\delta_i$  – угол поворота коленчатого вала за промежуток времени между началом рабочих циклов в первом и  $i$ -м цилиндрах;  $\varphi = \omega t$ .

Из условия равномерности хода и равных интервалов угол между рабочими ходами (угол между коленами вала) для четырехтактного двигателя должен быть  $\delta = 4\pi/i$ , где  $i$  – число цилиндров (для двухтактных –  $\delta = 2\pi/i$ ). Таким образом, для четырехтактного четырехцилиндрового двигателя с порядком работы 1-3-4-2 (углы между коленами  $0 - \pi - \pi - 2\pi$ ) углы поворота коленчатого вала за промежуток времени между началом рабочих циклов в первом и  $i$ -м цилиндрах  $\delta_i$ :  $0 - \pi - 2\pi - 3\pi - 4\pi$ <sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Первое колено при последующем цикле работы двигателя.

Сравнивая гармонические моменты  $k$ -го порядка на первом и  $i$ -м коленах, можно сделать заключение, что если начальная фаза на первом колене равна  $\beta_{k1}$ , то на  $i$ -м  $\beta_{ki} = \beta_{k1} + k\delta_i$ . При расчете крутильных колебаний важно знать сдвиг фаз между амплитудами моментов  $k$ -го порядка на  $i$ -м и первом коленах

$$\beta_{ki} - \beta_{k1} = k\delta_i, \quad (65)$$

так как если этот сдвиг по фазе равен или кратен  $2\pi$ , то на все колена вала одновременно действуют амплитудные гармонические составляющие момента. При совпадении их частоты с одной из собственных частот колебаний вала эти синхронно действующие гармонические составляющие возбуждают резонансные колебания с большой амплитудой.

Рассмотрим влияние сдвига фаз на колебания многомассовой системы на примере гармонических составляющих половинного и второго порядков от крутящего момента, действующего на первое колесо четырехтактного четырехцилиндрового двигателя с порядком работы 1-3-4-2 (как и в предыдущем примере, коленчатый вал плоский с углами между кривошипами по отношению к первому: 2 и 3 –  $\pi$ ; 4 –  $2\pi$ ).

При данном порядке работы цилиндров начало рабочего цикла в третьем цилиндре отстает от начала рабочего цикла в первом цилиндре на  $\pi$  по углу поворота коленчатого вала, что согласно формуле (65) соответствует  $\pi/2$  по половинной и  $2\pi$  – по второй гармоникам:  $\beta_{k3} - \beta_{k1} = k\pi$ ; на четвертом колесе –  $\beta_{k4} - \beta_{k1} = k2\pi$ ; на втором колесе –  $\beta_{k2} - \beta_{k1} = k3\pi$ . Расчеты сведены в табл. 2.

Таблица 2

Сдвиг фаз в четырехцилиндровом четырехтактном рядном двигателе

Порядок гармоники $k$	Фазовые углы по кривошипам			
	$\beta_{k3}$	$\beta_{k4}$	$\beta_{k2}$	$\beta_{k1}^7$
$\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}; \dots$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
1; 3; 5; ...	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}; 5\frac{1}{2}; \dots$	$3\pi/2$	$3\pi$	$9\pi/2$	$6\pi$
2; 4; 6; ...	$2\pi$	$4\pi$	$6\pi$	$8\pi$

<sup>7</sup> Первое колесо рассматривается при следующем цикле работы двигателя.

Из табл. 2 следует, что при половинной гармонике на различные колена вала одновременно действуют разные по направлению и величине (в соответствии с зависимостями (59) и (60)) крутящие моменты, а при второй гармонике на все колена одновременно действуют амплитудные значения крутящих моментов. Следовательно, в рассматриваемом примере опасна вторая, четвертая, шестая гармоники, которые могут возбудить крутильные колебания коленчатого вала с большой амплитудой.

Обычно сдвиг по фазе между амплитудами момента  $k$ -го порядка на  $i$ -м колене по отношению к амплитудному значению момента того же порядка на первом колене представляют графически так называемыми *фазовыми (векторными) диаграммами* гармоник. Рассмотрим порядок построения фазовых диаграмм на примере шестицилиндрового четырехтактного двигателя с порядком работы 1-5-3-6-2-4 (рис. 29, а). Сначала рассчитывают сдвиг фаз. Из условия равномерности хода и равных интервалов между рабочими ходами угол между коленами должен быть

$$\delta = 720^\circ / 6 = 120^\circ = 2\pi/3.$$

В соответствии с порядком работы двигателя определяем  $\delta_i$ :  $\delta_5 = 2\pi/3$ ;  $\delta_3 = 4\pi/3$ ;  $\delta_6 = 6\pi/3$ ;  $\delta_2 = 8\pi/3$  и  $\delta_4 = 10\pi/3$ , а по формуле (65) вычисляем сдвиг по фазе между амплитудами моментов  $k$ -го порядка на отдельных коленах вала по отношению к первому колену:

- на пятом колене  $\beta_{k5} - \beta_{k1} = k\delta_5 = k \frac{2\pi}{3}$ ;
- на третьем колене  $\beta_{k3} - \beta_{k1} = k\delta_3 = k \frac{4\pi}{3}$ ;
- на шестом колене  $\beta_{k6} - \beta_{k1} = k\delta_6 = k \frac{6\pi}{3}$ ;
- на втором колене  $\beta_{k2} - \beta_{k1} = k\delta_2 = k \frac{8\pi}{3}$ ;
- на четвертом колене  $\beta_{k4} - \beta_{k1} = k\delta_4 = k \frac{10\pi}{3}$ .

Результаты расчета сдвига фаз на разных коленах для гармоник  $k = 0,5; 1; 1,5; \dots 12$  сведены в табл. 3 и рис. 29, б.

Перейдем к построению фазовых диаграмм (см. рис. 29).

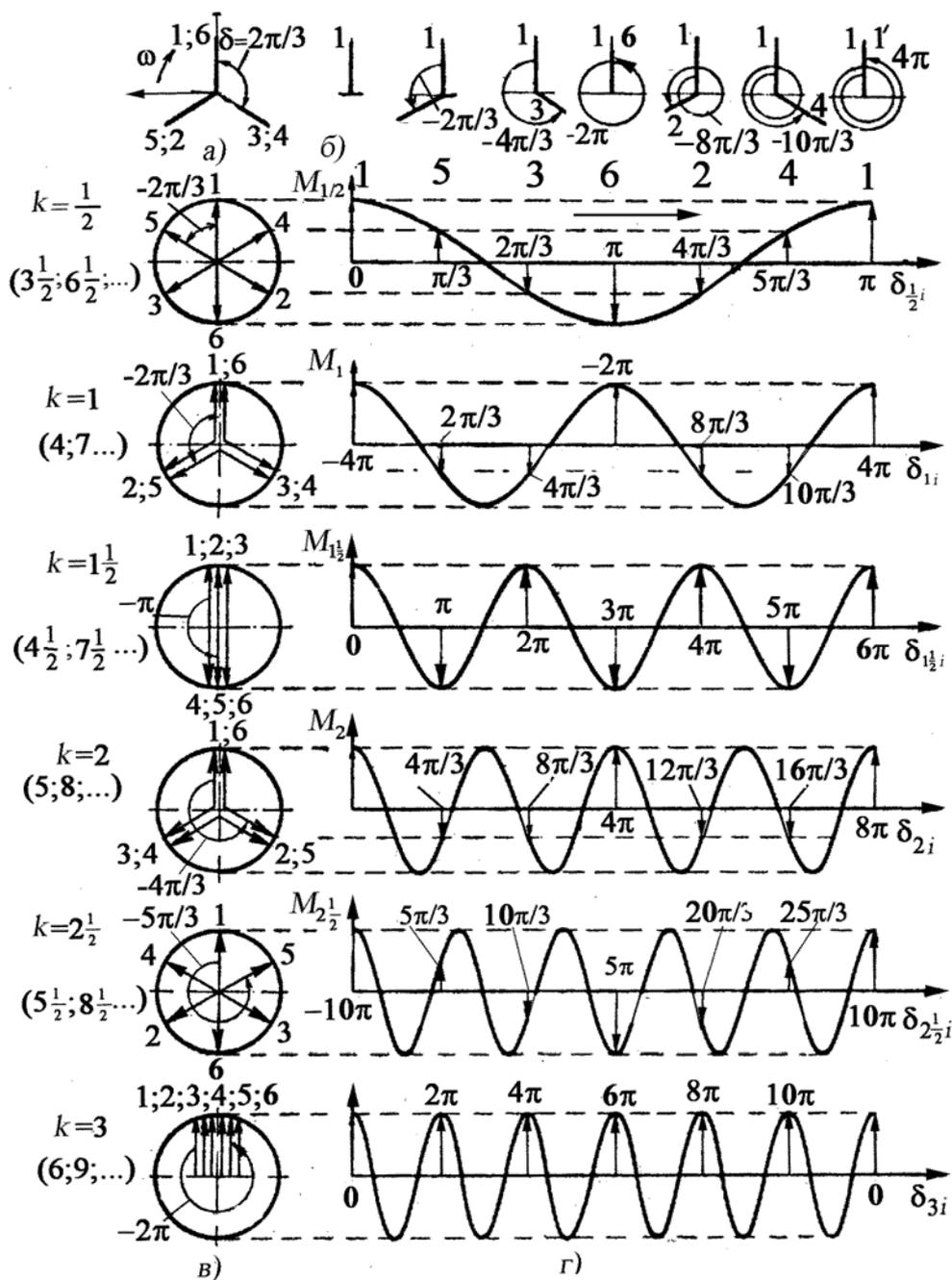


Рис. 29. Действие гармоник различных порядков на колена шестицилиндрового однорядного двигателя: а – схема коленчатого вала; б – фазовые углы между началом рабочего цикла в первом и других цилиндрах; в – фазовые диаграммы гармоник; г – развертки фазовых диаграмм при различных гармониках

Фазовые диаграммы представляют собой окружности с отложенными от вертикальной оси в них углами, соответствующими сдвигам фаз, причем сдвиг фаз на первом колене принимают равным нулю, а векторы амплитудных значений гармоник моментов первого

колена откладывают вверх. Рабочий цикл двигателя на фазовых диаграммах изображается в виде окружности, поэтому для четырехтактного двигателя на одной окружности ( $2\pi$ ) укладывается два оборота коленчатого вала.

В четырехтактном двигателе наименьшей гармоникой является половинная гармоника (за один оборот коленчатого вала при гармонике  $k = 0,5$  совершается только половина цикла). Для шестицилиндрового четырехтактного двигателя сдвиг фаз половинной гармоники на пятом колене по отношению к первому колесу согласно табл. 3 равен  $\pi/3$ . Этот угол откладывают на окружности фазовой диаграммы начиная от вектора амплитудного значения момента первого колена против хода часовой стрелки, так как угол отрицательный. Сдвиг фаз половинной гармоники на третьем колесе равен  $2\pi/3$ . Его тоже откладывают от указанного выше вектора первого колена и т. д.

Получается фазовая диаграмма, изображенная на рис. 30, в при различных значениях гармоник  $k = 0,5 \dots 9$ . В дальнейшем при построении фазовых диаграмм мы не всегда будем строить окружности, а откладывать вектор гармоники под углом к вертикальной оси.

Таблица 3

Сдвиг фаз в шестицилиндровом четырехтактном рядном двигателе

Порядок гармоники $k$	Фазовые углы по кривошипам (по отношению к первому кривошипу)				
	$\beta_{k5}$	$\beta_{k3}$	$\beta_{k6}$	$\beta_{k2}$	$\beta_{k4}$
$\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}; 6\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}; \dots$ 1; 4; 7; 10;...	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}; 7\frac{1}{2}; 10\frac{1}{2}; \dots$ 2; 5; 8; 11;...	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$
$2\frac{1}{2}; 5\frac{1}{2}; 8\frac{1}{2}; 11\frac{1}{2}; \dots$ 3; 6; 9; 12;...	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$5\pi$
	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{12\pi}{3} \quad \frac{15\pi}{3} \quad 6\pi$	$\frac{16\pi}{3} \quad \frac{20\pi}{3} \quad 8$	$\frac{20\pi}{3} \quad \frac{25\pi}{3}$
	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3} \quad 4\pi$		$\pi$	$10\pi$
	$2\pi$				

Это вызвано тем обстоятельством, что при значении  $k = 3, 6, 9, \dots$  и т. д. векторы гармоник совпадают по направлению и поместить их на радиусе окружности не представляется возможным.

Сдвиг фаз первой гармоники на пятом колесе согласно табл. 3 равен  $2\pi/3$ , на третьем колесе –  $4\pi/3$  и т. д. Эти углы отложены на второй диаграмме (рис. 29, в). Рядом с фазовыми диаграммами приведе-

ны их разверстки (рис. 29, з), на которых в условном масштабе отложены ординаты моментов, действующих в данный момент на каждое колено вала.

Для V-образного двигателя, у которого на одно колено работают два цилиндра, суммируют гармоники одного и того же порядка от обоих цилиндров с учетом сдвига фаз в работе цилиндров.

Рассмотрим суммирование гармоник крутящих моментов на четвертом колене вала V-образного восьмицилиндрового двигателя с порядком работы цилиндров 1-5-4-2-6-3-7-8 [1] и углом развала цилиндров  $\gamma = \pi/2$ . Из условия равномерности хода и равных интервалов между рабочими ходами угол между коленами должен быть (коленчатый вал с крестообразными кривошипами)  $\delta = \frac{720^\circ}{8} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ .

На рис. 30 приведены фазовые диаграммы гармоник восьмицилиндрового V-образного двигателя (порядок работы цилиндров 1-5-4-2-6-3-7-8). Проверить правильность построения фазовых диаграмм рекомендуется самостоятельно по аналогии с однорядным четырехцилиндровым двигателем (см. табл. 2).

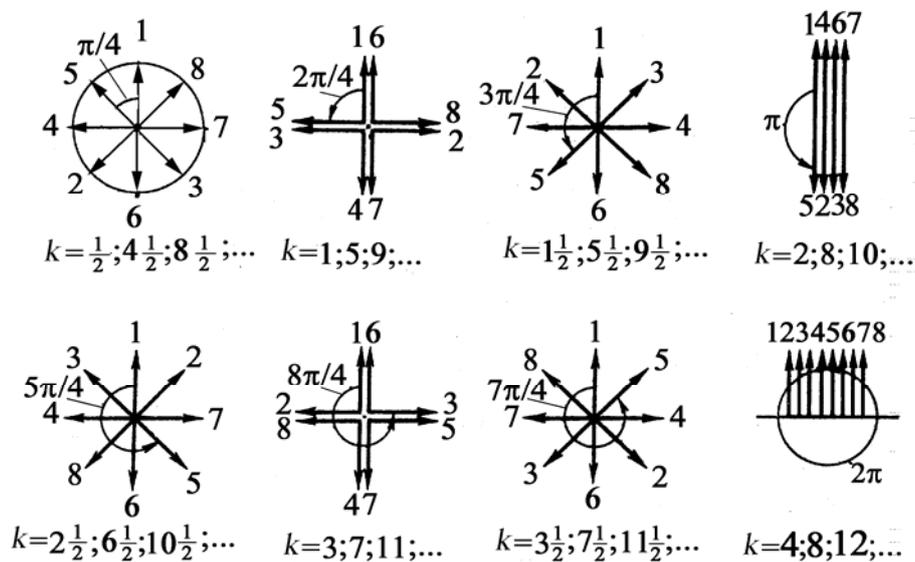


Рис. 30. Фазовые диаграммы гармоник восьмицилиндрового V-образного двигателя (порядок работы цилиндров 1-5-4-2-6-3-7-8)

На четвертое колено воздействуют цилиндры 4 и 8 (если считать их сначала по левой стороне, а затем – по правой) [1], работающие со

сдвигом фаз (относительно первого цилиндра): четвертый –  $\pi$  ( $180^\circ$ ); восьмой –  $7\pi/2$  ( $630^\circ$ ) ПКВ. В любой момент времени одинаковые по величине векторы гармоник первого порядка располагаются, как показано на рис. 31, а, под углами: четвертый –  $\pi$  ( $180^\circ$ ); восьмой –  $7\pi/2$  ( $630^\circ$ ) ПКВ. Все остальные векторы  $k$ -го порядка для этого колена вращаются с угловой скоростью в  $k$  раз большей, а фазовый угол между ними (рис. 31, б-г) равен  $k\pi$  и  $k7\pi/2$  соответственно.

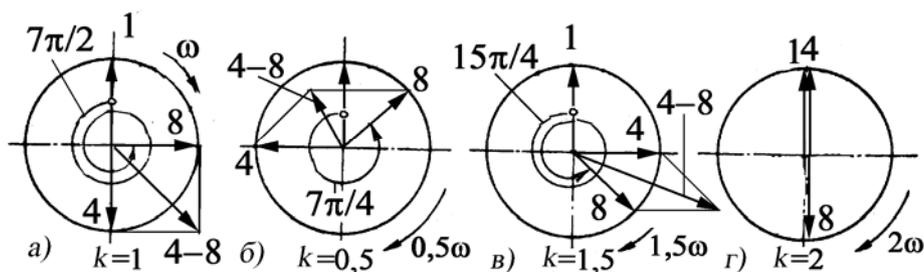


Рис. 31. Суммирование гармоник моментов от двух цилиндров в V-образном восьмицилиндровом двигателе с углом развала  $\pi/2$

Если у V-образного двигателя для каждого колена цилиндры работают с одинаковым сдвигом фаз, удобнее сначала просуммировать крутящий момент от двух цилиндров, работающих на одно колено вала, а затем провести гармонический анализ кривой суммарного крутящего момента.

На рис. 31 проведено суммирование гармоник крутящих моментов порядков  $k = 1; 0,5; 1,5; 2$  от четвертого и восьмого цилиндров (четвертый кривошип коленчатого вала) в V-образном двигателе с углом развала  $\pi/2$ .

На рис. 32 приведены фазовые диаграммы гармоник рядных четырехтактных двигателей: двухцилиндровых с углами между кривошипами  $\delta = \pi$  (рис. 32, а);  $\delta=2\pi$  (рис. 32, б); трехцилиндровых с порядком работы цилиндров 1-3-2 (рис. 32, в) и четырехцилиндровых с порядком работы 1-3-4-2 (рис. 32, г).

Из рассмотренных фазовых диаграмм следует, что при равномерном чередовании вспышек для двигателей с числом цилиндров  $i_{ц}$  самыми опасными гармониками являются те, порядок которых  $k$  равен или кратен числу вспышек в цилиндрах двигателя за один оборот коленчатого вала, т. е. для четырехтактных двигателей при

$k/(i_{ц}/2) = 1, 2, 3, 4, \dots$ , а для двухтактных –  $k/i_{ц} = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Так, в шестицилиндровом двигателе это 3, 6 и 9-я гармоники (см. рис. 29, в); в восьмицилиндровом  $V$ -образном с углом развала цилиндров  $\gamma = \pi/2$  – 4-я, 8-я и 12-я (см. рис. 30), а для четырехцилиндровых – 2; 4; 6-я (см. рис. 32) и т. д. Все векторы амплитудных значений моментов при этих гармониках направлены в одну сторону, следовательно, они действуют синхронно на все колена вала. Такие гармоники обычно называются *главными*.

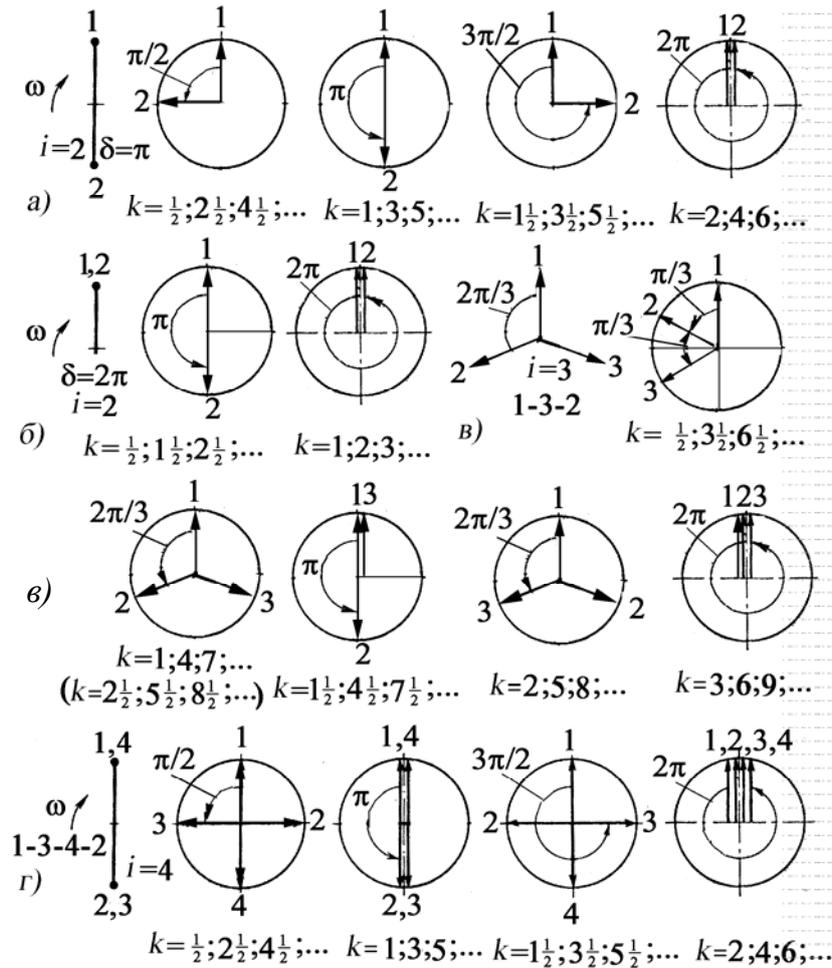


Рис. 32. Фазовые диаграммы гармоник однорядных четырехтактных двигателей: а – двухцилиндровых с кривошипами под углом  $\pi$ ; б – двухцилиндровых с кривошипами под углом  $2\pi$ ; в – трехцилиндровых; г – четырехцилиндровых

Менее опасными, но более сильными, чем другие, являются гармоники, порядок которых кратен числу в 2 раза меньшему, чем число вспышек в цилиндрах двигателя за один оборот коленчатого

вала (в шестицилиндровом двигателе это 1,5; 4,5 и 7,5-я гармоники). Все векторы амплитудных значений моментов при этих гармониках направлены по одной линии. Эти гармоники обычно называются *сильными*. Остальные гармоники менее опасны и называются *слабыми*.

В ряде случаев амплитуда крутильных колебаний при возбуждении сильной гармоникой может быть больше, чем при возбуждении главной гармоникой, поэтому иногда главные и сильные гармоники не разделяют, называя их главными.

При построении фазовых диаграмм и при расчетах принимают, что диаграммы моментов на различных коленах тождественны.

В действительности небольшие различия в условиях протекания рабочего процесса в отдельных цилиндрах приводят к тому, что индикаторные диаграммы разных цилиндров и, следовательно, диаграммы тангенциальных сил для различных колен оказываются неодинаковыми. Особенно это влияние сказывается на гармониках низших порядков.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Для чего проводят гармонический анализ кривой крутящего момента?
2. Чем отличаются моторные гармоники от математических?
3. Чему равен период крутящего момента от сил инерции, его среднее значение?
4. Чему равен период крутящего момента от газовых сил?
5. Как суммируются гармоники моментов от двух цилиндров для V-образного двигателя?
6. Какие гармоники называются главными, сильными, слабыми?

### **3.5. Энергия, рассеиваемая при крутильных колебаниях**

Все колебательные процессы в действительных системах сопровождаются рассеянием энергии колебаний, которое обусловлено различными видами трения. Рассеяние энергии приводит к тому, что даже при работе двигателя на резонансе амплитуды колебаний ограничены. Демпфирующие силы и моменты частично поглощают энергию колебаний, которая преобразуется в тепловую энергию и отводится в

окружающую среду. Основными силами сопротивления (демпфирования) при крутильных колебаниях следует считать переменные силы жидкостного трения в подшипниках и цилиндропоршневой группе, примерно пропорциональные скорости относительного перемещения сопрягаемых деталей, переменные силы внутреннего трения (упругий гистерезис) в материале коленчатого вала, соединительных элементов и валопроводов, зависящие от амплитуды угловых колебаний вала. При наличии гасителя колебаний (жидкостного или демпфера внутреннего трения) добавляется еще сила его сопротивления. В автомобильных и тракторных двигателях вследствие малого объема коленчатого вала потери энергии на внутреннее трение в его материале сравнительно невелики.

Физические основы рассеяния энергии колебаний в каждом элементе двигателя изучены еще недостаточно, поэтому их оценивают интегрально, вводя полуэмпирические коэффициенты. Все виды трения обычно сводят к двум: внешнее и внутреннее. Если внешнее трение зависит от скорости колебаний и приводится к каждой массе, то внутреннее, пропорциональное угловой деформации участков и не зависящее от скорости деформации, приводится к участкам между массами.

Для удобства решения уравнений угловых колебаний обычно допускают, что в поршневых двигателях все сопротивления, возникающие при колебаниях, пропорциональны скорости как при вязком трении. Для системы с одной степенью свободы (одномассовая система) момент сопротивления  $M_\xi$ , действующий на колебательную массу, определяют по формуле

$$M_\xi = -\xi \frac{d\varphi}{dt} = -\xi \dot{\varphi}, \quad (66)$$

где  $\xi$  – коэффициент демпфирования, учитывающий все виды сопротивления;  $\varphi$  – угловое перемещение;  $t$  – текущее время.

Знак минус перед величиной  $\xi \dot{\varphi}$  указывает на то, что момент сопротивления направлен против скорости движения. Кроме того, из формулы (66) следует, что коэффициент демпфирования  $\xi$  численно равен моменту сопротивления  $M_\xi$  при скорости углового перемещения  $\dot{\varphi} = 1$ , его единица измерения [Н·м·с].

Обычно в справочниках [18] приводятся значения удельных коэффициентов демпфирования  $\xi'$ , т.е. коэффициентов демпфирования,

отнесенных к единице линейной скорости  $u_{ш.ш}$  колебаний оси шатунной шейки и к единице площади поршня  $F_{п}$ , что дает возможность использовать их при расчете на крутильные колебания двигателей различной размерности.

Существует большое количество методик определения коэффициента демпфирования  $\xi$ , но все они основаны на обработке экспериментальных данных. Результатом этого фактически являются коэффициенты согласования, справедливые только для тех типов двигателей, для которых они определены. Ориентировочные значения удельных коэффициентов демпфирования  $\xi'$  в одном цилиндре двигателя можно принять следующими для указанных ниже двигателей:

Тип двигателя	$\xi' \cdot 10^{-6}, \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^3$
Автомобильный бензиновый	0,15...0,20
Автомобильный дизель	0,2...0,4
Тракторный дизель	0,4...0,5

Для кривошипно-шатунных механизмов поршневых двигателей по Видлеру [12]

$$\xi = 0,79 \xi' D^2 r^2 \cdot 10^{-8}, \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad (67)$$

где  $D$  – диаметр цилиндра, м;  $r$  – радиус кривошипа.

По Хольцеру [12]

$$\xi = 0,41 I_0 \omega, \quad (68)$$

где  $I_0$  – эквивалентный момент инерции масс кривошипно-шатунного механизма,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $\omega$  – круговая частота колебаний массы.

Свободное колебательное движение одномассовой системы с сопротивлением выражается уравнением моментов, которое отличается от уравнения моментов системы без сопротивления (см. формулу (29)) на величину момента сопротивления  $M_{\xi}$ ,

$$-M_{и} - M_{\xi} + M_{y} = 0$$

или дифференциальным уравнением

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \xi \frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = 0,$$

которое после деления на  $I$  может быть представлено в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{\xi}{I}\dot{\varphi} + \omega_c^2\varphi = 0, \quad (69)$$

где  $\omega_c = \sqrt{c/I}$  – круговая частота собственных колебаний.

Будем искать решение уравнения (69) в форме  $\varphi = e^{yt}$ .

Тогда

$$\varphi = e^{yt}; \quad \dot{\varphi} = ye^{yt}; \quad \ddot{\varphi} = y^2e^{yt}. \quad (70)$$

Подставив значения (70) в уравнение (69), найдем:

$$(y^2 + \frac{\xi}{I}y + \omega_c^2)e^{yt} = 0. \quad (71)$$

В решении (71) только выражение в скобках равно нулю. Решив полученное квадратное уравнение, находим:

$$y_{1,2} = -\frac{\xi}{2I} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi}{2I}\right)^2 - \omega_c^2}. \quad (72)$$

Каждое из решений  $\varphi = e^{y_1t}$  и  $\varphi = e^{y_2t}$  удовлетворяет уравнению (71), и, следовательно, общее решение уравнения (69) можно записать в виде

$$\varphi = C_1e^{y_1t} + C_2e^{y_2t}, \quad (73)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Рассмотрим три случая крутильных колебаний массы.

Случай 1. Система с большим затуханием. Подкоренное выражение в решении (72) положительно, т. е.  $\left(\frac{\xi}{2I}\right)^2 > \omega_c^2$ .

В этом случае корни уравнения (72)  $y_1$  и  $y_2$  оба действительны и отрицательны (подкоренное выражение меньше  $\xi/2I$ ). Таким образом, выражение (73) представляет собой решение, изображающееся суммой ординат двух показательных кривых, приближающихся к оси абсцисс, как указано на рис. 33, а.

При движении, определяемом начальными условиями

$$\varphi = \varphi_0; \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \quad \text{при } t = 0,$$

величины постоянных равны

$$C_1 = \frac{-y_2\varphi_0 + \dot{\varphi}_0}{y_1 - y_2}; \quad C_2 = \frac{-y_1\varphi_0 + \dot{\varphi}_0}{y_2 - y_1}.$$

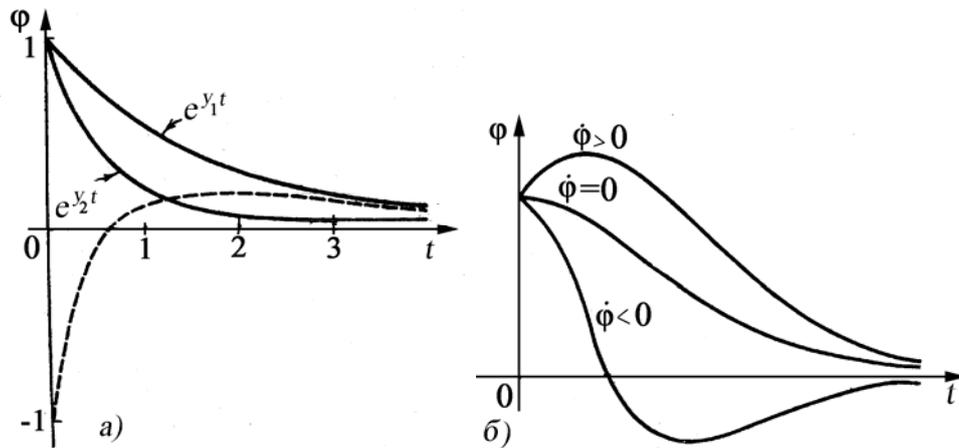


Рис. 33. Движение системы с одной степенью свободы при: а – затухании, большем критического; б – при различных начальных условиях

Движение в этом случае по характеру может определяться одной из кривых, представленных на рис. 33, б. Оно зависит от относительных величин  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$ , кривая может пересекать ось  $t$  самое большое один раз [19]. При любой скорости не наблюдается колебательное движение, а  $\varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  асимптотически приближаются к нулю; при этом говорят, что движение апериодическое.

Случай 2. Система с критическим затуханием. Подкоренное выражение в решении (72) равно нулю, т. е.  $\left(\frac{\xi}{2I}\right)^2 = \omega_c^2$ .

В этом случае  $y_1 = y_2 = -\frac{\xi}{2I}$  и экспоненциальная кривая будет с увеличением времени  $t$  приближаться к оси абсцисс, но ординаты ее при том же  $t$  будут больше, чем в первом случае (см. формулу (73)), т. е. приближение к состоянию покоя займет больше времени. Коэффициент демпфирования  $\xi$  в этом случае называют критическим: это предельное значение, при котором движение еще не становится колебательным,

$$\xi_{кр} = 2I\omega_c, \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}. \quad (74)$$

Случай 3. Система с малым затуханием. Подкоренное выражение в решении (72) отрицательно, т. е.  $\left(\frac{\xi}{2I}\right)^2 < \omega_c^2$  или  $\xi < \xi_{кр}$ . Решение (72) можно переписать в виде

$$y_{1,2} = -\frac{\xi}{2I} \pm \sqrt{\omega_c^2 - \left(\frac{\xi}{2I}\right)^2} \quad (75)$$

и, следовательно,

$$\varphi = C_1 e^{-\frac{\xi}{2I}t} e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-\frac{\xi}{2I}t} e^{-i\omega_d t}, \quad (76)$$

где

$$\omega_d = \sqrt{\omega_c^2 - \left(\frac{\xi}{2I}\right)^2}. \quad (77)$$

Из алгебры известно, что тригонометрические функции связаны с показательной функцией формулой Эйлера<sup>8</sup>

$$e^{i\omega_d t} = \cos \omega_d t + i \sin \omega_d t$$

и

$$e^{-i\omega_d t} = \cos \omega_d t - i \sin \omega_d t,$$

то из уравнения (76) получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= C_1 e^{-\frac{\xi}{2I}t} (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + C_2 e^{-\frac{\xi}{2I}t} (\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t) = \\ &= e^{-\frac{\xi}{2I}t} [(C_1 + C_2) \cos \omega_d t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_d t]. \end{aligned} \quad (78)$$

Так как  $C_1$  и  $C_2$  в (78) были произвольными постоянными, то произвольны также  $C_1 + C_2$  и  $i(C_1 - C_2)$ , которые для краткости обозначим  $C'_1$  и  $C'_2$ . Таким образом, имеем [20]

$$\varphi = e^{-\frac{\xi}{2I}t} (C'_1 \cos \omega_d t + C'_2 \sin \omega_d t). \quad (79)$$

---

<sup>8</sup> Комплексное число  $a+ib = e^{i\omega t}$  может быть представлено как вектор в прямоугольной системе координат, к которой ось абсцисс – действительная, ординат – мнимая.

Это есть решение уравнения для случая, когда затухание меньше критического, т. е. когда  $\xi < \xi_{кр}$ . Оно представляет собой произведение двух сомножителей, первый из которых изображается нисходящей показательной кривой (см. рис. 33, а), а второй – синусоидой. В окончательном результате получим затухающую синусоиду, которая лежит между показательной кривой и ее зеркальным изображением (рис. 34). Чем меньше коэффициент затухания  $\xi$ , тем более пологой будет показательная кривая и тем большее число полных колебаний

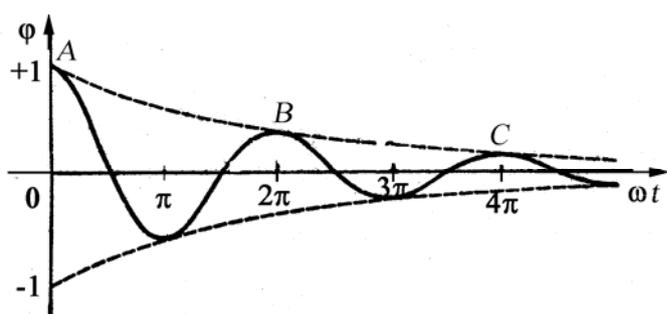


Рис. 34. Свободные колебания одномассовой системы при затухании меньшем критического

произойдет до их прекращения.

Период затухающих колебаний соответствует частоте  $\omega_d$ , т. е. несколько больше, чем при отсутствии демпфирования в колебательной системе  $\omega_d < \omega_c$ , так

как  $\omega_d = \sqrt{\omega_c^2 - (\xi/2I)^2}$ .

Преобразуя выраже-

ние (77) и используя зависимость (74), напомним:

$$\omega_d = \omega_c \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{2I\omega_c}\right)^2} = \omega_c \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_{кр}}\right)^2} = \omega_c \sqrt{1 - D^2}, \quad (80)$$

где  $D = \xi/\xi_{кр}$ .

Величину  $D$  называют безразмерным коэффициентом демпфирования, или просто демпфированием. При сильном демпфировании ( $D \geq 1$ ) колебания не возникают (случаи 1 и 2) и отклонение массы от среднего положения постепенно уменьшается до нуля. Когда  $D$  правильная дробь, возникают затухающие колебания.

В большинстве встречающихся в технике случаев механических колебаний  $D$  – малая дробь порядка нескольких сотых. Только при введении искусственных сопротивлений (специальные демпферы) величина  $D$  может измеряться десятными долями. Даже при  $D = 0,1$  частота демпфированных свободных колебаний  $\omega_d = \omega_c \sqrt{1 - 0,1^2} = 0,995$ , т. е. только на 0,5 % отличается от собственной частоты колебаний

без трения. Поэтому в практических задачах собственную частоту колебаний определяют без учета демпфирования.

Уменьшение амплитуды последовательных колебаний (положения  $A$ ,  $B$  и  $C$  на рис. 34) зависит от множителя  $e^{\frac{-\xi}{2I}t}$ , т. е. от величины, которой демпфирование  $D$  пропорционально. Сравним амплитуды  $A$ ,  $B$  и  $C$  (см. рис. 34), разделенные временем  $T = 2\pi/\omega_d$  (период колебаний). Отношение последующей амплитуды  $\varphi_C$  (например в т.  $C$ ) к предыдущей  $\varphi_B$  (в т.  $B$ ) характеризует быстроту затухания

$$\frac{\varphi_C}{\varphi_B} = \frac{e^{\frac{-\xi}{2I}\left(t + \frac{2\pi}{\omega_d}\right)}}{e^{\frac{-\xi}{2I}t}} = e^{\frac{-\pi\xi}{I\omega_d}}. \quad (81)$$

Это отношение одно и то же для любой последующей ( $n+1$ ) и предыдущей ( $n$ ) амплитуды. Из уравнения (81) следует

$$\ln \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = -\frac{\pi\xi}{I\omega_d} = \delta.$$

Величину  $\delta = (\pi\xi)/(I\omega_d)$  называют логарифмическим декрементом. Если затухание слабо, то

$$\delta = \frac{\pi\xi}{I\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{2I\omega_d} \approx \frac{2\pi\xi}{\xi_{кр}},$$

так как  $\omega_d \approx \omega_c$ .

Далее  $\varphi_{n+1}/\varphi_n = e^{-\delta} \approx 1 - \delta$  (если ограничиться после разложения в ряд двумя первыми членами ряда)

$$\frac{\varphi_n - \varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \delta = 2\pi \frac{\xi}{\xi_{кр}}. \quad (82)$$

Измеряя в нескольких местах записи затухающих колебаний амплитуды  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$ , по формуле (82) можно найти логарифмический декремент и, следовательно, демпфирование  $D = \xi/\xi_{кр} = \delta/2\pi$ . Этот способ определения  $D$  достаточно груб, но все же во многих случаях позволяет определить начальные значения коэффициентов демпфирования.

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется коэффициентом демпфирования при крутильных колебаниях поршневых двигателей?
2. Для чего вводятся относительные коэффициенты демпфирования?
3. Какие три случая крутильных колебаний одномассовой системы с демпфированием возможны при свободных колебаниях?
4. Что называется критическим коэффициентом демпфирования?
5. Какое движение одномассовой системы называется аperiodическим?

### 3.6. Вынужденные колебания одномассовой системы с сопротивлением

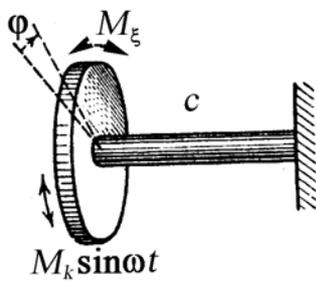


Рис. 35. Одномассовая крутильная система с демпфированием

Колебательное движение одномассовой системы (рис. 35) под действием гармонического момента  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$  и момента сопротивления  $M_\xi = -\xi \frac{d\varphi}{dt}$  описывается уравнением (см. уравнения (29) и (66))

$$-M_{\text{и}} - M_\xi + M_y = M_k,$$

т. е. 
$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \xi \frac{d\varphi}{dt} + c\varphi = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$$

или с учетом (74)  $\xi_{\text{кр}} = 2I\omega_c$  и, что  $D = \xi/\xi_{\text{кр}}$ , получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\xi\omega_c}{2I\omega_c} \dot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = \frac{M_k^a}{I} \sin(k\omega t + \beta_k)$$

или 
$$\ddot{\varphi} + 2\omega_c D \dot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = \frac{M_k^a}{I} \sin(k\omega t + \beta_k). \quad (83)$$

Общее решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения уравнения (69) и частного решения  $\varphi_{\text{ч}}$  уравнения (83)

$$\varphi = e^{-\frac{\xi}{2I}t} (C_1' \cos \omega_d t + C_2' \sin \omega_d t) + \varphi_{\text{ч}}, \quad (84)$$

где первый член характеризует свободные колебания, а второй  $\varphi_{\text{ч}}$  — установившиеся вынужденные.

Частное решение  $\varphi_{\text{ч}}$  неоднородного уравнения (83) будем искать в форме, обычной для уравнений, правая часть которых содержит тригонометрические функции  $\sin \alpha$  или  $\cos \alpha$ , а именно в форме

$$\varphi_{\text{ч}} = \Phi \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k), \quad (85)$$

где  $\beta_k$  – фазовый угол гармонике возмущающего момента;  $\varepsilon_k$  – сдвиг фаз между амплитудой вынужденных угловых колебаний тела и амплитудой возбуждающего периодического момента;  $\Phi$  – амплитуда крутильных колебаний.

В общем решении (84) первый член выражает собственные колебания системы с сопротивлением, которые через короткий промежуток времени затухают (рис. 36, а).

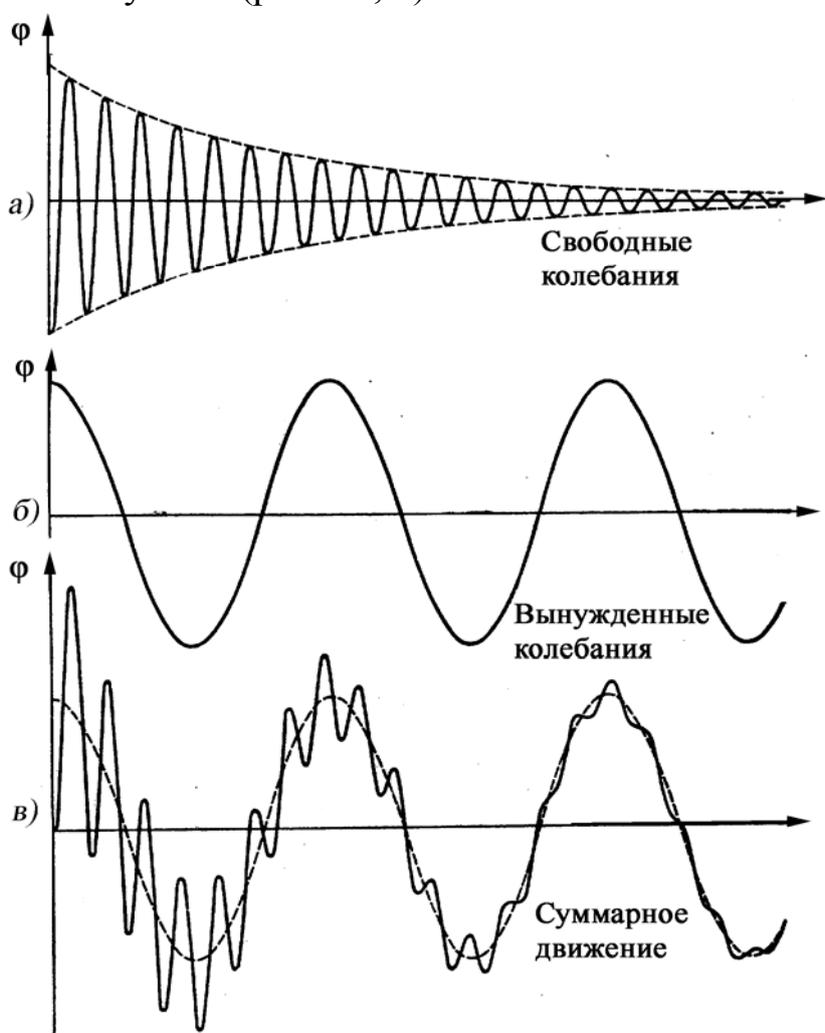


Рис. 36. Процесс установления вынужденных колебаний одномассовой системы: а – свободные затухающие колебания; б – установившиеся вынужденные колебания; в – суммарные колебания

Практический интерес представляет поэтому лишь установившееся движение, определяемое вторым членом, т. е. частное решение (85).

Подставляя выражение (85) в уравнение (83), получим:

$$\begin{aligned} & -\Phi k^2 \omega^2 \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) + \\ & + 2\omega_c D\Phi k\omega \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) + \\ & + \omega_c^2 \Phi \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) = \\ & = \frac{M_k^a}{I} \sin(k\omega t + \beta_k). \end{aligned}$$

Или после преобразования

$$\begin{aligned} & -\Phi k^2 \omega^2 \sin(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k + \\ & + \Phi k^2 \omega^2 \cos(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k + \\ & + 2\omega_c D\Phi k\omega \cos(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k + \\ & + 2\omega_c D\Phi k\omega \sin(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k + \\ & + \omega_c^2 \Phi \sin(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k - \\ & - \omega_c^2 \Phi \cos(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k = \\ & = \frac{M_k^a}{I} \sin(k\omega t + \beta_k). \end{aligned}$$

Полученное уравнение должно удовлетворяться при любом  $t$ . Это возможно только в случае, когда сумма коэффициентов при  $\sin(k\omega t + \beta_k)$  и  $\cos(k\omega t + \beta_k)$  раздельно равнялась бы аналогичным коэффициентам в правой части

$$\begin{cases} -\Phi I k^2 \omega^2 \cos \varepsilon_k + 2ID\omega_c \Phi k\omega \sin \varepsilon_k + \Phi I \omega_c^2 \cos \varepsilon_k = M_k^a; \\ \Phi I k^2 \omega^2 \cos \varepsilon_k + 2\Phi ID\omega_c k\omega \cos \varepsilon_k - \Phi I \omega_c^2 \sin \varepsilon_k = 0. \end{cases} \quad (86)$$

Из второго уравнения системы (86) (поскольку  $\Phi I \neq 0$ ) находим

$$\operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{2D\omega_c k\omega}{\omega_c^2 - (k\omega)^2} = \frac{2D \left( \frac{k\omega}{\omega_c} \right)}{1 - \left( \frac{k\omega}{\omega_c} \right)^2}. \quad (87)$$

Используя решение (87), а также соотношения  $\sin \varepsilon_k = \operatorname{tg} \varepsilon_k / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_k}$  и  $\cos \varepsilon_k = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_k}$ , из первого уравнения (86) найдем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{M_k^a}{I} \cdot \frac{1}{(\omega_c^2 - k^2 \omega^2) \cos \varepsilon_k + 2D \omega_c k \omega \sin \varepsilon_k} = \\ &= \frac{M_k^a}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_c^2 - k^2 \omega^2)^2 + 4D^2 \omega_c^2 k^2 \omega^2}}. \end{aligned} \quad (88)$$

Подставив значения  $A$  из (88) в (85), найдем, что вынужденные колебания совершаются по закону

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ч}} &= \frac{M_k^a}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_c^2 - k^2 \omega^2)^2 + 4D^2 \omega_c^2 k^2 \omega^2}} \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) = \\ &= \frac{M_k^a}{I} \cdot \frac{1/\omega_c^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2}} \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Поскольку  $\omega_c^2 = c/I$ , то окончательно получим

$$\varphi_{\text{ч}} = \frac{M_k^a}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2}} \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k)$$

или  $\varphi_{\text{ч}} = \beta_{\text{д}} \varphi_0 \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) = \Phi_k \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k), \quad (89)$

где  $\beta_{\text{д}}$  – коэффициент динамического усиления (коэффициент динамичности)

$$\beta_{\text{д}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{k\omega}{\omega_c}\right)^2}}; \quad (90)$$

$\Phi_k$  – амплитуда вынужденных колебаний;  $\varphi_0 = M_k^a / c$  – статическое отклонение системы под действием момента  $M_k^a$ .

Из (89) следует, что амплитуда вынужденных крутильных колебаний зависит от статического отклонения системы  $\varphi_0$  под действием момента  $M_k^a$  и коэффициента динамического усиления  $\beta_d$

$$\Phi_k = \beta_d \varphi_0. \quad (91)$$

Из уравнения (89) следует, что если вынужденные колебания происходят с частотой  $k\omega$  гармоники возбуждающего момента, а возбуждающий момент равен  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$ , то отклонение  $\varphi_{\pm} = \Phi_k \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k)$ , т. е. отклонение по времени отстает от момента на постоянную величину  $\varepsilon_k$ . Если построить графики изменения момента  $M_k$  и отклонения  $\varphi_{\pm}$  (синусоиды), то сдвиг во времени этих двух процессов составляет некоторое значение  $t_1$  (секунд): другими словами,  $\varphi_{\pm}$  достигает максимума при  $\omega t_1 = \varepsilon_k$  после того, как достигает максимума возбуждающий момент.

На рис. 37 приведены графики коэффициентов динамического усиления  $\beta_d = f(k\omega/\omega_c)$  (рис. 37, а) и угла сдвига фазы  $\varepsilon_k = f_1(k\omega/\omega_c)$  (рис. 37, б) при разных критериях демпфирования  $D$ .

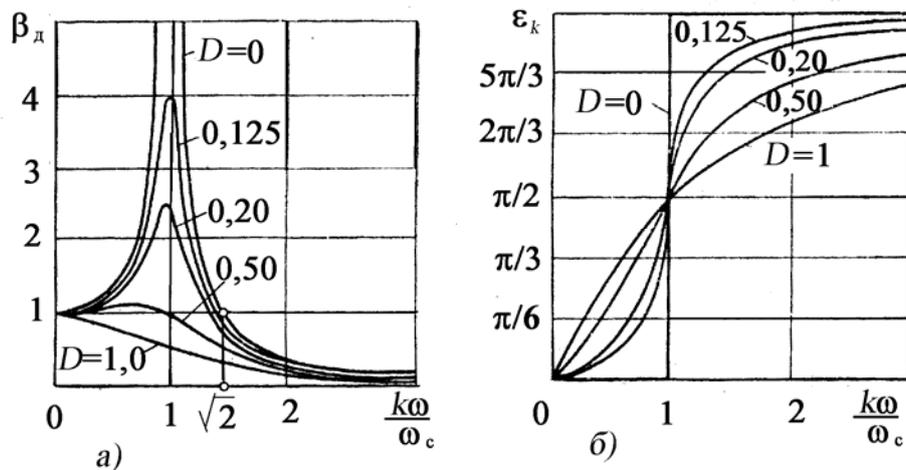


Рис. 37. Зависимость коэффициентов динамического усиления  $\beta_d$  и сдвига фаз  $\varepsilon_k$  от отношения  $(k\omega)/\omega_c$  при разных критериях демпфирования  $D$

Из графика на рис. 37, а видно, что при  $k\omega = \omega_c$  амплитуда колебаний значительно увеличивается, т. е. наблюдается так называемое явление *резонанса*. Величина амплитуды при резонансе зависит от коэффициента демпфирования и при  $\xi = 0$ , а следовательно, и при  $D = 0$  теоретически возрастает до бесконечности.

Необходимо отметить, что в дорезонансной зоне ( $(k\omega)/\omega_c < 1$ ) амплитуды вынужденных колебаний вала и возбуждающего момента отстают на острый угол ( $\varepsilon_k < \pi/2$ ), а в зарезонансной зоне ( $(k\omega)/\omega_c > 1$ ) – на тупой угол ( $\pi/2 < \varepsilon_k < \pi$ ). При отсутствии демпфирования ( $D = 0$ ) фазовый угол равен нулю (при  $(k\omega)/\omega_c < 1$ ) или  $\pi$  (при  $(k\omega)/\omega_c > 1$ ). При резонансе ( $k\omega = \omega_c$ ) отклонение во всех случаях отстает по фазе от момента на угол, равный  $\pi/2$ .

Установим взаимосвязь между моментами, входящими в уравнение вынужденных колебаний. Для этого продифференцируем выражение (89) и, подставив его в уравнение (83), получим:

$$\begin{aligned}
 & -I\Phi_k k^2 \omega^2 \sin(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k + I\Phi_k k^2 \omega^2 \cos(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k + \\
 & + 2\omega_c D I \Phi_k k \omega [\cos(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k + \sin(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k] + \\
 & + \omega_c^2 I \Phi_k \sin(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k - \omega_c^2 I \Phi_k \cos(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k - \\
 & - M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k) = 0.
 \end{aligned} \tag{92}$$

В уравнении (92) заменим  $\omega_c^2 I = \frac{c}{I} I = c$ , а также  $D = \frac{\xi}{\xi_{кр}} = \frac{\xi}{2I\omega_c^2} = \frac{\xi}{2c}$ .

Кроме того, учитывая, что в этом уравнении суммы членов с  $\sin(k\omega t + \beta_k)$  и с  $\cos(k\omega t + \beta_k)$  отдельно должны равняться нулю, получим систему двух уравнений, характеризующих вынужденные колебания одной массы:

$$\begin{cases} M_k^a + I\Phi_k k^2 \omega^2 \cos \varepsilon_k - \xi \Phi_k k \omega \sin \varepsilon_k - c \Phi_k \cos \varepsilon_k = 0; \\ I\Phi_k k^2 \omega^2 \sin \varepsilon_k + \xi \Phi_k k \omega \cos \varepsilon_k - c \Phi_k \sin \varepsilon_k = 0. \end{cases} \tag{93}$$

Как известно из теории колебаний [22], всякое гармоническое движение можно представить в виде проекции вращающегося вектора на некоторую ось, при этом векторы перемещения и ускорения перпендикулярны вектору скорости. Действительно, если представить в

прямоугольной системе координат  $xOy$  уравнение гармонического колебательного движения  $x = a \sin(\omega t + \varphi_1)$ , то графически уравнение синусоиды как раз представляет проекцию на ось  $x$  вращающегося с частотой  $\omega$  вектора  $a$  (с начальной фазой  $\varphi_1$ ). Так как скорость гармонического колебания  $\dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \varphi_1)$ , то этот вращающийся вектор  $a\omega$  должен располагаться под углом  $\pi/2$  к вектору  $a$  (в направлении вращения). Наконец, поскольку ускорение такого гармонического колебания  $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_1)$ , то вращающийся вектор  $a\omega^2$  совпадает по направлению с вектором  $a$ , но имеет противоположное ему направление.

Используя это понятие, изобразим действующие на одномассовую систему моменты из уравнения (92) в виде вращающихся векторов.

В прямоугольной системе координат  $xOy$  (рис. 38) под углом  $(k\omega t + \beta_k)$  к оси  $y$  (в направлении вращения) отложен вектор  $\bar{M}_k^a$  – амплитуда возбуждающего момента. Под углом  $\varepsilon_k$  к вектору  $c\bar{\Phi}_k$  в сторону, противоположную вращению  $k\omega$ , откладывается вектор момента сил инерции  $I\bar{\Phi}_k k^2 \omega^2$ , а в сторону, противоположную направлению  $I\bar{\Phi}_k k^2 \omega^2$ , – вектор момента упругих сил  $c\bar{\Phi}_k$ .

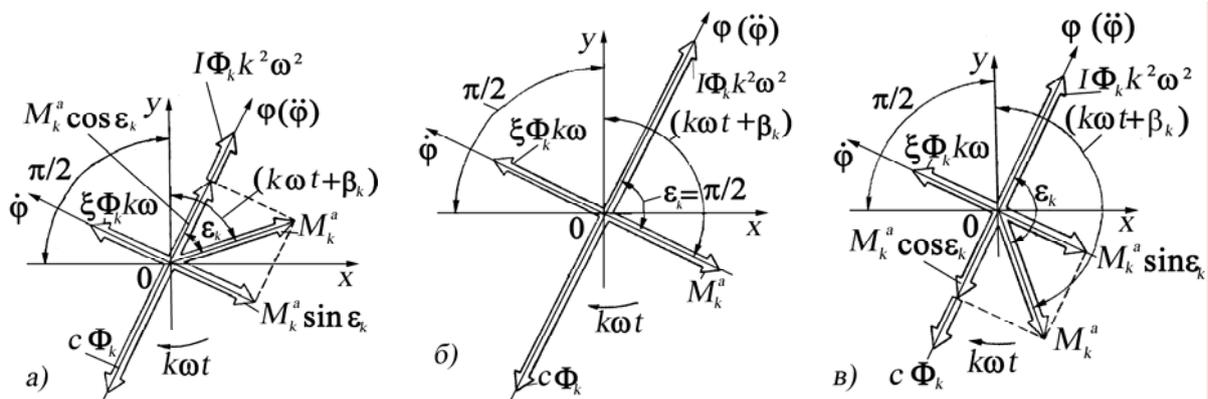


Рис. 38. Векторные диаграммы колебаний: а – до резонанса:  $k\omega/\omega_c < 1$ ;  $\varepsilon_k < \pi/2$ ; б – в момент резонанса:  $k\omega/\omega_c = 1$ ;  $\varepsilon_k = \pi/2$ ; в – за резонансом:  $k\omega/\omega_c > 1$ ;  $\pi/2 < \varepsilon_k < \pi$

Вектор момента сил сопротивления  $\xi\bar{\Phi}_k k\omega$  направлен перпендикулярно вектору момента упругих сил и опережает его на угол  $\pi/2$ .

Выберем новую систему прямоугольных координат: угловое перемещение  $\varphi$  – угловая скорость  $\dot{\varphi}$  (см. рис. 38). Спроектируем на эти оси векторы моментов:  $\bar{M}_k^a$ , упругости  $c\vec{\Phi}_k$ , сил сопротивления  $\xi\vec{\Phi}_k k\omega$ , сил инерции  $I\vec{\Phi}_k k^2\omega^2$ . В результате получим: до резонанса  $[(k\omega)/\omega_c < 1]$ ; ( $\varepsilon_k < \pi/2$ )

$$\begin{cases} M_k^a \cos \varepsilon_k + I\Phi_k k^2\omega^2 - c\Phi_k = 0; \\ \xi\Phi_k k\omega - M_k^a \sin \varepsilon_k = 0; \end{cases} \quad (94)$$

в момент резонанса ( $k\omega = \omega_c$ ); ( $\varepsilon_k = \pi/2$ )

$$\begin{cases} Ik^2\omega_c^2 - c = 0; \\ \xi\Phi_{kp}\omega_c - M_k^a = 0; \end{cases} \quad (95)$$

за резонансом  $[(k\omega)/\omega_c > 1]$ ; ( $\pi/2 < \varepsilon_k < \pi$ )

$$\begin{cases} I\Phi_k k^2\omega^2 - c\Phi_k - M_k^a \cos \varepsilon_k = 0; \\ \xi\Phi_k k\omega - M_k^a \sin \varepsilon_k = 0. \end{cases} \quad (96)$$

Из зависимостей (94)-(96) следует, что одна часть возбуждающего момента  $\bar{M}_k^a \sin \varepsilon_k$  уравнивает момент сопротивления  $\xi\vec{\Phi}_k k\omega$ , а другая часть  $\bar{M}_k^a \cos \varepsilon_k$  – силы инерции и упругости.

По мере приближения к резонансу растут амплитуды колебаний и сопротивления, в результате чего все большая часть возбуждающего момента затрачивается на уравнивание момента сил сопротивления. Резонансный режим можно в этом смысле охарактеризовать как режим, при котором внешний момент уравнивается моментом сил сопротивления, а инерционный момент – моментом сил упругости, т. е. в этом случае из уравнения (83) получаем (30). Таким образом, *вынужденные колебания при резонансе происходят по закону свободных колебаний.*

Это следует из системы уравнений (96) (при  $\varepsilon_k = \pi/2$ ), так как первое уравнение описывает свободные колебания одномассовой системы, а второе – вынужденные колебания при резонансе

$$\Phi_{kp} = \frac{M_k^a}{\xi\omega_c}. \quad (97)$$

Из формулы (98) следует, что амплитуда вынужденных колебаний одномассовой системы при резонансе пропорциональна амплитуде возбуждающего момента  $M_k^a$  и обратно пропорциональна коэффициенту демпфирования  $\xi$  и собственной частоте колебаний  $\omega_c$ .

Определим работу, совершаемую возбуждающим моментом  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$  на угловом перемещении  $\varphi_{\text{ч}} = \Phi_k \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k)$  за период изменения момента  $T = 2\pi/k\omega$ . Элементарная работа возбуждающего момента за один период колебаний равна

$$dW_{\text{в}} = M_k d\varphi. \quad (98)$$

Из (98), подставляя значения  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$ , а  $d\varphi = \Phi_k k\omega \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) dt$ , находят работу возбуждающего момента за один период колебаний  $2\pi/k\omega$ :

$$\begin{aligned} W_{\text{в}} &= \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} M_k d\varphi = M_k^a \Phi_k k\omega \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) dt = \\ &= M_k^a \Phi_k k\omega \left[ \cos \varepsilon_k \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k) dt + \right. \\ &\left. + \sin \varepsilon_k \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} \sin^2(k\omega t + \beta_k) dt \right]. \end{aligned} \quad (99)$$

Решив интегралы в квадратных скобках, находим:

$$\begin{aligned} &\cos \varepsilon_k \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k) dt = \\ &= \frac{\cos \varepsilon_k}{k\omega} \int_0^{2\pi} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k) d(k\omega t) = 0; \\ &\sin \varepsilon_k \int_0^{\frac{2\pi}{k\omega}} \sin^2 2\omega t dt = \frac{\sin \varepsilon_k}{k\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2k\omega t}{2} d(k\omega t) = \pi \sin \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Подставив вычисленные интегралы в (99), определим работу возбуждающего момента за один период

$$W_{\text{в}} = \pi M_k^a \Phi_k \sin \varepsilon_k. \quad (100)$$

Часть этой энергии рассеивается в виде тепла (в результате действия сил сопротивления), а часть ее увеличивает запас кинетической энергии  $W$  в системе, а следовательно, и амплитуду колебаний  $\Phi_k$ .

Элементарная работа момента сопротивления равна  $M_\xi = -\xi \frac{d\varphi}{dt} = -\xi \Phi_k k \omega \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k)$  (знак минус означает, что  $M_\xi$  направлен против скорости крутильных колебаний).

Элементарная работа момента сопротивления

$$dW_\xi = M_\xi d\varphi = \xi \Phi_k^2 k^2 \omega^2 \cos^2(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) dt,$$

откуда определяют работу момента сопротивления за период колебания  $T = 2\pi/k\omega$

$$\begin{aligned} W_\xi &= \xi \Phi_k k^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/k\omega} \cos^2(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) dt = \\ &= \xi \Phi_k k^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/k\omega} \frac{1 + \cos 2(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k)}{2} dt. \end{aligned}$$

Поскольку  $\cos 2(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) = \cos(2k\omega t + 2\beta_k) \cos \varepsilon_k + \sin(2k\omega t + 2\beta_k) \sin \varepsilon_k$ , то интеграл разбивается на три интеграла, решение которых имеет вид

$$\int_0^{2\pi/k\omega} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{k\omega};$$

$$\cos 2\varepsilon_k \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2k\omega t + \beta_k)}{4k\omega} d(2k\omega t) = 0;$$

$$\sin 2\varepsilon_k \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2k\omega t + \beta_k)}{4k\omega} d(2k\omega t) = 0.$$

Так как первый интеграл в квадратных скобках равен  $\pi/k\omega$ , а остальные – нулю, то работа момента сопротивления за период колебаний

$$W_\xi = \pi \xi \Phi_k^2 k \omega. \quad (101)$$

Полученная ранее зависимость (98) легко находится из равенства работ при резонансе возбуждающего момента  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k)$  и момента сопротивления  $M_\xi = -\xi \frac{d\phi}{dt}$ .

Поскольку при резонансе  $k\omega = \omega_c$ , а  $\varepsilon = \pi/2$  и  $\Phi_k = \Phi_{kp}$ , то из (100) и (101) получим при резонансе:  $W_B = \pi M_k^a \Phi_{kp}$  и  $W_\xi = \pi \xi \Phi_{kp}^2 \omega_c$ . Приравняв правые части этих равенств, получим соотношение (98).

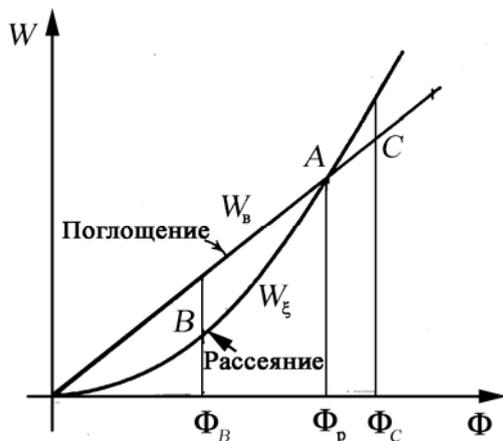


Рис. 39. Зависимость количества подведенной  $W_B$  и теряемой  $W_\xi$  энергий от амплитуды колебаний

Если потери увеличиваются быстрее, чем возрастает амплитуда ( $W_\xi > W_B$ ), то при некоторой ее величине  $\Phi_k = \Phi_{kp}$  между количеством энергии  $W_B$ , подводимой возбуждающим моментом  $M_k$ , и энергией  $W_\xi$ , теряемой на сопротивление, наступает равновесие, и колебания становятся установившимися. Это соотношение представлено на рис. 39, где по оси абсцисс отложены амплитуды, а по оси ординат –

работа за период колебания, причем одна кривая соответствует работе  $W_B$  возбуждающего момента  $M_k$ , а другая – работе  $W_\xi$  момента сопротивления  $M_\xi$ . В точке A пересечения кривых – энергетическое равновесие ( $W_B = W_\xi$ ) и амплитуда  $\Phi_p$  соответствуют установившимся колебаниям. Действительно, если в некоторый момент времени амплитуда  $\Phi_c > \Phi_p$ , то рассеяние энергии будет больше ( $W_\xi > W_B$ ), чем ее приток, что повлечет за собой постепенное уменьшение кинетической энергии системы до тех пор, пока не будет достигнута амплитуда  $\Phi_p$ , соответствующая указанному равновесию. Если же амплитуда установится на величине  $\Phi_B$ , то за счет постоянного притока энергии ( $W_B > W_\xi$ ) амплитуда будет возрастать до величины  $\Phi_p$ .

Резонансные колебания с большой амплитудой опасны для прочности элементов системы, поэтому в этом случае принимаются меры для устранения таких резонансных колебаний.

Обычно возбуждающие моменты для расчетных режимов двигателя не удается изменить ни по величине, ни по частоте. Поэтому основное требование, предъявляемое к крутильной системе коленчатого вала поршневого двигателя, на которую действует периодический крутящий момент, заключается на стадии проектирования в подборе таких параметров системы, а именно, коэффициентов крутильной жесткости  $c_i$  и моментов инерции  $I_i$ , при которых резонанс наступал бы вне пределов диапазона рабочих частот вращения коленчатого вала двигателя. Как показывает опыт расчета крутильных систем автомобильных и тракторных двигателей, подобрать такие параметры не удается и резонанс какой-либо из гармоник попадает в диапазон рабочих частот вращения коленчатого вала. В этом случае ограничивают амплитуды резонансных колебаний до безопасного предела путем установки в крутильной системе гасителя колебаний (демпфера).

Установлено [11, 24], что дополнительные напряжения кручения  $\tau = 20 \dots 25$  МПа, вызванные крутильными колебаниями в коленчатых валах автомобильных и тракторных двигателей, могут вызвать усталостное разрушение, а также повышенный износ, в частности, механизма привода газораспределения и топливного насоса у дизелей.

Поскольку амплитуда вынужденных крутильных колебаний  $\Phi_k$  зависит от величины динамического коэффициента  $\beta_d$  и статического отклонения  $\varphi_0$  (см. формулу (90)), график изменения  $\Phi_k$  в зависимости от отношения частот  $(k\omega)/\omega_c$  будет аналогичным  $\beta_d$  (см. рис. 37). При этом возможны три различные крутильные системы, для которых резонанс располагается до рабочего диапазона частот вращения коленчатого вала, за ним или внутри этого диапазона (рис. 40). Для дорезонансного режима (рис. 40, а) амплитуда крутильных колебаний в момент перехода через резонанс ( $k\omega = \omega_c$ ).

Заметим, что при  $\beta_d=1$   $\Phi_k = \varphi_0$ . Для определения  $(k\omega)/\omega_c$  из (90), приняв, что  $D=0$ , получим  $[i\sqrt{1-(k\omega/\omega_c)^2}] = 1$ ;

$$k\omega/\omega_c = \sqrt{2} \approx 1,41 .$$

Далее, когда значение  $(k\omega)/\omega_c$  возрастает, амплитуда вынужденных колебаний даже уменьшается (см. рис. 40,а). Аналогичный

результат – в случае резонанса в зоне рабочих частот вращения (рис. 40, б), а также в зарезонансной зоне (рис. 40, в).

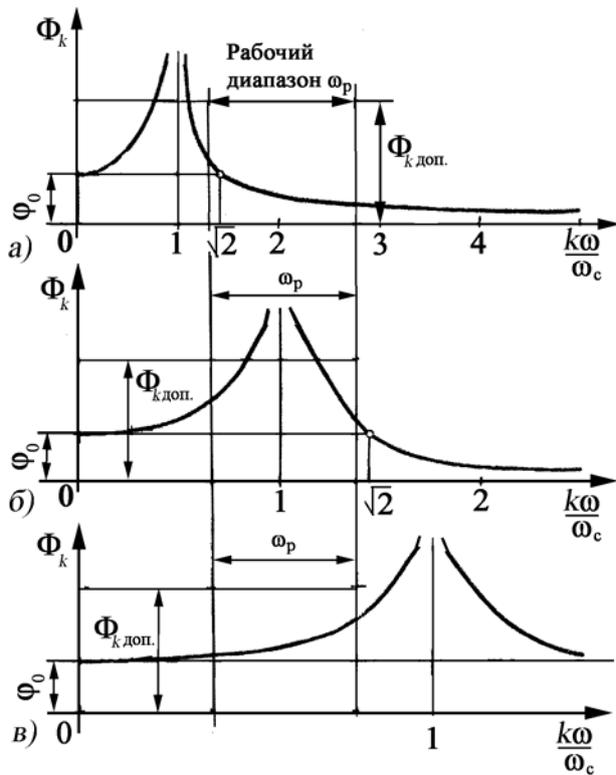


Рис. 40. Зависимость амплитуд угловых колебаний  $\Phi$  от отношения частот  $k\omega/\omega_c$  и положения рабочего диапазона частот вращения коленчатого вала  $\omega_p$ , режимы: а – дорезонансный; б – резонансный; в – зарезонансный

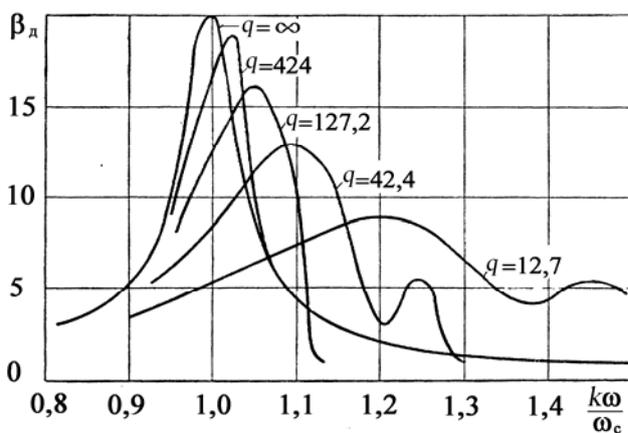


Рис. 41. Зависимость  $\beta_d$  от отношения  $k\omega/\omega_c$  в зависимости от скорости перехода через резонанс

Большой практический интерес представляет определение максимальных амплитуд в случае, если частота возбуждающего момента, постепенно увеличиваясь, проходит резонансное значение. Примем, что мгновенное значение частоты при разгоне равно  $k\omega = 2ht$  [21], где коэффициент  $h$  пропорционален скорости увеличения частоты и равен  $h = \frac{k}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt}$ .

На рис. 41 показано изменение динамического коэффициента, а значит, и амплитуды колебаний  $\Phi_B$  по мере роста частоты возмущающего момента при наличии затухания, характеризуемого коэффициентом демпфирования  $\xi=0,5$ . По горизонтали отложено отношение мгновенного возбуждающего момента  $k\omega = 2ht$  к частоте собственных колебаний  $\omega_c$ , а по вертикали – динамический коэффициент  $\beta_d$ .

Графики построены для различных скоростей нарастания частоты возмущающего момента, характеризуемых числом периодов собственных колебаний  $q$ , прошедших от

начала нагружения до момента достижения резонанса  $q = \omega_c^2 / 4\pi h$ . Чем с большей скоростью возрастает частота возмущающего момента, тем меньше  $q$ , и наоборот. Установившемуся резонансному режиму соответствует значение  $q = \infty$ .

Из графика (см. рис. 41) видно, что максимальные амплитуды достигаются при частоте возмущающего момента несколько большей, чем частота собственных колебаний. Величина максимальной амплитуды тем меньше, чем больше скорость прохода через резонанс (чем меньше  $q$ ).

При уменьшении частоты возмущающего момента (уменьшения частоты вращения коленчатого вала двигателя) графики  $\beta = f(k\omega / \omega_c)$  будут аналогичными, приведенными на рис. 41, однако максимальные амплитуды будут достигаться при частоте возмущающего момента несколько меньшей, чем частота собственных колебаний [6, 22].

Реальному двигателю эквивалентна многомассовая крутильная система, имеющая несколько резонансов, поэтому для нее таких переходов через резонанс будет столько на участке рабочей частоты вращения коленчатого вала, сколько гармоник резонируют с собственной частотой колебаний крутильной системы.

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое коэффициент динамического усиления, или коэффициент динамичности?
2. Как определяется статическое отклонение системы под действием амплитудного значения гармонического момента  $M_k^a$ ?
3. Как определяется сдвиг фаз между амплитудой вынужденных угловых колебаний одномассовой системы и амплитудой возбуждающего момента?
4. Для чего строятся векторные диаграммы колебаний?
5. Влияет ли на величину амплитуды крутильных колебаний скорость прохода через резонанс?
6. Как можно определить скорость прохода через резонанс?
7. Где должен располагаться резонансный режим?
8. От чего зависит величина рассеиваемой энергии при резонансе?

9. Что происходит с поглощаемой демпфером энергией?
10. От чего зависит характер изменения динамического коэффициента при проходе через резонанс?

### 3.7. Вынужденные колебания многомассовой системы с сопротивлением

Для реального двигателя при вынужденных крутильных колебаниях на каждую моторную массу многомассовой системы действуют возбуждающие моменты и моменты сопротивления. Расчетная схема многомассовой крутильной системы для расчета вынужденных колебаний приведена на рис. 42, где  $M_i$  – возбуждающие моменты, действующие на каждую моторную массу;  $M_{\xi i}$  – моменты сопротивления, вызванные силами жидкостного трения в подшипниках и цилиндрах двигателя. Переменные силы внутреннего трения (упругий гистерезис) в материале коленчатого вала (между массами  $I_{i-1}, I_i$ ), зависящие от амплитуды угловых колебаний, не учитываем ввиду малого объема участка.

Возбуждающие крутящие моменты, действующие на каждую массу системы, периодичны, а значит, как было показано ранее, их можно рассматривать состоящими из гармонических составляющих. При равенстве частоты гармонической составляющей возбуждающего момента с одной из собственных частот всей системы возникают резонансные колебания системы со значительной амплитудой.

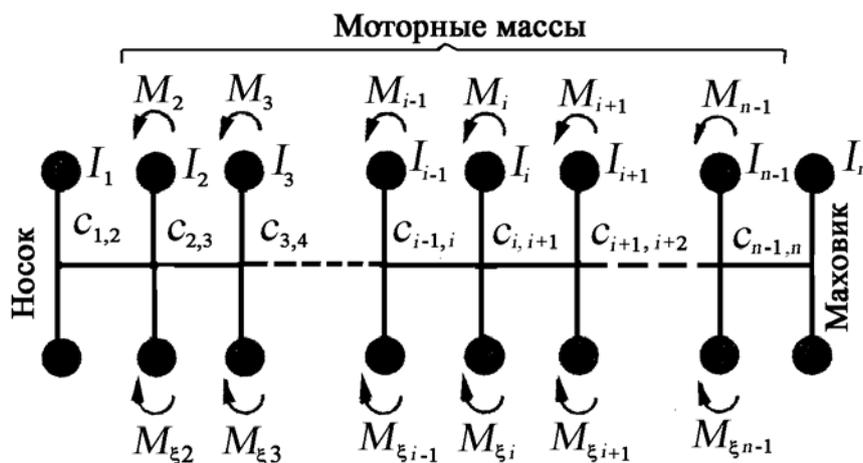


Рис. 42. Расчетная схема многомассовой крутильной системы для расчета вынужденных колебаний

Обычно расчет вынужденных колебаний многомассовой крутильной системы производят только для резонансных режимов, так как они являются наиболее опасными. Ниже будет приведен метод расчета с использованием матричных методов, который позволяет определять амплитуды колебаний при работе двигателя по всей внешней скоростной характеристике.

При рассмотрении резонансных вынужденных колебаний крутильных систем обычно исходят из допущения, что форма вынужденных колебаний при резонансе соответствует одной из форм свободных колебаний. Это условие может быть выдержано только в случае равенства гармонических составляющих возбуждающих моментов и моментов сопротивления, действующих одновременно на моторные массы системы.

В реальной многомассовой крутильной системе, совершающей вынужденные колебания, моменты сопротивления и возбуждающие моменты на каждой моторной массе могут уравниваться частично из-за различной величины их амплитуд или вследствие сдвига по фазе. Поэтому при резонансе форма вынужденных колебаний может полностью не совпадать с формой свободных колебаний. Однако в крутильных системах автомобильных и тракторных двигателей трение (демпфирование колебаний) сравнительно невелико, вследствие этого при вынужденных резонансных колебаниях их форму можно принять подобной форме свободных колебаний. Это объясняется тем, что при свободных колебаниях форма их зависит от инерционных моментов и моментов сил упругости (см. п. 2.5). Поскольку моменты от инерционных сил оказывают влияние на суммарный крутящий момент (см. рис. 24), это также влияет на форму вынужденных резонансных колебаний.

Если крутильная система при наличии сопротивления совершает установившиеся вынужденные колебания, то это указывает, что за период одного колебания суммы работ всех возбуждающих моментов равны сумме моментов сопротивления. В противном случае колебания были бы неустановившимися, то есть амплитуды колебаний или нарастали, или уменьшались.

Наиболее распространенным методом расчета резонансных колебаний крутильной системы является метод, основанный на условии равенства работы возбуждающих моментов работе моментов сопротивления. По этому методу резонансные амплитуды всех масс крутильной системы определяют, приравнявая работу, внесенную в мно-

гомассовую систему  $k$ -й гармоникой возбуждающих крутящих моментов за период одного колебания, работе моментов сопротивлений за тот же период.

При расчете по этому методу вначале определяют сумму работ возбуждающих моментов при крутильных колебаниях. Гармонический момент совершает положительную работу только при воздействии на моторные массы, начиная с первой. Поэтому гармоники возбуждающих моментов от всех цилиндров будем учитывать с условием смещения рабочих ходов.

На  $i$ -й моторной массе гармонический момент  $M_{ki}$   $k$ -го порядка за цикл колебаний будет совершать работу [22, 23]

$$W_{ki} = \int_0^{2\pi/(k\omega)} M_{ki} d\varphi_i, \quad (102)$$

где  $2\pi/(k\omega)$  – период колебаний  $k$ -й гармоники;  $M_k = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i)$ ;  $\beta_k$  – фазовый угол  $k$ -й гармоники;  $\delta_i$  – угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрах двигателя.

В то же время при условии, что формы свободных и вынужденных колебаний совпадают, система будет совершать гармонические колебания с запаздыванием по фазе на  $\varepsilon_k$

$$\varphi_i = \Phi_{ki} \sin(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k). \quad (103)$$

Дифференцируя выражение (103)

$$d\varphi_i = \Phi_{ki} k\omega \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) dt \quad (104)$$

и подставляя (104) и значения  $M_{ki}$  в (102), получим:

$$W_{ki} = M_{ki}^a \Phi_{ki} k\omega \int_0^{2\pi/(k\omega)} \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i) \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) d\varphi_i. \quad (105)$$

Проведем преобразования в подынтегральных зависимостях

$$\begin{aligned} & \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i) \cos(k\omega t + \beta_k - \varepsilon_k) = \\ & = [\sin(k\omega t + \beta_k) \cos k\delta_i + \cos(k\omega t + \beta_k) \sin k\delta_i] \times \\ & \times [\cos(k\omega t + \beta_k) \cos \varepsilon_k + \sin(k\omega t + \beta_k) \sin \varepsilon_k]. \end{aligned} \quad (106)$$

После раскрытия скобок в (106) придем к четырем интегралам:

$$\begin{aligned} \cos k\delta_i \cos \varepsilon_k \int_0^{2\pi/(k\omega)} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k) dt &= 0; \\ \cos k\delta_i \sin \varepsilon_k \int_0^{2\pi/(k\omega)} \sin^2(k\omega t + \beta_k) dt &= \cos k\delta_i \sin \varepsilon_k \frac{\pi}{k\omega}; \\ \sin k\delta_i \cos \varepsilon_k \int_0^{2\pi/(k\omega)} \cos^2(k\omega t + \beta_k) dt &= \sin k\delta_i \cos \varepsilon_k \frac{\pi}{k\omega}; \\ \sin k\delta_i \sin \varepsilon_k \int_0^{2\pi/(k\omega)} \sin(k\omega t + \beta_k) \cos(k\omega t + \beta_k) dt &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после интегрирования (105) окончательно получим

$$W_{ki} = \pi M_{ki}^a \Phi_{ki} (\sin k\delta_i \cos \varepsilon_k + \cos k\delta_i \sin \varepsilon_k). \quad (107)$$

В многомассовой крутильной системе в результате действия на каждую моторную массу (эквивалентную колену вала двигателя с приведенными к нему массами) периодического крутящего момента при  $k\omega = \omega_c$  (см. п. 3.6) возникают резонансные колебания. В этом случае максимальное угловое перемещение каждой массы отстает от максимального значения возбуждающего момента на фазовый угол  $\varepsilon = \pi/2$ . Колебания всех масс происходят синхронно (с одинаковыми или противоположными фазами) – все массы одновременно проходят нейтральное положение и одновременно проходят положения максимальных отклонений. При этом гармонические составляющие возбуждающих моментов, действующих на моторные массы системы, имеют максимальные (амплитудные) значения в разное время, так как вспышки в различных цилиндрах чередуются через определенный угол поворота коленчатого вала.

Для упрощения расчета, используя зависимости (29), заменим многомассовую систему на рис. 42 приведенной только из моторных масс<sup>9</sup>.

Таким образом, работу гармонических возбуждающих моментов  $W_k$ , действующих в течение одного периода колебаний на моторные массы системы, эквивалентной двигателю с  $n - 1$  коленным валом при

---

<sup>9</sup> Как будет показано ниже, это преобразование можно и не делать, поскольку суммирование работ гармоник возбуждающих моментов ведется только по моторным массам.

$n$ -массовой системе (см. рис. 43), можно определить, используя зависимость (107). Полагая, что амплитуды гармонических возбуждающих моментов  $M_{ki}^a$  на всех коленах двигателя одинаковы  $M_{ki}^a = M_{k1}^a = M_k^a$ , определим  $W_k$  в виде:

$$\begin{aligned} W_k &= \sum_1^{n-1} \pi M_k^a \Phi_{ki} (\sin k\delta_i \cos \varepsilon_k + \cos k\delta_i \sin \varepsilon_k) = \\ &= \pi M_k^a \left( \cos \varepsilon_k \sum_1^{n-1} \Phi_{ki} \sin k\delta_i + \sin \varepsilon_k \sum_1^{n-1} \Phi_{ki} \cos k\delta_i \right). \end{aligned} \quad (108)$$

Заметим, что при суммировании  $W_{k1}$  для первой моторной массы выражение (108) значительно упрощается, так как  $k\delta_1 = 0$ . В этом случае  $W_{k1} = \pi M_{k1}^a \Phi_{k1} \sin \varepsilon_k$ .

Так, для шестицилиндрового двигателя с порядком работы цилиндров 1 – 5 – 3 – 6 – 2 – 4 (согласно выражению (65) фазовые углы:  $2\pi/3$ ;  $4\pi/3$ ;  $6\pi/3$ ;  $8\pi/3$ ;  $10\pi/3$ ) суммарная работа  $k$ -х гармонических составляющих возбуждающих моментов на шесть моторных масс за один период колебаний всей колеблющейся системы равна

$$\begin{aligned} W_{\text{в}} &= \pi M_k^a \left[ \Phi_{k1} \sin \varepsilon_k + \Phi_{k2} \left( \cos \varepsilon_k \sin k \frac{8\pi}{3} + \sin \varepsilon_k \cos k \frac{8\pi}{3} \right) + \right. \\ &+ \Phi_{k3} \left( \cos \varepsilon_k \sin k \frac{4\pi}{3} + \sin \varepsilon_k \cos k \frac{4\pi}{3} \right) + \\ &+ \Phi_{k4} \left( \cos \varepsilon_k \sin k \frac{10\pi}{3} + \sin \varepsilon_k \cos k \frac{10\pi}{3} \right) + \\ &+ \Phi_{k5} \left( \cos \varepsilon_k \sin k \frac{2\pi}{3} + \sin \varepsilon_k \cos k \frac{2\pi}{3} \right) + \\ &\left. + \Phi_{k6} \left( \cos \varepsilon_k \sin k \frac{6\pi}{3} + \sin \varepsilon_k \cos k \frac{4\pi}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если принять, что  $M_{ki}^a = M_{k1}^a = M_k^a$ , то в уравнении (108) фазовые углы  $k\delta_i$  (точнее функции от них  $\cos \varepsilon_k \sin k\delta_{ki} + \sin \varepsilon_k \cos k\delta_{ki}$ ), относящиеся в действительности к возбуждающим моментам  $M_{ki}$ , оказались отнесенными к амплитудам колебаний масс системы.

В случае неравномерного чередования рабочих ходов подставляется действительное значение угла  $\delta_i$  для каждой моторной массы.

Если в выражении (108) вынести за скобки амплитуду колебаний первой массы  $\Phi_{k1}$ , то это позволяет перейти к относительным амплитудам как при свободных колебаниях (нумерацию даем по каждому кривошипу, см. п. 2.4).

$$a_1 = \frac{\Phi_{k1}}{\Phi_{k1}} = 1; a_2 = \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}}; a_3 = \frac{\Phi_{k3}}{\Phi_{k1}}; \dots; a_i = \frac{\Phi_{ki}}{\Phi_{k1}}; \dots; a_j = \frac{\Phi_{kj}}{\Phi_{k1}}. \quad (109)$$

При принятом нами допущении, что при вынужденных колебаниях амплитуды изменяются как при свободных, то значения относительных амплитуд  $a_i$  вычисляем в соответствии с п. 2.4 (для собственной частоты колебаний). Заметим, если в расчетной схеме первой массой является носок коленчатого вала, то соответственно  $a_2 = \Phi_{k2}/\Phi_{k2} = 1$ , а остальные значения  $a_i$  вычисляются на основании анализа форм собственных колебаний.

В результате (108), как это следует из примера для однорядного шестицилиндрового двигателя, определяем работу возбуждающих моментов по каждому кривошипу.

Таким образом, работа всех гармонических моментов  $k$ -го порядка за один период колебания с учетом (109) равна

$$W_k = \pi M_k^a \Phi_{k1} \left( \cos \varepsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i + \sin \varepsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i \right). \quad (110)$$

В формуле (108) выражение в скобках является по существу алгебраическим сложением скалярных величин. Но математический вид слагаемых  $\Phi_{ki} \sin k\delta_i \cos \varepsilon_k + \Phi_{ki} \cos k\delta_i \sin \varepsilon_k$  или  $\Phi_{ki} \sin(k\delta_i + \varepsilon_k)$  позволяет рассматривать их как проекции векторов относительных амплитуд  $\vec{a}_i$  на плоскость, содержащей ось вала и перпендикулярной вектору  $\vec{M}_{k1}^a$  (рис. 43).

Угол  $\varepsilon_k$  одинаков для всех масс вследствие того, что колебания масс происходят синхронно и все они достигают наибольших отклонений одновременно.

На рис. 43 крутильные колебания (одноузловые) системы коленчатого вала представлены в виде вращающихся векторов  $\Phi_{ki}$  и векто-

ров  $M_{ki}^a$ . В соответствии со сказанным выше векторы  $\Phi_{ki}$  расположены в одной плоскости, а  $M_{ki}^a$  – в разных плоскостях, так как фазовые углы между векторами амплитуд возбуждающих гармоник и векторами амплитуд угловых колебаний масс зависят от порядка работы двигателя и неодинаковы для всех масс. Кроме того, амплитуды масс  $a_i$ , следующих за первой моторной массой, несмотря на принятое нами допущение  $M_{ki}^a = M_{k1}^a$ , будут разными из-за фазовых углов  $k\delta_i$ .

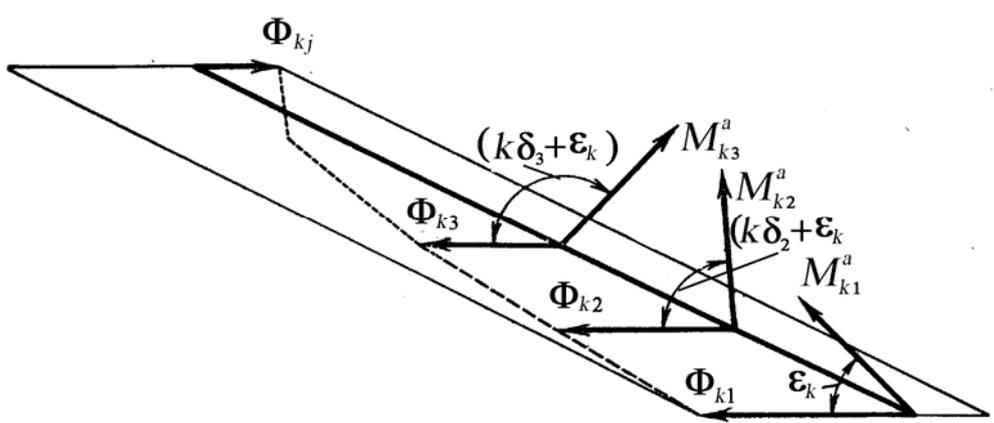


Рис. 43. Крутильные колебания многомассовой системы при резонансе

Угол сдвига фаз угловых перемещений  $\epsilon_k$  зависит от величины сопротивлений колебаниям, а также от упругих свойств крутильной системы и приведенных масс.

Величину  $\epsilon_k$  можно определить исходя из положения, что при резонансе работа возбуждающих моментов  $W_k$  будет максимальной. Как обычно дифференцируем  $W_k$  из (110) по углу  $\epsilon_k$  и, приравняв производную нулю, определяем  $W_{k \max}$ :

$$\frac{dW_k}{d\epsilon_k} = \pi M_k^a \Phi_{k1} \left( -\sin \epsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i + \cos \epsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i \right) = 0,$$

получим

$$-\sin \epsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i + \cos \epsilon_k \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i = 0. \quad (111)$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i \cos k\delta_i}{\sum_{i=1}^{n-1} a_i \sin k\delta_i}. \quad (112)$$

С учетом того, что

$$\sin \varepsilon_k = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_k}}; \quad \cos \varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_k}},$$

вместо выражения (110) окончательно получим

$$W_k = \pi M_k^a \Phi_{k1} \sqrt{\left( \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i \right)^2 + \left( \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i \right)^2}. \quad (113)$$

Подкоренное выражение в (113) равно модулю равнодействующего вектора амплитуд относительных перемещений

$$A_{i\Sigma} = \sqrt{\left( \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i \right)^2 + \left( \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i \right)^2}, \quad (114)$$

тогда вместо (113) получим

$$W_k = \pi M_k^a \Phi_{k1} A_{i\Sigma}, \quad (115)$$

где  $A_i$  – равнодействующий вектор амплитуд относительных перемещений;  $\Phi_{ki}$  – амплитуда вынужденных колебаний первой моторной массы.

Зависимость (114) показывает, что для определения модуля вектора  $\vec{A}_{i\Sigma}$  достаточно просуммировать векторы относительных амплитуд  $\vec{a}_i$  (величина каждого вектора выбирается из формы свободных колебаний), при этом направление каждого вектора  $\vec{a}_i$  будет выбираться в соответствии с фазовыми диаграммами гармоник возбуждающих моментов. Это не внесет погрешности в определение  $\vec{A}_{i\Sigma}$ , так как векторы  $\vec{a}_i$  располагаются относительно вектора  $\vec{a}_1$  под теми же фазовыми углами, что и  $\vec{M}_{ki}^a$  относительно  $\vec{M}_{k1}^a$ .

Определим в качестве примера сумму относительных вынужденных амплитуд  $\sum \vec{a}_i$  при вынужденных резонансных колебаниях для шестицилиндрового однорядного четырехтактного двигателя с коленами под углом  $2\pi/3$  радиан ( $120^\circ$ ) и порядком работы 1–5–3–6–2–4. Схема расположения колен и примерная диаграмма одноузловых свободных колебаний коленчатого вала этого двигателя приведены на рис. 44, на котором векторы  $a_i$  представляют собой относительные амплитуды свободных угловых колебаний шести моторных масс и массы маховика. Напомним, что в автомобильных и тракторных двигателях при выключенном сцеплении наибольшие резонансные амплитуды возникают обычно при одноузловой форме колебаний.

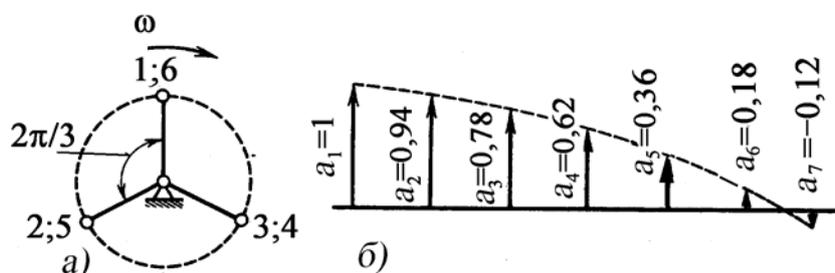


Рис. 44. Схема кривошипов однорядного шестицилиндрового двигателя (а) и диаграмма одноузловых свободных крутильных колебаний коленчатого вала (б)

При принятом порядке работы углы поворота коленчатого вала между вспышками в первом и остальных цилиндрах двигателя будут

$$\delta_5 = 2\pi/3; \delta_3 = 4\pi/3; \delta_6 = 6\pi/3; \delta_2 = 8\pi/3 \text{ и } \delta_4 = 8\pi/3.$$

Величины углов  $k\delta_i$  для возбуждающих гармоник различных порядков, действующих на колена вала, приведены в табл. 3.

Выделим из рис. 29 фазовые диаграммы гармоник возбуждающих моментов шестицилиндрового однорядного двигателя (рис. 45) для выяснения порядка суммирования векторов  $\vec{a}_i$ . В данном случае мы не рассматриваем порядок построения фазовых диаграмм гармоник возбуждающих моментов на рис. 45, так как в п. 2.4 это было достаточно полно показано для ряда двигателей.

Рассмотрим порядок построения векторной диаграммы относительных амплитуд крутильных колебаний масс на примере шестицилиндрового однорядного четырехтактного двигателя.

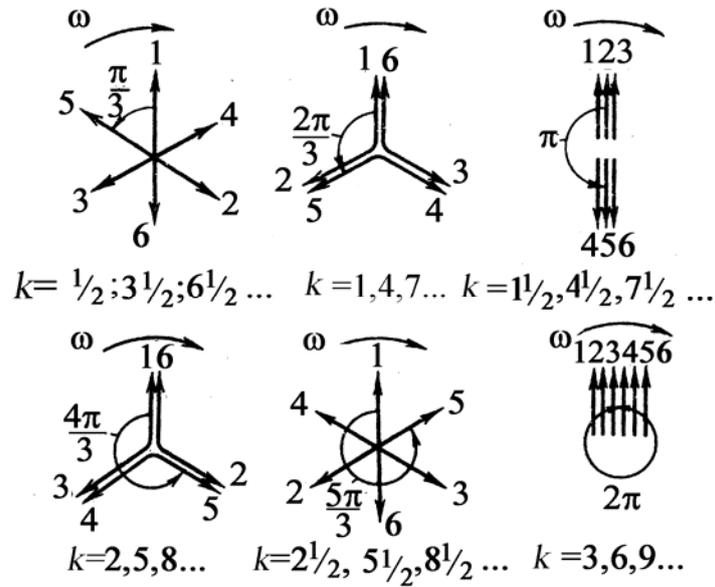


Рис. 45. Фазовые диаграммы гармоник возбуждающих моментов шестицилиндрового однорядного двигателя (порядок работы 1–5–3–6–2–4)

Построение их проводим в соответствии с порядком работы цилиндров для каждой гармоники возбуждающего момента:

- из произвольного полюса 0 параллельно первому вектору (цифра 1) фазовой диаграммы гармоник возбуждающего момента в произвольном масштабе откладывают вектор относительных перемещений первой массы  $\vec{a}_1=1$ , взятый из диаграммы свободных колебаний;

- из конца вектора относительных амплитуд  $\vec{a}_1$  в направлении, параллельном вектору гармоники возбуждающего момента для цилиндра, работающим следом за первым<sup>10</sup> (в нашем примере  $a_5$ ), откладывают вектор перемещений моторной массы  $\vec{a}_i$ , соответствующий этому цилиндру, и т.д.;

- после того как будет отложен вектор относительной амплитуды массы, эквивалентной колену вала, работающему последним (в нашем примере  $a_4$ ), определяем величину геометрической суммы амплитуд,

эквивалентных коленам вала двигателя  $\sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{a}_i$  (в нашем примере  $\sum_{i=1}^{i=6} \vec{a}_i$ ).

<sup>10</sup> Можно также воспользоваться значениями фазовых углов из табл. 3.

На рис. 46 приведены векторные диаграммы относительных амплитуд шестицилиндрового однорядного четырехтактного двигателя для гармоники  $k=1/2$ , а на рис. 47 – то же для гармоники  $k=1$ .

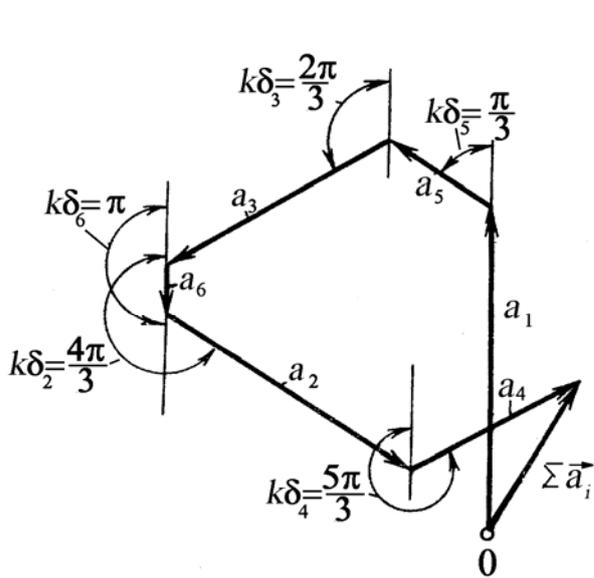


Рис. 46. Векторная диаграмма относительных амплитуд при крутильных колебаниях ( $k=1/2$ , порядок работы 1–5–3–6–2–4)

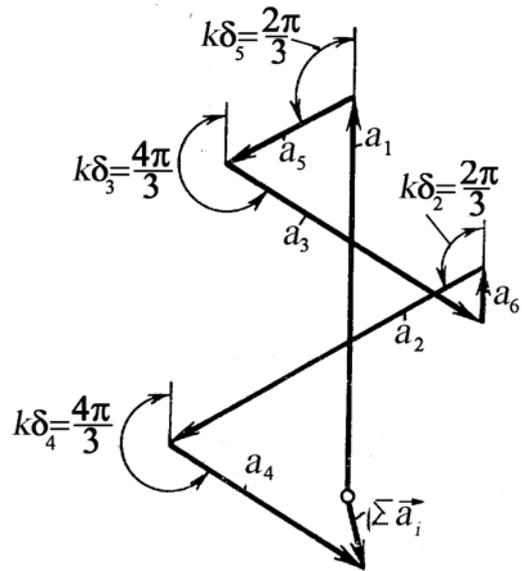


Рис. 47. Векторная диаграмма относительных амплитуд при крутильных колебаниях ( $k=1$ , порядок работы 1–5–3–6–2–4)

На рис. 48 изображены векторные диаграммы относительных амплитуд двигателя для гармоники  $k=2\frac{1}{2}$ , а на рис. 49 – то же для гармоник  $k=4,5$  (рис. 49, а) и  $k=6$  (рис. 49, б) однорядного шестицилиндрового четырехтактного двигателя.

Из зависимости (112) следует, что  $\varepsilon_k$  – угол между вектором  $\sum \vec{a}_i$  и горизонтальной осью, проведенной через полюс 0 векторной диаграммы относительных амплитуд (см. рис. 46 – 48). Действительно в числителе стоит сумма проекций всех относительных амплитуд на вертикальную ось, а в знаменателе – то же на горизонтальную ось. Из рис. 49 и формулы (112) следует, что при резонансе гармоник  $k=4,5$  и  $k=6$  фазовый угол  $\varepsilon_k=\pi/2$ . Что касается зависимости (111), то по

$$\text{смыслу – это проекция вектора } A_{i\Sigma} = \sqrt{\left(\sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i\right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i\right)^2}$$

на ось, перпендикулярную ему самому (фазовый угол  $\varepsilon_k=\pi/2$ ).

Далее определим сумму работ моментов сопротивления. На основании формулы (101) работа демпфирующего момента на каждом колене (моторной массе) при резонансе ( $k\omega = \omega_c$ ) равна

$$W_{\xi i} = \pi \xi \Phi_{ki}^2 \omega_c. \quad (116)$$

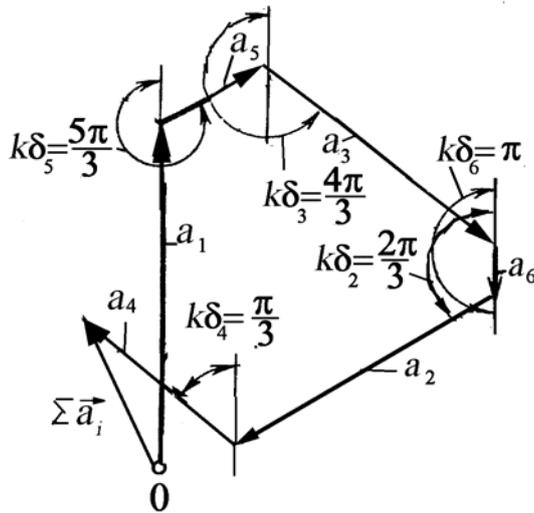


Рис. 48. Векторная диаграмма относительных амплитуд при крутильных колебаниях ( $k = 2\frac{1}{2}$ , порядок работы 1-5-3-6-2-4)

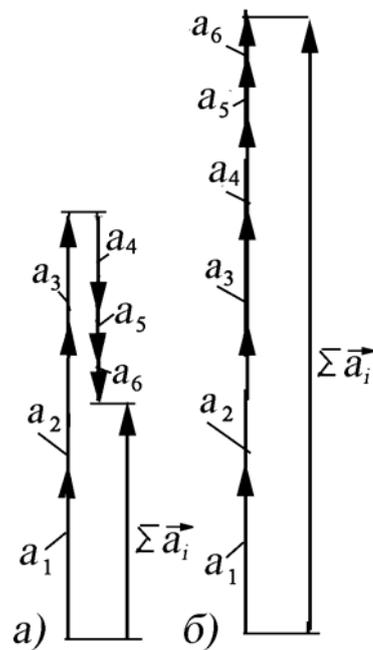


Рис. 49. Векторная диаграмма относительных амплитуд при резонансе: а -  $k = 4,5$ ; б -  $k = 6$ , порядок работы 1-5-3-6-2-4

Отметим, что при любом сдвиге фаз между вектором  $k$ -й гармоники возбуждающего момента  $M_{ki} = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i)$  и вектором угловых перемещений при крутильных колебаниях  $\Phi_{ki}$  работа  $W_{\xi i}$  будет чистой потерей механической энергии за цикл, так как при резонансе вектор момента сопротивления будет отставать от вектора отклонения на  $\pi/2$ , и его работа будет отрицательной. Полная работа моментов сопротивления  $W_{\xi}$  за один цикл колебаний, если считать, что силы сопротивления действуют только на те  $n-1$  массы, к которым приложены возбуждающие моменты (моторные массы), в соответствии с (116) равна

$$\begin{aligned}
W_{\xi} &= \pi \xi \omega_c (\Phi_{k1}^2 + \Phi_{k2}^2 + \dots + \Phi_{kn-1}^2) = \\
&= \pi \xi \omega_c \Phi_{k1}^2 \left( \frac{\Phi_{k1}^2}{\Phi_{k1}^2} + \frac{\Phi_{k2}^2}{\Phi_{k1}^2} + \dots + \frac{\Phi_{kn-1}^2}{\Phi_{k1}^2} \right) = \\
&= \pi \xi \omega_c \Phi_{k1}^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2) = \pi \xi \omega_c \Phi_{k1}^2 \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2.
\end{aligned} \tag{117}$$

Приравняв работу возбуждающих моментов к работе моментов сопротивления для всей крутильной системы  $W_k = W_{\xi}$  и используя формулы (115) и (117), получим:

$$\pi M_k^a \Phi_{k1} A_{i\Sigma} = \pi \xi \omega_c \Phi_{k1}^2 \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2. \tag{118}$$

Из зависимости (118) выведем формулу для определения действительной амплитуды колебаний первой моторной массы при резонансных колебаниях многомассовой эквивалентной системы

$$\Phi_{k1} = \frac{M_k^a \cdot \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2}{\xi \omega_c \cdot A_{i\Sigma}} = \frac{M_k^a \cdot \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2}{\xi \omega_c \cdot \sqrt{\left( \sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i \right)^2 + \left( \sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i \right)^2}}. \tag{119}$$

Величина действительной амплитуды дает возможность найти масштаб действительных амплитуд других масс эквивалентной крутильно-колеблющейся системы.

### Вопросы для самопроверки

1. На какие массы крутильно-колеблющейся системы действует возбуждающий момент?
2. Когда возникает резонанс при колебаниях многомассовой системы?
3. Почему амплитуды гармоник  $M_{ki}^a$  не совпадают по фазе с амплитудой гармоники первой моторной массы?
4. Для чего вычисляют модуль вектора относительных амплитуд масс приведенной крутильной системы?

5. Что такое фазовая диаграмма гармоника возбуждающего момента? Как она вычисляется?

6. Для чего строится векторная диаграмма относительных амплитуд масс крутильно-колеблющейся системы?

### 3.8. Определение амплитуд колебаний и напряжений при резонансе

Зная величину действительной амплитуды вынужденных угловых колебаний первой массы для каждой гармоники  $\Phi_{k1}$  и относительные амплитуды  $a_i$  остальных масс, определенных при расчете свободных колебаний, можно определить их угловые амплитуды при действии вынуждающего момента.

Для определения суммарной амплитуды крутильных колебаний  $\Phi_j$  массы  $j$  от угла поворота коленчатого вала можно воспользоваться зависимостью [22]

$$\Phi_j = \sum_{k=t}^{k=N} \Phi_{j,k} \sin(k\omega t + \beta_{j,k}), \quad (120)$$

где  $\Phi_{j,k}$  – амплитуда  $j$ -й массы от  $k$ -й гармоники вынуждающего момента;  $\beta_{j,k}$  – ее фазовый угол;  $t$  – номера гармоник вынуждающего момента двигателя: для четырехтактных  $t = 0,5 \dots N$ ; для двухтактных  $t = 1,0 \dots N$ ;  $N$  – число гармоник, которые принимаются в расчете.

При расчете амплитуд крутильных колебаний по формуле (120) определяют максимальные углы закрутки сечений коленчатого вала.

Можно рекомендовать следующий порядок нахождения амплитуд колебаний всех масс крутильной системы при резонансе под действием гармонического момента  $k$ -го порядка.

1. Просчитывают таблицу для собственных частот  $j$ -й формы (как было сказано ранее, обычно для 1-й), которая возбуждается при резонансе гармоникой  $M_{ki} = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i)$ , так как предполагается, что во время резонанса система колеблется по закону свободных колебаний. Этот расчет определяет величину относительных амплитуд  $a_i$ .

2. Строят фазовую диаграмму для  $k$ -й гармоники. По этой диаграмме определяют сдвиг фаз гармоник возбуждающих моментов, действующих на отдельные моторные массы.

3. По амплитудам моторных масс, взятым из таблицы для  $\omega_c$ , в некотором масштабе строят векторную диаграмму относительных амплитуд  $a_i$  колебаний масс. Векторная диаграмма дает возможность определить геометрическую сумму относительных амплитуд колеба-

ний масс системы  $\sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{a}_i$  или  $A_{i\Sigma} = \sqrt{\left(\sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i\right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i\right)^2}$ .

4. Зная величину суммарного вектора относительных амплитуд масс  $\vec{a}_i$ , по формуле (119) находят действительную амплитуду угловых колебаний первой массы при резонансе  $\Phi_{k1}$ , вызванном гармоническим моментом  $k$ -го порядка.

5. Сравнив величины действительной  $\Phi_{k1}$  и относительной  $a_1$  амплитуд угловых колебаний первой массы, определяют масштаб амплитуд  $m$ <sup>11</sup>:

$$m = \frac{\Phi_{k1}}{a_1}.$$

Если первой массой в приведенной крутильной системе была первая моторная масса, то  $a_1=1$  и масштаб  $m = \Phi_{k1}$ .

6. Умножив на масштаб  $m$  относительные амплитуды  $a_i$ , полученные из таблицы расчета или из диаграммы свободных крутильных колебаний, находят их действительные величины:

$$\Phi_{ki} = ma_i. \quad (121)$$

По результатам расчета по формуле (121) в масштабе строят форму вынужденных колебаний системы.

Заметим, что амплитуды при резонансе зависят не только от геометрической суммы относительных амплитуд  $\sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{a}_i$ , но и от амплитуды гармоники  $M_{ki} = M_k^a \sin(k\omega t + \beta_k + k\delta_i)$  возбуждающего момента. Поэтому при расчете на резонансные колебания необходимо

---

<sup>11</sup> Напомним, что масштабом называется отношение величины в ее натуральной размерности к длине отрезка, изображающего ее на чертеже.

учитывать сочетание величин  $A_{i\Sigma}$  и  $M_{ki}$  для различных гармоник возбуждающего момента.

Следует помнить, что средние составляющие крутящего момента и момента сопротивления не влияют на крутильные колебания, а деформация вала, вызываемая ими, не влияет на форму свободных колебаний.

При расчете системы на резонансный режим ( $k\omega = \omega_{ci}$ ) надо иметь в виду, что резонансы могут возникать от всех гармоник (у четырехтактных двигателей существенные по величине амплитуды имеют первые шесть моторных гармоник) со всеми формами собственных колебаний  $n_{cI}, n_{cII}, \dots, n_{cn-1}$ . Однако практическое значение имеют резонансы от главных и сильных гармоник лишь с первой  $n_{cI}$  и иногда со второй  $n_{cII}$  формами колебаний.

Резонансные крутильные колебания с большой угловой амплитудой могут вызвать поломку крутильной системы и поэтому называются критическими резонансами, а соответствующая им частота вращения коленчатого вала  $n$ ,  $\text{мин}^{-1}$  – критической частотой.

Если обозначить среднюю угловую скорость вращения коленчатого вала при резонансной частоте через  $\omega_{p,k}$ , то  $k\omega_{p,k} = \omega_{ci}$ , где  $k$  – порядок резонирующей гармоники;  $\omega_{ci}$  – круговая частота  $i$ -го вида свободных крутильных колебаний. Так как  $\omega_{p,k} = (\pi n_{p,k})/30$ ;  $\omega_{ci} = (\pi n_{ci})/30$ , то  $k \frac{\pi n_{p,ki}}{30} = \frac{\pi n_{ci}}{30}$ . Здесь  $n_{ci}$  – частота  $i$ -го вида свободных крутильных колебаний,  $\text{мин}^{-1}$  (колебаний в минуту).

Откуда получим зависимость для определения резонансной частоты вращения коленчатого вала двигателя

$$n_{p,ki} = \frac{n_{ci}}{k}. \quad (122)$$

По формуле (122) определяют резонансную или критическую частоту вращения коленчатого вала для  $k$ -й гармоники при первой, а также второй формах колебаний:  $n_{p,kI} = n_{cI}/k$  и  $n_{p,kII} = n_{cII}/k$ ,  $\text{мин}^{-1}$ . Здесь  $n_{cI}$  и  $n_{cII}$  – собственные частоты колебаний крутильной системы соответственно при первой и второй формах колебаний.

Определять резонансные частоты вращения удобно по частотной диаграмме (рис. 50), на которой по оси ординат отложены частоты

ты свободных колебаний  $n_{ci}$  (число колебаний в минуту), а по оси абсцисс – частота вращения коленчатого вала двигателя  $n$ ,  $\text{мин}^{-1}$ . На диаграмме в виде пучка прямых показаны зависимости  $n_{ci} = kn$ .

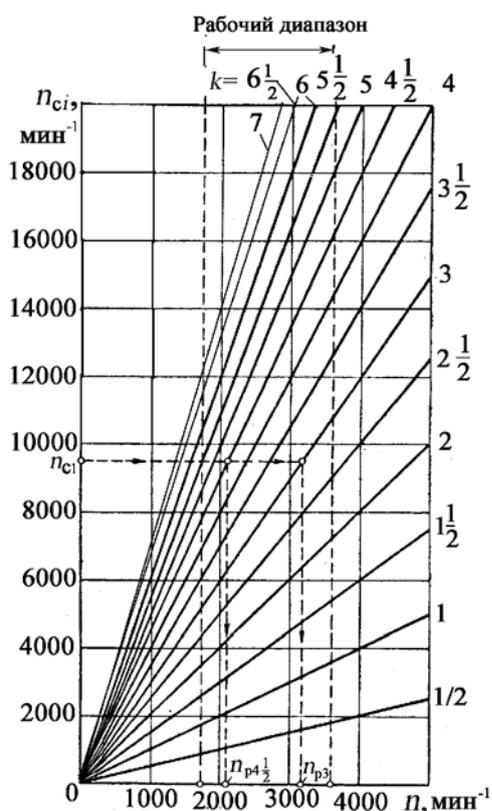


Рис. 50. Частотная диаграмма

Резонансную кривую можно построить по экспериментальным точкам, полученным после торсиографирования коленчатого вала [25].

Дополнительные касательные напряжения, возникающие в коленчатом валу от крутильных колебаний, определяют по расчетному моменту кручения, взятому в наиболее напряженном участке вала – в узловой точке. Расчет обычно проводят только для резонансных режимов, так как на этих режимах в узловой точке крутильно-колеблющейся системы возникают максимальные касательные напряжения от крутящих моментов, вызванного крутильными колебаниями.

Когда система находится в резонансе, то основную работу совершает только резонирующая гармоника (см. зависимость (113) для определения работы возбуждающего момента).

Если сопротивления в крутильной системе не очень велики, то при резонансе кривая амплитуд крутильных колебаний как функция угла поворота коленчатого вала почти не отличается от синусоиды с

Для автомобильных и тракторных двигателей при резонансных колебаниях обычно подразумевают резонансы одноузловой или двухузловой форм колебаний как результат действия гармоника того или иного порядка.

В дальнейшем покажем, что с использованием матричных методов можно определить амплитуды крутильных колебаний во всем диапазоне частот вращения коленчатого вала.

В результате расчета вынужденных колебаний строится кривая зависимости амплитуды угловых колебаний каждой массы системы от частоты вращения коленчатого вала двигателя. Такая кривая называется амплитудной кривой, или амплитудной характеристикой.

частотой резонирующей гармонике. Остальные (нерезонирующие) гармонике вызывают некоторое увеличение амплитуд угловых колебаний масс. Это обстоятельство, а также недостаточно точная оценка коэффициента демпфирования  $\xi$  являются причиной того, что величины как угловых перемещений масс приведенной крутильно-колеблющейся системы, так и касательных напряжений на этапе проектирования определяются приближенно. Следует также заметить, что при расчете на выносливость амплитудные касательные напряжения от крутильных колебаний  $\tau_{кр.к.}^a$  складываются с амплитудными касательными напряжениями  $\tau_a$  от действия переменного крутящего момента двигателя. В этом случае принимается допущение о синфазном изменении касательных напряжений, то есть  $\tau_{кр.к.}^a$  и  $\tau_a$  по углу поворота коленчатого вала изменяются в одной фазе.

Расчетный момент кручения или момент сил упругости  $M_{i,i+1}^{a упр.}$  от крутильных колебаний на участке вала между массами, имеющими моменты инерции  $I_i$  и  $I_{i+1}$  с коэффициентом жесткости  $c_{i,i+1}$  (см. рис. 42), определяется по угловой деформации этого участка (с учетом знаков  $a_i$ )

$$M_{i,i+1}^{a упр.} = c_{i,i+1}(a_i - a_{i+1})\Phi_{k1} = c_{i,i+1}(\Phi_{ki} - \Phi_{ki+1}). \quad (123)$$

Так, для шестицилиндрового четырехтактного однорядного двигателя (см. рис. 44) максимальный угол закрутки будет в узловой точке (между массами 6 и 7), а расчетный момент кручения от крутильных колебаний равен в соответствии с (123)

$$M_{6,7}^{a упр.} = c_{6,7}[a_6 - (-a_7)]m = 0,30c_{6,7}m,$$

где  $c_{6,7}$  – коэффициент жесткости на участке 6-7; величины  $a_i$  взяты из диаграммы на рис. 44;  $m$  – масштаб векторной диаграммы.

Дополнительные касательные напряжения в узловой точке от крутильных колебаний определяют по формуле

$$\tau_{кр.к.}^a = \frac{M_{j упр.}^a}{W_p}, \quad (124)$$

где  $M_{j упр.}^a$  – момент сил упругости, действующий в узловой точке;

$W_p = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^4 - d_B^4}{d}$  – полярный момент сопротивления сечения в узло-

вой точке действительного вала;  $d$  и  $d_v$  – наружный и внутренний диаметры сечения.

По формуле (123) определены амплитуда касательных напряжений  $\tau_{кр.к.}^a$  только от резонирующих гармоник. В действительности и остальные (нерезонирующие) гармоники вызывают некоторое увеличение амплитуд угловых колебаний масс.

Более точные значения угловых амплитуд и  $\tau_{кр.к.}^a$  могут быть найдены лишь так же, как и амплитуды после торсиографирования опытного образца двигателя.

При оценке амплитуд крутильных колебаний и  $\tau_{кр.к.}^a$  необходимо учитывать не только знакопеременный характер нагрузки, действующей на коленчатый вал, что вызывает разрушение от усталостных напряжений. Кроме того, крутильные колебания отрицательно влияют на привод систем двигателя, например механизма газораспределения, привода топливного насоса (для дизеля). В связи с этим в современных автомобильных дизелях [26] приводы всех механизмов систем перенесены с носка коленчатого вала на хвостовик, где угол закрутки меньше (см. рис. 44).

В современных тракторных двигателях коленчатые валы изготавливаются в основном из легированной стали 45Х. Как показали результаты анализа поломок коленчатых валов в эксплуатации при дополнительных напряжениях  $\tau_{кр.к.}^a = 20 \dots 25$  МПа происходит усталостное разрушение в сечении, совпадающем с узловой точкой [27].

### Вопросы для самопроверки

1. Какой примерный порядок определения действительной амплитуды масс крутильно-колеблющейся системы при резонансе?
2. Для чего строится частотная диаграмма?
3. Как определяются резонансы гармоник возбуждающего момента?
4. Как учитываются касательные напряжения при крутильных колебаниях?
5. В каком сечении коленчатого вала касательные напряжения принимают максимальное значение?

## Глава 4. СПОСОБЫ ДЕМПФИРОВАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ И ТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

### 4.1. Способы уменьшения амплитуд и дополнительных напряжений при крутильных колебаниях

Если в результате расчета амплитуд крутильных колебаний от действия возбуждающей резонирующей гармоники касательные напряжения в сечении, совпадающем с узловой точкой, превышают допускаемые, то для их уменьшения или полного устранения возможны следующие способы.

1. Изменение порядка работы цилиндров или угла развала между цилиндрами для *V*-образных двигателей. В этом случае меняются начальные фазовые углы  $\delta_i$  возбуждающих гармоник, что позволяет уменьшить величину

равнодействующего вектора  $A_{i\Sigma} = \sqrt{\left(\sum_1^{n-1} a_i \sin k\delta_i\right)^2 + \left(\sum_1^{n-1} a_i \cos k\delta_i\right)^2}$ , а тем

самым и действительные амплитуды колебаний  $\Phi_i$  (см. формулу (119)).

Этот способ применим только для четырехтактных двигателей, причем для тех, у которых можно выбрать несколько порядков работы цилиндров (последовательность моментов воспламенения рабочей смеси). Так, для шестицилиндрового однорядного четырехтактного двигателя возможны следующие порядки: 1-5-3-6-2-4; 1-2-4-6-5-3; 1-4-2-6-3-5; 1-4-5-6-3-2 [28]. В некоторых случаях при использовании рассматриваемого способа вместо устраненного критического резонанса от одной гармоники может возникнуть критический резонанс от другой.

2. Изменение собственных частот крутильной системы за счет увеличения крутильной жесткости (увеличения диаметров шатунных и коренных шеек, размеров щек), а также уменьшения масс деталей кривошипно-шатунного механизма и цилиндропоршневой группы. При рассмотрении свободных колебаний двухмассовой системы была получена

зависимость для определения частоты собственных колебаний при известных моментах инерции  $I_i$  колеблющихся масс и суммарном коэффициенте жесткости системы  $c_{1,2}$   $f_c = 0,159\omega_c = 0,159\sqrt{[c_{1,2}(I_1 + I_2)]/I_1I_2}$ .

Из полученной зависимости следует, что с уменьшением моментов инерции  $I_i$  и с увеличением  $c_{1,2}$  частота собственных колебаний увеличивается, а значит, наступление резонанса может произойти за пределами рабочих частот вращения коленчатого вала. Из этой формулы следует, что наиболее эффективным средством увеличения частоты собственных колебаний является увеличение диаметров коренных и шатунных шеек. Однако как показывает опыт, этот способ часто приводит к значительному изменению конструкции двигателя.

3. Для автомобильных и тракторных поршневых двигателей практически единственным кардинальным методом уменьшения амплитуд крутильных колебаний и касательных напряжений в сечении коленчатого вала, совпадающем с узловой точкой, является применение демпферов.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какие способы уменьшения влияния крутильных колебаний можно использовать в автомобильных и тракторных двигателях?

2. Почему меняется собственная частота крутильных колебаний при увеличении диаметров коренных и шатунных шеек?

3. Какие кардинальные меры принимаются для снижения уровня крутильных колебаний?

### **4.2. Демпферы крутильных колебаний**

Демпферы уменьшают амплитуды крутильных колебаний за счет рассеяния энергии. Они состоят из двух частей, одна из которых соединена с коленчатым валом жестко, а другая имеет связь с первой либо через упругий резиновый слой, либо через тонкий слой вязкой жидкости. Первая часть называется корпусом, а вторая – маховиком демпфера. При относительных перемещениях маховика и корпуса демпфера возникает работа трения, поглощающая часть работы возмущающих гармоник. Работа сил трения превращается при этом в тепло, которое рассеивается в окружающую атмосферу.

По характеру сопротивлений, используемых для поглощения энергии гармоники возбуждающего момента, а также по характеру связи между корпусом и маховиком демпфера для автомобильных и тракторных двигателей делят на демпферы внутреннего трения (резиновые демпферы) и жидкостного трения.

В автомобильных двигателях широкое распространение получили резиновые демпферы крутильных колебаний. Демпфер такого типа (рис. 51) представляет собой маховик, соединенный слоем резины с укрепленным на коленчатом валу корпусом. При равномерном вращении коленчатого вала демпфер вращается с ним как одно целое. При возникновении крутильных колебаний вала маховик стремится продолжать равномерное вращение, вследствие чего резиновый слой будет то скручиваться, то раскручиваться. При этом часть энергии возмущающих моментов поглощается внутренним трением резинового слоя и рассеивается затем в окружающую среду.

Резиновый слой может быть выполнен в виде цилиндра (рис. 51, а) или иметь в продольном сечении Г-образную форму (сопряжение кольцевой формы маховика и корпуса, рис. 51, б), для изготовления которого используется сырая резина. Сырая резина является пластичной, вследствие чего ей может быть придана необходимая форма, которая фиксируется после вулканизации, а сама резина приобретает значительную упругость. Резиновый слой

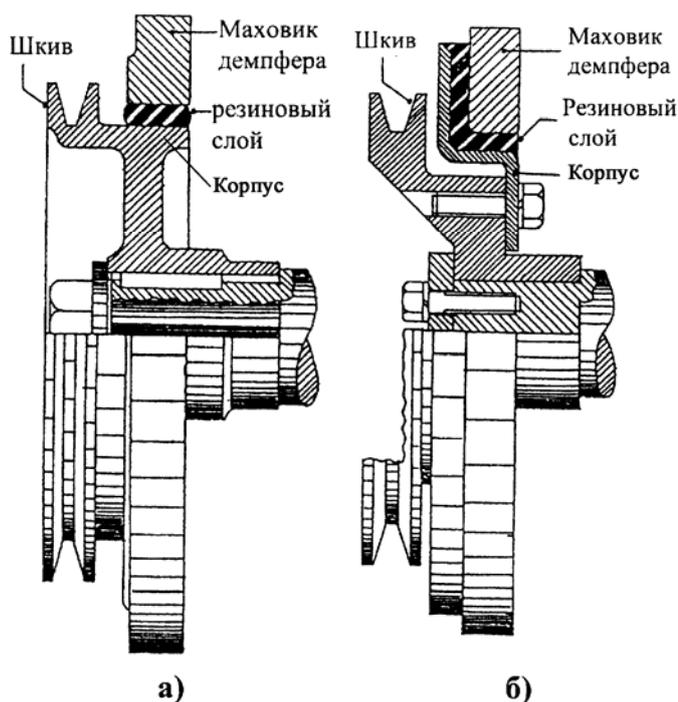


Рис. 51. Резиновые демпферы

цилиндрической формы (см. рис. 51, а) чаще всего не вулканизируют, а запрессовывают свулканизированные готовые резиновые стержни в зазор между маховиком и корпусом, устанавливаемым на коленчатом валу. Основными свойствами, определяющими работоспособность резинового слоя в демпферах крутильных колебаний, является ее уп-

ругость, усталостная прочность, гистерезисные потери, термостойкость (в условиях температур от  $-40$  до  $120$  °С), маслостойкость.

Так как резиновый слой обладает упругостью, то при установке на коленчатом валу резинового демпфера крутильная система изменяется. К числу степеней свободы крутильной системы коленчатого вала добавляется еще одна, связанная с крутильно-колеблющейся системой упругой связью с коэффициентом жесткости значительно меньшим, чем для коленчатого вала. Так, например, для дизеля 6 ЧН 10,5/12,0 (Д160) коэффициент жесткости приведенного вала на участке между моторными массами равен  $1160000$  Н·м, а резинового слоя демпфера –  $22950$  Н·м (отличается в 50 раз). Следовательно, добавляется еще одна частота свободных колебаний и соответствующая этой частоте еще одна форма колебаний. Это приводит к тому, что вместо критической частоты вращения  $n_k$  (при работе двигателя без демпфера) появляются новые критические частоты вращения  $n_{k(1)}$  и  $n_{k(2)}$ , более низкие и более высокие, чем  $n_k$ . При этом резонансные колебания, соответствующие более низкой частоте  $n_{k(1)}$ , чем резонансная частота без демпфера  $n_k$ , будут одноузловыми с узлом колебаний у маховика двигателя. Колебания, соответствующие высокой частоте  $n_{k(2)}$ , будут двухузловыми с одним узлом колебаний у маховика двигателя, а другим – в резиновом слое демпфера. Как будет показано при расчете параметров резинового демпфера, это будет использовано для подбора коэффициента жесткости резинового слоя.

Демпферы внутреннего трения (резиновые) отличаются от других демпферов небольшой массой, простотой конструкции и большой эффективностью: часто максимальная амплитуда при резонансе уменьшается в 4,5 раза [29].

К отрицательным свойствам резиновых демпферов относится некоторое различие в свойствах резинового слоя даже демпферов одной и той же конструкции, а также изменение этих свойств со временем.

Наиболее частыми причинами отказов демпферов внутреннего трения является расслаивание резины под действием температуры, масла и циклического изменения напряжений [5]. Кроме того, при вулканизации, особенно при изготовлении резинового демпфера Г-образной формы, из-за высоких касательных напряжений [30], происходит отслоение резины от боковых поверхностей шкива и махови-

ка (см. рис. 51, б). Для повышения долговечности таких демпферов необходимо строго соблюдать технологию изготовления, а кроме того, необходимо провести предварительный расчет резинового слоя на предмет допустимости касательных напряжений [31]. Заметим, что на двигателях автомобилей ВАЗ 2110 на маховике демпфера была нарезана шестерня клинового ремня для привода механизма распределения. При срезании резинового слоя сбиваются фазы газораспределения.

Для демпферов внутреннего трения цилиндрической формы один из возможных видов отказов – соскок (или выпрессовывание) маховика демпфера (см. рис. 51, а) с резинового слоя под действием вибрационных и боковых нагрузок. Чтобы этого не произошло, часто приклеивают цилиндрические поверхности демпфера к соответствующим поверхностям маховика и шкива.

Нами было предложено простое конструктивное решение: центрирование маховика внутренней кольцевой поверхностью относительно оси симметрии О-О (рис. 52), перпендикулярной оси вращения [5]. Для этого в демпфере крутильных колебаний, содержащем шкив 1, резиновую втулку 2, коаксиально установленную между шкивом 1 и маховиком 3, выполненного в виде кольца. Кольцевые поверхности 4 шкива и 5 маховика 3 выполнены наклонными с углами наклона  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , равными или большими углам трения между поверхностями 4 и 5 ( $\alpha_1 \leq 7^\circ$ ) к торцевым поверхностям шкива 6 и маховика 7.

Это позволяет удерживать маховик строго по оси симметрии О-О, а кроме того, происходит центрирование его, поскольку перемещение может происходить только в сторону меньшей деформации резинового слоя.

Таким образом, для повышения долговечности демпферов необходимо на стадии проектирования выбирать оптимальные с точки зрения гашения крутильных колебаний конструктивные размеры.

Для повышения эксплуатационной надежности демпферов внутреннего трения нами использовались в качестве демпфирующих материалов вместо резины термопластичные полиуретаны, в частности

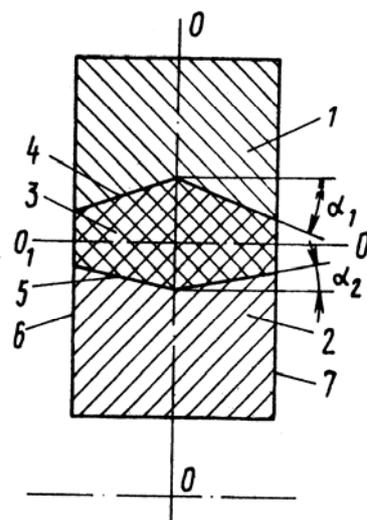


Рис. 52. Центрирование маховика на упругом слое

термопластичный полиуретан витур Т-0333-95 [32]. Условная прочность такого материала при растяжении 19...22 МПа (у резины 12...35 МПа). Но самое главное, изделия из витура могут эксплуатироваться в условиях повышенной влажности в интервале температур от -60 до +80 °С, а также обладают высокой маслостойкостью (могут использоваться также в качестве прокладок).

Жидкостные демпферы крутильных колебаний коленчатых валов ДВС (рис. 53) представляют собой корпус 1 демпфера, жестко установленный на валу. В корпусе имеется отверстие для выхода воздуха при заливке в корпус жидкости, закрываемое заглушкой 2. Маховик 3 демпфера устанавливается в корпус и полость, закрывается крышкой 4, которая приваривается к корпусу аргоновой сваркой.

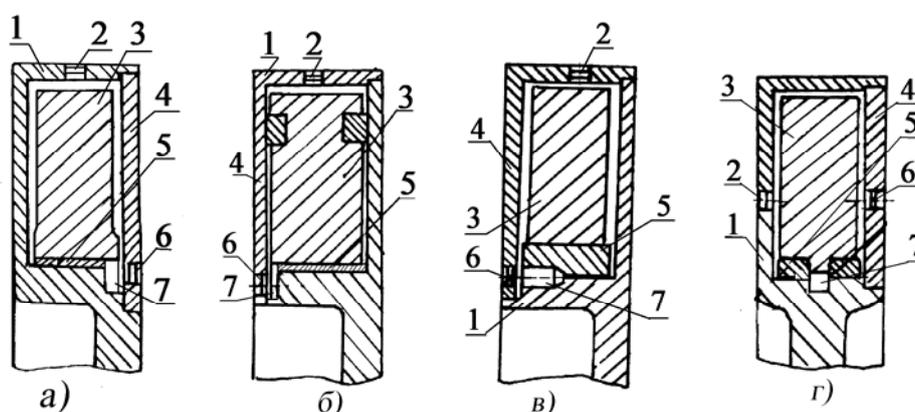


Рис. 53. Применяемые конструкции жидкостных демпферов: 1 – корпус демпфера; 2 – заглушка отверстия для выхода воздуха при заливке ПМС жидкости; 3 – маховик демпфера; 4 – крышка демпфера; 5 – подшипники скольжения; 6 – заглушка отверстия для заливки ПМС жидкости; 7 – компенсационная полость: а – г – различные конструктивные оформления жидкостных демпферов

Маховик может вращаться на подшипниках 5. Через отверстие в крышке в зазоры между крышкой и маховиком заливают полимер линейной структуры – полиметилсилоксановую (ПМС) жидкость и закрывают заглушкой 6. В корпусе 1 имеется компенсационная полость для расширения жидкости ПМС при нагреве.

Таким образом, как это следует из конструкции жидкостных демпферов крутильных колебаний, маховик демпфера и корпус раз-

делены зазором, в котором находится тонкий слой полиметилсилоксановой или силиконовой жидкости с высокой динамической вязкостью. Так, для выпускаемых отечественной промышленностью полиметилсилоксановых жидкостей ПМС-20000...ПМС-1500000 динамическая вязкость  $\eta_0$  находится в пределах  $\eta_0 = 20 \dots 1500$  Па·с [33].

При равномерном вращении коленчатого вала жидкостный демпфер вращается с ним как одно целое. При возникновении крутильных колебаний вала маховик на подшипнике стремится продолжать равномерное вращение, вследствие чего между ним и корпусом появляется относительная скорость смещения. В результате этого смещения в силиконовой жидкости, находящейся в зазорах, возникает сила трения. При этом часть энергии возмущающих моментов поглощается внутренним трением в слоях силиконовой жидкости и рассеивается затем в окружающую среду.

В отличие от резиновых жидкостные демпферы не требуют обслуживания, хотя трудоемкость их изготовления выше. Для обеспечения эксплуатационной надежности жидкостных демпферов необходимо обеспечить невысокую скорость сдвига  $D = v/h$  в слоях жидкости при крутильных колебаниях. Здесь  $v$  – скорость смещения двух разделенных зазором  $h$  корпуса и маховика. При  $h \leq 0,35 \dots 0,40$  мм  $D_{кр} \leq 250 \dots 300$  с<sup>-1</sup>. При большем значении скорости сдвига  $D$  в жидкости ПМС сначала проявляется эффект разжижения (снижение вязкости), а далее после многих циклов нагружения – существенное повышение вязкости. Жидкость при этом образует рыхлую гелеобразную структуру. Чтобы разрушить эту структуру и осуществить перемещение маховика 3 (см. рис. 53), требуется приложение конечной силы. Другими словами, такая силиконовая жидкость проявляется как бингамовское вязкопластичное тело, поэтому корпус демпфера и маховик вращаются как единое целое. Демпфер в этом случае перестает выполнять свои функции. Это явление мы назвали дилатансией<sup>12</sup> [34].

Кроме того, при эксплуатации возможны износы подшипников скольжения 5 (см. рис. 52), что приводит часто к заклиниванию маховика 3. Продукты износа, попадая в силиконовую жидкость, также могут привести к ее дилатансии.

---

<sup>12</sup> Этот термин получил свое название от английского *deletion of viscosity* – потеря вязкости.

Для снижения износа подшипников скольжения, которые обычно изготавливаются из бронзы ОЦС -5-5-5, можно подобрать другие износостойкие материалы. Так, нами использовались для подшипников материалы на основе ароматических полиамидов, обладающих кроме того способностью уменьшить трение, в частности, фенилон С-2 и графелон 20 [35]. Для дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) были изготовлены опытные образцы демпферов, маховики которых центрировались по внутреннему диаметру на подшипниках, выполненных из фенилона С-2 и графелона 20. Результаты проведенных стендовых испытаний опытных образцов подтвердили, что износостойкость подшипников из полиамидов в 2...2,5 раза выше, чем изготовленных из бронзы ОЦС -5-5-5.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какие демпферы крутильных колебаний в основном используются в автомобильных и тракторных двигателях?
2. Как снижает уровень крутильных колебаний резиновый демпфер?
3. Какие эксплуатационные отказы возникают в резиновых демпферах?
4. Как снижает уровень крутильных колебаний жидкостный демпфер?
5. Какая жидкость используется в жидкостных демпферах?
6. Что называется дилатансией жидкости ПМС?

### **4.3. Выбор оптимального коэффициента демпфирования и коэффициента жесткости упругого слоя демпферов внутреннего трения**

Пусть  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – соответственно мгновенные значения углов поворота маховика и первой массы, в качестве которой выбран корпус в виде втулки вместе со шкивом на носке коленчатого вала (рис. 54). Тогда мгновенное значение относительного угла поворота между массами с моментами инерции  $I_0$  (маховик) и  $I_1$  (втулка вместе со шкивом) оказывается равным  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ . Крутящий момент, действующий на маховик демпфера согласно аналогу закона Ньютона для вращательного движения [20], равен  $I_0\ddot{\varphi}_0$ , причем этот момент уравновешивается моментами сопротивления от рассеяния энергии в ре-

зиновом слое и упругих сил. Используя уравнение (69), рассмотрим свободные колебания двухмассовой системы с демпфером.

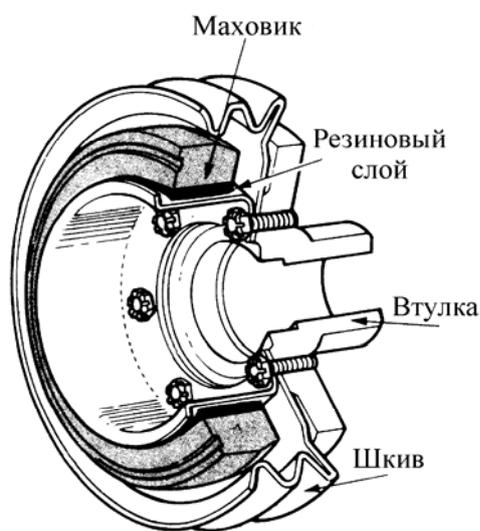


Рис. 54. Резиновый демпфер крутильных колебаний

Считаем, что при крутильных колебаниях угловое перемещение втулки относительно маховика равно  $(\varphi_1 - \varphi_0)$ , где  $\varphi_1$  – угловое перемещение втулки;  $\varphi_0$  – то же маховика. Тогда из уравнения (69) при свободных колебаниях имеем

$$I_0 \ddot{\varphi}_0 = \xi_0 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) + c_{0,1} (\varphi_1 - \varphi_0). \quad (125)$$

Здесь  $\xi_0$  – коэффициент демпфирования в резиновом слое, Н·м·с;  $c_{0,1}$  – коэффициент его жесткости.

Если представить, что массы с моментами инерции  $I_0$  и  $I_1$  перемещаются по закону

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A_0 e^{i\omega_c t}; \\ \varphi_1 &= A_1 e^{i\omega_c t}, \end{aligned} \quad (126)$$

то получим уравнение относительно неизвестного угла  $\varphi_0$  как функции угла  $\varphi_1$ . Здесь  $\omega_c$  – круговая частота собственных колебаний крутильной системы;  $A_0$  и  $A_1$  – амплитуды крутильных колебаний маховика демпфера и втулки (корпуса).

Подставив значение первой производной по  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , а также второй производной по  $\varphi_0$  из (126) в уравнение (125), получим в комплексной форме:

$$A_0 I_0 \omega_c^2 - A_0 c_{0,1} - i A_0 \xi_0 \omega_c = -A_1 c_{0,1} - i A_1 \xi_0 \omega_c. \quad (127)$$

Разрешая это уравнение относительно амплитуды колебаний  $A_0$  маховика демпфера, находим:

$$A_0 = \frac{-c_{0,1} - i \xi_0 \omega_c}{I_0 \omega_c^2 - c_{0,1} - i \xi_0 \omega_c} A_1 \quad (128)$$

или в действительной форме

$$A_0 = \frac{\sqrt{c_{0,1}^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}}{\sqrt{(I_0 \omega_c^2 - c_{0,1})^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}} A_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c_{0,1}}{\xi_0 \omega_c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} - \frac{c_{0,1}}{\xi_0 \omega_c}\right)^2}} A_1. \quad (129)$$

Заметим, что для жидкостного демпфера  $c_{0,1}=0$ . Тогда из уравнения (129) получим

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{I_0 \omega_c}{\xi_0}\right)^2}} A_1. \quad (130)$$

Это решение совпадает с результатом, приведенным в работе [20] для жидкостного демпфера.

Анализируя (129), устанавливаем тот физический факт, что при  $\xi_0 = c_{0,1} = 0$  (нет никакой связи с массой с моментом инерции  $I_1$ )  $\varphi_0=0$ , тогда как для  $\xi_0 \omega + c_{0,1} = \infty$  (маховик и втулка составляют единое целое), имеем  $\varphi_0 = \varphi_1$ .

Наибольший крутящий момент, передаваемый маховику демпфера, равен  $I_0 \omega_c^2 A_0$ . Работа за цикл, т. е. за одно полное колебание, равна [20]

$$W = \pi (I_0 \omega_c^2 A_0) (A_1 - A_0), \quad (131)$$

где разность амплитуд  $A_1$  и  $A_0$  найдем по правилу вычитания комплексных величин

$$A_1 - A_0 = \frac{I_0 \omega_c^2}{I_0 \omega_c^2 - c_{0,1} - i \xi_0 \omega_c} A_1$$

или в действительной форме

$$A_1 - A_0 = \frac{I_0 \omega_c^2}{\sqrt{(I_0 \omega_c^2 - c_{0,1})^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}} A_1. \quad (132)$$

Подставляя в (131) значение  $A_0$  из (129), а разность амплитуд – из (132) и производя преобразования, находим:

$$W = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2 \cdot 2 \frac{\sqrt{\left(\frac{c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}}{\left(1 - \frac{c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}. \quad (133)$$

Для демпфера жидкостного трения, приняв  $C_{0,1}=0$ , из (133) получим

$$W = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2 \frac{2\xi_0}{1 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}. \quad (134)$$

Решение (134) совпадает с выражением, приведенным в работе [20]. Дробь, стоящая в знаменателе формулы (134), достигает наибольшего значения, равного единице, при  $\xi_0/(I_0 \omega_c) = 1$ . Это легко может быть найдено дифференцированием (134). Таким образом, заключаем, что оптимальное затухание для жидкостного демпфера (для максимума рассеиваемой энергии) определяется формулами

$$\xi_{\text{опт.}} = I_0 \omega_c; \quad (135)$$

$$W_{\text{опт.}} = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2. \quad (136)$$

На рис. 55 [20] графически представлена зависимость в безразмерных величинах  $Y=f(X)$ , где согласно (134)

$$Y = \frac{W}{\frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2}, \quad X = \frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}.$$

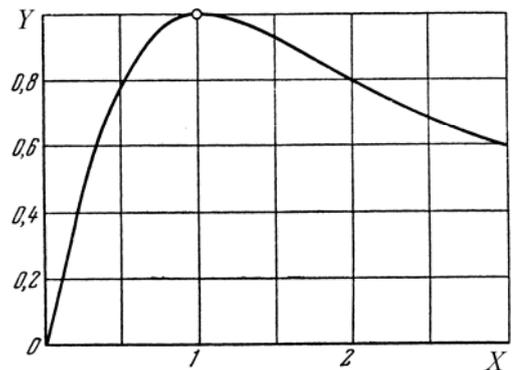


Рис. 55. Работа, рассеиваемая за период колебаний демпфером внутреннего трения в относительных величинах  $Y$  и  $X$

Что касается момента сил инерции или эквивалентного инерционного момента, воспринимаемого втулкой (см. рис. 54) или корпусом жидкостного демпфера с моментом инерции  $I_0$ , то согласно [20] он равен  $I_{\text{ЭКВ}} \omega_c^2 A_1 = \frac{A_0}{A_1} (I_0 \omega_c^2 A_0)$ , откуда эквивалентный момент инерции равен  $I_{\text{ЭКВ.}} = I_0 \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2$  или согласно уравнению (129)

$$I_{\text{ЭКВ.}} = I_0 \frac{1 + \left( \frac{c_{0,1}}{\xi_0 \omega_c} \right)^2}{1 + \left( \frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} - \frac{c_{0,1}}{\xi_0 \omega_c} \right)^2}. \quad (137)$$

Для жидкостного демпфера крутильных колебаний ( $c_{0,1}=0$ ) из (137) получим

$$I_{\text{ЭКВ.}} = I_0 \frac{1}{1 + \left( \frac{I_0 \omega_c}{\xi_0} \right)^2}. \quad (138)$$

Для оптимального затухания  $\xi_0 = I_0 \omega_c$ , откуда получаем

$$I_{\text{ЭКВ.}} = 0,5 I_0. \quad (139)$$

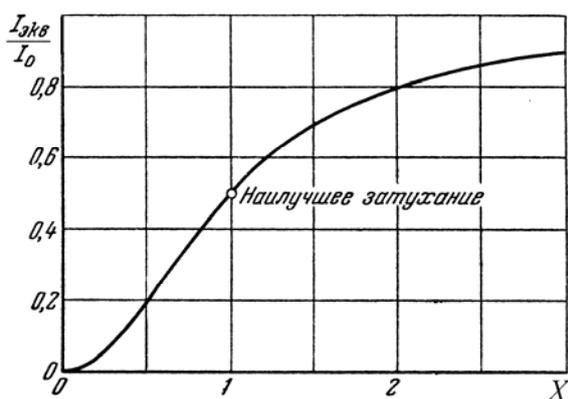


Рис. 56. Действие эквивалентного маховика на первую массу в демпфере в зависимости от момента затухания

висимость (139) верна только тогда, когда затухание является оптимальным согласно уравнению (135), что справедливо для заданного демпфера лишь при одной определенной частоте колебаний. Однако

Результаты (137) и (139) представлены графически на рис. 56. При расчете собственных колебаний системы с жидкостным демпфером половина момента инерции маховика приплюсовывается к моменту инерции первой массы.

Напомним, что мы условились массу маховика демпфера обозначать 0, а следующую за ним массу 1. Строго говоря, за-

расчет начинается с оптимального затухания. Рассчитывая систему, находим опасную частоту и тогда уже назначаем затухание  $\xi_0$  для демпфера так, чтобы иметь оптимум. Это может быть сделано для демпфера внутреннего трения выбором демпфирующего материала с соответствующими размерами и коэффициентом жесткости  $c_{0,1}$ , а для жидкостного – вязкости демпфирующей жидкости, а также установления зазора между маховиком и корпусом демпфера, поскольку оба эти фактора влияют на величину  $\xi_0$ .

Исследуя, при каких условиях  $W$  из зависимости (134) достигает максимума, можно найти, что максимальное затухание для демпфера внутреннего трения возможно при следующих условиях [20]:

$$\xi_{0\text{опт}} = I_0 \omega_c \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{\frac{2c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}}\right)^2 - \left(\frac{c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2}. \quad (140)$$

Нетрудно заметить, что условие (140) при  $c_{0,1}=0$  приводит к результату (135), полученному для жидкостного демпфера крутильных колебаний.

Заметим, что проводить оптимизацию по уравнению (140) можно, изменяя только коэффициент жесткости  $c_{0,1}$  и момент инерции маховика демпфера  $I_0$ , поскольку частота собственных колебаний определяется по известным зависимостям. Кроме того, строго говоря, коэффициент демпфирования  $\xi_0$  также зависит от круговой частоты свободных крутильных колебаний системы  $\omega_c$ , поэтому зависимость (140) хорошо выполняется при высоких значениях величин  $I_0$  и  $c_{0,1}$ , что не всегда возможно обеспечить при конструировании демпфера внутреннего трения.

### Вопросы для самопроверки

1. Какие конструктивные параметры демпфера внутреннего трения влияют на коэффициент демпфирования?
2. Какие конструктивные параметры демпфера жидкостного трения влияют на коэффициент демпфирования?
3. Что понимается под оптимальным демпфированием?
4. Как определять частоту собственных колебаний системы с жидкостным демпфером?

5. Как определять частоту собственных колебаний системы с демпфером внутреннего трения?

6. Какие параметры резинового демпфера влияют на коэффициент демпфирования?

#### 4.4. Определение демпфирующих свойств и коэффициента жесткости резинового слоя

При расчете резинового слоя принимается [21, 23], что статический модуль упругости первого рода  $E_{ст} = 0,98 \dots 4,9$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,47$ , а модуль первого  $E_{ст}$  и второго рода  $G$  связаны зависимостью  $E_{ст} = 3G$ . Отрыв привулканизированной резины от металлической поверхности происходит при напряжении  $\sigma_{отр} = 4$  МПа, а предел прочности на разрыв резиновых образцов  $\sigma_{в} = 12 \dots 35$  МПа [21].

В координатах  $\sigma$ - $\varepsilon$  (напряжение-деформация) цикл при гармоническом законе изображается замкнутой кривой (так называемая петля гистерезиса). Отношение амплитуды напряжения к амплитуде деформаций  $\Delta\sigma/\Delta\varepsilon = E_d$  характеризует жесткость резины при данном законе изменения деформации и называется динамическим модулем упругости.

Величина гистерезисных потерь характеризуется модулем внутреннего трения резины  $K$ , равным отношению удвоенной площади петли гистерезиса  $f$  к квадрату амплитуды деформаций:

$$K = 2f / (\Delta\varepsilon)^2, \text{ МПа.}$$

Часто в практике используется также так называемый коэффициент относительного внутреннего трения  $\psi$ , представляющий собой отношение энергии, рассеянной в течение цикла (т.е. площади петли гистерезиса) к упругой энергии  $(\Delta\sigma\Delta\varepsilon)/2$ , соответствующим амплитудным деформациям:  $\psi = 2f / \Delta\sigma\Delta\varepsilon$ . Ориентировочно можно принять, что логарифмический декремент затухания  $\delta = \psi/2$ .

Коэффициент  $\psi$  связан с динамическим модулем  $E_d$  и модулем внутреннего трения  $K$  соотношением  $\psi = K/E_d$ .

При скручивании резинового слоя, изменяя величину крутящего момента по гармоническому закону, можно также построить петлю гистерезиса в координатах  $M - \varphi$ , где  $M$  – крутящий момент;  $\varphi$  – угол закручивания. Отношение площади этой петли  $f$  к работе  $M\varphi/2$  определяет коэффициент демпфирования резинового слоя  $\psi$  при кручении.

Динамический модуль и модуль внутреннего трения зависят, вообще говоря, от частоты деформации. Однако изменение частоты в пределах 10...200 Гц мало влияет на значение  $E_d$  и  $K$ , поэтому при расчете деталей, воспринимающих динамическую нагрузку, можно считать, что  $E_d$  и  $K$  не зависят от частоты. Необходимо также иметь в виду, что динамический модуль упругости  $E_d$  заметно выше статического  $E_{ст}$ , определяемого при растяжении резиновых образцов.

Отношение  $E_d / E_{ст}$  зависит от состава и степени вулканизации резины; оно изменяется от 1,1...1,4 для малонаполненных и нормально вулканизированных резин из натурального каучука, а также от 1,5...2 для сильно наполненных резин из синтетического каучука. Отметим, что отношение  $c_{фд}/c_{фст}$ , где  $c_{фд}$  и  $c_{фст}$  – коэффициенты крутильной жесткости резинового слоя при динамическом и статическом нагружениях, изменяется в таких же пределах. При увеличении температуры динамический коэффициент жесткости и модуль внутреннего трения (от величины которого зависит демпфирование колебаний) резины снижаются. Это необходимо учитывать при расчете амплитуды крутильных колебаний коленчатого вала ДВС.

Найдем аналитические зависимости для коэффициентов жесткости резинового слоя демпфера внутреннего трения, а также напряжений, которые возникают в нем при крутильных колебаниях [21].

При равномерном вращении коленчатого вала демпфер вращается с ним как одно целое. При возникновении крутильных колебаний вала маховик стремится продолжать равномерное вращение, вследствие чего резиновый слой между маховиком и втулкой (корпусом) (см. рис. 54) будет то скручиваться, то раскручиваться. При этом часть энергии возмущающих моментов поглощается внутренним трением резинового слоя и рассеивается затем в окружающую среду. Заметим, что резиновый слой, находящийся между внутренним радиусом маховика и корпусом в виде втулки (в форме цилиндра, рис. 57), работает на коаксиальное кручение. Обозначим  $r_1$  и  $r_2$  внутренний и наружный радиусы резинового слоя (цилиндра),  $l$  – длину его.

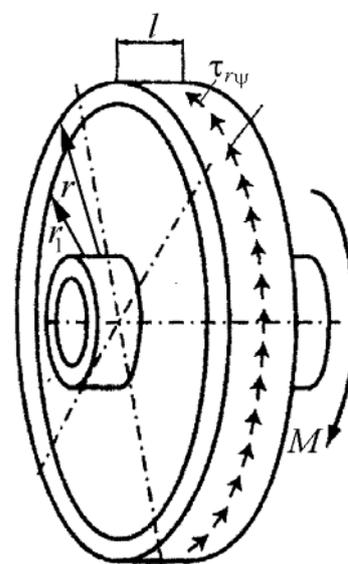


Рис. 57. К определению напряжений при скручивании цилиндрического резинового слоя

Рассечем резиновый слой цилиндрической поверхностью радиусом  $r$  (см. рис. 57). Полагаем, что приложенные к этой поверхности касательные напряжения  $\tau_{r\psi}$  уравновешивают приложенный к втулке внешний момент  $M$ . В действительности крутящий момент  $M$ , скручивающий резиновый слой, появляется в результате крутильных колебаний. Корпус в виде втулки (см. рис. 54) совершает гармонические крутильные колебания с амплитудой  $\Phi_1$ , маховик –  $\Phi_0$ , величины которых определяются из расчета вынужденных крутильных колебаний коленчатого вала ДВС, а по величине разности амплитуд  $\Phi_1 - \Phi_0$  можно определить  $M$ , вызывающий этот угол закручивания.

Из зависимости (132)

$$A_1 - A_0 = A_1 \eta_B, \quad (141)$$

где 
$$\eta_B = \frac{I_0 \omega_c^2}{\sqrt{(I_0 \omega_c^2 - c_{0,1})^2 + \xi_0^2 \omega_c^2}}.$$

Тогда

$$M = c_{0,1} A_1 \eta_B. \quad (142)$$

С другой стороны, умножая напряжение  $\tau_{r\psi}$  на величину боковой поверхности выделенного цилиндра и на его радиус  $r$  (см. рис. 57), найдем крутящий момент  $M$ :

$$\tau_{r\psi} 2\pi r^2 l = M,$$

откуда 
$$\tau_{r\psi} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (143)$$

Таким образом, напряжение обратно пропорционально квадрату радиуса и достигает максимума на внутренней поверхности резинового слоя около радиуса  $r_1$

$$\tau_{\max} = \frac{M}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r_1^2}. \quad (144)$$

При малых деформациях связь между моментом  $M$  и углом закручивания резинового слоя  $\varphi$  найдем из рассмотрения потенциальной энергии деформации и работы момента  $M$

$$\frac{1}{2} M \varphi = \iiint_{\Omega} \frac{\tau_{r\psi}^2}{2G} d\Omega, \quad (145)$$

где интеграл берется по всему объему  $\Omega$  резинового слоя.

Заменяя в уравнении (145) касательное напряжение  $\tau_{r\varphi}$  его значением (143) и выбрав в качестве элемента объема элементарный цилиндр  $d\Omega = 2\pi r l dr$ , вычислим интеграл в уравнении (145):

$$\frac{1}{2} M \varphi = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M^2}{4\pi^2 l^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} = \frac{M^2}{4\pi G l} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2 r_2^2},$$

откуда 
$$\varphi = \frac{M}{4\pi G l} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}. \quad (146)$$

Поскольку в действительности угол закручивания  $\varphi$  резинового слоя определяется заранее при расчете амплитуд крутильных колебаний приведенной системы, то из формулы (146) определим значение крутящего момента  $M$ , который мог бы вызвать закручивание на этот угол

$$M = A_1 \eta_B \frac{4\pi G l r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (147)$$

Подставив значение  $M$  из (147) в (143), определим максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = A_1 \eta_B \frac{2G r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (148)$$

что позволит проверить на прочность резиновый слой  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ .

Из формулы (147) легко определить коэффициент крутильной жесткости  $c_{0,1}$  резинового слоя цилиндрической формы (если  $\varphi=1$ , тогда  $M=c_{0,1}$ ) [20, 23, 30]

$$c_{0,1} = \frac{4\pi G l r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (149)$$

Определим также напряжения и перемещения при осевой нагрузке на резиновый слой [21]. При движении транспортного средства нагрузка, действующая на маховик демпфера от сил инерции, может вызвать его осевое перемещение.

Если условно снова вырезать цилиндр радиусом  $r$  (рис. 58), то можно установить, что внешняя нагрузка  $P$  (равнодействующая всех сил инерции) урав-

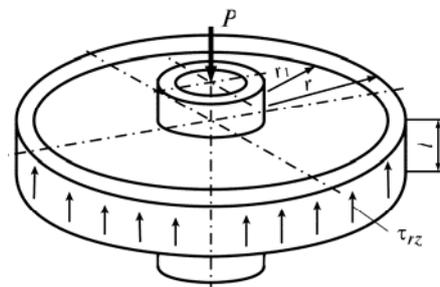


Рис. 58. К определению напряжений при осевой нагрузке на резиновый слой

новешивается приложенными по поверхности цилиндра касательными напряжениями. Считая, что касательные напряжения  $\tau_{rz}$  распределены по поверхности цилиндра равномерно, получим (см. рис. 58):

$$\tau_{rz} 2\pi r l = P.$$

Откуда 
$$\tau_{rz} = \frac{P}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r}.$$

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{rz}$  снова возникает на внутренней поверхности резинового слоя на радиусе  $r_1$

$$\tau_{\max} = \frac{P}{2\pi l} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Осевое перемещение  $\Delta$  маховика демпфера под действием силы  $P$  определим, приравнявая работу этой силы потенциальной энергии деформации резины:

$$\frac{1}{2} P \Delta = \iiint_v \frac{\tau^2}{2G} dv = \frac{1}{2G} \cdot \frac{P^2}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{P^2}{4\pi G l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Откуда 
$$\Delta = \frac{P}{2\pi G l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (150)$$

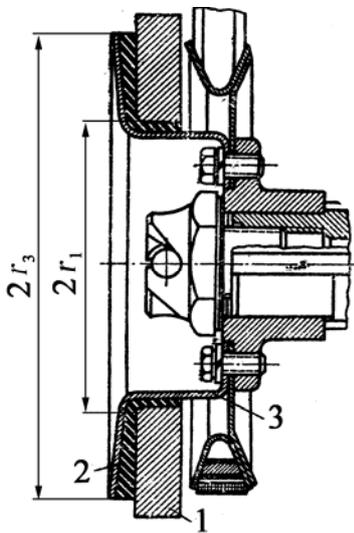


Рис. 59. Резиновый демпфер крутильных колебаний: 1 – маховик; 2 – резиновый слой; 3 – упорная тарелка (корпус демпфера)

Зная предельное осевое перемещение  $\Delta$  из условия сохранения плотности между резиновым слоем и втулкой, можно определить снова максимальное значение силы  $P$ .

Демпфер внутреннего трения может иметь конструкцию, указанную на рис. 59, где маховик 1 соединяется слоем резины 2 (путем вулканизации) с укрепленной на валу упорной тарелкой 3. Резиновый слой привулканизируется не только по цилиндрическим поверхностям маховика 1 и упорной тарелки 3, но и по их торцевым поверхностям, где он работает на кручение как полый вал. В этом случае

$$M_T = \frac{G I_p \varphi}{l_T} = c_{0,1T} \varphi, \quad (151)$$

где  $M_T$  – крутящий момент, действующий в торцевом резиновом слое в торцевой поверх-

ности и вызвавший угловое перемещение  $\varphi$ ;

$$c_{0,1T} = GI_p / l_T - \quad (152)$$

коэффициент крутильной жесткости резинового слоя в торцевых поверхностях;  $I_p = \frac{\pi r_3^4}{2} (1 - \frac{r_1^4}{r_3^4})$  – полярный момент инерции, а  $r_1$  и  $r_3$  – внутренний и внешний радиусы резинового слоя по торцевой поверхности маховика;  $l_T$  – его ширина (см. рис. 59).

Общий коэффициент жесткости резинового слоя, имеющего в сечении Г-образную форму, как для последовательно соединенных упругих элементов равен:

$$\frac{1}{c_{0,1}} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\pi Gl r_1^2 r_2^2} + \frac{l_T}{GI_p}. \quad (153)$$

Суммарный момент, действующий на резиновый слой:

$$M = c_{0,1}\varphi, \quad (153a)$$

где  $\varphi$  – угол закручивания маховика относительно корпуса.

На стадии проектирования коэффициент жесткости  $c_{0,1}$  резинового слоя определяется при известных габаритных размерах демпфера по формуле (153), а угловое перемещение  $\varphi$  – по формуле (147). По формуле (153a) определяется момент  $M$ , деформирующий резиновый слой.

Так как касательное напряжение по торцевой поверхности определяется по закону

$$\tau = \frac{M}{I_p} r,$$

то максимальное касательное напряжение возникает на наибольшем удалении от оси вращения – радиусе  $r_3$

$$\tau_{\max} = \frac{Mr_3}{I_p}. \quad (154)$$

Зависимость (154) позволяет записать условие прочности по торцевой поверхности резинового слоя  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ .

Зависимости (149), (152) и (153) определяют статический коэффициент жесткости резинового слоя  $c_{\text{ст}}$ . При крутильных колебаниях необходимо учитывать динамический коэффициент жесткости  $c_{\text{фд}}$ , который в 2...2,5 раза выше статического.

При работе двигателя резиновый демпфер нагревается до температуры 50...70 °С. Как показали экспериментальные исследования, с повышением температуры как статический  $c_{\text{ст}}$ , так и динамический коэффициент жесткости  $c_{\text{фд}}$  снижается. Для определения зависимости  $c_{\text{фд}}$  от температуры демпфера, параметры которых приведены в табл. 4, устанавливались на безмоторной установке и нагревались потоком теплого воздуха или охлаждались до температуры -20 °С.

На рис. 60 приведены графики изменения динамической жесткости  $C_{\text{фд}}$  от температуры.

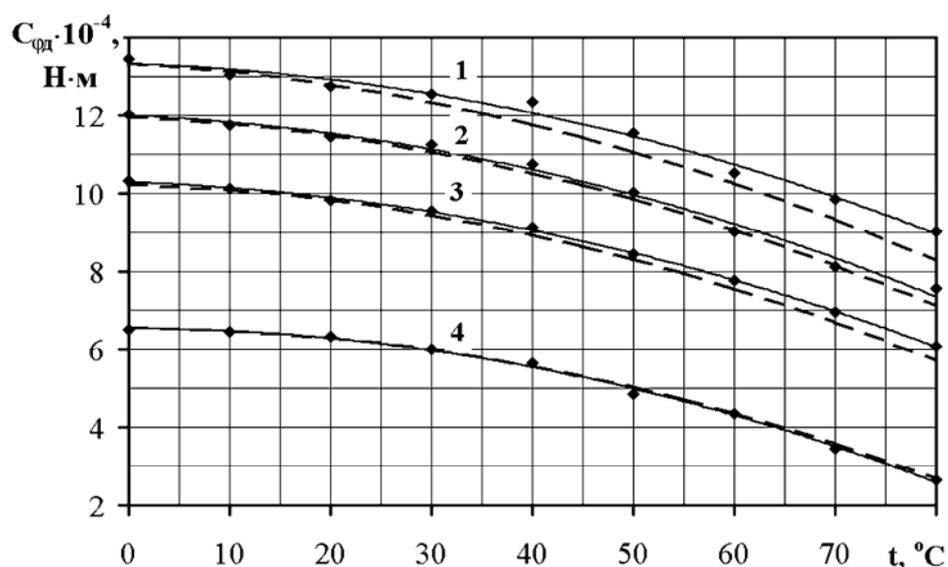


Рис. 60. Зависимость динамической жесткости резинового слоя  $c_{\text{фд}}$  от температуры °С: кривые 1, 2, 3 и 4 для демпферов с тем же порядковым номером

После обработки результатов экспериментальных исследований получена следующая эмпирическая зависимость, позволяющая определить действительное значение динамического коэффициента жесткости  $c_{\text{фд}}$  резинового слоя при изменении температуры:

$$c_{\text{фд}} = -6t^2 + (151 - 0,0024c_0)t + 1,06c_0 - 1574, \quad (155)$$

где  $c_0$  – коэффициент жесткости резинового слоя при температуре 20° С.

Параметры демпферов для замера  
динамического коэффициента жесткости

Номер демпфера	Момент инерции, кг·м <sup>2</sup>	Коэффициент жесткости при температуре 20 °С, Н·м·10 <sup>-4</sup>		Коэффициент относительного внутреннего трения $\psi$	Логарифмический декремент $\delta$
		$c_{\text{ст.}}$	$c_{\text{дл}}$		
1	0,0146	3,18	6,45	1,140	0,57
2	0,0808	5,62	10,0	1,422	0,712
3	0,0808	5,75	11,65	1,452	0,73
4	0,0808	6,87	13,0	1,481	0,745

### Вопросы для самопроверки

1. Как определяются касательные напряжения в резиновом слое цилиндрической формы?
2. Как определяется коэффициент жесткости резинового слоя цилиндрической формы?
3. В каких сечениях резинового слоя цилиндрической формы возникают максимальные касательные напряжения?
4. Как определяются касательные напряжения в резиновом слое кольцевой формы?
5. Как определяется коэффициент жесткости в резиновом слое цилиндрической формы?
6. Почему динамический коэффициент жесткости резинового слоя отличается от статического?

### 4.5. Определение вязкости силиконовой жидкости при изменении градиента скорости сдвига и температуры

При выборе полиметилсилоксановой (ПМС или силиконовой) жидкости для демпферов крутильных колебаний необходимо иметь в виду, что коэффициент  $\xi_0$ , а значит, эффективность снижения крутильных колебаний зависит от вязкости жидкости  $\eta$ , торцевых  $h_t$  и радиальных  $h_r$  зазоров между маховиком и корпусом демпфера. Как следует из формулы (135), от  $\xi_0$  зависит момент инерции маховика

демпфера  $I_0$  при известной частоте собственных колебаний  $\omega_c$  крутильно-колеблющейся системы. Однако динамическая вязкость  $\eta$  силиконовой жидкости, которая заполняет зазоры, изменяется [12, 36, 37] (рис. 61 и 62) от температуры  $t$  °С и градиента скорости сдвига  $D = v/h$ , где  $v$  – относительная скорость смещения поверхностей маховика и корпуса демпфера,  $h$  – зазор между ними. При работе двигателя установленный на коленчатом валу демпфер нагревается до температуры 50...70 °С. С повышением частоты вращения коленчатого вала двигателя меняется амплитуда вынужденных крутильных колебаний и увеличивается градиент скорости сдвига  $D$  [36]. Рост  $D$  и  $t$  приводит к тому, что динамическая вязкость  $\eta$  жидкостей ПМС уменьшается (в 2...3 раза по сравнению с  $\eta_0$  при  $D = 0$  и  $t = 20$  °С, см. рис. 61, 62). Поэтому для расчета параметров жидкостных демпферов крутильных колебаний представляют интерес математические модели, позволяющие определить вязкость  $\eta$  силиконовой жидкости при известных значениях температуры  $t$  и градиенте скорости сдвига  $D$ .

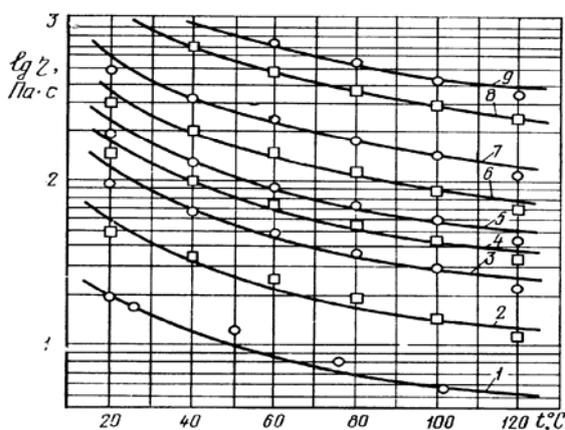


Рис. 61. Изменение динамической вязкости жидкостей ПМС в зависимости от температуры  $t$ : кривые 1 – 9 – соответственно ПМС – 20000, – 50000, – 100000, – 150000, – 200000, – 300000, – 500000, – 1000000, – 1500000

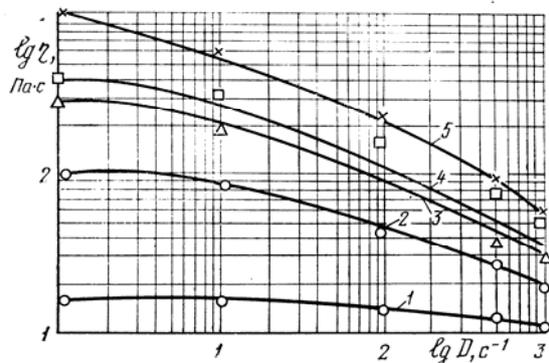


Рис. 62. Изменение динамической вязкости жидкостей ПМС в зависимости от градиента скорости сдвига  $D$ : кривые 1 – 5 – соответственно ПМС – 16000, – 100000, – 300000, – 400000, – 1000000

Методом регрессионного анализа [37] на основе экспериментальных данных (см. рис. 61) получена следующая формула для определения  $\eta_t$  от температуры  $t$ :

$$\eta_t = a_{1\eta_0} - b_{1\eta_0} t + c_{1\eta_0} t^2 - d_{1\eta_0} t^3, \quad (156)$$

где  $a_{1\eta_0} = -0,536 + 1,4611\eta_0 - 4,002 \cdot 10^{-6} \eta_0^2$ ;  
 $b_{1\eta_0} = 0,0354 + 0,0275\eta_0 - 2,88 \cdot 10^{-7} \eta_0^2$ ;  
 $c_{1\eta_0} = -0,00054 + 2,33 \cdot 10^{-4} \eta_0 - 4,255 \cdot 10^{-8} \eta_0^2$ ;  
 $d_{1\eta_0} = -2,538 \cdot 10^{-6} + 7,531 \cdot 10^{-7} \eta_0 - 1,8322 \cdot 10^{-11} \eta_0^2$ ;

$\eta_0$  – динамическая вязкость при температуре 20 °С, Па·с;  $t$  – действительная температура полиметилсилоксановой жидкости (ПМС), °С.

Отметим также, что множественный коэффициент корреляции для полученных зависимостей составляет  $R=0,9992$ . Следовательно, они имеют достаточно хорошее приближение к экспериментальным данным. Интервал температуры, в котором можно использовать модель (156),  $t = 20 \dots 120$  °С, а интервал вязкости силиконовых жидкостей –  $\eta_0 = 20 \dots 1500$  Па·с (ПМС-20000...ПМС-1500000).

В табл. 5 приведены экспериментальные [33] и расчетные по формуле (157) данные (числитель и знаменатель соответственно). Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что погрешность не превышает 1 %. В работе [36] приведена зависимость для  $\eta_t$  в виде  $\eta_t = 12,856\eta_0^{1,013} t^{-0,839}$ . Формула (156) дает меньшую погрешность при расчете, а кроме того, коэффициенты  $a_{1\eta_0}, b_{1\eta_0}, c_{1\eta_0}, d_{1\eta_0}$  могут быть вычислены для любой вязкости, при этом правая часть (156) зависит только от температуры.

Таблица 5

Зависимость вязкости полиметилсилоксановой жидкости от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	Вязкость $\eta_0$ , Па·с								
20	20 19,9	50 49,9	100 99,8	150 149,7	200 199,6	300 299,5	500 499,2	1000/ 998,5	1500/ 1497,8
40	14 13,9	34 34,5	68 68,8	103 103,1	137 137,4	205 206,1	342 343,5	684 687,8	1030/ 1033
60	10 9,9	25 24,6	49 48,9	74 73,3	98 97,7	148 145,5	246 244,3	493 489,3	739/ 735,4
80	8 7,5	19 18,5	37 36,8	56 55,2	75 73,5	112 110,3	187 183,8	375 368	563/ 552,9
100	6 5,9	14 14,5	29 28,9	43 43,4	58/ 57,8	86 86,6	144 144,3	288 288,7	433/ 433,4
120	5,1 4,6	11 11,1	22 21,8	34 32,6	45 43,3	67 64,9	112 108,0	224 216,2	336/ 324,9

Для определения зависимости вязкости  $\eta_D$  от градиента скорости сдвига  $D$  получена эмпирическая зависимость

$$\eta_D = \frac{1}{A_{\eta_t} + B_{\eta_t} D^{C_{\eta_t}}}, \quad (157)$$

где  $A_{\eta_t} = 1,1181\eta_t^{-0,0487}$ ;

$$B_{\eta_t} = 6,24 \cdot 10^{-4} + 4,26 \cdot 10^{-6} \eta_t - 1,81 \cdot 10^{-8} \eta_t^2 + 1,34 \cdot 10^{-11} \eta_t^3;$$

$$C_{\eta_t} = 0,5683 + 1,723 \cdot 10^{-4} \eta_t - 1,101 \cdot 10^{-6} \eta_t^2 - 7,97 \cdot 10^{-10} \eta_t^3.$$

В данном случае множественный коэффициент корреляции  $R = 0,9989$ , что также свидетельствует о хорошей сходимости модели (157) с экспериментальными данными. Коэффициенты  $A_{\eta_t}$ ,  $B_{\eta_t}$  и  $C_{\eta_t}$  вычисляются для жидкостей ПМС с вязкостями  $\eta_0 = 16 \dots 1000$  Па·с (ПМС-16000...ПМС-1000000). В табл. 6 приведены результаты расчетных и экспериментальных данных для жидкостей ПМС различной вязкости при изменении градиента скорости сдвига  $D$  от 1 до 500  $\text{с}^{-1}$ .

При проектировании и расчете демпфера рекомендуется принимать его температуру  $t = 50 \dots 60$  °С и для нее выбирать вязкость силиконовой жидкости типа ПМС, в противном случае это может привести к грубым ошибкам при определении амплитуд крутильных колебаний. Градиент скорости сдвига  $D$  определяется при известных торцевых  $h_t$  и радиальных  $h_p$  зазорах между маховиком и корпусом демпфера [38].

Таблица 6

Зависимость вязкости силиконовых жидкостей от градиента скорости сдвига

$D, \text{с}^{-1}$	Вязкость $\eta_0, \text{Па}\cdot\text{с}$ при $t = 20^\circ\text{C}$				
	16	100	300	400	1000
1	16/16,2	100/101,9	294/289,5	415/412	950/1060
10	16/15,7	89/82	190/188,6	330/316	636/657,8
100	14/14,2	45/48,5	76/79,6	160/141	240/226,5
500	12/11,9	26/26,5	38/35,5	79/63	95/83,6

На рис. 63 приведены расчетные и частично экспериментальные графики (на небольшом участке различных значений  $\eta$ ) изменения амплитуды носка коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) в

зависимости от динамической вязкости  $\eta$  жидкости ПМС при различных радиальных зазорах ( $h_r = h_p$ ). На графиках символами  $\square - \square$  отмечены экспериментальные данные. Пусть в демпфере при радиальном зазоре  $h_p = 0,75$  мм, а торцевом –  $h_r = 1$  мм, используется жидкость ПМС-200000, имеющая при температуре  $t = 20$  °С динамическую вязкость  $\eta_0 = 200$  Па·с. На рис. 63 по графику (отмечен символами  $\square - \square$ ) амплитуда угловых колебаний при такой вязкости составляет  $A = 3,75 \cdot 10^{-3}$  рад. Поскольку при работе дизеля демпфер нагревается до температуры  $t \approx 60$  °С, то вязкость уменьшается и составляет только  $\eta_t = 98$  Па·с (см. зависимость (156)).

Перемещаясь по той же кривой, при значении  $\eta_t = 98$  Па·с находим –  $A = 2,75 \cdot 10^{-3}$  рад. Расчеты были подтверждены экспериментально при вязкостях 20...50 Па·с. Таким образом, если при расчете принять динамическую вязкость жидкости ПМС-200000  $\eta_0$  при  $t = 20$  °С, то при расчетном определении амплитуды крутильных колебаний погрешность составит около 27 %.

Заметим, что высокие градиенты скорости сдвига  $D$  приводят к дилатансии жидкости ПМС и отказам демпферов. По данным ГНИХТЭОС для выпускаемых отечественной промышленностью полиметилсилоксановых жидкостей критическое значение градиента скорости сдвига  $D_{кр} = 250 \dots 300$  с<sup>-1</sup> в диапазоне вязкостей 50...200 Па·с [5].

Таким образом, полученные математические модели позволяют при расчетах амплитуд крутильных колебаний коленчатого вала ДВС с жидкостным демпфером учесть действительную вязкость силиконовой жидкости при заданной температуре и градиенте скорости сдвига, что существенно уменьшает погрешность.

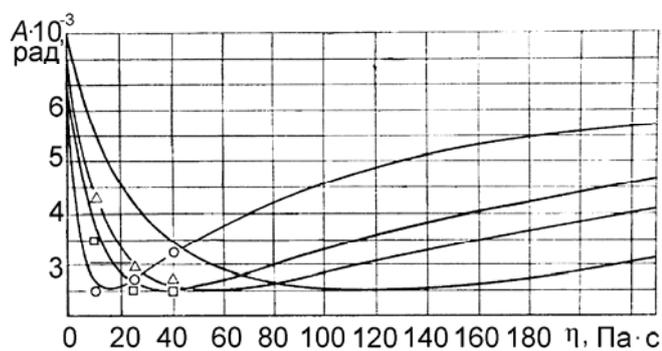


Рис. 63. Зависимость амплитуды угловых колебаний носка коленчатого вала с демпфером (дизель 8ДВТ-330) от вязкости жидкости ПМС при различных зазорах между корпусом и маховиком демпфера:  $O - O - h_p = 0,75$  мм,  $h_m = 0,25$  мм;  $\Delta - \Delta - h_p = 0,75$  мм,  $h_m = 0,65$  мм;  $\square - \square - h_p = 0,75$  мм,  $h_m = 1,0$  мм; кривая без индексов –  $h_p = 2$  мм,  $h_m = 2$  мм

## Вопросы для самопроверки

1. Что называется градиентом скорости сдвига и как он определяется?
2. Как влияет градиент скорости сдвига на динамическую вязкость силиконовой жидкости?
3. Как влияет температура на динамическую вязкость силиконовой жидкости?
4. Можно ли не учитывать температуру и градиент скорости сдвига при расчете крутильных колебаний?

### 4.6. Расчет параметров демпферов внутреннего трения

Расчет параметров демпферов крутильных колебаний внутреннего трения рекомендуется проводить, придерживаясь следующего алгоритма. После расчета собственных колебаний приведенной крутильной системы и расчета на вынужденные резонансные колебания многомассовой системы (без демпфера) определяется уровень крутильных колебаний и выясняется необходимость установки демпфирующих устройств.

При выборе демпфера внутреннего трения прежде всего определяются его габаритные размеры исходя из условий его компоновки на двигателе. Параметрами, определяющими его потребительские свойства – гашение крутильных колебаний, как следует из зависимости (140), являются: момент инерции маховика демпфера  $I_0$ , коэффициент жесткости упругого (резинового) слоя  $c_{0,1}$ , коэффициент демпфирования  $\xi_0$  для снижения уровня крутильных колебаний при известном значении частоты собственных колебаний  $\omega_c$ . Значение  $I_0$  подсчитывается по габаритным размерам демпфера внутреннего трения на коленчатом валу (рис. 64).

В зависимости от того, на сколько требуется снизить уровень крутильных колебаний при вынужденных резонансных крутильных колебаниях, принимается решение о конструкции демпфера – резиновый слой будет цилиндрической или Г-образной формы, так как последний более эффективно гасит крутильные колебания. По выбранным размерам, используя зависимости (149), (152) для резинового слоя цилиндрической формы или (153) – Г-образной формы, ориенти-

ровочно определяем коэффициенты жесткости  $c_{0,1}$ . Заметим, что при этом определяется статический коэффициент жесткости, а для нахождения динамического коэффициента необходимо умножить полученное значение на  $2 \dots 2,5$ . При выборе модуля упругости второго рода  $G$  резинового слоя принимаем, что модуль упругости первого рода  $E = 6 \dots 10$  МПа и связан с модулем упругости второго рода  $G$  зависимостью  $E = 3G$  [21].

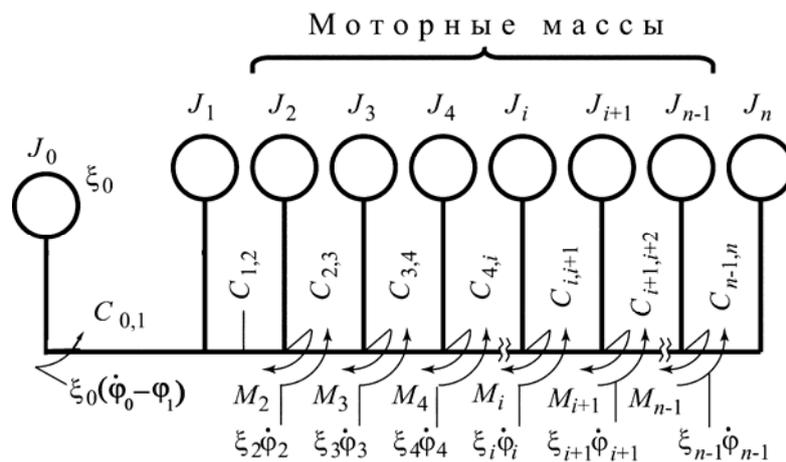


Рис. 64. Схема крутильно-колеблющейся системы с резиновым демпфером

Выбираем начальное значение момента инерции маховика демпфера  $I_0$ . Пренебрегая величиной  $(\xi_0/2I_0)^2$ , найдем собственную круговую частоту  $\omega_d$  резинового демпфера :

$$\omega_d = \sqrt{\frac{c_{0,1}}{I_0}}. \quad (158)$$

На первом этапе расчета  $I_0$  выбирается из условия, что собственная частота крутильной системы  $\omega_c \cong \omega_d$ .

Далее, как следует из формулы (81),

$$\xi_0 = (I_0 \omega_d \delta) / \pi, \quad (159)$$

где логарифмический декремент затухания  $\delta = 0,5 \dots 0,8$ .

Зависимость (159) определяет приближенно коэффициент демпфирования  $\xi_0$  резинового слоя.

Для определения амплитуд резонансных колебаний системы с демпфером внутреннего трения, как и для системы без демпфера, со-

ставим уравнение баланса работ возбуждающего момента и моментов сопротивления

$$W_k = W_\xi + W_{\text{двт}}, \quad (160)$$

где  $W_{\text{двт}}$  – работа демпфирования, совершаемая демпфером внутреннего трения.

Работа сопротивления в резиновом демпфере (внутреннего трения) за цикл колебаний в соответствии с (133) равна

$$W_{\text{двт}} = \pi I_0 \omega_c^2 \Phi_{1k}^2 k_d, \quad (161)$$

где  $\Phi_{1k}$  – угловая амплитуда колебаний переднего носка коленчатого вала с резиновым демпфером (колебаний участка вала, расположенного в месте установки демпфера) при резонансе  $k$ -й гармоники возбуждающего момента;

$$k_d = \sqrt{\left(\frac{c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2} / \left[ \left(1 - \frac{c_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2 \right] -$$

коэффициент демпфирования, учитывающий собственно демпфирование  $\xi_0$ , а также конструктивные параметры демпфера.

Подставив в правую часть уравнения (118) значение работы демпфирования за один цикл колебаний (161), получим:

$$\pi M_k^a \Phi_{k2} A_{i\Sigma} = \pi \xi \omega_c \Phi_{k2}^2 \sum_{i=2}^{i=n} a_i^2 + \pi I_0 \omega_c^2 \Phi_{k1}^2 k_d. \quad (162)$$

Уравнение (162) отличается от (118) суммированием, так как мы принимаем, что моторная масса начинается с третьей массы (обозначается цифрой 2, так как первая масса – маховик имеет индекс 0, вторая масса – носок с корпусом демпфера 1) (см. рис. 64). Таким образом, если принять из диаграммы свободных одноузловых колебаний отношения  $a_2 / a_1 = m$ , то при резонансе  $\Phi_{k2} = \Phi_{k1} m$ .

После подстановки значения  $\Phi_{k2}$  в (162) амплитуда колебаний носка коленчатого вала равна

$$\Phi_{k1} = \frac{M_k^a A_{i\Sigma} m}{\xi m^2 \omega_c \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2 + I_0 \omega_c^2 k_d}. \quad (163)$$

В книге [6] работу сопротивления в резиновом демпфере крутильных колебаний за цикл колебаний рекомендуется определять по формуле

$$W_{\text{двт}} = \pi \xi_0 (a_m - a_1) \Phi_{k0}^2 \omega_c, \quad (164)$$

где  $\xi_0$  – коэффициент демпфирования в резиновом демпфере крутильных колебаний;  $a_m$  – относительная амплитуда колебаний маховика демпфера (см. рис. 64, масса с индексом 0);  $a_1$  – относительная амплитуда колебаний носка коленчатого вала, где устанавливается резиновый демпфер;  $\Phi_{k0}$  – угловая амплитуда колебаний маховика резинового демпфера при резонансе  $k$ -й гармоники возбуждающего момента при крутильных колебаниях.

Расчет частоты собственных угловых колебаний обычно проводится с установленным резиновым демпфером, поскольку коэффициент жесткости резинового слоя  $c_{0,1}$  определяется в зависимости от конструкции демпфера по формулам (149), (152) или (153). Таким образом, в расчетной схеме первой массой будет маховик демпфера с моментом инерции  $I_0$ , связанный с первой массой (носок коленчатого вала вместе со шкивами и корпусом демпфера с моментом инерции  $I_1$ ) резиновым слоем с коэффициентом жесткости  $c_{0,1}$ . В этом случае при расчетах частоты собственных колебаний (см. п. 2.5) принимаем  $a_m = 1$  (или  $a_0$  по расчетной схеме).

Коэффициент демпфирования определяется по формуле (159). В данном случае уравнение (164) принимает вид (см. рис. 64)

$$\pi M_k^a \Phi_{k2} A_i \sum = \pi \xi \omega_c \Phi_{k2}^2 \sum_{i=2}^{i=n-1} a_i^2 + \pi \xi_0 (a_m - a_1) \Phi_{k0}^2 \omega_c, \quad (165)$$

где  $\Phi_{k0}$  – амплитуда крутильных колебаний маховика резинового демпфера при резонансе  $k$ -й гармоники возбуждающего момента.

При расчетах резинового демпфера необходимо определить угол закрутки в резиновом слое, т.е. углы закручивания  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  маховика демпфера (момент инерции  $I_0$ ) и переднего носка коленчатого вала (момент инерции  $I_1$ ) (см. рис. 64). Если принять, что относительные

значения амплитуд одинаковые при свободных и резонансных колебаниях, то

$$a_2/a_0 = m_2; \quad \Phi_{k2}/\Phi_{k0} = m_2; \quad a_1/a_0 = m_1; \quad \Phi_{k1}/\Phi_{k0} = m_1. \quad (166)$$

Тогда из уравнения (165) получим амплитуду колебаний маховика демпфера внутреннего трения

$$\Phi_{k0} = \frac{M_k^a A_i \sum m_2}{\xi m_2^2 \omega_c \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2 + \xi_0 \omega_c (1 - a_1)}. \quad (167)$$

По формуле (166) определяем  $\Phi_{k1} = m_1 \Phi_{k0}$ , а величина максимального крутящего момента, вызывающего скручивание резинового слоя, равна:

$$M_{кр} = c_{0,1} (\Phi_{k0} - \Phi_{k1}). \quad (168)$$

Максимальное касательное напряжение в резиновом слое определяется в зависимости от конструкции резинового демпфера по формулам (148) или (154) и момента (168).

После установки демпфера по формуле (123) можно также определить касательные напряжения в узловой точке.

### Вопросы для самопроверки

1. Какие параметры резинового демпфера следует определить на стадии его проектирования?
2. Как определяется коэффициент жесткости резинового слоя цилиндрической формы?
3. Как определяется коэффициент жесткости резинового слоя кольцевой формы (между торцевыми поверхностями маховика и корпуса демпфера)?
4. Как определяется коэффициент жесткости резинового слоя Г-образной формы?
5. Как определяется коэффициент демпфирования  $\xi_0$  в резиновом слое?
6. Влияет ли момент инерции маховика в резиновом демпфере на снижение уровня крутильных колебаний?

#### 4.7. Метод оценки параметров демпферов крутильных колебаний жидкостного трения на стадии проектирования

Методы расчетной оценки параметров демпферов крутильных колебаний жидкостного трения громоздки по объему и сложны, требуют наличия большого комплекса экспериментальных данных, получить которые достаточно трудоемко и не всегда может быть осуществлено с надлежащей точностью [39-41]. На стадии проектирования, когда экспериментальные данные вообще не могут быть получены, целесообразно разработать экспресс-метод оценки параметров демпферов жидкостного трения [39].

Основными параметрами, определяющими энергоемкость демпфера жидкостного трения, являются момент инерции его маховика  $I_m$ , радиальные  $h_r$ , а также торцевые зазоры  $h_t$  между маховиком и корпусом, вязкость полиметилсилоксановой жидкости (ПМС).

Момент инерции маховика демпфера имеет первостепенное значение, так как слишком малый маховик не обеспечивает эффективного гашения крутильных колебаний, а слишком большой — приводит к необоснованному увеличению массы и габаритных размеров. Это подтверждается приведенными на рис. 65 и 66

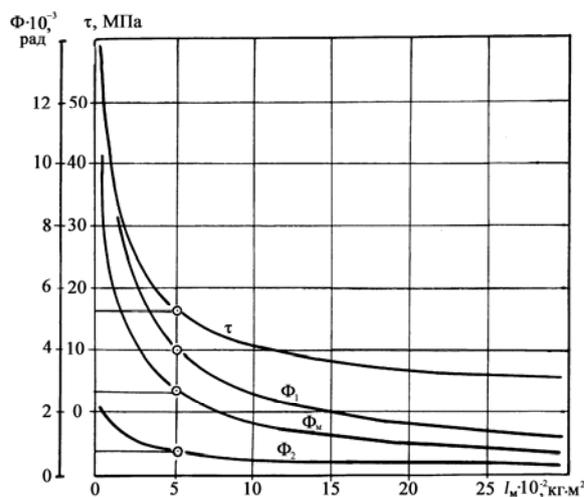


Рис. 65. Графики зависимости резонансных амплитуд колебаний масс  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и маховика  $\Phi_m$ , а также касательных напряжений  $\tau$  в узловой точке крутильно-колеблющейся системы дизеля Д-260Т от момента инерции маховика демпфера  $I_m$

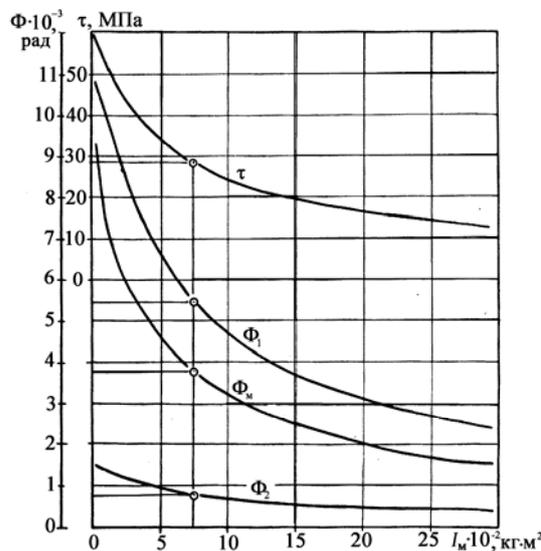


Рис. 66. Графики зависимости резонансных амплитуд колебаний масс  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и маховика  $\Phi_m$ , а также касательных напряжений  $\tau$  в узловой точке крутильно-колеблющейся системы дизеля А-11ТА от  $I_m$

графиками зависимости резонансных амплитуд колебаний масс, а также напряжений в узле колебаний крутильно-колеблющихся систем дизелей Д-260Т и А-11ТА от величины момента инерции маховиков демпфера при оптимальных коэффициентах демпфирования.

Из рис. 65 следует, что для дизеля Д-260Т увеличение момента инерции маховика демпфера с 5 до 25 кг·м<sup>2</sup> практически не уменьшает амплитуду крутильных колебаний первой моторной массы  $\Phi_2$ , хотя амплитуда  $\Phi_1$  корпуса демпфера уменьшается с  $4 \cdot 10^{-3}$  до  $1,33 \cdot 10^{-3}$  радиан (в 3 раза). Касательное напряжение в узловом сечении, уже допустимое при значении  $I_M = 0,05$  кг·м<sup>2</sup> (15,8 МПа), уменьшается до 5,6 МПа.

Аналогичный результат получен для крутильно-колеблющейся системы дизеля А-11ТА – оптимальный момент инерции маховика демпфера –  $I_M = 0,075$  кг·м<sup>2</sup>.

В основу экспресс-метода определения минимально допустимого значения момента инерции маховика положена эмпирическая зависимость, полученная в результате решения уравнения баланса энергии с учетом трения в двигателе до установки демпфера и после (с учетом демпфирования в самом двигателе и трения в слоях жидкости) [40]. После определения касательных напряжений в узловом сечении коленчатого вала от максимального момента при крутильных колебаниях зависимость имеет вид [40]

$$\tau_{\text{дем}} = \frac{0,1\tau_{\text{рез}}}{1 + 8800q / \tau_{\text{рез}}}, \quad (169)$$

где  $\tau_{\text{дем}}$ ,  $\tau_{\text{рез}}$  – касательные напряжения в сечении, совпадающем с узловым сечением колебаний коленчатого вала на резонансном режиме работы, при установке демпфера и без демпфера соответственно, МПа,

$$q = I_M / \sum_{i=1}^n I_i a_i^2 - \quad (170)$$

отношение момента инерции маховика демпфера  $I_M$ , кг·м<sup>2</sup> к приведенному моменту инерции исследуемой крутильной системы;  $I_i$  – момент инерции  $i$ -го элемента исходной эквивалентной крутильной системы, кг·м<sup>2</sup>;  $a_i$  – относительная амплитуда угловых колебаний  $i$ -го элемента исходной эквивалентной крутильной системы при наиболее

опасной одноузловой форме колебаний;  $n$  – число масс приведенной крутильной системы.

Как известно, величины  $I_i$  определяются при расчете параметров приведенной эквивалентной системы коленчатого вала ДВС. Относительные амплитуды  $a_i$  находим при расчете форм и частот собственных колебаний крутильно-колеблющейся системы коленчатого вала ДВС,  $\tau_{рез}$  – либо расчетом, либо тензометрированием (или торсиографированием) на двигателе-прототипе [42].

В условиях оптимального демпфирования уровень касательных напряжений коленчатого вала на резонансных режимах не должен превышать рекомендуемых допустимых пределов [5]:  $\tau_{дем} = \tau_{доп} = 15...25$  МПа. Под оптимальным принимается такое одно из минимальных значений момента инерции маховика демпфера  $I_0$ , при котором касательные напряжения  $\tau_{дем}$  в узле колебаний не превышают допустимых. При этом дальнейшее увеличение  $I_0$  мало сказывается на уменьшении  $\tau_{дем}$ .

Расчетные исследования, проведенные в НАТИ и НИКТИД по оценке нагруженности коленчатых валов автомобильных и тракторных дизелей при установке демпферов жидкостного трения с варьируемым значением момента инерции маховика, свидетельствуют, что принятое выше условие оптимального демпфирования крутильных колебаний коленчатых валов достигается в пределах изменения  $q = 0,35...0,45$  (рис. 67).

Существенное увеличение касательных напряжений в узле колебаний получается при значениях  $q \leq 0,2$ , а при  $q > 1$  – кривая асимптотически приближается к оси  $q$ . Проведенные расчеты крутильных систем для бензиновых двигателей ЗМЗ 4062.10, ВАЗ-2110 показали, что наименьшее значение  $I_0$  может быть получено при  $q = 0,25...0,35$ .

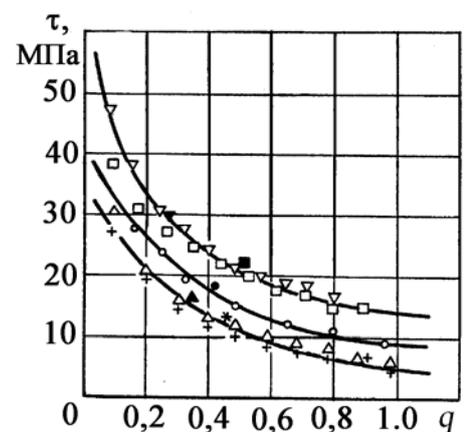


Рис. 67. Влияние момента инерции маховика демпфера крутильных колебаний жидкостного трения на уровень касательных напряжений коленчатого вала (соответственно расчетные и экспериментальные значения для дизелей: O, ● – Д-260Т; □, ■ – 8ДВТ-330; △, ▲ – СМД-60; +, \* – СМД-31; ▽, ▼ – А-11ТА)

Экспериментальные исследования нагруженности от крутильных колебаний коленчатых валов тракторных и комбайновых дизелей, оборудованных демпферами жидкостного трения при различных значениях момента инерции маховика, полностью подтвердили изложенное выше условие достижения оптимального демпфирования [2, 4, 5, 38, 39].

Расхождение между расчетными и экспериментальными значениями амплитуд не превышали 5...10 %.

Зависимость (169) позволяет определить оптимальное значение момента инерции маховика  $I_m$ , поскольку значения  $\sum_{i=1}^n I_i \alpha_i^2$  и  $\tau_{рез}$  легко определяются при расчете приведенной крутильной системы, а величина  $\tau_{дем} < 25$  МПа.

Конструктивные параметры маховика демпфера (ширина, наружный и внутренний диаметры) определяются исходя из компоновочных соображений и по моменту инерции

$$I_m = 6,1 \cdot 10^{-3} \bar{L} \rho_m D_{вн}^5 [(\bar{D}_н / 2)^4 - 1], \quad (171)$$

где  $L$  – ширина маховика демпфера;  $\bar{L} = L / D_{вн}$  – относительная ширина маховика демпфера;  $\rho_m$  – плотность его материала, кг/м<sup>3</sup>;  $D_{вн}$ ,  $D_н$  – внутренний и наружный диаметры, м;  $\bar{D}_н = D_н / D_{вн}$  – относительный наружный диаметр.

Для автомобильных и тракторных дизелей относительная ширина  $\bar{L}$  и относительный наружный диаметр  $\bar{D}_н$  маховика жидкостного демпфера располагаются, как свидетельствует статистический анализ, в следующих пределах:  $\bar{L} = 0,16 \dots 0,20$  и  $\bar{D}_н = 1,7 \dots 2,0$ .

С учетом форсирования проектируемых двигателей<sup>13</sup> по среднему эффективному давлению и частоте вращения момент инерции маховика  $I_m$  необходимо выбирать ближе к верхнему пределу изменения  $q$ .

Гидродинамический расчет радиальных и торцевых зазоров между маховиком и корпусом демпфера жидкостного трения недостаточно достоверен из-за сложной структуры применяемых полиметилсилоксановых жидкостей, относящихся к жидкостям неньютоновско-

<sup>13</sup> По данным статистического анализа мощность силовых установок возрастает в зависимости от их назначения на 60...80 % каждые 10 лет.

го типа. Кроме того, расчет не имеет особого смысла, поскольку в действительности величину зазоров выбирают из условия отсутствия явления полимеризации (дилатансии) жидкости, приводящего к ее расщеплению и потере вязкости, а также из условия обеспечения технологичности и надежности работы демпфера.

Таким образом, при расчете радиальных и торцевых зазоров между маховиком и корпусом демпфера жидкостного трения, как было показано выше, необходимо учитывать величину градиента скорости сдвига  $D$  в слоях полиметилсилоксановой жидкости (ПМС). По нашим расчетным исследованиям [24, 43], по оценке градиента скорости сдвига  $D$  полиметилсилоксановой жидкости при варьировании величиной радиального зазора по наружному диаметру маховика демпфера у ряда дизелей (рис. 68) свидетельствуют, что критические значения  $D > 200 \text{ с}^{-1}$  достигаются при зазорах менее 0,35...0,45 мм.

Вместе с тем по технологическим соображениям (при малых зазорах коробление корпуса при сварке приводит к заклиниванию маховика) и в целях повышения надежности работы (устранение задиров) радиальные и торцевые зазоры выбираются большей величины. Однако излишнее их увеличение нерационально, так как в условиях сохранения оптимального демпфирования необходимо повышать вязкость применяемой жидкости ПМС, что нежелательно из-за невозможности применения демпферов с высокой вязкостью в условиях Крайнего Севера. Кроме того, это также увеличивает трудоемкость заправки демпферов жидкостью.

Стендовыми и эксплуатационными испытаниями демпферов крутильных колебаний жидкостного трения форсированных тракторных и комбайновых дизелей установлено, что гарантированная работа демпфера обеспечивается при зазорах между соприкасающимися поверхностями корпуса и маховика, равных: радиальный зазор

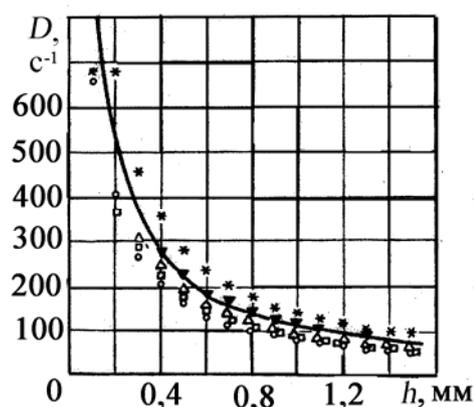


Рис. 68. Зависимость градиента скорости сдвига полиметилсилоксановой жидкости от величины зазора по наружному диаметру маховика для дизелей:  $\circ$  – СМД-60;  $\Delta$  – СМД-31;  $\square$  – СМД-23;  $\blacktriangledown$  – Д-260Т;  $*$  – А-11ТА

$h_p = 0,8 \dots 1,2$  мм по наружному диаметру и не менее  $h_{pv} = 0,2 \dots 0,4$  по внутреннему, а также  $0,5 \dots 1,0$  мм на сторону по торцевым поверхностям. Если торцевые поверхности маховика демпфера выбираются коническими, то они по высоте переменные.

Кинематическая вязкость жидкости ПМС  $\nu$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) при выбранных размерах маховика демпфера, радиального и торцевых зазоров определяется соотношением [40]

$$\nu = 1 / [\pi e \rho \omega_{\text{инв}} (D_H / 2) Q], \quad (172)$$

где  $e = \left(1 / I_M \omega_{\text{инв}}^2\right) \sqrt{1 + q}$ ,  $\omega_{\text{инв}} = \omega_c \sqrt{2 / (2 + q)}$ ,  $e = 1 / c$  – податливость исследуемой крутильной системы,  $\text{с}^2 / (\text{кг} \cdot \text{м}^2)$ ;  $\rho$  – плотность полиметилсилоксановой жидкости,  $\text{кг} / \text{м}^3$ ;  $\omega_{\text{инв}}$  – инвариантная частота колебаний исследуемой крутильной системы,  $\text{с}^{-1}$ ;  $Q$  – функция, учитывающая влияние радиальных и торцевых зазоров,  $\text{м}^{-1}$ ;  $\omega_c = 2\pi f_c$  – круговая частота наиболее опасной формы колебаний исследуемой крутильной системы,  $\text{с}^{-1}$ ;  $f_c$  – собственная частота наиболее опасной формы колебаний, Гц.

С достаточной для практики точностью плотность для жидкостей ПМС 50000...250000 и температуре окружающей среды  $20^\circ \text{C}$  может быть принята  $\rho \cong 950 \text{ кг} / \text{м}^3$ .

Функция  $Q$  может быть определена после выбора конструктивных параметров демпфера

$$Q = (1 / h_T) (1 - R_{\text{вн}}^4 / R_{\text{н}}^4) + (2L / R_{\text{н}}) [1 / h_p + R_{\text{вн}}^3 / (R_{\text{н}}^3 h_{pv})], \quad (173)$$

где  $h_T$ ,  $h_p$ ,  $h_{pv}$  – торцевой, радиальный внешний и внутренний зазоры между маховиком и корпусом демпфера соответственно;

$R_{\text{вн}}$ ,  $R_{\text{н}}$  – внутренний и наружный радиусы маховика;  $L$  – его ширина.

Исследованиями по оценке температурных режимов работы демпферов, установленных на шкиве привода вентилятора, выявлено, что температурный режим их работы довольно устойчив и на номинальной мощности не превышает  $70 \dots 90^\circ \text{C}$ .

Градиент скорости сдвига  $D$  ( $\text{с}^{-1}$ ) полиметилсилоксановой жидкости в демпфере определяется по формуле [40]

$$D = (R_H - R_{BH}) \cdot \frac{\Phi_1 \omega_c}{(\pi h_{\text{общ.ср.}}) h_{\text{общ.ср.}}} =$$

$$= \frac{h_T S_T + h_P S_P + h_{PB} S_{PB}}{S_T + S_P + S_{PB}}, \quad (174)$$

где  $\Phi_1$  – амплитуда крутильных колебаний носка коленчатого вала на резонансном режиме работы при установке на двигателе демпфера, рад;  $\pi h_{\text{общ.ср.}}$  – общий осредненный зазор демпфера, м;  $S_T, S_P, S_{PB}$  – площадь торцевой, внешней и внутренней цилиндрической (радиальной) поверхности маховика демпфера, м<sup>2</sup>.

Для оптимального демпфирования рекомендуется выбирать значение  $\Phi_1 \leq 0,0029$ , рад.

В реальных условиях эксплуатации вязкость полиметилсилоксановой жидкости изменяется в зависимости от температурного режима и градиента скорости сдвига (см. п. 4.5), что необходимо учитывать при расчетах с использованием зависимостей (156) и (157), при заданном значении температуры и вычисленном по формуле (173) градиенте скорости сдвига.

Конструкции демпферов жидкостного трения, параметры которых были выбраны на основе предлагаемой методики, обеспечивали снижение уровня крутильных колебаний до допустимых пределов ( $\Phi_1 \leq 0,0029; \tau_{\text{дем}} < 25$  МПа). В табл. 7 приведены параметры исследуемых крутильных систем дизелей Д-260, СМД-72 и СМД-31, а в табл. 8 – параметры демпферов крутильных колебаний жидкостного трения (каждая строка соответствует дизелям Д-260, СМД-72 и СМД-31 соответственно). Использовались полиметилсилоксановые жидкости ПМС 100000 – ПМС 200000.

Таблица 7

Некоторые параметры крутильных систем

Модель дизеля	Количество и расположение цилиндров	$N_e$ , кВт	$n_H$ , мин <sup>-1</sup>	Параметры исследуемой крутильной системы			
				$f_c$ , Гц	$n_p$ , мин <sup>-1</sup>	$\sum_1^n l_i a_i^2$ , кг·м <sup>2</sup>	$\varphi$ , рад
Д-260	6P	110	2200	236,0	2360	0,126	0,009
СМД-72	6V	147	2100	287,5	2300	0,206	0,0045
СМД-31	6P	184	2200	210,0	2100	0,200	0,016

В табл. 9 приведены результаты расчетных и экспериментальных исследований с демпферами жидкостного трения, параметры которых приведены в табл. 8. При расчете степени гашения крутильных колебаний использованы данные угла закручивания без демпфера  $\varphi$ , рад (последний столбец табл. 7), а результаты расчетов и экспериментальных данных из табл. 9 ( $\varphi/\varphi_p$  и  $\varphi/\varphi_\varepsilon$ ).

Таблица 8

Параметры демпфера крутильных колебаний жидкостного трения

Момент инерции маховика		Конструктивные параметры демпфера						
$I_M, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$I_i / \sum_1^n I_i a_i^2$	$D_H, \text{ м}$	$D_{BH}, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$h_T, \text{ мм}$	$h_p, \text{ мм}$	$h_{PB}, \text{ мм}$	$h_{\text{общ. ср}}, \text{ мм}$
0,051	0,405	0,232	0,136	0,0257	0,44	0,22	0,10	0,35
0,070	0,340	0,262	0,138	0,0207	0,50	0,21	0,10	0,42
0,094	0,457	0,273	0,162	0,0247	1,0	0,50	0,10	0,80

Анализируя данные табл. 9, можно сделать вывод о вполне приемлемой для инженерной практики точности расчета. Расхождение результатов расчета и эксперимента по определению угла закрутки носка коленчатого вала не превышает 10 %. Кроме того, выбранные торцевые и радиальные зазоры обеспечивали надежность демпфера жидкостного трения в эксплуатационных условиях [24].

Заметим, что предлагаемый метод оценки параметров демпферов жидкостного трения достаточно прост, обеспечивает хорошую сходимость расчетных и экспериментальных данных, что позволяет использовать его в учебных целях.

Таблица 9

Результаты расчетных и экспериментальных исследований

Модель дизеля	Динамическая вязкость $\eta_0, \text{ Па}\cdot\text{с}$	Расчетные значения угла закрутки, $\varphi_p, \text{ рад}$	Экспериментальные значения угла закрутки, $\varphi_\varepsilon, \text{ рад}$	Степень гашения крутильных колебаний при резонансном режиме <sup>14</sup>
Д-260Т	103/137	0,0029	0,0020	3,1/4,5
СМД-72	137/205	0,0029	0,0022	1,55/2,05
СМД-31	137/205	0,0029	0,0036	5,5/4,4

<sup>14</sup> В числителе приведены по результатам расчетных значений, а в знаменателе – экспериментальных.

Методика расчета параметров демпфера жидкостного трения по предлагаемому экспресс-методу следующая:

- для исследуемой крутильной системы коленчатого вала определяем собственную круговую частоту  $\omega_c$  наиболее опасной для автомобильных и тракторных двигателей одноузловой формы колебаний и приведенный момент инерции  $\sum_{i=1}^n I_i a_i^2$ ;

- исходя из условия, что в узловой точке максимальное касательное напряжение не превосходит допускаемое  $\tau_{\text{дем.}} \leq [\tau]$ , определяем по формуле (169) значение  $q$ , а по зависимости (170) – момент инерции  $I_M$  маховика демпфера;

- по формуле (171) определяем конструктивные параметры демпфера жидкостного трения;

- на основе рекомендованных значений выбираем зазоры между соприкасающимися поверхностями корпуса и маховика демпфера (торцевые и радиальные зазоры);

- по формулам (172) – (174) определяем вязкость используемой полиметилсилоксановой жидкости.

В условиях оптимального демпфирования, как свидетельствует отечественная и зарубежная практика, амплитуда крутильных колебаний носка коленчатого вала на резонансном режиме работы при установке демпфера  $\Phi_1 \leq 0,0029$  рад.

### Вопросы для самопроверки

1. Какие параметры демпфера жидкостного трения следует определить на стадии его проектирования?

2. Как влияет момент инерции маховика демпфера на уровень крутильных колебаний?

3. Что называется градиентом скорости сдвига в слоях полиметилсилоксановой жидкости?

4. Какое влияние оказывает градиент скорости сдвига на работоспособность жидкостного демпфера?

5. Почему нельзя выбирать малые торцевые и радиальные зазоры между маховиком и корпусом демпфера?

## Глава 5. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### 5.1. Основные положения

Если бы вынужденные колебания системы коленчатого вала совершались при отсутствии сопротивлений, то резонансные амплитуды масс возрастали бы теоретически до бесконечности и вал был бы разрушен. Вследствие наличия сопротивлений (демпфирования) в подшипниках и цилиндрах, в материале вала (упругий гистерезис) резонансные амплитуды будут возрастать лишь до тех пор, пока не установится равновесие между энергией, сообщаемой системе возмущающими гармониками крутящего момента за период одного колебания, и энергией, расходуемой на преодоление сопротивлений за тот же период. Установившиеся вынужденные колебания в этом случае будут совершаться с постоянными амплитудами, величину которых следует определять из условия равенства работы действующих на систему возмущающих гармоник  $k$ -го порядка работе моментов сопротивления.

Ранее нами было принято допущение, что при резонансе форма вынужденных колебаний крутильной системы близка к форме свободных колебаний и при равенстве в любой момент времени действующих на каждую массу системы возмущающих моментов и моментов сил сопротивления амплитуды вынужденных угловых колебаний  $\Phi_i$  масс пропорциональны амплитудам свободных колебаний тех же масс  $a_i$ .

В действительности же формы вынужденных и свободных колебаний при резонансе полностью не совпадают, потому что действующие на каждую массу системы возбуждающие моменты и моменты сил сопротивления уравниваются не полностью из-за неодинаковых амплитуд или фазовых сдвигов. При этом это различие будет тем больше, чем больше сопротивление в крутильно-колеблющейся

системе. Так как сопротивление в автомобильных и тракторных двигателях относительно невелико, то при резонансе различие в формах вынужденных и свободных колебаний крутильной системы незначительно. В связи с этим в главе 4 при рассмотрении вынужденных колебаний нами даже не рассматривались дифференциальные уравнения колебаний масс приведенной системы.

В то же время, учитывая наличие сопротивления в колебательной системе, можно утверждать, что после решения дифференциальных уравнений крутильных колебаний можно найти конечное значение амплитуды колебаний любой  $n$  массовой системы, так как решение не будет принимать бесконечно большие значения.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Что уменьшает амплитуды крутильных колебаний в двигателе?
2. Совпадают ли формы свободных и вынужденных колебаний в многомассовой системе?
3. Когда наступает резонанс при колебаниях многомассовой системы?

## **5.2. Дифференциальные уравнения вынужденных крутильных колебаний многомассовой системы**

Как было показано ранее (см. гл. 1), для расчета на крутильные колебания коленчатого вала ДВС действительную сложную колеблющуюся систему подвижных элементов кривошипно-шатунного механизма заменяют упрощенной эквивалентной системой, состоящей из одного или нескольких цилиндрических валов с сосредоточенными массами. Все реальные системы являются распределенными, но при анализе каждую систему приводят к дискретному виду, пренебрегая менее существенным свойством каждого элемента.

В системах, приведенных к дискретному виду, массы считаются сосредоточенными и характеризуются только свойственными им моментами инерции  $I_i$  (кг·м<sup>2</sup>). Участки крутильной системы, осуществляющие упругую связь между массами (соединения), характеризуются только коэффициентами жесткости  $c_{i-1,i}$  или  $c_{i,i+1}$  (Н·м·рад<sup>-1</sup>). Кроме

того, на каждую массу действует вынуждающий момент  $M_i$  и силы демпфирования, характеризуемые коэффициентом  $\xi_i$  (Н·м·с).

На рис. 69 показана приведенная  $n$ -массовая эквивалентная крутильная система коленчатого вала. Здесь введены обозначения:  $I_0$  – момент инерции маховика демпфера, кг·м<sup>2</sup>;  $c_{0,1}$  и  $\xi_0$  – коэффициенты крутильной жесткости и демпфирования упругодемпфирующего слоя соответственно, Н·м·рад<sup>-1</sup> и Н·м·с (для жидкостного демпфера –  $c_{0,1} = 0$ , а  $\xi_0$  – демпфирование в жидкости);  $I_1$  – приведенный момент инерции носка коленчатого вала (шків клиноременной передачи, корпус демпфера и др.), кг·м<sup>2</sup>;  $c_{1,2}$  – коэффициент крутильной жесткости участка коленчатого вала от носка до середины первой коренной шейки, Н·м·рад<sup>-1</sup>;  $I_2 - I_{n-2}$  – приведенные моменты инерции моторных масс (кривошипов), кг·м<sup>2</sup>;  $c_{i,i+1}$  – коэффициенты крутильной жесткости коленчатого вала на участках между соответствующими кривошипами (моторными массами) ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ), Н·м·рад<sup>-1</sup>;  $M_2 - M_{n-1}$  – возмущающие моменты, действующие на моторные массы, Н·м;  $\xi_2 - \xi_{n-1}$  – коэффициенты демпфирования моторных масс, учитывающие все виды сопротивления в двигателе, Н·м·с;  $I_n$  – приведенный момент инерции хвостовика коленчатого вала (величина его определяется в основном моментом инерции маховика двигателя), кг·м<sup>2</sup>;  $c_{n-1,n}$  – коэффициент крутильной жесткости коленчатого вала на участке между последним кривошипом и маховиком (от середины последней коренной шейки до середины сечения маховика), Н·м·рад<sup>-1</sup>. Напомним, что при составлении расчетной модели приведенной крутильной системы (см. рис. 69) не учитывались переменные силы внутреннего трения в

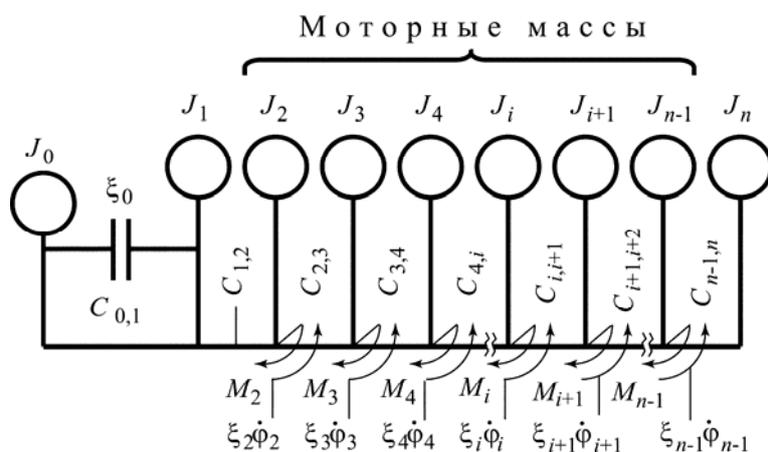


Рис. 69. Приведенная  $n$ -массовая эквивалентная крутильная система коленчатого вала ДВС

материале коленчатого вала (упругий гистерезис), так как они невелики по сравнению с силами жидкостного трения в подшипниках и цилиндрах двигателя.

Таким образом, дискретная система условно изображает-

сы в виде крутильной системы, где массы показаны кружками, а упругие связи – отрезками прямой.

Порядковый номер массы указывается в индексе (0 – принят для демпфера крутильных колебаний). Индекс при символе коэффициента жесткости участка, расположенного между смежными массами, указывает на номера этих масс ( $i, i+1$ ).

Приведенная  $n$ -массовая крутильная система коленчатого вала ДВС (с демпфером жидкостного или внутреннего трения) (см. рис. 69) в общем виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 I_0\ddot{\varphi}_0 + \xi_0(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) + C_{0,1}(\varphi_0 - \varphi_1) &= 0; \\
 I_1\ddot{\varphi}_1 - \xi_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) - C_{0,1}(\varphi_0 - \varphi_1) + C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\
 I_2\ddot{\varphi}_2 + \xi_2\dot{\varphi}_2 - C_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) &= M_2; \\
 I_3\ddot{\varphi}_3 + \xi_3\dot{\varphi}_3 - C_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) + C_{3,4}(\varphi_3 - \varphi_4) &= M_3; \\
 \dots\dots\dots \\
 I_i\ddot{\varphi}_i + \xi_i\dot{\varphi}_i - C_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= M_i; \\
 \dots\dots\dots \\
 I_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} + \xi_{n-1}\dot{\varphi}_{n-1} - C_{n-2,n-1}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + C_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= M_{n-1}; \\
 I_n\ddot{\varphi}_n - C_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{i=0, 1, 2, 3, \dots, n} \quad (175)$$

где  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0$  – угловые перемещение, скорость и ускорение маховика демпфера, рад,  $\text{c}^{-1}$ ,  $\text{c}^{-2}$  соответственно;  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$  – угловые перемещение, скорость и ускорение носка коленчатого вала;  $\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i$  – угловые перемещение, скорость и ускорение  $i$ -й моторной массы ( $i=2\dots n$ );  $\varphi_n, \dot{\varphi}_n, \ddot{\varphi}_n$  – угловые перемещение, скорость и ускорение хвостовика (маховика) коленчатого вала.

При составлении дифференциальных уравнений (175) аналогично уравнениям (38) или (83) приравнивались для каждой массы суммы моментов сил инерции, сопротивления и упругих сил вынуждающим моментам (или нулю, если вынуждающие моменты на эту массу не действуют).

В дифференциальных уравнениях (175) нелинейность не учитывалась. Это вызвано тем обстоятельством, что зависимость между напряжениями и деформациями при первичном нагружении имеет нелинейный характер с большой петлей гистерезиса [21]. При последующих нагружениях площадь петли уменьшается и достигает мини-

мальной величины после полной стабилизации упругих свойств. В то же время при значительных деформациях резинового слоя крутящий момент линейно зависит от угла закручивания [21].

Заметим, что на рис. 69 перед моторными массами и после них располагаются только по одной массе, хотя их может быть сколько угодно в зависимости от выбора эквивалентной системы (например, если добавляются трансмиссия или другие потребители энергии). Дифференциальные уравнения для них составляются как для  $i$ -й массы без правой части (вынуждающие моменты отсутствуют). Для жидкостного демпфера в системе (175) второй и третий член отсутствует, так как  $C_{0,1} = 0$  (нет упругой связи между маховиком и корпусом).

Необходимость установки демпфера крутильных колебаний устанавливается по результатам расчета собственных колебаний приведенной крутильной системы (см. п. 2.5). При отсутствии демпфера крутильных колебаний в системе (175) первое уравнение отбрасывается, а кроме того, отсутствуют второй и третий члены во втором уравнении  $\xi_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ ;  $c_{0,1} = 0$ . Если теперь в системе (175) принять  $\xi_i = 0$ ;  $M_i = 0$ , то придем к системе свободных колебаний (42) для определения  $\omega_c$

$$I_i \ddot{\varphi}_i - c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = 0, (i = 1, 2, 3 \dots n).$$

Для определения амплитуд вынужденных колебаний примем, что массы  $i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) при вынужденных колебаниях совершают гармонические колебания одной и той же частоты [3]

$$\varphi_i = A_{i,k}^0 \sin(k\omega t + \alpha_{i,k}) = A_{i,k} \sin k\omega t + B_{i,k} \cos k\omega t; \quad (176)$$

$$A_{i,k} = A_{i,k}^0 \cos \alpha_{i,k}; B_{i,k} = A_{i,k}^0 \sin \alpha_{i,k};$$

$$A_{i,k}^0 = \sqrt{A_{i,k}^2 + B_{i,k}^2}; \quad (177)$$

$$\alpha_{i,k} = \text{arctg}(B_{i,k} / A_{i,k}),$$

где  $A_{i,k}^0$  –  $k$ -я гармоническая амплитуда массы  $i$ , рад<sup>15</sup>;  $\alpha_{i,k}$  – фазовый угол амплитуды  $k$ -й гармоники массы  $i$ , град;  $\omega$  – угловая частота

---

<sup>15</sup> Мы специально ввели новое обозначение амплитуды  $A$ , связав ее определение с матричным методом.

возмущающего момента, рад·с<sup>-1</sup>;  $k$  – порядок гармоники возмущающего момента.

Возмущающий момент от действия газовых сил и сил инерции в  $i$ -м цилиндре представим в виде (47)

$$M_i = \sum_{k=0,5}^N M_{i,k}^a \sin(k\omega t + \beta_{i,k} + k\delta_i) = \sum_{k=0,5}^N (P_i \sin k\omega t + L_i \cos k\omega t);$$

$$P_i = M_{i,k}^a \cos(\beta_{i,k} + k\delta_i); L_i = M_{i,k}^a \sin(\beta_{i,k} + k\delta_i),$$

где  $N$  – число гармоник (для четырехтактных двигателей – 0,5; 1,0; 1,5; ... $N$ , двухтактных – 1, 2,0, ...,  $N$ );  $M_{i,k}^a$  – амплитуда  $k$ -й гармоники возмущающего момента  $M_i$ , действующего в  $i$ -м цилиндре от газовых и инерционных сил, Н·м;  $\beta_{i,k}$  – ее фазовый угол, град;  $\delta_i$  – угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрах двигателя, град.

Подставив в систему (175) значение  $\varphi_i$  и их производных из (176), получим систему из  $2i$  линейных уравнений относительно  $A_{i,k}$  и  $B_{i,k}$  (т. е. в сущности относительно  $A_{i,k}^0$  –  $k$ -й гармонической амплитуды массы  $i$  в соответствии с (177)) для каждой гармоники  $k$ , так как каждое из  $i$  уравнений системы (175) разделится на два в зависимости от коэффициентов, стоящих при  $\sin\omega t$  и  $\cos\omega t$ .

В матричном виде эта система имеет вид

$$D_{ts} \bar{A} = \bar{M}^a, \quad (178)$$

где  $D_{ts}$  – матрица, учитывающая свойства приведенной крутильной системы [ $D_{ts} = f(I_i, \omega, C_{i,i+1}, \xi_i)$ ];  $\bar{A}$  – вектор-столбец амплитуд крутильных колебаний масс;  $\bar{M}^a$  – вектор-столбец амплитуд гармонических составляющих моментов, действующих в крутильной системе.

При этом матрица-столбец  $\bar{A}$  содержит по два компонента амплитуд крутильных колебаний масс  $I_i$  (см. зависимости (176), (177)), а матрица-столбец  $\bar{M}^a$  содержит нулевые компоненты – по два для масс  $I_0, I_1$  и  $I_n$ , так как на них не действуют никакие вынуждающие моменты

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{0,k} \\ B_{0,k} \\ A_{1,k} \\ B_{1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n,k} \\ B_{n,k} \end{pmatrix} \quad \bar{M}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{2,k} \\ L_{2,k} \\ P_{3,k} \\ L_{3,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{n-1,k} \\ L_{n-1,k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (179)$$

Матрица  $D_{is}$  – квадратная, имеющая порядок  $2n$ , где  $n$  – число масс в приведенной крутильно-колеблющейся системе. По своей структуре она является ленточной, поскольку только на главной диагонали, а также на двух верхних и двух нижних кодиагоналях располагаются отличные от нуля элементы. Для подробного анализа разобьем матрицу  $D_{is}$  на блоки  $D_{ii}$ , которые сами являются квадратными матрицами второго порядка

$$D = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{2,3} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & D_{3,2} & D_{3,3} & D_{3,4} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{4,3} & D_{4,4} & D_{4,5} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D_{i,i-1} & D_{i,i} & D_{i,i+1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & D_{n-1,n-2} & \cdot & \cdot & D_{n-1,n-1} & D_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & D_{n,n-1} & D_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (180)$$

$$\text{где } D_{1,2} = D_{2,1} = \begin{vmatrix} -C_{0,1} & \xi_0 k \omega \\ -\xi_0 k \omega & -C_{0,1} \end{vmatrix}; \quad D_{i,i+1} = D_{i+1,i} = \begin{vmatrix} -C_{i,i+1} & 0 \\ 0 & -C_{i,i+1} \end{vmatrix}; \quad (181)$$

$$D_{i,i} = \begin{vmatrix} -I_i k^2 \omega^2 + C_{i-1,i} + C_{i,i+1} & -\xi_i k \omega \\ \xi_i k \omega & -I_i k^2 \omega^2 + C_{i-1,i} + C_{i,i+1} \end{vmatrix}. \quad (182)$$

Блоки  $D_{1,2} = D_{2,1}$  описывают связь между массами  $I_0$  и  $I_1$ , т.к. учитывается коэффициент жесткости  $c_{0,1}$  на этом участке приведенной системы, а также сопротивление крутильным колебаниям, вызванное демпфером  $-\xi_0 k \omega$ . Для демпфера жидкостного трения  $c_{0,1} = 0$ , т. е. на главной диагонали располагаются нулевые компоненты. Если между какими-то массами приведенной системы отсутствует демпфирование, то компоненты, стоящие на побочной диагонали, равны нулю ( $\xi_i = 0$ ). Матрица несимметрична, поскольку при дифференцировании угловой координаты  $\varphi_i$  (176) по времени  $t$  функция  $\cos k \omega t$  при  $B_{i,k}$  дает знак минус.

Блоки  $D_{ii}$ , расположенные на главной диагонали, учитывают свойства  $i$ -й массы – ее момент инерции, демпфирование собственно самой массы, а также коэффициенты жесткости участков приведенной системы перед массой и после нее. Матрица  $D_{ii}$  так же несимметрична, как и  $D_{i+1,i} \neq D_{i,i+1}$ .

Умножив матричное уравнение на матрицу  $D^{-1}$ , обратную матрице  $D$ , получим:

$$\bar{A} = D^{-1} \bar{M}^a. \quad (183)$$

Решение (183) легко реализуется на ЭВМ. Компоненты матрицы  $D$  можно рассчитать по формулам (181) и (182).

Матрица-столбец амплитуд гармонических составляющих вынуждающих моментов, действующих на массы  $i$ , может быть определена на основе гармонического анализа кривой крутящего момента двигателя. Для вычисления амплитуд необходимо подставить поочередно в уравнение (175) значение амплитуд вынуждающих моментов для всех гармоник начиная с 0,5 (и с таким же шагом) для четырехтактного или с 1,0 – для двухтактного. Амплитуды и фазовые углы колебаний и фазовые углы для каждой массы  $i$  и гармоники определяются по формуле (177).

Для определения суммарной амплитуды угловых колебаний  $A_i$   $i$ -й массы от угла поворота коленчатого вала двигателя воспользуемся зависимостью

$$A_i = \sum_{0,5}^N A_{i,k}^0 \sin(k\omega t + \alpha_{i,k}). \quad (184)$$

Численное решение системы (175) приведенной крутильной системы коленчатого вала ДВС с помощью ЭВМ позволяет выбрать такой момент инерции маховика демпфера  $I_0$ , при котором амплитуды колебаний носка будут минимальными.

### Вопросы для самопроверки

1. Как составляются дифференциальные уравнения крутильных колебаний многомассовой системы?
2. Чем можно объяснить, что матрица, учитывающая свойства крутильно-колеблющейся системы, ленточная?
3. Чем объясняется, что подматрицы  $D_{ii}$  и  $D_{i+1,i}$  несимметричны?
4. Сколько уравнений будет в системе для вычисления амплитуд крутильных колебаний?

### 5.3. Методика расчета жидкостного демпфера в многомассовой крутильной системе

Матричные методы расчета вынужденных колебаний в приведенной многомассовой крутильно-колеблющейся системе коленчатого вала ДВС с демпфером от полного спектра крутящего момента и определение оптимального коэффициента демпфирования можно проводить по следующей методике.

Составляем расчетную схему крутильно-колеблющейся системы и определяем ее параметры:  $I_i$  – моменты инерции масс ( $i= 1, 2, \dots, n$ ); коэффициенты жесткости  $c_{i,i+1}$  участков коленчатого вала между ними, а также коэффициенты демпфирования  $\xi_i$  каждой моторной массы соответственно, а если в системе присутствует демпфер, то и  $\xi_0$ . Ориентировочные значения  $\xi_i$  приведены в п. 3.5, однако они могут быть уточнены по данным экспериментальных исследований [44].

Определяем частоты свободных колебаний приведенной системы, соответствующие двум формам.

По результатам расчета собственных колебаний будет выяснено по частотной диаграмме (см. рис. 50), находится ли резонанс какой-либо из гармоник в рабочем диапазоне частот вращения коленчатого вала. Кроме того, на этом этапе можно провести по уравнению (178) расчет амплитуд вынужденных колебаний первой массы. Это позволяет выяснить, на сколько потребуется снизить уровень крутильных колебаний для обеспечения прочности коленчатого вала и нормальной работы двигателя. Для этого определяем углы поворота  $\delta_i$  коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрах двигателя, а по данным гармонического анализа вынуждающих моментов, действующих на каждую массу, определяем амплитуды  $k$ -й гармоники ( $k=0,5, 1, 1,5 \dots, N$  для четырехтактного или  $1,2,3 \dots N$  для двухтактного)  $M_{i,k}^a$  вынуждающего момента и фазовые углы  $\beta_{i,k}$ .

По формулам (180) – (182) формируем матрицу  $D$ , учитывающую свойства приведенной крутильной системы.

Расчет амплитуд гармоник вынуждающих моментов  $P_i$  и  $L_i$ , действующих на массы  $i$ , проводим, используя зависимость (47). Тем самым будет определен вектор-столбец  $\bar{M}^a$  амплитуд гармонических составляющих моментов, действующих на массы  $i$  (правая часть матричного уравнения (178)). Покажем это на примере расчета демпфера жидкостного трения для дизеля 15/16 (8ДВТ-330).

На рис. 70 показана приведенная шестимассовая (без демпфера) крутильная система коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) и ее одноузловая форма колебаний ( $a_i$  – относительные амплитуды масс). Дизель  $V$ -образный при угле развала цилиндров  $\gamma = 90^\circ$  и порядке работы 1-5-4-8-6-3-7-2. Собственная и круговая частота собственных колебаний, определенная по методике, приведенной в п. 2.5, равна  $f_c = 110$  Гц;  $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \cdot 110 = 691$  с<sup>-1</sup>.

В табл. 10 приведены амплитуды  $M_{i,k}^a$  и фазовые углы  $\beta_{i,k}$  (до двенадцатой гармоники включительно) гармонических составляющих кривой крутящего момента от газовых и инерционных сил одного цилиндра дизеля 8ЧН 15/16. В табл. 11 – амплитуды гармонических составляющих возмущающих моментов  $P_i = M_{i,k}^a \cos(\beta_{i,k} + k\delta_i)$  и

$L_i = M_{i,k}^a \sin(\beta_{i,k} + k\delta_i)$  при  $\sin k\omega t$  и  $\cos k\omega t$  (см. формулу (47)), действующих на массы в приведенной шестимассовой крутильной системе (см. рис. 70).

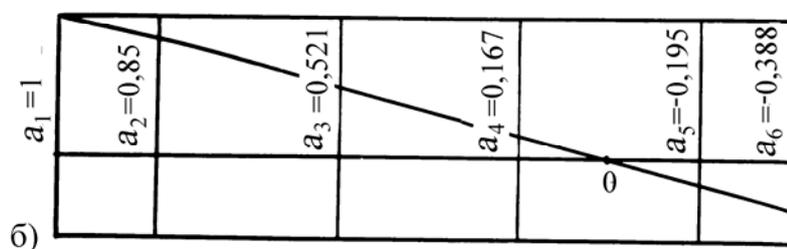
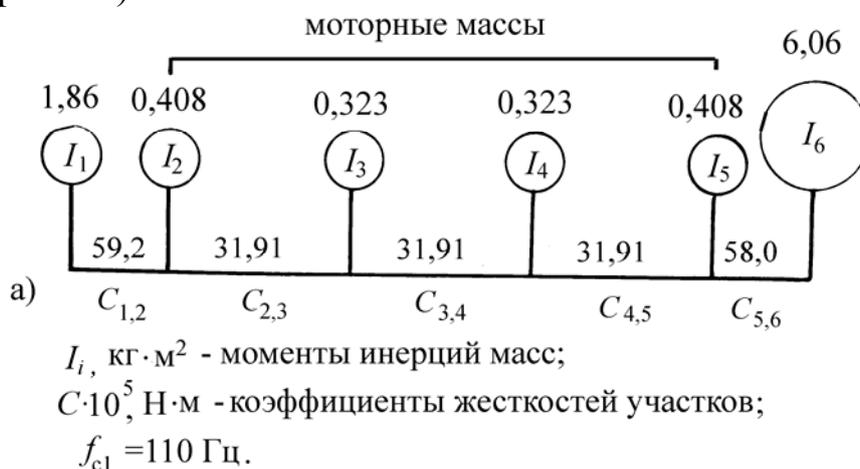


Рис. 70. Приведенная шестимассовая крутильная система коленчатого вала дизеля 8ЧН 15.16 (8ДВТ-330) (а) и ее одноузловая форма колебаний (б)

Для вычисления на ЭВМ целесообразно подставлять поочередно в уравнение (178) значения амплитуд вынуждающих моментов  $M_{i,k}^a$  для всех гармоник начиная с 0,5 для четырехтактного или с 1,0 для двухтактного двигателей. Суммарная амплитуда от всех гармоник определяется по формуле (184).

Как показали расчетные и экспериментальные исследования [3, 4], для выпускаемых автомобильных и тракторных двигателей оптимальные коэффициенты демпфирования  $\xi_0$  (особенно жидкостных демпферов) и моменты инерции маховиков  $I_0$  меняются в достаточно широких пределах.

Для выбора параметров демпфера примем начальные значения момента инерции маховика демпфера  $I_0$  и коэффициентов демпфирования  $\xi_0$ , начальную угловую частоту вращения коленчатого вала  $\omega$  (или частоту вращения  $n$ ), а также шаг изменения этих величин  $\Delta I_0$ ,

$\Delta\xi_0$ ,  $\Delta\omega$  и угол поворота коленчатого вала  $\Delta\varphi$ , через которые проводятся расчеты. В результате такого расчета необходимо определить оптимальные значения  $I_0$ ,  $\xi_0$ , которые обеспечили бы снижение амплитуд крутильных колебаний до заданного уровня. В этом случае используем подход, который иногда называют классическим (метод Гаусса-Зейделя). Он состоит в том, что сначала последовательно изменяется значение одного оптимизируемого параметра (например коэффициента демпфирования  $\xi_0$ ). Затем находится и фиксируется такое значение  $\xi_0$ , при котором амплитуда крутильных колебаний первой массы  $A_1$  будет минимальной. В этих условиях последовательно изменяется значение второго параметра, например,  $I_0$  и т. д.

Таблица 10

Амплитуды и фазовые углы гармонических составляющих кривой крутящего момента от газовых и инерционных сил одного цилиндра дизеля 8ЧН 15/16

$k$	$M_{i,k}^a$ Н·м	$\beta_{i,k}$ град	$k$	$M_{i,k}^a$ Н·м	$\beta_{i,k}$ град
1	2	3	4	5	6
0,5	636,0	221,1	6,5	93,2	145,2
1,0	872,2	16,0	7,0	69,3	321,4
1,5	765,8	185,0	7,5	53,5	138,3
2,0	44,3	233,2	8,0	43,3	315,5
2,5	524,0	172,4	8,5	35,8	131,5
3,0	172,8	334,2	9,0	30,1	305,0
3,5	360,8	167,4	9,5	25,2	115,8
4,0	258,0	341,8	10,0	19,6	285,7
4,5	215,2	158,9	10,5	12,9	95,5
5,0	177,7	335,9	11,0	7,62	262,4
5,5	147,6	152,5	11,5	6,16	70,0
6,0	122,2	329,4	12,0	7,38	253,2

По принятым начальным значениям  $I_0$ ,  $\xi_0$  и  $\omega$  при  $\varphi=0$  в соответствии с формулой (184) вычисляем угловые перемещения  $\varphi_i$  масс  $i$  для всех гармоник. Начальные значения и конечные значения  $I_0$  выбирают исходя из конструктивных соображений и возможности компоновки демпфера на носке коленчатого вала.

Начальные значения коэффициентов демпфирования выбираем для жидкостного демпфера –  $\xi_0= 30\dots 40$  Н·м·с [3, 38].

Увеличив угол поворота коленчатого вала  $\varphi$  на  $\Delta\varphi$ , определяем  $\varphi_i$  до тех пор, пока не будет определен интервал, в котором расположено максимальное или минимальное значение пиковой амплитуды  $A_i$   $i$ -й массы с заданной точностью (по одноузловой форме колебаний – первой массы). Поиск максимального или минимального значения пиковой амплитуды можно проводить, используя численные методы теории оптимизации [45].

Таблица 11

Амплитуды и фазовые углы гармонических составляющих  
возмущающих моментов в приведенной крутильной  
системе дизеля 8ЧН 15/16

$k$	$P_2$	$L_2$	$P_3$	$L_3$	$P_4$	$L_4$	$P_5$	$L_5$
0,5	-479,3	-418,1	634,5	-43,3	43,3	634,5	418,1	-479,3
	-43,3	-634,5	479,3	418,1	-418,1	479,3	-634,5	43,3
1,0	838,4	240,4	240,4	-838,4	-240,4	838,4	-838,4	-240,4
	-240,4	838,4	838,4	240,4	-838,4	-240,4	240,4	-838,4
1,5	-762,9	-66,7	-492,2	-586,6	-586,6	492,2	-66,7	762,9
	586,6	-492,2	762,9	66,7	66,7	-762,9	492,3	586,6
2,0	-26,5	-35,5	26,5	35,5	26,5	35,5	-26,5	-35,5
	26,5	35,5	-26,5	-35,5	-26,5	-35,5	26,5	35,5
2,5	-519,4	69,3	-318,3	416,3	-416,3	-318,3	-69,3	-519,4
	416,3	318,3	519,4	-69,3	69,3	519,4	318,3	-416,3
3,0	155,6	-75,2	75,2	155,6	-75,2	-155,6	-155,6	75,2
	-75,2	-155,6	155,6	-75,2	-155,6	75,2	75,2	155,6
3,5	-352,1	78,7	304,6	193,3	193,3	-304,6	78,7	352,1
	-193,3	304,6	352,1	-78,7	-78,7	-352,1	-304,6	-193,1
4,0	245,1	-80,6	245,1	-80,6	245,1	-80,6	245,1	-80,6
	245,1	-80,6	245,1	-80,6	245,1	-80,6	245,1	-80,6
4,5	-200,8	77,5	87,2	-196,7	196,7	87,2	-77,5	-200,8
	-196,7	-87,2	200,8	-77,5	77,5	200,8	-87,2	196,7
5,0	162,2	-72,6	-72,6	-162,2	72,6	162,2	-162,2	72,6
	72,6	162,2	162,2	-72,6	-162,2	72,6	-72,6	-162,2

Расчеты проводим, изменяя  $\varphi$  на  $\Delta\varphi$  до значения  $\varphi = 4\pi$  по всем угловым частотам вращения коленчатого вала  $\omega$ , приняв для  $i+1$  варианта расчета  $\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega$ . Расчет проводят до получения графической зависимости  $A_i = f(\omega)$ , по которой определяем значение максимальной резонансной амплитуды  $A_i = A_{i,рез.}$ . Поиск резонансных ам-

плитуд и частот проводится с использованием численных методов оптимизации.

Увеличив начальное  $\xi_0$  на  $\Delta\xi_0$ , повторяем расчеты пока не определится интервал, в котором расположено минимальное значение резонансной амплитуды  $A_i$ . Численным методом теории оптимизации с заданной точностью определяется значение оптимального коэффициента демпфирования  $\xi_0$  при соответствующем значении резонансной частоты вращения коленчатого вала  $n_p$  и амплитуды  $A_i$ .

На рис. 71 построены зависимости амплитуд колебаний  $A_1$  носка коленчатого вала (первой массы на рис. 70) дизеля 8ЧН 15/16 от частоты возмущающего момента  $f$ , Гц при различных коэффициентах демпфирования жидкостного демпфера  $\xi_0$  [2, 3].

Из графика видно, что оптимальное значение  $\xi_0 = 933$  Н·м·с (кривая 13, см. рис. 71), так как амплитуда колебаний первой массы составляет  $2,48 \cdot 10^{-3}$  рад при частоте  $f = 106$  Гц. Напомним, что собственная частота приведенной системы без демпфера составляла величину  $f = 110$  Гц. Незначительное изменение произошло за счет установки на носке демпфера.

Поскольку расчеты проводились при постоянном значении момента инерции маховика  $I_0$ , то теперь приступим к определению его оптимального значения. Увеличим величину  $I_0$  на  $\Delta I_0$  и проведем расчеты, как и ранее до тех пор, пока по полученной зависимости  $A_i = f(I_0)$  не будет определено его оптимальное значение. Для жидкостного демпфера крутильных колебаний оптимальное затухание (для максимума рассеиваемой энергии  $W$ ) определяется формулами (135) и (136) [2, 3, 4].

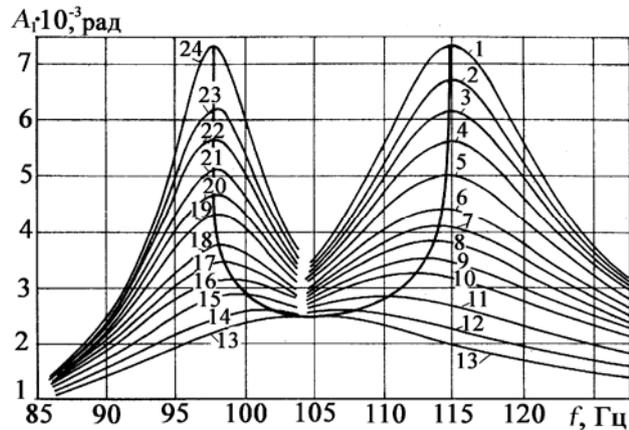


Рис. 71. График зависимости амплитуд колебаний носка коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 от частоты возмущающего момента при различных коэффициентах демпфирования  $\xi_0$  жидкостного демпфера ( $I_0 = 1,6$  кг·м<sup>2</sup>): значения  $\xi_0$  (Н·м·с): 1–0; 2–25; 3–50; 4–80; 5–120; 6–175; 7–210; 8–250; 9–300; 10–360; 11–500; 12–700; 13–933; 14–1300; 15–1800; 16–2300; 17–2800; 18–3400; 19–4800; 20–6000; 21–8000; 22–12000; 23–20 000; 24 –  $\infty$

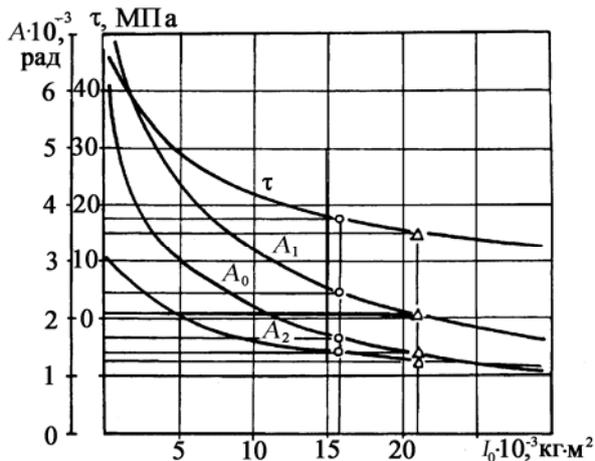


Рис 72. График зависимости резонансных амплитуд колебаний масс и напряжений в узле для крутильной системы коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) от величин момента инерции маховика при оптимальном коэффициенте демпфирования

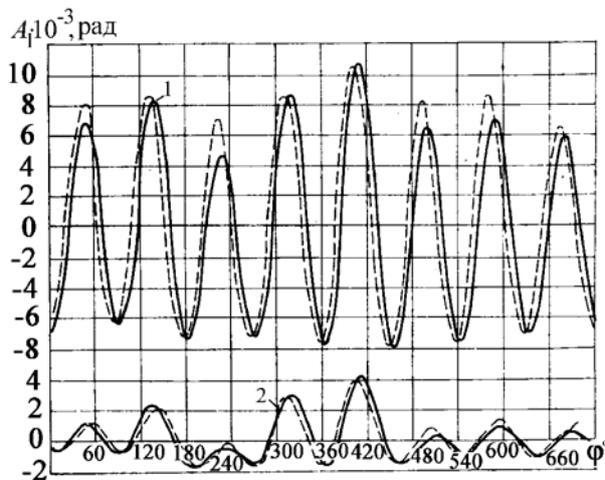


Рис. 73. Амплитуды крутильных колебаний носка коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) без демпфера (1) и с демпфером (2) ( $I_0 = 1,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $n = 1720 \text{ мин}^{-1}$ : — расчет; - - - - экспериментальные данные

при частоте вращения  $n = 1720 \text{ мин}^{-1}$  без демпфера (кривая 1) и после установки его (кривая 2) с оптимизированными параметрами.

Расчетные данные имеют достаточно хорошую сходимость с экспериментальными – погрешность составляет 5...7 %.

При увеличении  $I_0$  демпфер (как жидкостный, так и внутреннего трения) эффективно гасит крутильные колебания коленчатого вала только на начальных участках кривой  $A_1 = f(I_0)$  (рис. 72, см. также рис. 65 и 66). Дальнейшее увеличение  $I_0$  не приводит к существенному снижению амплитуд крутильных колебаний.

Точно так же увеличение  $I_0$  мало влияет на снижение касательных напряжений в узловой точке приведенной крутильной системы (см. рис. 72, кривая  $\tau$ ). Расчетами по приведенной методике было установлено, что оптимальное значение момента инерции маховика демпфера для такой крутильной системы коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330)  $I_0 = 1,577 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

На рис. 73 приведены расчетные и экспериментальные данные по определению амплитуд крутильных колебаний носка коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) в зависимости от угла его поворо-

На рис. 74 приведены результаты расчетов, проведенных по предлагаемой методике, и экспериментальных данных, полученных при испытании дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) [3, 42] – изменение амплитуды угловых колебаний носка коленчатого вала при изменении его частоты вращения (цифры у кривых показывают порядок резонирующей гармоники).

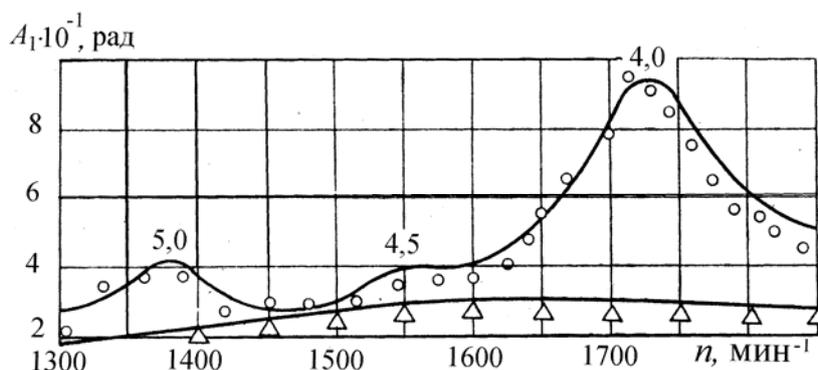


Рис. 74. Амплитуда колебаний носка коленчатого вала дизеля 8ЧН 15/16 при изменении частоты вращения коленчатого вала:  $\circ$  – без демпфера;  $\triangle$  – с жидкостным демпфером (точками в кружочках и треугольниках помечены экспериментальные данные)

По результатам торсиографирования коленчатого вала двигателя 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) установлено, что максимальная амплитуда колебаний носка коленчатого вала  $A_1 = 2,33 \cdot 10^{-3}$  рад, а напряжение в узле колебаний  $\tau_{\max} = 15,6$  МПа. Испытания проводились на режимах максимальной частоты вращения холостого хода и максимального крутящего момента. По данным расчета (см. рис. 74) амплитуда  $A_1 = 2,50 \cdot 10^{-3}$  рад, а касательное напряжение в узловой точке (см. рис. 72 при значении  $I_0 = 1,577$  кг·м<sup>2</sup>) –  $\tau_{\max} = 16,5$  МПа.

Следовательно, экспериментальные и расчетные данные имеют достаточно хорошую сходимость, а погрешность – в пределах 5...8 %.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой примерный порядок определения параметров демпферов жидкостного трения?

2. Как влияет коэффициент демпфирования на уровень крутильных колебаний?

3. Как влияет момент инерции маховика жидкостного демпфера на уровень крутильных колебаний?

4. Как выбираются начальные значения коэффициента демпфирования и момента инерции маховика демпфера?

5. Что мы подразумеваем под оптимальным значением коэффициента демпфирования и момента инерции маховика демпфера?

#### **5.4. Методика расчета демпфера внутреннего трения в многомассовой крутильной системе**

Расчет параметров демпферов крутильных колебаний внутреннего трения матричным методом в многомассовой крутильно-колеблющейся системе рекомендуется проводить, придерживаясь следующего алгоритма. После расчета собственных колебаний приведенной крутильной системы и расчета на вынужденные резонансные колебания определяется уровень крутильных колебаний и выясняется необходимость установки демпфирующих устройств.

При выборе демпфера внутреннего трения основными конструктивными параметрами являются момент инерции маховика демпфера  $I_0$ , коэффициент жесткости упругого (резинового) слоя  $c_{0,1}$ , коэффициент демпфирования  $\xi_0$  и его габаритные размеры. Что касается последних, то они выбираются из условий компоновки демпфера внутреннего трения на коленчатом валу, а это и позволяет определить значения  $I_0$ ,  $c_{0,1}$  и  $\xi_0$ .

По величине амплитуд вынужденных резонансных крутильных колебаний без демпфирующих устройств принимаются решения о конструкции демпфера – резиновый слой будет цилиндрической или Г-образной формы, так как последний более эффективно гасит крутильные колебания из-за большего объема резинового слоя. По выбранным размерам, используя зависимости (149) для резинового слоя цилиндрической формы, (152) – кольцевой формы или (153) – Г-образной формы ориентировочно определяем коэффициенты жесткости  $c_{0,1}$ . Заметим, что при этом определяется статический коэффи-

циент жесткости, а для определения динамического коэффициента необходимо умножить полученное значение на 2...2,5. При выборе модуля упругости второго рода  $G$  резинового слоя необходимо иметь в виду, что модуль упругости первого рода равен  $E=6...10$  МПа и связан с модулем упругости  $G$  зависимостью  $E=3G$  [21].

Выбираем начальное значение момента инерции маховика демпфера  $I_0$ . Заметим, что в демпфере внутреннего трения  $I_0$  также влияет на уровень снижения амплитуды крутильных колебаний или касательных напряжений в узловой точке. Поэтому на первом этапе при выбранном начальном значении коэффициента жесткости резинового слоя  $c_{0,1}$  можно построить график зависимости относительной амплитуды  $a_1$  корпуса демпфера (массы с моментом инерции  $I_1$ , см. рис. 69) при изменении величины  $I_0$ .

В данном случае мы исходим из допущения, что форма вынужденных колебаний при резонансе соответствует одной из форм свободных колебаний. На рис. 75 приведена зависимость относительной амплитуды  $a_1$  (корпуса резинового демпфера, см. рис. 69) от момента инерции маховика для дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160), параметры крутильно-колеблющейся системы которого будут даны ниже. Замечаем, что изменение момента инерции маховика с 0,014 до 0,035 кг·м<sup>2</sup> мало влияет на уменьшение относительной амплитуды  $a_1$ .

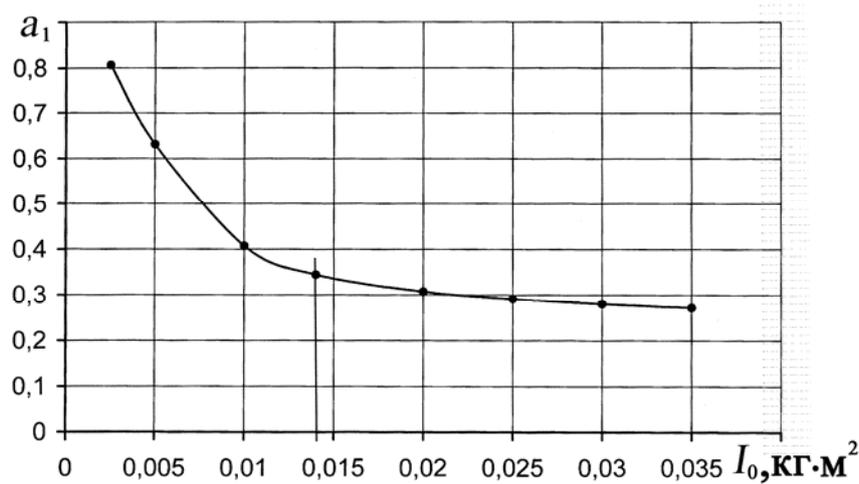


Рис. 75. Влияние момента инерции маховика резинового демпфера на относительную амплитуду первой массы приведенной системы коленчатого вала дизеля Д-160 при свободных крутильных колебаниях

Используя приближенную зависимость (пренебрегая величиной  $(\xi_0/2I_0)^2$ ), по формуле (158) найдем собственную круговую частоту  $\omega_d$  резинового демпфера.

На первом этапе расчета  $I_0$  выбирается из условия, что собственная частота крутильной системы  $\omega_c \cong \omega_d$ .

Далее по формуле (159), приняв что  $\xi_0 = (I_0\omega_d\delta)/\pi$  (логарифмический декремент затухания  $\delta = 0,5 \dots 0,8$ ), определяем приближенно коэффициент демпфирования  $\xi_0$  резинового слоя. Как показывают результаты экспериментальных исследований по определению  $\xi_0$  резинового слоя в демпферах внутреннего трения, его величина меняется в пределах  $5 \dots 10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$  [30, 46].

После выбора начальных значений  $I_0$ ,  $\xi_0$  и  $c_{0,1}$ , решив систему уравнений (178) для многомассовой крутильной системы, найдем амплитуды приведенных масс  $A_i$  или маховика демпфера  $A_0$  по углу поворота коленчатого вала и при различных частотах возбуждающего момента  $f = 2\pi/\omega$ , чтобы найти интервал, в котором расположено максимальное значение  $A_1$ . Определим резонансную частоту  $\omega_p$ , для которой определяем с заданной точностью величину  $A_1$ . На этом этапе расчета уточняется значение коэффициента жесткости резинового слоя. Для этого достаточно найти зависимость  $A_1 = f(c_{0,1})$  при постоянных  $I_0$  и  $\xi_0$  при колебаниях по первой и второй форме. Можно также, вычисляя частоты свободных колебаний многомассовой системы при изменении  $c_{0,1}$ , найти зависимость относительной амплитуды  $a_1 = f(c_{0,1})$ . При увеличении коэффициента жесткости резинового слоя  $c_{0,1}$  амплитуда  $a_1$  при колебаниях по первой форме увеличивается, а по второй форме – уменьшается. Это вызвано тем, что при свободных колебаниях по второй форме с увеличением  $c_{0,1}$  узловая точка смещается ближе к первой массе, что естественно уменьшает  $a_1$ .

На рис. 76 приведена зависимость относительных амплитуд  $a_1$  колебаний корпуса демпфера (первой массы) от коэффициента жесткости  $c_{0,1}$  резинового слоя (момент инерции маховика  $I_0=0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ): 1 – изменение  $a_1$  по первой форме; 2 – то же по второй форме. Абсцисса точки пересечения линий 1 и 2 определяет оптимальное значение  $c_{0,1} = 22950 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Резонасные или критические частоты вращения для  $k$ -й гармоники при первой  $\omega_{p1}$  и второй  $\omega_{p2}$  формах колебаний определяют по известным зависимостям

$$\omega_{p1} = \omega_c / k; \quad \omega_{p2} = \omega_c / k.$$

Изменяя начальное значение  $\xi_0$  на  $\Delta\xi_0$  при постоянных  $I_0$  и  $c_{0,1}$ , повторно проводим расчеты по всем частотам вынуждающего момента в пределах изменения величины  $\xi_0$  до тех пор, пока не определим минимальную амплитуду первой массы  $A_1$ .

Аналогично, изменяя начальное значение  $I_0$  на  $\Delta I_0$ , проведем расчеты  $A_i$  при постоянном значении  $\xi_0$  и  $c_{0,1}$  до тех пор, пока не получим зависимость  $A_1 = f(I_0)$ , по которой определяется значение  $I_0$ .

Покажем на примере выбор резинового демпфера крутильных колебаний для коленчатого вала дизеля с воздушным охлаждением 6ЧН 10,5/12 (Д-160), имеющего параметры:

- номинальная мощность  $N_e = 76$  кВт;
- среднее эффективное давление  $p_e = 0,68$  МПа;
- частота вращения коленчатого вала на режиме номинальной мощности  $n = 2200$  мин<sup>-1</sup>;
- порядок работы цилиндров 1-5-3-6-2-4.

Параметры девятимассовой приведенной крутильной системы коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 приведены в табл. 12, а результаты гармонического анализа кривой крутящего момента одного цилиндра – в табл. 13.

При определении момента инерции  $I_1$  носка коленчатого вала учитывалась ступица резинового демпфера Г-образной формы.

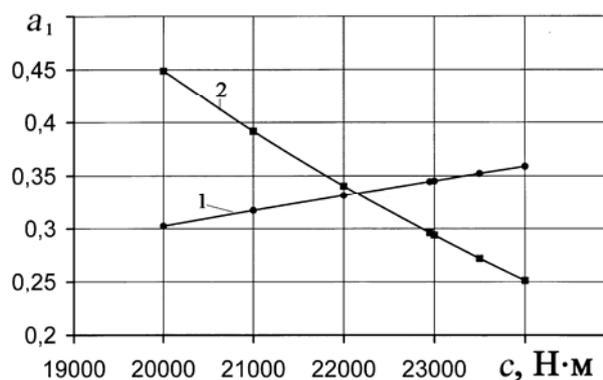


Рис. 76. Зависимость относительных амплитуд  $a_1$  колебаний первой массы приведенной системы коленчатого вала дизеля Д-160 от коэффициента жесткости резинового слоя (момент инерции маховика  $I_0=0,014$  кг·м<sup>2</sup>): 1 – изменение  $a_1$  по первой форме; 2 – то же – по второй форме

Таблица 12

Параметры приведенной крутильной системы дизеля  
коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12

Моменты инерции масс приведенной крутильной системы, кг·м <sup>2</sup> ·10 <sup>-2</sup>								
$I_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$
1,40	0,75	5,64	3,89	5,64	5,64	3,89	5,64	69,2
Коэффициенты жесткости, Н·м·10 <sup>4</sup>								
$C_{0,1}$	$C_{1,2}$	$C_{2,3}$	$C_{3,4}$	$C_{4,5}$	$C_{5,6}$	$C_{6,7}$	$C_{7,8}$	
2,295	3,126	115	115	115	115	115	145	

Таблица 13

Гармонический анализ кривой крутящего момента  
одного цилиндра дизеля 6ЧН 10,5/12

Гармо- ника $k$	$M_{i,k}^a$ , Н·м	$\beta_{i,k}$ , град	Гармо- ника $k$	$M_{i,k}^a$ , Н·м	$\beta_{i,k}$ , град
0,5	139,0	249°33'	5,0	58,1	326°33'
1,0	168,94	28°15'	5,5	49,6	149°38'
1,5	143,0	196°20'	6,0	41,8	323°11'
2,0	97,65	169°41'	6,5	35,1	138°38'
2,5	118,9	180°28'	7,0	29,3	314°27'
3,0	10,4	329°41'	7,5	24,5	130°19'
3,5	91,4	177°08'	8,0	20,7	307°04'
4,0	69,6	346°55'	8,5	17,7	122°32'
4,5	67,4	162°38'	9,0	14,9	298°18'

Без корпуса маховика момент инерции  $I_1 = 0,0058$  кг·м<sup>2</sup>. Расчетом было установлено, что круговая частота свободных крутильных колебаний по первой форме приведенной системы (см. табл. 12) составляет  $\omega_{c1} = 1363$  с<sup>-1</sup> (частота  $f_1 = 217$  Гц), а те же параметры по второй форме колебаний –  $\omega_{c2} = 2349$  с<sup>-1</sup> ( $f_2 = 374$  Гц). Демпфирование каждой моторной массы составляет по расчету [8]  $\xi_i = 2,18$  Н·м·с [47].

По разработанной программе для многомассовой системы определяются амплитуды крутильных колебаний, а также касательные напряжения в узловой точке приведенной системы. После расчета резонансных крутильных колебаний без демпфера выяснилось, что на частотах вращения 1448, 1738, 2172 и 2890 мин<sup>-1</sup> (для гармоник 9, 7,5,

6 и 4,5-й) амплитуды  $A_1$  первой массы, а также касательные напряжения в узловой точке превышают допустимые (рис. 77 и 78 – кривые 1). Так, в пределах рабочих частот амплитуда крутильных колебаний носка коленчатого вала достигает  $A_1=13 \cdot 10^{-3}$  рад, а касательные напряжения  $\tau_{\max}=60$  МПа (при резонансе 6-й гармоники).

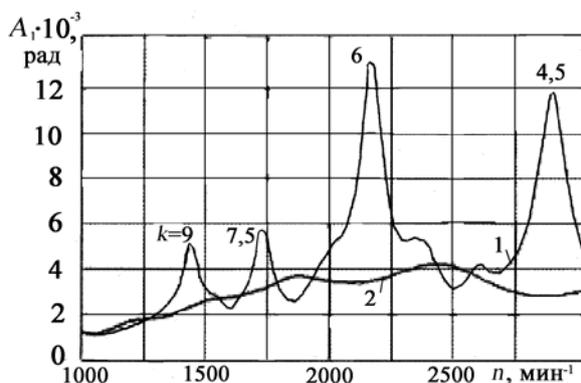


Рис. 77. Изменение амплитуд угловых колебаний первой массы приведенной системы коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 от частоты вращения: 1– без демпфера; 2– с резиновым демпфером (цифры у кривых показывают номера резонирующих гармоник)

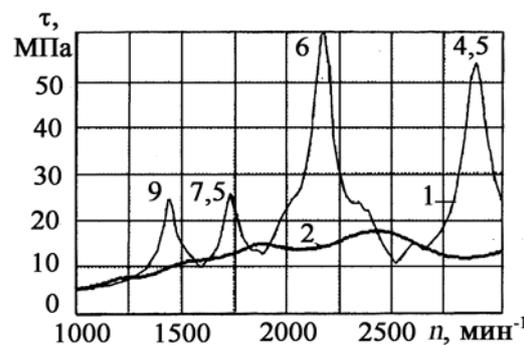


Рис. 78. Изменение касательных напряжений в узловом сечении коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 от частоты вращения: 1– без демпфера; 2– с резиновым демпфером (цифры у кривых показывают номера резонирующих гармоник)

По нашим исследованиям [4, 5], на резонансных режимах уровень касательных напряжений не должен превышать 15...25 МПа. В связи с этим было принято решение об установке резинового демпфера крутильных колебаний.

Выбрав ориентировочно габаритные размеры демпфера (цилиндрической формы), по формуле (149) определим значения динамического коэффициента жесткости:  $c_{0,1}=10000 \dots 40000$  Н·м. Начальное значение момента инерции маховика демпфера выбрали  $I_0 = 0,014$  кг·м<sup>2</sup> (из условий компоновки). Ранее при рассмотрении собственных колебаний определили, что оптимальное значение  $I_0 = 0,014$  кг·м<sup>2</sup> (см. рис. 75), а коэффициент жесткости резинового слоя  $c_{0,1} = 22950$  Н·м (см. рис. 76). Таким образом, оптимальное значение коэффициента жесткости резинового слоя ранее было определено правильно.

Используя приведенную крутильную систему коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160), найдем максимальные амплитуды кру-

тильных колебаний первой массы  $A_1$  при изменении  $c_{0,1}$  от 10000 до 40000 Н·м по первой  $A_1^{(1)}$  и второй  $A_1^{(2)}$  формам колебаний и построим графики  $A_1^{(1)} = f_1(c_{0,1})$  и  $A_1^{(2)} = f_2(c_{0,1})$ . При построении графика взято численное значение  $A_1^{(2)}$  (при расчетах по второй форме она имеет знак минус). Результаты этих расчетов приведены на рис. 79.

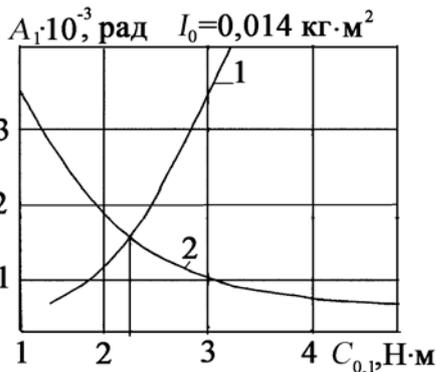


Рис. 79. Зависимость резонансных амплитуд  $A_1$  колебаний первой массы от коэффициента жесткости резинового слоя с моментом инерции маховика  $I_0=0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ : 1 – изменение  $A_1$  по первой форме; 2 – то же по второй форме



Рис. 80. Амплитуда крутильных колебаний массы 1 при изменении жесткости резинового слоя  $C_{0,1}$ , Н·м: 1– 22950; 2– 10000; 3– 20000; 4– 30000; 5– 40000

На основании их примем значение коэффициента жесткости резинового слоя  $c_{0,1} = 22950 \text{ Н}\cdot\text{м} \cong 23000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , поскольку при увеличении  $c_{0,1}$  амплитуда колебаний по первой форме (кривая 1) резко возрастает.

Частота свободных крутильных колебаний демпфера, определенная по формуле (158), равна  $\omega_d = 1281 \text{ с}^{-1}$ .

Значение логарифмического коэффициента затухания по результатам наших исследований [4, 32, 46]  $\delta = 0,87$ . Отсюда легко определяется начальное значение коэффициента демпфирования в резиновом слое  $\xi_0 = 5,45 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ .

Результаты расчетов амплитуды крутильных колебаний, а также касательных напряжений в узловой точке приведенной системы с оптимальными значениями момента инерции маховика и жесткости резинового слоя приведены на рис. 77 и 78 (кривые 2). Анализ кривых показывает, что для первой массы амплитуда  $A_1$  уменьшилась в 3,17 раза, а касательные напряжения в узловой точке (находилась между пятым и шестым кривошипом) – в 4 раза.

На рис. 80 приведена амплитудно-частотная характеристика для массы 2 многомассовой крутильно-колеблющейся

системы коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160) при изменении коэффициента жесткости резинового слоя демпфера ( $I_0=0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ). Расчет проводился при действии резонирующей 6-й гармоники. При частотах вращения коленчатого вала дизеля  $1673$  и  $2310 \text{ мин}^{-1}$  амплитуда массы 1 (носка коленчатого вала) составляла  $2,16\cdot 10^{-3}$  и  $2,18\cdot 10^{-3}$  радиан соответственно (кривая 1) при коэффициенте жесткости резинового слоя  $c_{0,1} = 22950 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Заметим, что при  $c_{0,1} = 20000 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (кривая 2) амплитуда колебаний возрастает при  $n \geq 2250 \text{ мин}^{-1}$ . При увеличении  $c_{0,1}$  (кривые 4 и 5), точно так же, как и при уменьшении (кривая 2)  $A_1^{(1)}$  возрастает (см. рис. 80).

Для проверки используемого метода расчета демпфера внутреннего трения было проведено торсиографирование коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160).

На рис. 81 приведены расчетные и экспериментальные кривые амплитуд крутильных колебаний носка  $A_1$  коленчатого вала 6ЧН 10,5/12 (Д-160) по углу его поворота с резиновым демпфером ( $I_0=0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $c_{0,1}=2,3\cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $\xi_0=5,5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ ) [46] на номинальной частоте вращения  $n=2200 \text{ мин}^{-1}$ .

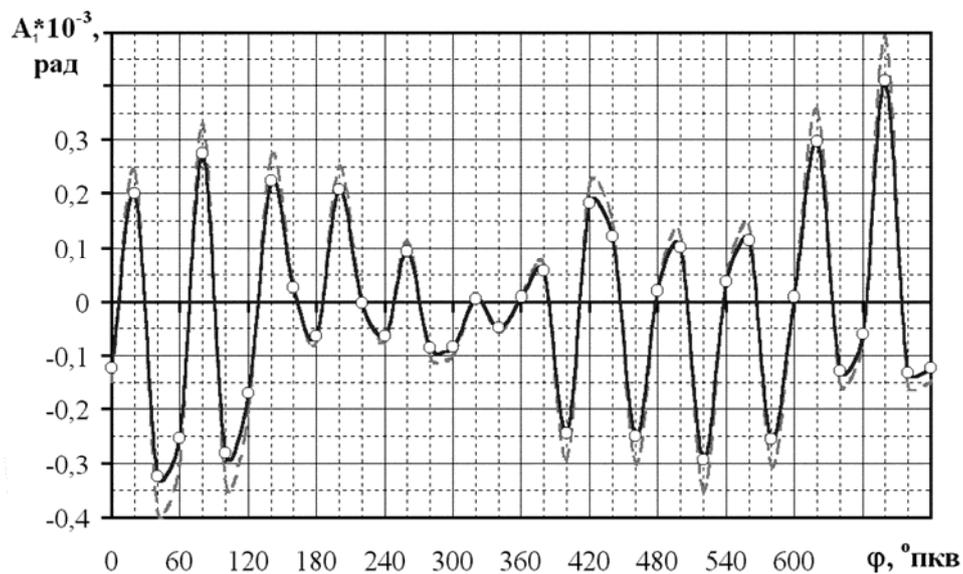


Рис. 81. Изменение амплитуды крутильных колебаний носка коленчатого вала дизеля 6Н 10,5/12 (Д-160) при  $n=2200 \text{ мин}^{-1}$  по углу поворота коленчатого вала  $\varphi$ : — расчетные; - - экспериментальные данные

Сравнение результатов расчетных и экспериментальных данных по определению амплитуды крутильных колебаний  $A_1$  носка коленчатого вала с выбранным резиновым демпфером показывает, что погрешность расчетного определения  $A_1$  не превышает 5 %.

Покажем, что предлагаемый метод выбора оптимальных параметров демпферов жидкостного и внутреннего трения может быть описан с помощью структурной схемы, приведенной на рис. 82.

На первом этапе проводится расчет параметров приведенной крутильно-колеблющейся системы (ККС): определяют моменты инерции

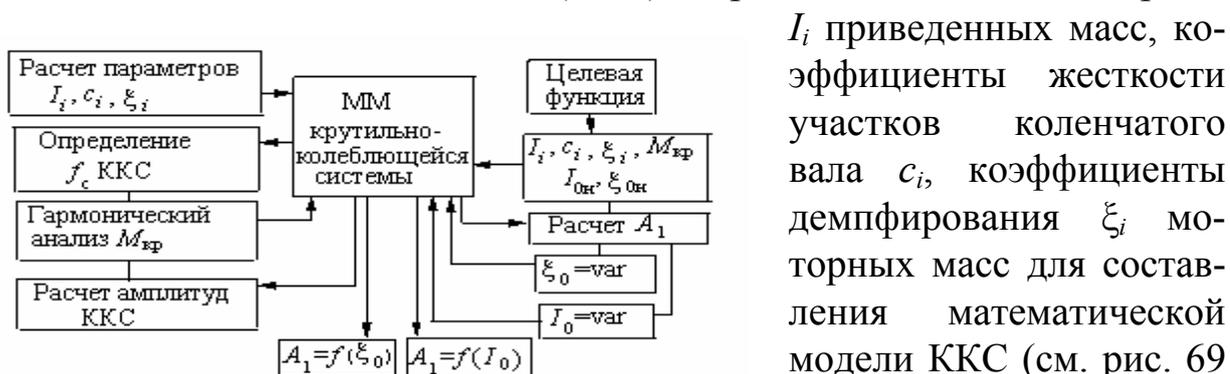


Рис. 82. Структурная схема оптимизации коэффициента демпфирования и момента инерции маховика демпфера

своих приведенных масс, коэффициенты жесткости участков коленчатого вала  $c_i$ , коэффициенты демпфирования  $\xi_i$  моторных масс для составления математической модели ККС (см. рис. 69 и 82). Используя уравнения свободных колебаний, определяем частоту собственных колебаний  $f_c$  (или круговую частоту  $\omega_c$ ) приведенной ККС. Если по результатам расчета окажется, что резонансы каких-либо гармоник находятся в рабочем диапазоне частот вращения коленчатого вала, то принимается решение об установке демпфера. Проводим гармонический анализ крутящего момента двигателя для составления вектора-столбца амплитуд гармонических составляющих моментов  $\bar{M}^a$ , действующих в крутильной системе.

С помощью целевых функций выбираем начальные значения для демпферов  $I_0$ ,  $\xi_0$ , а для демпфера внутреннего трения еще и коэффициент жесткости резинового слоя  $c_{0,1}$ . Используя зависимости (180) – (182), определяем компоненты матрицы  $D_{ts}$ , учитывающей свойства приведенной крутильной системы  $[D_{ts}=f(I_i, \omega, C_{i,i+1}, \xi_i)]$ . После решения матричного уравнения (183) определяем амплитуды массы  $A_1$  ККС (см. рис. 82). Это решение проводится при изменении сначала  $\xi_0$  (см. рис 82 –  $\xi_0 = var$ ), а далее и  $I_0$  для выбора их оптимальных значений. Выбрав такие значения  $\xi_0$  и  $I_0$ , при которых амплитуда колебаний первой массы будет минимальная, проводим далее расчет амплитуд масс ККС.

При выборе параметров демпферов внутреннего трения необходимо иметь в виду, что его установка существенно изменяет частоту собственных колебаний крутильно-колеблющейся системы. Так, например, для приведенной ККС дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160), параметры которой приведены в табл. 12 и 13, круговая частота по первой (одноузловой) форме колебаний составляет  $\omega_{c1} = 1363 \text{ с}^{-1}$  (частота  $f_1 = 217 \text{ Гц}$ ), а те же параметры по второй форме колебаний –  $\omega_{c2} = 2349 \text{ с}^{-1}$  ( $f_2 = 374 \text{ Гц}$ ). После установки резинового демпфера с параметрами: момент инерции маховика  $I_0 = 0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ; коэффициент жесткости резинового слоя  $c_{0,1} = 2,3 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; коэффициент демпфирования  $\xi_0 = 5,5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ , круговая частота по первой (одноузловой) форме колебаний равна  $\omega_{c1} = 1041 \text{ с}^{-1}$  (частота  $f_1 = 166 \text{ Гц}$ ), а те же параметры по второй форме колебаний –  $\omega_{c2} = 1535 \text{ с}^{-1}$  ( $f_2 = 244 \text{ Гц}$ ). В этом случае резонанс гармоники  $k = 9$  наступает при частоте вращения коленчатого вала 1105 (без демпфера – 1448);  $k = 7,5$  – 1326 (1738);  $k = 6$  – 1657 (2172);  $k = 4,5$  – 2209 (2890)  $\text{мин}^{-1}$ . На рис. 77 и 78 для кривой 2 (с резиновым демпфером) как раз на этих частотах видны незначительные увеличения амплитуды первой массы  $A_1$ .

Таким образом, вследствие наличия упругой связи (резиновый слой) между коленчатым валом и маховиком демпфера последний может совершать собственные угловые колебания, частота которых определяется по формуле (158). В этом случае к числу степеней свободы ККС коленчатого вала добавляется еще одна, а следовательно, еще одна частота и соответствующая этой частоте еще одна форма колебаний. Такие изменения системы коленчатого вала влияют на величину амплитуды крутильных колебаний («расстраивают» систему). Поэтому критические частоты вращения коленчатого вала, которые определили до установки демпфера, меняются и появляются новые (см. рис. 77 и 78, кривая 2).

В то же время установка жидкостного демпфера мало изменяет частоту собственных колебаний ККС коленчатого вала. Так, например, установка на носок коленчатого вала дизеля 6ЧН 10,5/12 (Д-160) вместо резинового силиконового демпфера с моментом инерции маховика  $I_0 = 0,014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  также изменяет частоту собственных колебаний: круговая частота по первой (одноузловой) форме колебаний равна  $\omega_{c1} = 1302 \text{ с}^{-1}$  (частота  $f_1 = 207 \text{ Гц}$ ), а те же параметры по второй форме колебаний –  $\omega_{c2} = 2083 \text{ с}^{-1}$  ( $f_2 = 332 \text{ Гц}$ ).

Однако, если при установке резинового демпфера частота изменилась на 23 % по первой форме, а на 34 % – по второй, то установка силиконового демпфера изменяет собственные частоты только на 4 и 11 %.

Подбирая соответствующим образом момент инерции маховика резинового демпфера  $I_0$  (см. рис. 75) и жесткость резинового слоя (заметим, что эти возможности ограничены), можно вывести критические частоты колебаний ККС коленчатого вала за пределы рабочих частот вращения. В связи с этим можно заметить, что использование для расчетов при резонансе относительных амплитуд  $a_i$  масс ККС (см. п. 4.6) может привести к грубым ошибкам при вычислении резонансных амплитуд  $\Phi_i$ . Этого недостатка лишен матричный метод расчета.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой примерный порядок определения параметров демпферов внутреннего трения?
2. Как определить оптимальное значение коэффициента жесткости резинового слоя?
3. Как на стадии проектирования определяется коэффициент демпфирования резинового слоя?
4. Как определяется момент инерции маховика резинового демпфера?

### 5.5. Пример расчета частоты свободных колебаний

Для крутильной системы, параметры приведенной системы которой приведены в табл. 14, определить собственную частоту по одноузловой форме колебаний [48].

Таблица 14

Параметры восьмимассовой крутильной системы

$I_i \cdot 10^2$ , кг·м <sup>2</sup>	0,60	5,64	3,89	5,64	5,64	3,89	5,64	61,7
$c_{i,i+1} \cdot 10^{-4}$ , Н·м	3,126	115,0	115,0	115,0	115,0	115,0	145,0	

Пробное решение основной частоты определим из рассмотрения двухмассовой системы с массой, имеющей момент инерции  $I_2^{(2)} = I_8 = 0,617$  кг·м<sup>2</sup> (маховик на хвостовике коленчатого вала) на одном конце и массой с моментом инерции  $I_1^{(2)} = \sum_{i=1}^7 I_i = 0,6559$  кг·м<sup>2</sup> (сумма

моментов инерции всех масс от первой до седьмой). Приведенный коэффициент жесткости  $c_{1,2}^{(2)}$  такой двухмассовой крутильно-колеблющейся системы равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{1,2}^{(2)}} &= \sum_{i=1}^8 \frac{1}{c_i} = \frac{1}{31260} + \frac{1}{1150000} + \frac{1}{1150000} + \frac{1}{1150000} + \\ &+ \frac{1}{1150000} + \frac{1}{1150000} + \frac{1}{1450000} = 3,702 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Откуда  $c_{1,2}^{(2)} = 27007 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Следовательно, пробное значение собственной частоты определим в соответствии в зависимости, приведенной для двухмассовой системы в п. 2.3:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_{1,2}^{(2)}(I_1^{(2)} + I_2^{(2)})}{I_1^{(2)} I_2^{(2)}}} = \sqrt{\frac{27007(0,617 + 0,6559)}{0,617 \cdot 0,6559}} = 550 \text{ рад/с}.$$

Выбрав пробную собственную частоту  $\omega_c = 800 \text{ рад/с}$  по формуле (43), проведем первый расчет относительных амплитуд и величину остатка  $R = I_1 a_1 + I_2 a_2 + \dots + I_n a_n$ . Если принять, что относительная амплитуда первой массы  $a_1 = 1$ , то для восьмимассовой системы (см. табл. 14) получим

$$a_2 = 1 - \frac{1}{c_{1,2}} I_1 \omega_c^2; \quad a_3 = a_2 - \frac{1}{c_{2,3}} (I_1 + I_2 a_2) \omega_c^2;$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{c_{3,4}} (I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3) \omega_c^2;$$

$$a_5 = a_4 - \frac{1}{c_{4,5}} (I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + I_4 a_4) \omega_c^2;$$

$$a_6 = a_5 - \frac{1}{c_{5,6}} (I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + I_4 a_4 + I_5 a_5) \omega_c^2;$$

$$a_7 = a_6 - \frac{1}{c_{6,7}} (I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + I_4 a_4 + I_5 a_5 + I_6 a_6) \omega_c^2;$$

$$a_8 = a_7 - \frac{1}{c_{7,8}}(I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + I_4 a_4 + I_5 a_5 + I_6 a_6 + I_7 a_7)\omega_c^2;$$

$$I_1 + I_2 a_2 + I_3 a_3 + I_4 a_4 + I_5 a_5 + I_6 a_6 + I_7 a_7 + I_8 a_8 = 0.$$

Все расчеты сведем в табл. 15, в которой под значением собственной частоты  $\omega_c$ , принимаемой при расчете, располагаются в первом столбце – относительные амплитуды  $a_i$ , во втором – произведение  $I_i a_i$ . Под этим столбцом приводятся результаты расчета величины остатка  $R$ . Расчет проводился с помощью программы Microsoft Excel. В табл. 15 дан окончательный результат расчета для восьмимассовой эквивалентной системы, параметры которой приведены в табл. 14. Поскольку величина остатка  $R = 0,000004$ , то это наименьшее значение, которое можно получить при собственной частоте крутильных колебаний  $\omega_c = 1357$  рад/с.

Таблица 15

Результаты вычисления остатка  $R$  при различных значениях  $\omega_c$ , рад/с

$\omega_c = 800$		$\omega_c = 1000$		$\omega_c = 1200$	
$a_i$	$I_i a_i$	$a_i$	$I_i a_i$	$a_i$	$I_i a_i$
1	0,006	1	0,006	1	0,06
0,877159	0,049472	0,808061	0,045575	0,723608	0,040812
0,846288	0,032921	0,763214	0,029689	0,664992	0,025868
0,797096	0,044956	0,692255	0,039059	0,573984	0,032373
0,722884	0,040771	0,587921	0,033159	0,442441	0,024954
0,625983	0,024351	0,454458	0,017878	0,279650	0,010878
0,515530	0,029076	0,305623	0,017237	0,103239	0,005823
0,923094	0,261105	0,182096	0,112353	-0,041535	-0,025627
$R = \sum I_i a_i = 0,488595$		$R = \sum I_i a_i = 0,300750$		$R = \sum I_i a_i = 0,121080$	
$\omega_c = 1300$		$\omega_c = 1400$		$\omega_c = 1357$	
$a_i$	$I_i a_i$	$a_i$	$I_i a_i$	$a_i$	$I_i a_i$
1	0,006	1	0,006	1	0,006
0,675624	0,038105	0,623800	0,035182	0,646815	0,646815
0,610808	0,023760	0,553611	0,021536	0,578843	0,578843
0,511075	0,028825	0,446718	0,025195	0,474842	0,474842
0,368983	0,020811	0,296884	0,016744	0,327989	0,327989
0,196307	0,007636	0,118513	0,0046101	0,151537	0,151537
0,012410	0,000700	-0,067717	-0,003819	-0,034347	-0,034347
-0,137444	-0,084803	-0,218219	-0,134641	-0,185138	-0,185138
$R = \sum I_i a_i = 0,041035$		$R = \sum I_i a_i = -0,029193$		$R = \sum I_i a_i = 0,000004$	

## 5.6. Определение долговечности демпферов крутильных колебаний

Под долговечностью демпферов жидкостных и внутреннего трения подразумевается свойство сохранять работоспособность до наступления предельного состояния. Под предельным состоянием для демпферов жидкостного трения понимается дилатансия полиметилсилоксановой жидкости. Как было указано в п. 4.2, после этого маховик демпфера вращается вместе с корпусом как единое целое, так как вязкость жидкости ПМС повышается настолько, что она превращается в вязко-пластичное тело Бингама (по вязкости примерно соответствует битуму). Наличие на носке коленчатого вала значительной массы (маховик и корпус демпфера), наоборот, увеличивает амплитуду колебаний. Дилатансия происходит при высоких значениях градиента скорости сдвига  $D$  в слоях силиконовой жидкости под действием крутильных колебаний. По нашим расчетным исследованиям [24], градиент скорости сдвига  $D$  полиметилсилоксановой жидкости при варьировании величиной радиального зазора  $h_p$  (по наружному диаметру маховика демпфера) достигает критических значений  $D > 200 \text{ с}^{-1}$  при зазорах менее 0,35...0,45 мм. На рис. 68 приведена обобщенная кривая зависимости  $D = f(h)$  для дизелей СМД-60, СМД-31, СМД-23, Д-260Т, А-11ТА, которая показывает, что, например, для дизеля А-11ТА при  $h = 0,6 \text{ мм}$   $D = 230 \text{ с}^{-1}$ . Следует иметь в виду, что при малых зазорах может произойти коробление корпуса при сварке крышки и корпуса (см. рис. 53), что приводит к заклиниванию маховика по торцевой поверхности (хотя сварка проводится в аргоновой среде). Кроме того, при изготовлении даже небольшое отклонение от профиля продольного сечения опорной поверхности маховика (несоосность) приводит к незначительным перекосам, а при большом внешнем радиусе маховика – к задирам по торцевой поверхности из-за малых зазоров. Поэтому по технологическим соображениям, а также в целях повышения надежности работы жидкостного демпфера радиальные и торцевые зазоры выбираются большей величины. Однако излишнее их увеличение нерационально, так как в условиях сохранения оптимального демпфирования это сопровождается повышением вязкости полиметилсилоксановой жидкости, что нежелательно из-за невозможности применения демпферов с высокой вязкостью ПМС в условиях Крайнего Севера, а также увеличения трудоемкости их заправки.

Если торцевые поверхности маховика демпфера выбираются коническими [43], то они по высоте переменные, а на конце торцевой поверхности  $h_t = h_p$ . При правильном выборе зазоров эффективность демпферов сохраняется на весь срок службы дизеля, так как при этом не происходит дилатансия жидкости ПМС. На рис. 83, а приведена схема жидкостного демпфера крутильных колебаний с постоянными торцевыми зазорами – от внутреннего радиуса  $R_v$  до наружного  $R_H$  торцевые зазоры постоянны и равны  $h_t$ , радиальные зазоры  $h_p$  – также постоянны на радиусе  $R_H$ .

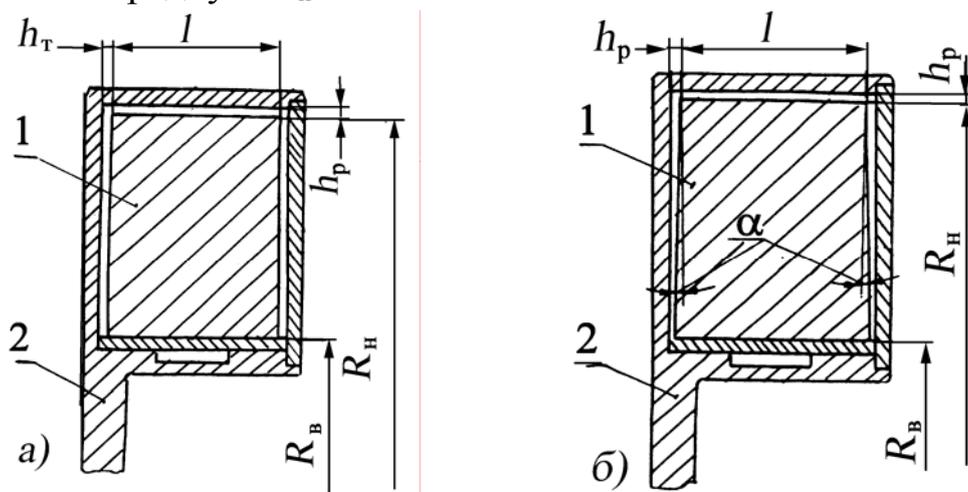


Рис. 83. Схема жидкостного демпфера: 1 – маховик; 2 – корпус;  
а – торцевые зазоры постоянные; б – торцевые зазоры конические

Стендовыми и эксплуатационными испытаниями демпферов крутильных колебаний жидкостного трения форсированных тракторных и комбайновых дизелей установлено, что гарантированная работа демпфера обеспечивается при зазорах между соприкасающимися поверхностями корпуса и маховика, равных  $h_p = 0,8 \dots 1,2$  мм по наружному диаметру (радиальный зазор) и не менее  $h_t = 0,2 \dots 0,4$  по внутреннему, а также  $0,5 \dots 1,0$  мм на сторону по торцевым поверхностям, если конструкция выбрана с постоянными торцевыми зазорами.

Нами была разработана конструкция жидкостного демпфера крутильных колебаний (рис. 83, б), в котором торцевые поверхности маховика выполнены коническими с углом наклона (от внутренней поверхности) [49]

$$\alpha = \arctg \frac{h_p}{R_H}, \quad (185)$$

где  $h_p$  – радиальный зазор, выбранный при оптимальном демпфировании, при котором не произойдет дилатансия полиметилсилоксановой жидкости, а также коэффициент демпфирования  $\xi_0$  будет максимальным;  $R_n$  – наружный радиус маховика демпфера.

В конструкции такого демпфера (см. рис. 83, б) на наружном радиусе  $R_n$  зазоры  $h_t = h_p$ . Угол  $\alpha$  в формуле (185) зависит от зазора  $h_p$  и  $R_n$ . При этом немного уменьшается ширина маховика демпфера  $l$ , однако увеличивается коэффициент демпфирования  $\xi_0$ .

Вместе с тем необходимо учитывать, что при крутильных колебаниях маховик демпфера совершает вращательные движения относительно корпуса, что приводит к износам подшипников скольжения, на которые он устанавливается. После попадания продуктов износа в силиконовую жидкость она также постепенно увеличивает вязкость, пока демпфер не перестает эффективно гасить колебания. В п. 4.2 были приведены результаты испытаний жидкостного демпфера с корпусом подшипника, изготовленного из ароматических полиамидов, которые существенно повысили долговечность демпфера.

Для демпфера внутреннего трения предельное состояние наступает тогда, когда происходит разрушение резинового слоя (трещины, старение) или его отслоение от маховика и корпуса демпфера.

Таким образом, предельные состояния демпферов жидкостного и внутреннего трения имеют разные физические причины. Однако после наступления предельного состояния они не могут эффективно снижать амплитуды крутильных колебаний за счет работы моментов сил трения. Действительно, демпфирующие материалы (полиметилсилоксановая жидкость или резиновый слой) необратимо поглощают часть работы внешних моментов, которая переходит в тепловую энергию, а затем рассеивается. Если рассеяние энергии в резиновом слое обуславливается его упругими несовершенствами и проявляется в образовании петли гистерезиса при циклическом деформировании, то в жидкости ПМС – это работа сил трения между слоями.

Мерой рассеяния энергии в резиновом слое является площадь интегральной петли гистерезиса, определяющая в некотором масштабе величину необратимо рассеянной энергии во всем объеме материала тела за цикл деформирования с известной амплитудой деформации. Как уже было сказано, при первичном нагружении резины петля гистерезиса очень значительная и ее площадь может достигать иногда

50 % всей площади, лежащей под кривой нагружения. При последующих нагружениях площадь петли гистерезиса уменьшается и достигает минимальной величины после полной стабилизации упругих свойств. Поэтому определить действительное значение рассеиваемой энергии в резиновом слое (в некоторых работах этот показатель получил название «циклической вязкости» [21]) при крутильных колебаниях за весь срок работы дизеля в эксплуатации через петлю гистерезиса с достаточной для практических целей погрешностью затруднительно. Заметим, что в течение определенного периода происходит естественное старение резины, после чего она разрушается при малых нагрузках. Разрушение резинового слоя при крутильных колебаниях – пример разрушения материалов от действия циклических нагрузок. Долговечность резинового слоя в этой области нагрузок в большей мере зависит от характера немеханических воздействий при эксплуатации – в первую очередь от температуры и среды, в которой демпфер работает. Протекание усталостных кривых для резины, зависимость усталостной прочности от средней деформации, усталостная прочность при сложных напряженных состояниях исследованы еще недостаточно. Поэтому демпфер внутреннего трения – ремонтируемый объект, так как его эффективность можно восстановить путем замены резинового слоя.

В то же время жидкостный демпфер не требует дополнительного ухода и не подлежит восстановлению. Теоретически возможно определить работу моментов сил трения в таком демпфере за весь срок службы дизеля в эксплуатации, а также имеются данные о долговечности его в эксплуатации. На этом основании получено косвенное подтверждение, что при определенном значении рассеиваемой энергии наступает дилатансия жидкости ПМС и демпфер теряет свою эффективность.

Поэтому примем следующую гипотезу: потеря эффективности демпферов жидкостных и внутреннего трения происходит тогда, когда полная энергия  $W_p$ , рассеиваемая при демпфировании (работа моментов сил трения) –  $W_p \geq \bar{W}_p$ . Здесь  $\bar{W}_p$  – среднее значение энергии в момент потери эффективности образца демпфера из такого же материала в условиях циклического нагружения при крутильных колебаниях.

При определении значения  $\bar{W}_p$  экспериментально учитываем, что величина его имеет рассеяние и может рассматриваться как случайная величина. Как показали результаты экспериментальных исследований,  $W_p$  подчиняется нормальному распределению (выборочный коэффициент вариации  $v \leq 0,2$ ). Тогда предельные значения расчетного значения  $W_p$  при заданной вероятности

$$W_{p \max} = \bar{W}_p \pm z_p s, \quad (186)$$

где  $z_p$  – квантиль нормального распределения, выбираемый в зависимости от требуемой вероятности  $P$ ;  $s$  – среднее квадратичное отклонение. Формула (186) позволяет определить долговечность работы демпфера по данным эксплуатационных или ускоренных испытаний.

### Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под термином долговечность демпферов крутильных колебаний?
2. Что является предельным состоянием для демпфера жидкостного трения?
3. Что является предельным состоянием для демпфера внутреннего трения?
4. Что является мерой рассеяния энергии в резиновом слое демпфера внутреннего трения?
5. Какая гипотеза принимается для определения потери эффективности демпферов крутильных колебаний?

### 5.7. Прогнозирование долговечности демпферов на стадии проектирования

Проведенные нами расчетные и экспериментальные исследования, в том числе и при эксплуатационных испытаниях, показывают, что при правильно спроектированном демпфере в довольно широком диапазоне частот вращения коленчатого вала амплитуда крутильных колебаний изменяется незначительно [4, 5, 24, 32]. Так, для дизеля

8ЧН 15/16 (8ДВТ-330) при изменении частоты вращения коленчатого вала от 1400 до 1800 мин<sup>-1</sup> амплитуда колебаний носка коленчатого вала с жидкостным демпфером изменяется от  $2,47 \cdot 10^{-3}$  до  $2,73 \cdot 10^{-3}$  рад (на 9 %), для дизеля 6Ч 10,5/12(Д160) с резиновым демпфером – от 1700 до 2200 мин<sup>-1</sup> – от  $3,25 \cdot 10^{-3}$  до  $2,97 \cdot 10^{-3}$  рад (на 9,3 %).

Количество энергии  $W_{ц}$ , рассеиваемой в демпфере жидкостного трения за цикл, т.е. за одно полное колебание, определяем по зависимости (134):

$$W_{ц} = \pi I_0 \omega_c^2 A_1^2 k_d = 4\pi^3 I_0 f_c^2 A_1^2 k_d, \quad (187)$$

где  $I_0$  – момент инерции маховика демпфера;  $\omega_c = 2\pi f_c$  – круговая собственная угловая частота крутильной системы;  $f_c$  – собственная частота колебаний, Гц;  $A_1$  – амплитуда крутильных колебаний корпуса демпфера;

$$k_d = (\xi_0 / I_0 \omega_c) / [1 + (\xi_0 / I_0 \omega_c)^2]; \quad (188)$$

$\xi_0$  – коэффициент демпфирования в жидкостном демпфере.

При оптимальном демпфировании, что обеспечивается при условии, что коэффициент демпфирования  $\xi_0 = I_0 \omega_c$ , тогда  $k_d = 1/2$ , а  $W_{ц}$  равно

$$W_{ц} = \frac{\pi}{2} I_0 \omega_c^2 A_1^2 = 2\pi^3 I_0 f_c^2 A_1^2 = \pi^2 \xi_0 f_c A_1^2. \quad (189)$$

Для демпферов внутреннего трения количество энергии, которое рассеивается за один цикл крутильных колебаний (работа моментов сил трения), определяется по формуле

$$k_d = \frac{\sqrt{\left(\frac{C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}}{\left(1 - \frac{C_{0,1}}{I_0 \omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi_0}{I_0 \omega_c}\right)^2}; \quad (190)$$

$\xi_0$  – коэффициент демпфирования в резиновом слое.

Так как амплитуда крутильных колебаний корпуса демпфера  $A_1$  на различных частотных режимах работы ДВС меняется в пределах 9...10 %, то, используя формулу (187), подсчитаем количество энер-

гии (работу моментов сил трения)  $W_{\text{ч}}$ , рассеиваемой в демпфере за один час работы:

$$W_{\text{ч}} = 3600W_{\text{ц}} \cdot f_{\text{с}} = 3600\pi I_0 \omega_{\text{с}}^2 f_{\text{с}} A_1^2 k_{\text{д}} = 14400\pi^3 I_0 f_{\text{с}}^3 A_1^2 k_{\text{д}}. \quad (191)$$

При известном среднем значении работы сил трения  $\bar{W}_{\text{р}}$  (см. формулу (186)) в демпфере в реальной эксплуатации за весь срок службы двигателя от начала его применения до наступления предельного состояния, которое определяется при испытаниях демпферов-прототипов, долговечность (в часах) жидкостного демпфера равна, ч,

$$T = \bar{W}_{\text{р}} / W_{\text{ч}}. \quad (192)$$

В работе [6] для расчета энергии  $W_{\text{ц}}$ , рассеиваемой за один цикл в демпфере внутреннего трения, приводится зависимость

$$W_{\text{ц}} = \pi \xi_0 (a_1 - 1)^2 A_1^2 \omega_{\text{с}}, \quad (193)$$

где  $a_1$  – относительная амплитуда колебаний переднего конца коленчатого вала, где устанавливается демпфер.

Значение  $a_1$  определяется при вычислении частот свободных крутильных колебаний.

В формуле (191) не учитываются затраты энергии на неупругое деформирование резинового слоя, поэтому она дает приближенное значение энергии  $W_{\text{с}}$ .

Таким образом, для расчета долговечности жидкостных и демпферов внутреннего трения необходимо найти экспериментально среднее значение энергии  $\bar{W}_{\text{с}}$ , которая рассеивается при демпфировании за весь срок службы двигателя.

### Вопросы для самопроверки

1. Как меняется амплитуда крутильных колебаний носка коленчатого вала при наличии демпфера?
2. От каких параметров зависит величина рассеиваемой энергии за один цикл крутильных колебаний?

## 5.8. Ускоренные методы испытаний на долговечность демпферов крутильных колебаний

Количество энергии (работу моментов сил трения)  $W_{\text{ч}}$ , рассеиваемой в демпфере за один час работы, определяется по формуле (191).

При известном среднем значении работы сил трения  $\bar{W}_p$  в демпфере в реальной эксплуатации за весь срок службы двигателя от начала его применения до наступления предельного состояния, которое определяется при испытаниях демпферов-прототипов, долговечность равна, ч,

$$T = \bar{W}_p / W_{\text{ч}}. \quad (194)$$

Таким образом, для расчета долговечности демпфера необходимо найти экспериментально среднее значение энергии  $\bar{W}_p$ , которая рассеивается при демпфировании за весь срок службы двигателя.

Для оценки надежности применяются ускоренные ресурсные испытания дизелей, а также их деталей и узлов. Как правило, при их проведении изучается закономерность процесса потери надежности в зависимости от ужесточения режима испытаний и определяются достоверные значения коэффициента ускорения по наработке или по времени.

Коэффициент ускорения по наработке – отношение наработки изделия в эксплуатации (в часах) к наработке таких же изделий при ускоренных испытаниях (в часах) до появления одинаковых повреждений или отказов или до предельного состояния. Характеризует число часов эксплуатации, эквивалентное одному часу испытаний.

Коэффициент ускорения по времени – отношение календарного времени работы изделий в эксплуатации к календарной продолжительности испытаний таких же изделий до появления одинаковых повреждений или отказов или до предельного состояния.

При выборе метода и режима испытаний величину коэффициентов ускорения предварительно следует определить расчетом на основе сравнения воздействий на деталь или сопряжения при ускоренных испытаниях и в эксплуатации. В дальнейшем величина коэффициента ускорения по наработке или по времени должна быть уточнена экспериментально.

Однако нетрудно заметить, что любые методы ускорения выработки ресурса двигателя мало влияют на выработку ресурса демпфера крутильных колебаний (см. п. 5.2.). Это вызвано тем, что демпфер по своему назначению эффективно снижает амплитуду колебаний при любом порядке резонирующей гармоники в необходимом диапазоне частоты вращения коленчатого вала [50] (изменение амплитуды не более 9 %).

Таким образом, при ускоренных испытаниях дизеля, когда меняется частота вращения коленчатого вала и момент сопротивления, условия работы демпфера крутильных колебаний меняются незначительно. Ускорения при испытаниях демпферов можно получить, если увеличить амплитуду относительных колебаний маховика и корпуса.

Это можно осуществить на специальном крутильно-вибрационном стенде безмоторных ускоренных испытаний демпферов крутильных колебаний [5, 39], компоновочная схема которого приведена на рис. 84.

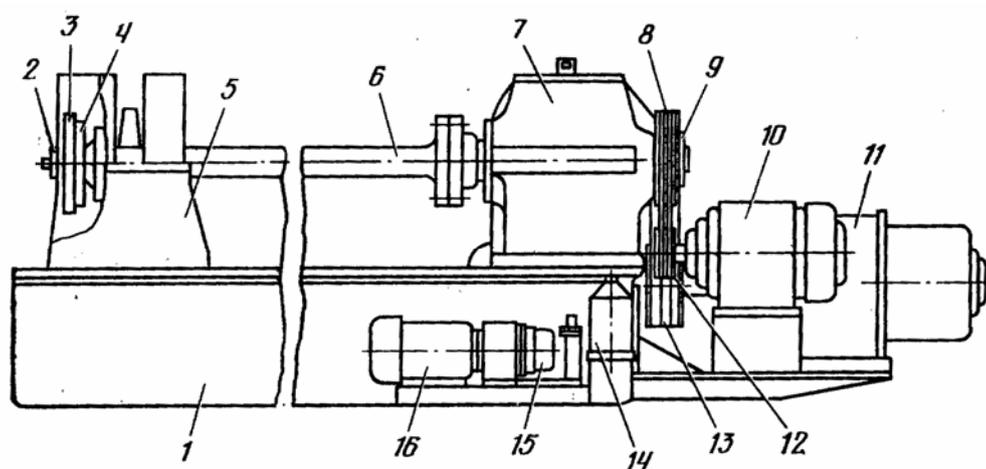


Рис. 84. Общий вид крутильно-вибрационного стенда безмоторных ускоренных испытаний демпферов крутильных колебаний:  
 1 – станина; 2 – торсиограф; 3 – демпфер; 4 – инерционная масса; 5 – опора; 6 – торсионный вал; 7 – возбудитель крутильных колебаний; 8, 9 – шкивы клиноременной передачи; 10 – асинхронный электродвигатель; 11 – двигатель постоянного тока; 12, 13 – шкивы клиноременной передачи; 14 – масляный фильтр; 15 – масляный насос; 16 – электродвигатель

На станине 1 установлен возбудитель крутильных колебаний 7, выходной вал которого жестко соединен с торсионным валом 6, опи-

рающимся на другом конце на шарикоподшипниковую опору 5. На свободном конце вала 6 установлены инерционная масса 4, предназначенная для варьирования собственной частоты крутильной системы стенда, испытуемый образец демпфера 3 и торсиограф 2. Крутильные колебания торсионного вала генерируются возбудителем центробежного типа со ступенчатой регулировкой амплитуды крутящего момента и плавной регулировкой частоты колебаний. Ведущий вал возбудителя приводится во вращение через клиноременную передачу (шкивы 13 и 9) электродвигателем 10 постоянного тока, установленным на подmotorной плите, присоединяемой к станине 1. Привод ведомого вала возбудителя осуществляется также через клиноременную передачу (шкивы 12 и 8) асинхронным электродвигателем 10, смонтированным на той же подmotorной плите. Система смазки возбудителя – циркуляционная, под давлением масляный насос 15 приводится во вращение электродвигателем 16 через упругую муфту.

Масло под давлением подается в полнопоточный двухсекционный масляный фильтр 14, а из него – в возбудитель к подшипникам скольжения его шестерен-сателлитов. Стенд позволяет изменять максимальную амплитуду крутящего момента на торсионном валу за счет варьирования дополнительных масс шестерен-сателлитов и частоты вращения  $n$  ведущего вала возбудителя [5, 51].

Настройка колебательной системы стенда на собственную частоту наиболее опасной формы колебаний любой конструктивной схемы исследуемого дизеля осуществляется подбором длины торсионного вала 6 и момента инерции массы 4.

Максимальная амплитуда угла закрутки торсионного вала с демпфером определяется по формуле (163)

$$A_{1,ст} = \frac{M_k^a A_i \sum_{i=n-1} m}{\xi m^2 \omega_c \sum_{i=1} a_i^2 + I_0 \omega_c^2 k_d}, \quad (195)$$

где  $A_{1,ст}$  – амплитуда колебаний корпуса демпфера при безmotorных стендовых испытаниях, рад.

Количество энергии  $W_{ст,ч}$ , рассеиваемой в демпфере за один час работы при безmotorных испытаниях в соответствии с (187):

$$W_{\text{ст.ч}} = 3600W_{\text{ц}} \cdot f_{\text{ст}} = 3600\pi I_0 \omega_c^2 f_{\text{ст}} A_{1,\text{ст}}^2 k_d =$$

$$= 14400\pi^3 I_0 f_{\text{ст}}^3 A_{1,\text{ст}}^2 k_d, \quad (196)$$

где  $f_{\text{ст}} = f_c$  – частота колебаний крутильной системы стенда, соответствующая собственной частоте колебаний крутильной системы исследуемой конструктивной схемы дизеля, Гц.

Количество энергии  $W_p$ , рассеиваемой за весь срок службы двигателя до выработки его ресурса в реальной эксплуатации:

$$W_p = 3600W_{\text{ц}} \cdot f_c T_p = 3600\pi I_0 \omega_c^2 f_c A_1^2 k_d T_p = 14400\pi^3 I_0 f_c^3 A_1^2 k_d T_p, \quad (197)$$

где  $T_p$  – наработка двигателя в реальной эксплуатации за весь срок его службы.

Тогда продолжительность испытаний  $T_{\text{ст}}$  в стендовых условиях, ч,

$$T_{\text{ст}} = W_p / W_{\text{ст}} = \left[ A_1 / A_{1,\text{ст}} \right]^2 T_p. \quad (198)$$

Коэффициент ускорения при безмоторных испытаниях [5]:

$$K_{\text{уск}} = T_p / T_{\text{ст}} = \left[ A_{1,\text{ст}} / A_1 \right]^2. \quad (199)$$

Ускорение происходит за счет увеличения амплитуды колебаний корпуса демпфера  $A_{1,\text{ст}}$  на торсионном валу (рис. 85). Как следует из приведенных графиков испытания жидкостного демпфера дизеля 8ЧН 15/16 (8ДВТ-330), коэффициент ускорения составляет около 9.

Ускоренные безмоторные испытания демпферов крутильных колебаний позволяют существенно сокращать период создания их долговечной конструкции.

Для демпфера внутреннего трения перед установкой на испытательную машину предварительно определяют предельный угол закрутки, при котором не происходит разрушение резинового слоя.

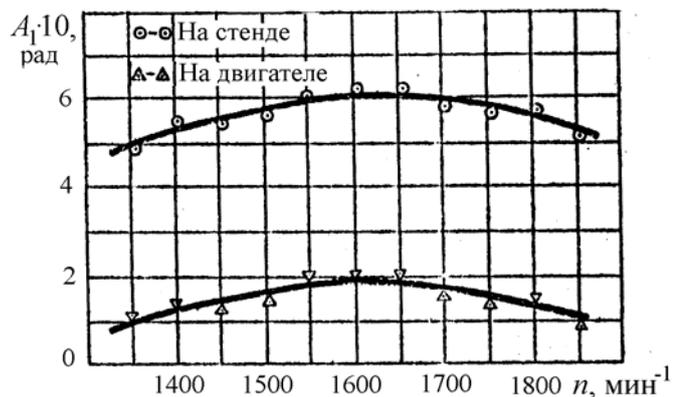


Рис. 85. Графики амплитуд крутильных колебаний в зависимости от частоты вращения  $n$  мин<sup>-1</sup> при испытании на стенде (○) и на двигателе (△)

Оценка количества энергии  $W_p$ , рассеиваемой в демпфере за весь срок службы двигателя до выработки его ресурса в реальной эксплуатации, полученная по ограниченной выборке  $N_1$ , является точечной, поэтому требуется нахождение доверительных границ: верхней  $\bar{W}_{pв}$  и нижней  $\bar{W}_{pн}$ . Для распределения Вейбулла-Гнеденко доверительные границы определяются выражениями [1]

$$\bar{W}_{pн} = (1 - \xi_n) \bar{W}_p; \quad \bar{W}_{pв} = (1 - \xi_b) \bar{W}_p. \quad (200)$$

Входящие в последние формулы относительные отклонения границ  $\xi_n$  и  $\xi_b$  находятся по формулам

$$\xi_n = 1 - \left[ 2N_1 / \chi_{2N_1, \frac{1-\beta}{2}}^2 \right]^{1/m'}; \quad \xi_b = 1 + \left[ 2N_1 / \chi_{2N_1, \frac{1+\beta}{2}}^2 \right]^{1/m'},$$

где  $\chi_{2N_1, \frac{1-\beta}{2}}^2$  и  $\chi_{2N_1, \frac{1+\beta}{2}}^2$  – табулированные квантили  $\chi^2$ -распределения с  $2N_1$  степенями свободы;  $\beta$  – доверительная вероятность;  $m'$  – параметр формы кривой распределения из опытных данных, когда наступает отказ демпфера

$$F(W) = 1 - \exp \left[ -(W/W_0)^{m'} \right]; \quad (201)$$

$W_0$  – масштаб кривой распределения.

Вероятность безотказной работы определяется по формуле

$$P(W) = 1 - F(W) = \exp(-W/W_0)^{m'}. \quad (202)$$

Ускоренные безмоторные испытания демпферов крутильных колебаний проводят следующим образом:

- на торсионном валу крутильно-вибрационного стенда за счет варьирования его длины и инерционных масс, устанавливаемых на свободном конце (см. рис. 84), воспроизводят частоту колебаний, соответствующую собственной частоте наиболее опасной формы колебаний исследуемой крутильной системы рассматриваемой конструктивной схемы двигателя;
- за счет варьирования частоты вращения ведущего вала возбудителя и дисбалансной массы шестерни-сателлита возбуждают кру-

тильные колебания на торсионном валу стенда, обеспечивая усталостную прочность вала;

- определяют амплитуду угла закрутки свободного конца торсионного вала с демпфером;

- проводят испытания до наработки  $T_{ст}$ , определяемой из условия  $W_p = W_{ст}$ , исходя из заданного ресурса дизеля и коэффициента ускорения испытаний;

- при наработке  $T_{ст}$  подвергают экспертизе демпфер крутильных колебаний и по состоянию полиметилсилоксановой жидкости и подшипников скольжения для демпфера жидкостного трения или по состоянию резинового слоя для демпфера внутреннего трения дают заключение о долговечности его работы при заданном ресурсе;

- по результатам испытаний составляют протокол испытаний, где отражены условия их проведения (режим работы стенда и его наработка) и дано заключение о долговечности демпфера, поскольку по равенству  $W_p = W_{ст}$  можно прогнозировать долговечность демпфера.

Ускоренные безмоторные испытания демпферов крутильных колебаний позволяют существенно сокращать период создания их долговечной конструкции.

### Вопросы для самопроверки

1. Что называется коэффициентом ускорения по наработке?
2. Что называется коэффициентом ускорения по времени?
3. Почему при ускоренных испытаниях двигателя не происходит ускоренное нагружение демпфера крутильных колебаний?
4. За счет чего может произойти ускоренная потеря долговечности демпферов крутильных колебаний?
5. Как можно изменить амплитуду крутильных колебаний носка торсионного вала при стендовых испытаниях?
6. Для чего проводятся ускоренные испытания на надежность?
7. Почему рекомендуется при испытаниях определять доверительные границы долговечности?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии изложены основы метода расчета на крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей. Непрерывный рост удельных мощностей, форсирование режимов работы современных ДВС как по среднему эффективному давлению, так и по частоте вращения коленчатого вала приводят к существенному возрастанию нагрузок на их детали.

В то же время жесткая конкуренция на рынке вызывает необходимость непрерывного совершенствования конструкции ДВС и соответственно к ускорению проектирования и освоению в производстве новых моделей двигателей. В связи с этим необходимо уже на стадии проектирования обеспечить долговечность деталей кривошипно-шатунного механизма, а это требует учета и крутильных колебаний. Для этого необходимы методики проектирования оптимальных (с точки зрения наибольшего демпфирования) конструктивных параметров демпферов крутильных колебаний жидкостных и внутреннего трения. Кроме того, в учебном пособии впервые приводятся аналитические зависимости для расчета жесткостных и демпфирующих показателей резинового слоя, которые используются на стадии проектирования.

Приводятся результаты расчетных и экспериментальных исследований, полученных автором в период работы в отраслевом институте тракторных и комбайновых двигателей, а также результаты исследований, положенных в основу докторской диссертации.

Автором сделана попытка обобщить обширный материал по крутильным колебаниям коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей. Метод ориентирован на использование ПЭВМ, но для простых расчетов на стадии выбора конструкции даны экспресс-методы оценки параметров демпферов жидкостного и внутреннего трения. Учитывая сложность расчетов, особенно демпферов жидкостного трения, в которых требуется выбирать параметры: зазоры между

корпусом и маховиком демпфера; вязкость полиметилсилоксановой жидкости (с учетом температуры и градиента скорости сдвига); момент инерции маховика, то для подтверждения достоверности расчетов могут использоваться экспериментальные данные, сопоставление с результатами прежних расчетов аналогичных конструкций. Для этого в пособии приведены результаты не только расчетных, но и экспериментальных исследований.

Кроме того, в пособии приведены конечные зависимости для вычисления амплитуд крутильных колебаний и касательных напряжений в узловой точке. Нами не рассматривались методы упрощения путем приведения многомассовой системы к двухмассовой [2], поскольку применение современных ПЭВМ позволяет решать достаточно сложные задачи и без упрощения.

При работе над курсовым (по курсу «Динамика ДВС») и дипломными проектами расчеты рекомендуется проводить по описанным в пособии программам или на ПЭВМ с помощью программы Microsoft Excel или Mathcad, поскольку, несмотря на то, что ДВС является сложной механической системой, расчеты на крутильные колебания проводятся по однотипным вычислениям, как это делается в общей теории колебаний.

Материал, изложенный в пособии, окажет несомненную помощь студентам как дневной, так и заочной форм обучения.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Пример подготовки исходных данных для расчета коэффициентов жесткости колена

Вариант расчета (1,2,3,4,5,6).....	: 1
Модуль упругости 2-го рода материала вала, Па (1,2,3,4,5,6)...	: 85000000000
Длина коренной шейки, м (1).....	: 0.037
Длина шатунной шейки, м (1).....	: 0.064
Толщина щеки, м (1).....	: 0.034
Диаметр коренной шейки, м (1).....	: 0.092
Диаметр шатунной шейки, м (1).....	: 0.075
Диаметр внутренней полости коренной шейки, м (1).....	: 0.008
Диаметр внутренней полости шатунной шейки, м (1).....	: 0.025
Радиус кривошипа, м (1).....	: 0.06
Ширина щеки, м (1).....	: 0.15
Внутренний диаметр вала, м (2).....	: 0.0
Наружный диаметр вала, м (2).....	: 0.0
Длина вала, м (2,5,6).....	: 0.0
Наименьший диаметр вала, м (3,4).....	: 0.0
Наибольший диаметр вала, м (3,4).....	: 0.0
Длина вала с наименьшим диаметром, м (3).....	: 0.0
Длина вала с наибольшим диаметром, м (3).....	: 0.0
Длина конусной части вала, м (4).....	: 0.0
Диаметр вала, м (5).....	: 0.0
Глубина шпоночной канавки, м (5).....	: 0.0
Внутренний диаметр шлиц, м (6).....	: 0.0

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ:

- pw=1 - расчет коэффициентов жесткостей колена полноопорного вала в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС;
- pw=2 - расчет коэффициента жесткости вала с осевым сверлением диаметра  $d_1$  (для сплошного вала  $d_1=0$ );
- pw=3 - расчет коэффициента жесткости ступенчатого вала с галтелью;
- pw=4 - расчет коэффициента жесткости конического вала с длиной конусной части  $s$ ;
- pw=5 - расчет коэффициента жесткости вала ослабленного шпоночной канавкой глубиной  $h$ ;
- pw=6 - расчет коэффициента жесткости шлицевого вала с внутренним диаметром шлиц  $d$ .

## Приложение 2

Расчет коэффициентов жесткостей колена полноопорного вала  
в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

```

pw - вариант расчета ..... 1
l_kw - длина коренной шейки ..... 0.03700 м
l_ww - длина шатунной шейки ..... 0.06400 м
h - толщина щеки ..... 0.03400 м
d_kw - диаметр коренной шейки ..... 0.09200 м
d_ww - диаметр шатунной шейки ..... 0.07500 м
g_kw - диаметр внутренней полости коренной шейки ... 0.00800 м
g_ww - диаметр внутренней полости шатунной шейки ... 0.02500 м
r - радиус кривошипа ..... 0.06000 м
b - ширина щеки ..... 0.15000 м
g - модуль упругости 2-го рода для материала
    коленчатого вала ..... 8,500e+10 Па
  
```

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

n	формулы	l	c	ld	cd
1	формула С.П.Тимошенко	0.3182	1878855	0.1591	3757710
2	формула Картера	0.2304	2594374	0.1152	5188747
3	формула С.С.Зиманенко	0.3440	1737545	0.1720	3475089
4	формула Хельдта	0.2595	2303722	0.1297	4607444

l - приведенная длина колена полноопорного вала, [м];  
c - коэффициент жесткости колена полноопорного вала, [Н\*м];  
ld - приведенная длина колена половины полноопорного вала, [м];  
cd - коэффициент жесткости колена половины полноопорного вала, [Н\*м].

Исходные данные для расчета моментов инерции

```

Вариант расчета ..... 1
#=====#
U 1 - расчет момента инерции моторной массы в приведенной U
U крутильной системе коленчатого вала ДВС; U
U 2 - расчет момента инерции массы относительно оси вращения U
U 3 - расчет момента инерции массы графоаналитическим U
U методом; U
U 4 - расчет момента инерции массы, объем которой равен U
U объему отверстий расположенных на диаметре d_i. U
#=====#
:1 *****
Диаметр внутренней полости коренной шейки, м . 0.008
Диаметр коренной шейки, м ..... 0.092
Длина коренной шейки, м ..... 0.037
Диаметр внутренней полости шатунной шейки, м . 0.025
Диаметр шатунной шейки, м ..... 0.075
Длина шатунной шейки, м ..... 0.064
Радиус кривошипа, м ..... 0.06
Длина шатуна, м ..... 0.215
Плотность материала вала, кг/(м*м*м) ..... 7800
Масса поршневого комплекта, кг ..... 2.15
Масса шатуна, кг ..... 2.5
Масса отнесенная к верхней головке шатуна, кг. 0.5
Число элементов разбиения
1-й щеки колена вала ..... 2
Число элементов разбиения
2-й щеки колена вала ..... 2
Данные элементов разбиения 1-й щеки колена вала
+---+---+---+---+---+
| n | rb_1 | rn_1 | a_1 | h_1 |
+---+---+---+---+---+
| 1 | 0.03 | 0.05 | 60 | 0.014 |
| 2 | 0.05 | 0.06 | 30 | 0.014 |
+---+---+---+---+---+
Данные элементов разбиения 2-й щеки колена вала
+---+---+---+---+---+
| n | rb_2 | rn_2 | a_2 | h_2 |
+---+---+---+---+---+
| 1 | 0.03 | 0.05 | 60 | 0.014 |
| 2 | 0.05 | 0.06 | 30 | 0.014 |
+---+---+---+---+---+
ОБОЗНАЧЕНИЯ:
n - число элементов на которые разбивается
щека коленчатого вала;
rb - внутренний радиус элементарного слоя, [м];
rn - наружный радиус элементарного слоя, [м];
a - угол сектора элементарного слоя, [град];
h - толщина элементарного слоя, [м].
:2 *****
Число элементов на которые
разбивается деталь ..... 2
Плотность материала детали, кг/(м*м*м) ..... 3
+---+---+---+---+---+
| n | nn | nf | d_i1 | d_i2 | l_i |
+---+---+---+---+---+
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
+---+---+---+---+---+

```

## Приложение 4

Расчет момента инерции моторной массы в приведенной крутильной системе коленчатого вала ДВС

### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

nw - вариант расчета .....  
 d<sub>1kw</sub> - диаметр внутренней полости коренной шейки ...  
 d<sub>2kw</sub> - диаметр коренной шейки .....  
 l<sub>kw</sub> - длина коренной шейки .....  
 d<sub>1ww</sub> - диаметр внутренней полости шатунной шейки ...  
 d<sub>2ww</sub> - диаметр шатунной шейки .....  
 l<sub>ww</sub> - длина шатунной шейки .....  
 r - радиус кривошипа .....  
 l - длина шатуна .....  
 u - плотность материала вала .....  
 кг/(м\*м\*м)  
 m<sub>nk</sub> - масса поршневого комплекта .....  
 m<sub>w</sub> - масса шатуна .....  
 m<sub>1</sub> - масса отнесенная к верхней головке шатуна ...  
 n<sub>1</sub> - число элементов разбиения  
       1-й щеки колена вала .....  
 n<sub>2</sub> - число элементов разбиения  
       2-й щеки колена вала .....

Данные элементов разбиения 1-й щеки колена вала

n	rb <sub>1</sub>	rn <sub>1</sub>	a <sub>1</sub>	h <sub>1</sub>
1	0.03000	0.05000	60	0.01400
2	0.05000	0.06000	30	0.01400

Данные элементов разбиения 2-й щеки колена вала

n	rb <sub>2</sub>	rn <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	h <sub>2</sub>
1	0.03000	0.05000	60	0.01400
2	0.05000	0.06000	30	0.01400

### ОБОЗНАЧЕНИЯ:

n - число элементов на которые разбивается щека кр  
 rb - внутренний радиус элементарного слоя, [м];  
 rn - наружный радиус элементарного слоя, [м];  
 a - угол сектора элементарного слоя, [град];  
 h - толщина элементарного слоя, [м];  
 j<sub>k</sub> - момент инерции моторной массы, [кг\*м\*м];  
 j<sub>kv</sub> - момент инерции колена вала относительно оси в  
 j<sub>kwm</sub> - момент инерции кривошипно-шатунного механизма,  
 j<sub>kw</sub> - момент инерции коренной шейки, [кг\*м\*м];  
 j<sub>w1</sub> - момент инерции 1-й щеки колена вала, [кг\*м\*м];  
 j<sub>w2</sub> - момент инерции 2-й щеки колена вала, [кг\*м\*м];  
 j<sub>w</sub> - момент инерции 2-х щек колена вала, [кг\*м\*м];  
 j<sub>ww</sub> - момент инерции шатунной шейки, [кг\*м\*м];  
 j<sub>vn</sub> - момент инерции возвратно-поступательно движущ  
 [кг\*м\*м];  
 j<sub>vw</sub> - момент инерции массы шатуна отнесенной к шату  
 [кг\*м\*м].

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

j<sub>kv</sub> = 0.01082 кг\*м\*м            j<sub>kwm</sub> = 0.01206 кг\*м\*м            j  
 кг\*м\*м  
 j<sub>kw</sub> = 0.00203 кг\*м\*м            j<sub>vn</sub> = 0.00486 кг\*м\*м  
 j<sub>w1</sub> = 0.00025 кг\*м\*м            j<sub>vw</sub> = 0.00720 кг\*м\*м  
 j<sub>w2</sub> = 0.00025 кг\*м\*м  
 j<sub>w</sub> = 0.00050 кг\*м\*м  
 j<sub>ww</sub> = 0.00828 кг\*м\*м

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

nn - количество одинаковых элементов;  
 nf - номер формулы по которой проводится расчет  
 момента инерции детали;  
 d\_i1 - внутренний диаметр вала, [м];  
 d\_i2 - наружный диаметр вала, [м];  
 l\_i - длина вала, [м];

:3 \*\*\*\*\*

Число элементов на которые  
 разбивается деталь ..... 2  
 Плотность материала детали, кг/(м\*м\*м) ..... 3

n	r_i1	r_i2	a	h
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

r\_i1 - внутренний радиус элемента, [м];  
 r\_i2 - наружный радиус элемента, [м];  
 h - толщина элемента слоя, [м];  
 a - угол сектора элемента слоя, [град];

:4 \*\*\*\*\*

Число элементов на которые  
 разбивается деталь ..... 2  
 Плотность материала детали, кг/(м\*м\*м) ..... 3

n	nn	dd	l_i	d_i
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

nn - количество одинаковых отверстий расположенных  
 на одном диаметре;  
 dd - диаметр отверстия, [м];  
 l\_i - длина отверстия, [м];  
 d\_i - диаметр, на котором расположены отверстия, [м];

## Приложение 5

Исходные данные для расчета частоты собственных колебаний

n = 6  
fn = 100  
fp = 2.0  
ft = 0.05

```
+-----+  
|      j      |  
+-----+  
  0.0535044  
  0.0579384  
  0.08976  
  0.06512  
  0.08976  
  0.89
```

```
-----  
+-----+  
|      c      |  
+-----+  
  955869  
  1009861  
  2303722  
  2303722  
  3521663  
-----
```

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

n - число масс в приведенной крутильной системе;  
f - частота [Гц];  
fn - начальное значение f [Гц];  
fp - шаг изменения f [Гц];  
ft - точность вычисления резонансной частоты f [Гц];  
w - круговая частота [рад/с];  
j - момент инерции массы [кг\*м\*м];  
c - коэффициент жесткости участка между массами [Н\*м].

## Приложение 6

### РАСЧЕТ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПРИВЕДЕННОЙ КРУТИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА ДВС МЕТОДОМ ОСТАТКА

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

n - число масс в приведенной крутильной системе;  
f - частота [Гц];  
fn - начальное значение f [Гц];  
fp - шаг изменения f [Гц];  
ft - точность вычисления резонансной частоты f [Гц];  
w - круговая частота [рад/с];  
j - момент инерции массы [кг\*м\*м];  
с - коэффициент жесткости участка между массами [Н\*м].

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

n = 6 fp = 100.0 fp = 2.0 ft = 0.05

	n		j		с	
	1		0.0535044		955869.0	
	2		0.0579384		1009861.0	
	3		0.0897600		2303722.0	
	4		0.0651200		2303722.0	
	5		0.0897600		3521663.0	
	6		0.8900000		0.0	

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА:

#### ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТОТЫ									
	1		2		3		4		
	f		301.88		634.05		1049.39		1218.27
	w		1896.75		3983.85		6593.50		7654.64
ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ									
	1		1.00000		1.00000		1.00000		1.00000
	2		0.79862		0.11162		-1.43345		-2.27975
	3		0.44317		-0.83090		-0.16144		2.27961
	4		0.22523		-0.73025		0.66962		-0.92605
	5		-0.01561		-0.30198		0.67779		-2.59791
	6		-0.17173		0.10033		-0.06790		0.18823

ПАРАМЕТРЫ ПРИВЕДЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

j\_1= 0.21352 кг\*м\*м - момент инерции 1-й массы;  
j\_2= 0.90564 кг\*м\*м - момент инерции 2-й массы;  
с= 621607.3 Н\*м - коэффициент жесткости участка между  
массами j\_1 и j\_2;  
A\_1= 0.72227 - относительная амплитуда массы j\_1;  
A\_2= 0.17031 - относительная амплитуда массы j\_2;  
f= 301.87 Гц - частота собственных колебаний приведенной  
двухмассовой крутильно-колеблющейся системы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоц, А.Н. Анализ уравновешенности и методы уравновешивания автомобильных и тракторных двигателей / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 124 с. – ISBN 5-89368-725-6.
2. Гоц, А.Н. Методика и алгоритм расчета силиконового демпфера крутильных колебаний / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Двигателестроение. – 1987. – № 3. – С. 11 – 13.
3. Гоц, А.Н. Методика и алгоритм расчета вынужденных крутильных колебаний коленчатого вала ДВС от полного спектра крутящего момента / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко, Р.П. Доброгаев // Двигателестроение. – 1987. – № 8. – С. 12 – 14.
4. Гоц, А.Н. Снижение уровня крутильных колебаний двигателя СМД – 31 / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Проблемы совершенствования тракторных и комбайновых двигателей: Тр. НПО «ЦНИТА». – Л., 1986. – С. 114 – 121.
5. Гоц, А.Н. Научные основы расчета и ускоренных испытаний деталей кривошипно-шатунного механизма тракторных дизелей на стадии проектирования: автореф. дис. . . . д-ра техн. наук / А.Н. Гоц. – Владимир, 2004. – 32 с.
6. Вихерт, М.М. Конструкция и расчет автотракторных двигателей / М.М. Вихерт [и др.] ; под ред. Ю.А. Степанова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1964. – 552 с.
7. Гоц, А.Н. Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей / А.Н. Гоц. – Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2006. – 105 с. – ISBN 5-89368-664-0.
8. Гоц, А.Н. Анализ основных параметров дизелей для легковых автомобилей / А.Н. Гоц [и др.] // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VII Междунар. науч.-практ. семинара; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – С. 170 – 173. – ISBN 5-89368-121-5.
9. Гоц, А.Н. Анализ основных показателей бензиновых двигателей для легковых автомобилей / А.Н. Гоц [и др.] // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VII Междунар. науч.-практ. семинара; под ред. В.В. Эфро-

са, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – С. 166 – 169. – ISBN 5-89368-121-5.

10. Доброгаев, Р.П. Методика и алгоритм расчета параметров крутильных систем на стадии проектирования тракторных и комбайновых двигателей / Р.П. Доброгаев, А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Двигателестроение. – 1987. – № 6. – С. 14 – 16.

11. Гоц, А.Н. Методика расчета крутильных систем двигателей внутреннего сгорания на стадии проектирования / А.Н. Гоц // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – С. 101 – 104. – ISBN 5-89368-233-5.

12. Терских, В.П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок: в 3 т. / В.П. Терских. Л.: Судпромгиз, 1953 – 1954. Т. 1. – 259 с., Т. 2 – 215 с., Т. 3 – 200 с.

13. Nestorides, E.I. A Handbook of Torsional Vibration. / E.I. Nestorides. Cambridge: The University Press. – 1958. – 85 p.

14. Гоц, А.Н. Методика и алгоритм расчета набегавшего крутящего момента ДВС / А.Н. Гоц, А.Н. Красулин, К.В. Валиков // Двигателестроение. – 1983. – №1. – С. 29 – 30.

15. Гоц, А.Н. Гармонический анализ крутящего момента двигателя с помощью ЭВМ / А.Н. Гоц, В.Н. Брындин, К.В. Валиков // Повышение эксплуатационной надежности и качества ремонта автомобилей. – Иваново-Владимир: ИЭИ, 1974. – С. 24 – 28.

16. Гутер, Р.С. Элементы численного анализа и математическая обработка результатов опыта / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Физматгиз, 1962. – 356 с.

17. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

18. Маслов, Г.С. Расчеты колебаний валов: справ. / Г.С. Маслов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.

19. Тонг, Кин Н. Теория механических колебаний / Кин Н. Тонг: пер. с англ. О.В. Лужина; под ред. А.П. Синицына. – М.: Машгиз, 1963. – 351 с.

20. Ден-Гартог, Дж. П. Механические колебания / Дж. П. Ден-Гартог: пер. с англ. А.Н. Обморшева. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.

21. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. Т. 3 / С.Д. Пономарев [и др.]; под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1959. – 1118 с.

22. Покорный, Б.М. Расчет коленчатого вала на крутильные колебания / Б.М. Покорный. – М.: Машгиз, 1947. – 212 с.

23. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле. / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер: пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение. – 1985. – 472 с.

24. Гоц, А.Н. Ускоренный метод оценки долговечности жидкостных демпферов крутильных колебаний / А.Н. Гоц // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1998. – № 6. – С. 11 – 12. – ISSN 0235-8573.

25. Динамика двигателей внутреннего сгорания: метод. указания к лаб. работам / сост. В.В. Панов, С.Г. Драгомиров, А.Н. Гоц, А.М. Шарапов; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 60 с.

26. Системы управления дизельными двигателями Bosh / под ред. Е.В. Певзнера: пер. с нем. – М.: ЗАО «КЖИ» «За рулем», 2004. – 480 с.

27. Гоц, А.Н. Измерение напряжений в коленчатом вале Д-160 / А.Н. Гоц, В.В. Эфрос // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1970. – № 6. – С. 12 – 13.

28. Adler, U. Automotive handbook/ U. Adler, Y. Bauer, W. Baziient; Editor-in-Chief U. Adler. – 2<sup>nd</sup> edition. – Stuttgart: Robert Bosh GmbH, 1996 – 707 p., ISBN 0-89 283-518-6; ISBN 1 85 226 00 9.

29. Попык, К.Г. Динамика автомобильных и тракторных двигателей / К.Г. Попык. – М.: Высш. шк., 1970. – 328 с.

30. Гоц, А.Н. Динамическая жесткость и рассеяние энергии в упругодемпфирующих материалах / А.Н. Гоц // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф.; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – С. 111 – 116. – ISBN 5-89368-233-5.

31. Термопластичные полиуретаны: каталог / сост.: В.К. Ананьев, В.В. Страхов. – Черкассы: Черкас. НИИТЭХИМ, 1989. – 10 с.

32. Гоц, А.Н. Расчет резинового слоя демпферов внутреннего трения / А.Н. Гоц // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VIII Междунар. науч.-

практ. конф.; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – С. 116 – 120. – ISBN 5-89368-233-5.

33. Иванов, В.В. Полиорганосилоксановые жидкости / В.В. Иванов. – М.: Химия, 1964. – 20 с.

34. Гоц, А.Н. Обеспечение надежности жидкостных демпферов крутильных колебаний / А.Н. Гоц // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. ; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – С. 104 – 108. – ISBN 5-89368-233-5.

35. Каталог / сост. Н.И. Ионова. – Черкассы: Черкас. НИИ-ТЭХИМ, 1991. – 12 с.

36. Доброгаев, Р.П. Регрессионный анализ силиконовых жидкостей типа ПМС / Р.П. Доброгаев, А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Тракторы и сельхозмашины. – 1986. – № 6. – С. 22 – 25.

37. Гоц, А.Н. Определение вязкости силиконовой жидкости при изменении скорости сдвига и температуры / А.Н. Гоц // Совершенствование мощностных, экономических и экологических показателей ДВС: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф.; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца. Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – С. 108 – 111. – ISBN 5-89368-233-5.

38. Гоц, А.Н. Оптимизация параметров жидкостного демпфера крутильных колебаний коленчатого вала автомобильного дизеля ГАЗ / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко, А.Н. Красулин, П.В. Сорокин // Совершенствование конструктивных и эксплуатационных показателей тракторных и комбайновых двигателей: сб. науч. тр. ЦНИТА, 1989. – С. 79 – 87.

39. Антонов, Н.С. Экспресс-метод оценки параметров демпферов крутильных колебаний жидкостного трения / Н.С. Антонов, Ю.С. Мазиков, А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Тракторы и сельхозмашины. – 1986. – № 10. – С. 17 – 19.

40. Алексеев, В.В. Демпфирование крутильных колебаний в судовых валопроводах / В.В. Алексеев, Ф.Ф. Болотин, Г.Д. Кортын. – Л.: Судостроение, 1973. – 255 с.

41. Дрозденко, В.Ф. Методика и алгоритм расчета приведенной крутильной системы коленчатого вала ДВС / В.Ф. Дрозденко, А.Н. Гоц // Двигателестроение. – 1986. – № 10. – С. 15 – 17.

42. Дрозденко, В.Ф. Исследование эффективности жидкостного демпфера крутильных колебаний для ДВС / В.Ф. Дрозденко, 198

А.Н. Гоц, Э.М. Жарнов // Повышение эффективности автомобильных и тракторных двигателей: межвуз. сб. науч. тр. МАМИ. – М.: МАМИ, 1985. – С. 24 – 30.

43. Гоц, А.Н. Отработка конструкции силиконового демпфера крутильных колебаний / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко, Н.С. Антонов // Тракторы и сельскохозяйственные машины, 1987. – № 7. – С. 52 – 54.

44. Жарнов, Э.М. Методика экспериментального определения спектров крутильных колебаний коленчатых валов ДВС / Э.М. Жарнов, В.Ф. Дрозденко, В.Н. Баженов // Двигателестроение. – 1980. – № 8. – С. 27 – 28.

45. Химмельблау, Д. Анализ процессов статистическими данными: пер. с англ. – М.: Мир. – 1973. – 960 с.

46. Гоц, А.Н. Выбор параметров демпферов внутреннего трения / А.Н. Гоц // Транспорт, экология – устойчиво развитие: сб. доклады. – Технически университет. Варна. – Ековарна, 2006. – С. 197 – 205. – ISBN – 954-20-00030.

47. Гоц, А.Н. Расчет параметров демпферов внутреннего трения / А.Н. Гоц, В.Ф. Дрозденко // Фундаментальные и прикладные проблемы совершенствования поршневых двигателей: материалы VII Международ. науч.-практ. семинара; под ред. В.В. Эфроса, А.Н. Гоца, А.А. Гаврилова. Владим. гос. ун-т.– Владимир, 2005. – С. 49 – 50. – ISBN 5-86953-146-2.

48. Цзе, Ф.С. Механические колебания / Ф.С. Цзе, И.Е. Морзе, Р.Т. Хинкл; под ред. И.Ф. Образцова: пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.

49. А.с. 1272030 СССР, МКИ F16 F 15/12. Жидкостный демпфер крутильных колебаний/ А.Н. Гоц [и др.]. Оpubл. 23.11.1986. Бюл. № 43. – 4 с.

50. Гоц, А.Н. Расчет демпфера крутильных колебаний с упругим поглощающим элементом / А.Н. Гоц //Транспорт, экология – устойчиво развитие: сб. докл. VII научн.-техн. конф. с междунар. участием. – Болгария, Варна: Техн. ун-т, 2001. – С. 93 – 101.

51. Антонов, Н.С. Методика безмоторных ускоренных испытаний демпферов крутильных колебаний жидкостного трения / Н.С. Антонов, Е.В. Исаев, А.Н. Гоц и др.// Тракторы и сельхозмашины. – 1988. – № 6. – С. 7-11.

Учебное издание

**Гоц Александр Николаевич**

**КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ  
АВТОМОБИЛЬНЫХ И ТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ**

Учебное пособие

Подписано в печать 04.04.08.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 11,62. Тираж 150 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.