Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Владимир 2023

УДК 373.3.016
ББК 74.262.21
Т46

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Тихомирова, С. В.
Т46 Актуальные вопросы начальной математики и методики её преподавания : учеб.-метод. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 156 с. – ISBN 978-5-9984-1793-1.

Содержит материал по методике преподавания математики, необходимый для подготовки учителей начальной школы. Охвачены основные разделы программ учебных дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» и «Актуальные проблемы методики преподавания математики». Приведены примеры доказательств задач и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов вузов 2 – 3-го курсов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (профиль «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе») очной формы обучения.

Ил. 14. Табл. 2. Библиогр.: 22 назв.

УДК 373.3.016
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9984-1793-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи – практическая база учебных дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» и «Актуальные проблемы методики преподавания математики». Разработанные по данным дисциплинам программы обязательно включают в себя изучение следующих разделов дискретной математики: «Теория множеств», «Элементы математической логики», «Бинарные соответствия и отношения», «Алгебраические операции и их структуры», «Комбинаторика». Такие разделы рабочих программ, как «Элементы геометрии», «Величины и их измерения», «Различные подходы к построению множества целых неотрицательных чисел $\{\mathbb{N} \cup 0\}$», обеспечивают методико-педагогическую подготовку будущих учителей к организации обучения младших школьников решению задач. Математика начальной школы выстроена в теоретико-множественном русле, базовые понятия в ней – множество, натуральное число, величина.

Детальное исследование указанных разделов дискретной математики, интерпретации целых неотрицательных чисел с различных точек зрения представлены ранее в пособиях [7; 8; 9] по теоретическим основам математической подготовки учителей начальных классов. Содержание данного пособия обусловлено классификацией перечисленных математических разделов, структурой изложения тем «Нумерация» и «Величины» в начальной школе, систематизацией материала по теме «Текстовые задачи» в программах М. И. Моро и Н. Б. Истоминой (в рамках разных подходов к обучению – традиционного и развивающего). В пособие включены задания для рейтинг-контроля в виде тестов и контрольных работ. Задачи для самостоятельного решения необходимы для наработки практики самоподготовки и проверки знаний по математике у обучающихся по направлению начального педагогического образования.

В первой главе особое внимание уделено задачам на доказательство, приведены образцы решений таких задач с обоснованием каждого шага рассуждения в процессе решения задачи. Работа с доказательствами развивает логическое мышление, учит связности изложения ответа с опорой на установленные ранее факты, готовит к изучению геометрического материала. Умение проводить доказательство формируется постепенно при разрешении соответствующих содержанию задачи математических вопросов. В этом процессе, безусловно, ведущую роль играет умение работать с суждениями, выстраивать логику самой процедуры доказательства. При решении задачи важно пошаговое рассуждение: умение анализировать, исследовать, выполнять построения, ориентироваться в схематической записи, переводить текст с помощью моделей в формат математической задачи, составлять задачу, обратную данной, и представлять ответы на задачи разных видов.

Во второй главе излагается методика обучения младших школьников нумерации целых неотрицательных чисел. В третьей главе представлена методика изучения величин в начальной школе. В четвертой главе рассмотрены разные методические подходы к формированию у младших школьников умения решать задачи. В качестве контроля по теме «Методика обучения решению задач» предлагаются тесты, опросник для индивидуального собеседования со студентами и контрольная работа «Текстовые задачи».

Цели пособия – научить студентов исследовать и интерпретировать данные, представленные в различной форме, выстраивать ход выполнения задания, формулировать выводы и в дальнейшем обучать этому младших школьников; раскрыть методику изучения нумерации целых неотрицательных чисел и методику изучения величин в начальной школе с двух точек зрения: согласно традиционному подходу по учебникам М. И. Моро и согласно развивающему подходу по учебникам Н. Б. Истоминой, обозначить общее и различное в этих подходах.

При подготовке пособия автор использовал учебники по теоретическим основам предметного курса математики, методическую литературу, задачники-практикумы по математике для студентов высших педагогических учебных заведений, написанные Л. П. Стойловой, Н. Я. Виленкиным, А. А. Столяром, Н. Б. Истоминой, школьные учебники методических комплексов М. И. Моро и Н. Б. Истоминой, а также методические разработки коллег-предшественников: Г. Г. Шмыревой, В. П. Покровского, Е. В. Лопаткиной и И. И. Цыганок.

Глава 1. ВИДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

Основная часть практических заданий в рамках учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» требует обоснования решения. Подробного изложения решения можно достичь, опираясь на истинные утверждения (аксиомы или ранее доказанные предложения: теоремы, леммы, следствия и др.). Ученые-математики, например А. А. Столяр, В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, В. А. Успенский, методисты по математике начальной, основной и старшей школы (А. М. Пышкало, Н. Б. Истомина, Н. Я. Виленкин, Л. П. Стойлова, Н. Н. Лаврова и др.) особо подчеркивают значимость задач, в которых некоторое утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним предложений [1 – 6; 10; 15; 16], а это и есть задания на доказательство каких-либо умозаключений. Виды и строение суждений, структура и форма их доказательства, неполная индукция и метод доказательства (полная индукция) подробно, доступным языком, на примере задач и их решений описаны в учебнике математики профессора Л. П. Стойловой [5; 6].

В ходе доказательства предложений у обучающихся развивается математическое мышление, умение анализировать, выстраивать логические цепочки между объектами, располагать эти связи в определенном порядке. Решение задач на доказательство требует глубокого понимания отдельной темы, порой даже оценки места данной темы в конкретном разделе изучаемой дисциплины. Поначалу будущему учителю представляется странным обосновывать элементарные математические факты, поэтому есть смысл обратить его внимание на образцы разбора подобных задач, предоставив ему возможность привыкнуть к такому творческому процессу, как доказательство.

Остановимся на доказательстве математических предложений из разных разделов учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» [7; 8].

1.1. Элементы теории множеств. Доказательство равенства множеств

Задача. Доказать, что для любых множеств A, B, C имеет место левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Доказательство. Для удобства рассуждений обозначим

$\underbrace{A \times (B \cup C)}_{X} = \underbrace{(A \times B) \cup (A \times C)}_{Y}$.

В процессе доказательства данного равенства понадобятся определения равных множеств и двух нижеследующих операций над множествами. Напомним эти определения [7].

Определение отношения равенства множеств: два множества равны, если состоят из одних и тех же элементов. Другими словами, все элементы первого множества являются элементами второго, следовательно, первое множество включено во второе; и наоборот, все элементы второго множества являются элементами первого, то есть второе множество включено в первое.

Определение операции объединения множеств: объединением данных множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

Определение операции декартова произведения множеств: декартовым произведением двух данных множеств называется множество всех упорядоченных пар с первым компонентом из первого множества и вторым компонентом – из второго.

Проведем развернутое доказательство левого дистрибутивного закона умножения относительно объединения на основе определения отношения равенства множеств.

Чтобы установить равенство множеств X и Y, нужно доказать включения: а) $X \subset Y$; б) $Y \subset X$.

А. Для того чтобы $X \subset Y$, требуется, чтобы все элементы множества X были элементами множества Y. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $x \in X$ и покажем, что $x \in Y$.

Элемент $x \in A \times (B \cup C)$, следовательно, по определению декартова произведения множеств x – это упорядоченная пара вида (p, q), где $p \in A$ (1) $\boxed{\text{и}}$ $q \in B \cup C$ (2). Упростим условие (2). По определению объединения множеств имеем следующее: $q \in B$ (3) $\boxed{\text{или}}$ $q \in C$ (4).

Условие (1) должно выполняться одновременно (выделен союз *и*) с условием (3) или условием (4).

Пусть выполнены условия (1) и (3). Тогда $p \in A$ и $q \in B$, что по определению декартова произведения множеств дает $(p, q) \in (A \times B)$, но $(p, q) = x$, значит, $x \in (A \times B)$ (5).

Пусть выполнены условия (1) и (4): $p \in A$ и $q \in C$, следовательно, по определению декартова произведения множеств $(p, q) \in (A \times C)$, то есть $x \in (A \times C)$ (6).

Из условий (5) и (6) по определению объединения множеств

$x \in (A \times B) \cup (A \times C)$ (7).

Условие (7) в силу произвольности элемента x доказывает, что все элементы множества X принадлежат множеству Y. Значит, включение множеств $X \subset Y$ доказано.

Б. Для того чтобы $Y \subset X$, требуется, чтобы все элементы множества Y были элементами множества X. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $y \in Y$ и покажем, что $y \in X$.

Имеем $y \in Y \Longrightarrow y \in (A \times B) \cup (A \times C)$, откуда по определению объединения множеств заключаем следующее: $y \in (A \times B)$ $\boxed{\text{или}}$ $y \in (A \times C)$. Видим, что в каждом из множеств – $A \times B$ или $A \times C$ – элемент y – это упорядоченная пара (p, q), $y = (p, q)$, поэтому $(p, q) \in (A \times B)$ (1) $\boxed{\text{или}}$ $(p, q) \in (A \times C)$ (2).

Упростим каждое из полученных условий (1) и (2).

(1) $\xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} p \in A$ (3) и $q \in B$ (4)

(2) $\xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} p \in A$ (5) и $q \in C$ (6)

Поскольку условия (1) и (2) выполняются не одновременно (выделен союз *или*), то группы условий (3), (4) и (5), (6) нужно рассматривать отдельно.

Пусть выполнены условия (3), (4).

В условии (3) обозначено положение первого компонента: $p \in A$. Второй компонент q принадлежит множеству B. Условие (4) позволяет расширить множество B до нового множества $B \cup C$ согласно определению операции объединения множеств.

(4) $\xrightarrow{\text{по опр. объединения множеств}} q \in (B \cup C)$ (7)

(3), (7) $\longrightarrow p \in A$ и $q \in (B \cup C) \xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}}$ $(p, q) \in A \times (B \cup C)$, то есть $y \in A \times (B \cup C)$.

Получаем $y \in X$ (8).

Пусть теперь выполнены условия (5), (6).

В условии (5) обозначено положение первого компонента: $p \in A$. Второй компонент q принадлежит множеству C. Условие (6) позволяет расширить множество C до нового множества $B \cup C$ согласно определению операции объединения множеств.

(6) $\xrightarrow[]{\substack{\text{по опр. декартова} \\ \text{произведения множеств}}} q \in (B \cup C)$ (9)

(5), (9) $\longrightarrow p \in A$ и $q \in (B \cup C) \xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}}$ $(p, q) \in A \times (B \cup C),$ то есть $y \in A \times (B \cup C)$.

Получаем $y \in X$ (10).

Из условий (8) и (10) в силу произвольности элемента y доказано, что все элементы множества Y принадлежат множеству X. Значит, доказано включение $Y \subset X$.

В пункте А доказано, что множество X содержится в множестве Y, в пункте Б доказано, что множество Y содержится в множестве X. Тем самым равенство $X = Y$ установлено, и левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения доказан.

В приведенной задаче доказательство выстраивается на основе следующих определений: отношения равенства множеств, операций объединения и декартова умножения множеств.

1.2. Элементы математической логики. Законы логических операций

Задача. Доказать правый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: конъюнкция дизъюнкции высказываний A и B с высказыванием C равносильна дизъюнкции конъюнкции высказываний A и C с конъюнкцией высказываний B и C:

$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Доказательство. Установим справедливость данного закона с помощью таблицы истинности. Составим таблицу истинности.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
и	и	и	и	**и**	и	и	**и**
и	и	л	и	**л**	л	л	**л**
и	л	и	и	**и**	и	л	**и**
и	л	л	и	**л**	л	л	**л**
л	и	и	и	**и**	л	и	**и**
л	и	л	и	**л**	л	л	**л**
л	л	и	л	**л**	л	л	**л**
л	л	л	л	**л**	л	л	**л**

Видим, что высказывания $(A \vee B) \wedge C$ и $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ принимают одинаковые значения истинности (сравниваем построчно пятый и восьмой столбцы) при одинаковых значениях входящих высказываний. Значит, эти высказывания равносильны. Следовательно, правый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции выполняется: $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

1.3. Бинарные соответствия и отношения. Свойства бинарных отношений

Задача. Доказать, что отношение «быть ровесниками» на множестве людей одного города – это отношение эквивалентности, а отношение делимости на множестве натуральных чисел – отношение нестрогого порядка.

Доказательство. **А.** Рассмотрим отношение «быть ровесниками» на множестве людей одного города и докажем, что оно является отношением эквивалентности. Отношение R в данном случае определено предикатом $R(x, y)$: «человек x является ровесником человеку y», где $x, y \in X$, X – множество людей одного города.

Определим свойства отношения R:

– каждый человек считается ровесником самому себе, следовательно, отношение R рефлексивно;

– если человек x – ровесник человеку y, то и человек y будет ровесником человеку x; значит, отношение R симметрично;

– если человек x – ровесник человеку y и человек y – ровесник человеку z одновременно, то человек x будет ровесником и человеку z; значит, отношение R транзитивно.

Получаем, что отношение R обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. Множество людей одного города разбивается на классы эквивалентности. В один класс попадут люди одного возраста (например, множество семилетних детей города, обучающихся в первом классе любой школы этого города, образует один класс эквивалентности; множество людей данного города, которым по 20 лет, образует другой класс эквивалентности и т. д.). Эти классы не пустые, попарно не пересекаются, объединением всевозможных таких классов будет все множество людей данного города.

Б. Рассмотрим отношение делимости на множестве натуральных чисел и докажем, что оно является отношением нестрогого порядка. Отношение R в данном случае определено предикатом $R(x, y)$: «число x является делителем числа y», где $x, y \in X$, $X = \mathbb{N}$.

Определим свойства отношения R:

– каждое натуральное число – делитель самого себя, значит, R обладает свойством рефлексивности;

– если число x – делитель числа y и одновременно число y – делитель числа x, то это возможно только в случае равенства чисел x и y; приходим к выводу, что отношение R антисимметрично;

– если число x – делитель числа y и число y – делитель числа z, то число x – делитель числа z; значит, R транзитивно.

Таким образом, отношение R обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Следовательно, отношение R – отношение нестрогого порядка. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ будет упорядоченным по этому отношению, но не линейно упорядоченным (потому что отсутствует свойство связанности для R).

Задача. Доказать, что соответствие R, определяемое предикатом $R(x, y)$: «треугольник x вписан в окружность y», где $x \in X$, X – множество треугольников плоскости, $y \in Y$, Y – множество окружностей плоскости, не является взаимно однозначным отображением.

Доказательство. Проверим соответствие R на функциональность.

Треугольник x можно вписать не более чем в одну окружность y. Это утверждение будет истинным, поскольку для каждого треугольника существует единственная описанная вокруг него окружность. Значит, R – функциональное соответствие.

Проверим, будет ли соответствие R отображением множества во множество. В этом случае по определению отображения $(X \overset{\text{во}}{\rightarrow} Y)$ одного множества в другое должно выполняться равенство $(D_R = X)$ областей определения и отправления соответствия R. Чтобы область определения соответствия R совпала с множеством X, нужно, чтобы в X не было элементов, свободных от заданного соответствия, то есть на плоскости не должно существовать треугольников, вокруг которых нельзя было бы описать окружность. Это действительно так. Около любого треугольника можно описать окружность. Значит, $D_R = X$ и R – отображение множества во множество $(R: X \overset{\text{во}}{\rightarrow} Y)$.

Проверим, будет ли соответствие R инъективным отображением.

По определению инъективности различным элементам из множества X должны соответствовать различные образы из множества Y: для различных треугольников x_1 и x_2 на плоскости окружности, описанные вокруг них, должны быть различны.

Это утверждение ложно. Одну и ту же окружность y_1 можно описать вокруг разных треугольников $x_1,\ x_2, x_3, \ldots, x_n$. Значит, R не является инъективным отображением.

Проверим, будет ли соответствие R отображением множества на множество. По определению отображения $(X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y)$ одного множества на другое должно выполняться равенство $(E_R = Y)$ областей значения и прибытия соответствия R, должно иметь место равенство множеств E_R и Y. Для совпадения области значений соответствия R с областью прибытия Y нужно, чтобы в множестве Y не было элементов, свободных от заданного соответствия. Это означает, что на плоскости не должно существовать ни одной окружности, которую нельзя было бы считать описанной около треугольника. Это действительно так.

Значит, $E_R = Y$ и R – отображение множества на множество $(X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y)$. Или, что то же самое, R – сюръективное отображение.

Приходим к выводу: R – сюръективное, но не инъективное отображение, значит, и взаимно-однозначным оно быть не может. Что требовалось доказать.

1.4. Алгебраические операции и структуры. Алгебраические операции и их свойства

Задача. Доказать, что умножение – алгебраическая операция в множестве B целых чисел вида $4k+1$.

Доказательство. Рассмотрим числа $p=4k+1\in B,\ q=4m+$ $+1\in B$. Найдем их произведение: $p\cdot q=(4k+1)(4m+1)=$ $=16km+4m+4k+1=4(4km+m+k)+1$. Обозначим выражение в круглых скобках через t, получим число исходного вида: $p\cdot q=$ $=4t+1\in B$. То есть результат действия операции принадлежит множеству, из которого выбирались компоненты для умножения, значит, операция умножения алгебраическая в множестве целых чисел вида $4k+1$. Другими словами, множество чисел вида $4k+1$ замкнутое относительно операции умножения.

Задача. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел образует поле.

Доказательство (проведем поэтапно, согласно определению числового поля [2; 7]).

1. Проверим, что сложение и умножение – алгебраические операции в множестве $\mathbb{Q}$.

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ – два произвольных рациональных числа: $\frac{a_1}{b_1}\in\mathbb{Q}$, $\frac{a_2}{b_2}\in\mathbb{Q}$. Тогда их сумма $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}$ и произведение $\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}$ определены и являются рациональными числами:

$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\in\mathbb{Q}$, $\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\in\mathbb{Q}$.

2. Проверим требования кольца:

а) $\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)+\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}+\left(\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)$ – ассоциативность сложения в множестве рациональных чисел выполняется;

б) $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_1}{b_1}$ – коммутативность сложения в множестве рациональных чисел выполняется;

в) вычитание в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всегда возможно и однозначно определено, то есть уравнение $\frac{a_1}{b_1}+x=\frac{a_2}{b_2}$ при любых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}\in\mathbb{Q}$ имеет единственное решение $x=\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}\in\mathbb{Q}$.

Нейтральным элементом, или нулем, относительно сложения является класс дробей вида $\frac{0}{b}$, $b \in \mathbb{N}$. Симметричным элементом, или противоположным классу дробей вида $\frac{a}{b}$, является класс дробей вида $-\frac{a}{b}$;

г) $\left(\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}\right)\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1}{b_1}\left(\frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3}\right)$ – ассоциативность умножения в множестве рациональных чисел выполняется;

д) $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_1}{b_1}$ – коммутативность умножения в множестве рациональных чисел выполняется.

Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является кольцом.

3. Проверим обратимость умножения. Деление в множестве рациональных чисел всегда выполнимо (частное от деления рациональных чисел всегда есть число рациональное). Это означает, что для любых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a_2}{b_2} \neq 0$ уравнение $\frac{a_2}{b_2}x = \frac{a_1}{b_1}$ имеет единственное решение $x = \frac{a_1 b_2}{b_1 a_2} \in \mathbb{Q}$. Для класса дробей вида $\frac{a}{b}$, где $a \neq 0$, обратным будет класс дробей вида $\frac{b}{a}$. Единицей в этом случае является класс дробей вида $\frac{b}{b}$, $b \in \mathbb{N}$.

Выполнение условий 1 – 3 доказывает, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел образует поле.

1.5. Натуральное число как результат измерения величины. Сложение натуральных чисел, являющихся результатом измерения величин

Теорема. Сумма натуральных чисел всегда существует и единственна.

Доказательство. 1. Докажем существование суммы чисел.

Дано: $n, k \in \mathbb{N}$.

Доказать: $n + k \in \mathbb{N}$.

Натуральные числа n и k определяются как меры отрезков a и b соответственно:

$n = m_e(a) \quad \Rightarrow \quad a = ne,$

$k = m_e(b) \quad \Rightarrow \quad b = ke.$

Рассмотрим сумму отрезков a и b, которая всегда существует. Измерим длину отрезка-суммы $a + b$ с помощью отрезка e.

По определению мерой отрезка-результата должна быть сумма $n + k$: $m_e(a + b) = n + k$.

Обозначим новый отрезок буквой c, то есть $a + b = c$.

При измерении отрезка c с помощью отрезка e нужно последовательно измерить отрезок a и затем отрезок b с помощью отрезка e.

В этом случае отрезок e на отрезке a откладывается целое число раз, точно так же как и на отрезке b. Следовательно, на отрезке c отрезок e отложится целое число раз, что означает, что мера построенного отрезка натуральна: $m_e(c) \in \mathbb{N}$, то есть $m_e(a + b) \in \mathbb{N}$. Поэтому число-сумма $n + k$ натурально, $n + k \in \mathbb{N}$, или, другими словами, существует.

2. Докажем единственность суммы чисел. Доказательство проведем методом от противного.

Дано: $n, k \in \mathbb{N}$,

$n + k = p_1$,

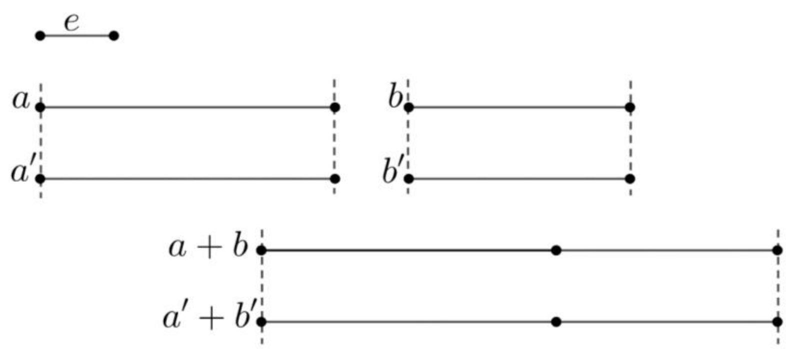
$n + k = p_2$.

Доказать: $p_1 = p_2$.

Пусть существуют две различные суммы p_1 и p_2 у одних и тех же чисел n и k. С точки зрения теории измерения величин натуральные числа n и k – это меры некоторых отрезков. Выберем конгруэнтные между собой пары отрезков a и a', b и b': $a' \cong a$ (1), $b' \cong b$ (2). Тогда число n – это мера отрезка a, $n = m_e(a)$, число k – это мера отрезка b, $k = m_e(b)$, поэтому сумма чисел $n + k = p_1$ есть мера суммы отрезков a и b, $p_1 = m_e(a + b)$. Ввиду конгруэнтностей (1) и (2) n и k – также меры отрезков a' и b': $n = m_e(a')$, $k = m_e(b')$, следовательно, сумма чисел $n + k = p_2$ – мера суммы отрезков a' и b', $p_2 = m_e(a' + b')$.

Чтобы равенство чисел-сумм p_1 и p_2 имело место, нужно доказать, что отрезки, соответствующие этим числам, равны: $a + b \cong a' + b'$.

Выберем единичный отрезок e. Пользуясь данной единицей измерения, построим отрезки a, b, a', b' и отрезки-суммы $a + b$ и $a' + b'$ (см. рисунок).



Выполненные построения показывают, что отрезки $a+b$ и $a'+b'$ совпадают при наложении и, значит, конгруэнтны: $a+b \cong a'+b'$. Меры конгруэнтных отрезков равны: $m_e(a+b) = m_e(a'+b')$. Следовательно, равенство p_1 и p_2 доказано. Единственность суммы натуральных чисел установлена.

Теорема доказана.

1.6. Аксиоматический подход к построению множества натуральных чисел. Доказательство равенств и делимости выражений на число методом математической индукции

Задача. Доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место равенство

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Доказательство. Суть метода математической индукции состоит в следующем: если равенство будет истинным при начальном элементе множества, на котором оно рассматривается, и из предположения об истинности этого равенства для произвольного натурального k получится установить равенство для натурального $k+1$, следующего за k, то делаем вывод о справедливости заданного равенства при любом натуральном значении переменной.

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Проверим истинность равенства при $n=1$.

В левой части (далее – Л. ч.) возьмем одно первое слагаемое (или, что то же самое, подставим в расчетную формулу значение $n=1$), тогда

Л. ч. $\xrightarrow{n=1} \frac{1}{(4\cdot 1-3)(4\cdot 1+1)}=\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}.$

Аналогичная подстановка в правую часть (далее – Пр. ч.) приводит к следующему:

Пр. ч. $= \frac{n}{4n+1} \xrightarrow{n=1} \frac{1}{4\cdot1+1} = \frac{1}{5}$.

Таким образом, при $n = 1$ Л. ч.= Пр. ч., равенство принимает вид $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ и является истинным.

2. Выдвинем гипотезу, то есть предположим, что при $n = k$ равенство истинно:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{S_k} = \frac{k}{4k+1}\,, \tag{1}$$

и докажем, что при $n = k + 1$ оно также будет истинным:

$$\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \cdots + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} = \frac{k+1}{4(k+1)+1}. \tag{2}$$

Рассмотрим сумму дробей из левой части равенства (2) и попробуем преобразовать ее к выражению в правой части равенства (2). Воспользуемся гипотезой – равенством (1), где S_k есть сумма k (штук) слагаемых определенного вида, а значит, может быть заменена значением суммы, найденным по формуле (правая часть равенства (1)).

$$\text{Л. ч.}\,(2) = \underbrace{\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{S_k} + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}.$$

Далее находим сумму дробей: $\frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}$. Преобразуем выражение в числителе: $\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}$. Квадратный трехчлен запишем в виде множителей: $\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} =$ $= \frac{4(k+1)\left(k+\frac{1}{4}\right)}{(4k+1)(4k+5)}$. Множитель 4 внесем в скобки второго множителя и выполним сокращение полученной дроби ($k \in \mathbb{N},\ 4k + 1 \neq 0$).

$$\frac{4(k+1)\left(k+\frac{1}{4}\right)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} = \text{Пр. ч.}\,(2).$$

Таким образом, после преобразований выражения в левой части равенство (2) принимает вид $\frac{k+1}{4k+5} = \frac{k+1}{4k+5}$.

Очевидно, что это равенство истинно.

Вывод. Доказано, что при $n = 1$ равенство истинно и из предположения об истинности равенства при $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$. Значит, равенство $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ справедливо для всех натуральных чисел n.

В проведенном выше доказательстве использовано разложение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, которые находят по формулам $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.

Задача. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $5^{2n-1} + 7$ делится на 6.

Доказательство. 1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

Найдем значение выражения $5^{2n-1} + 7$ при $n = 1$.

$5^{2\cdot 1-1} + 7 = 5^1 + 7 = 12$, 12 делится на 6 – истина.

2. Предположим, что выражение $5^{2n-1} + 7$ делится на 6 при $n = k$, то есть $(5^{2k-1} + 7) \vdots 6$ (1), и докажем, что данное утверждение будет истинно при $n = k + 1$ и имеет место делимость

$$(5^{2(k+1)-1} + 7) \vdots 6. \tag{2}$$

Преобразуем выражение (2) к такому виду, чтобы можно было использовать условие (1):

$$\begin{aligned}&5^{2(k+1)-1} + 7 = 5^{2k+2-1} + 7 = 5^{(2k-1)+2} + 7 = \\ &= 5^{2k-1}\cdot 5^2 + 7 = 5^{2k-1}\cdot 25 + 7 = \\ &= 5^{2k-1}(24 + 1) + 7 = \underbrace{5^{2k-1}\cdot 24} + \underbrace{5^{2k-1} + 7}.\end{aligned}$$

В последней части равенства первое слагаемое $5^{2k-1}\cdot 24$ делится на 6 (по правилу деления произведения на число, $24 \vdots 6$ [8, гл. 2]), второе слагаемое $5^{2k-1} + 7$ делится на 6 по гипотезе (1), следовательно, сумма этих слагаемых разделится на 6 (по правилу деления суммы нескольких слагаемых на число [Там же]): $(5^{2k-1}\cdot 24 + 5^{2k-1} + 7) \vdots 6$.

Потому и выражение (2) будет делиться на 6.

Доказано, что выражение $5^{2n-1} + 7$ делится на 6 при $n = 1$ и из делимости его на 6 при $n = k$ следует делимость при $n = k + 1$. Значит, исходное утверждение справедливо для всех натуральных чисел n.

Задача. Доказать, что для любых целых неотрицательных чисел a, b и c имеет место левый дистрибутивный закон умножения относительно сложения:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Доказательство. В процессе доказательства понадобятся аксиомы операций сложения и умножения целых неотрицательных чисел. Напомним их.

$\boldsymbol{A_1^+}$ $\forall a \in \mathbb{N}_0 \;\; a + 0 = a.$

$\boldsymbol{A_2^+}$ $\forall a, \; b \in \mathbb{N}_0 \;\; a + b' = (a + b)'.$

$\boldsymbol{A_1^\times}$ $\forall a \in \mathbb{N}_0 \;\; a \cdot 0 = 0.$

$\boldsymbol{A_2^\times}$ $\forall a, \; b \in \mathbb{N}_0 \;\; a \cdot b' = a \cdot b + a.$

Воспользуемся методом математической индукции. Зафиксируем значения переменных a и b, индукцию же проведем по переменной c.

1. Проверим истинность равенства при $c = 0$ (начальный элемент в множестве целых неотрицательных чисел – нуль). Оно принимает вид

$a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0.$

Отдельно рассмотрим выражения в левой и правой части.

Л. ч. $= a \cdot (\underbrace{b + 0}) =$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_1^+}$) $= a \cdot b.$

Пр. ч. $= a \cdot b + a \cdot 0 =$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_1^\times}$) $= a \cdot b + 0 =$
$=$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_1^+}$) $= a \cdot b.$

Равенство $a \cdot b = a \cdot b$ имеет место в силу единственности произведения целых неотрицательных чисел. Следовательно, Л. ч. $=$ Пр. ч.

Значит, равенство $a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0$ истинно.

2. Предположим, что при $c = k$ равенство истинно, то есть

$$a \cdot (b + k) = a \cdot b + a \cdot k, \tag{1}$$

и докажем, что при $c = k'$ равенство будет истинным, то есть

$$a \cdot (b + k') = a \cdot b + a \cdot k'. \tag{2}$$

Для доказательства преобразуем выражение из левой части равенства (2) к виду, записанному в его правой части:

Л. ч. $= a \cdot (b + k') =$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_2^+}$) $= a \cdot (b + k)' =$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_2^\times}$) $= \underbrace{a \cdot (b + k)} + a =$ (по гипотезе (1)) $= (a \cdot b + a \cdot k) + a =$

$=$ (по ассоциативному закону сложения) $= a \cdot b + \left(\underbrace{a \cdot k + a}\right) =$

$=$ (по аксиоме $\boldsymbol{A_2^\times}$) $= a \cdot b + a \cdot k' =$ Пр. ч.

Таким образом, равенство (2) становится истинным при $c = k'$.

Доказано, что равенство истинно при $c = 0$ и из истинности равенства при $c = k$ следует истинность равенства при $c = k'$. Поэтому левый дистрибутивный закон умножения относительно сложения имеет место для всех целых неотрицательных чисел c при фиксированных значениях переменных a и b.

Аналогичным образом, фиксируя пары a и c, проводят индукцию по переменной b, далее, фиксируя пары b и c, проводят индукцию по переменной a. В доказательстве по каждой переменной получают вывод и формулируют общее заключение. Итак, левый дистрибутивный закон умножения относительно сложения выполняется для всех целых неотрицательных чисел a, b и c.

1.7. Делимость натуральных чисел. Задачи на доказательство делимости

Задача. Доказать, что при любом целом m число $m^3 + 11m$ делится без остатка на 3.

Доказательство проведем методом перебора всевозможных вариантов, другими словами, методом полной индукции [6], то есть истинность утверждения будет следовать из истинности его во всех частных случаях.

Согласно теореме о делении с остатком, представим m в виде $m = 3q + r$, где q – целое число, а остаток r принимает одно из значений – $0, 1, 2$.

Если $r = 0$, то $m = 3q$. Тогда $m^3 + 11m = (3q)^3 + 11 \cdot 3q = 3q((3q)^2 + 11)$ кратно 3 (множитель $3q$ делится на 3).

Если $r = 1$, то $m = 3q + 1$. Тогда

$$m^3 + 11m = (3q + 1)^3 + 11(3q + 1) = (3q + 1)((3q + 1)^2 + 11) =$$
$$= (3q + 1)((3q)^2 + 6q + 1 + 11) = (3q + 1)(9q^2 + 6q + 12) =$$
$$= 3(3q + 1)(3q^2 + 2q + 4)$$ кратно 3 (в произведении есть множитель 3).

Если $r = 2$, то $m = 3q + 2$. Тогда

$$m^3 + 11m = (3q + 2)^3 + 11(3q + 2) = (3q + 2)((3q + 2)^2 + 11) =$$
$$= (3q + 2)((3q)^2 + 12q + 4 + 11) = (3q + 2)(9q^2 + 12q + 15) =$$
$$= 3(3q + 2)(3q^2 + 4q + 5)$$ кратно 3 (в произведении есть множитель 3).

Доказано, что число $m^3 + 11m$ делится без остатка на 3 во всех частных случаях. Следовательно, $(m^3 + 11m) \vdots 3$ при любом целом m.

Эту задачу можно было бы решить и другими способами. Например, провести рассуждение с использованием формул сокращенного умножения: $m^3 + 11m = m^3 - m + 12m = m(m^2 - 1) +$ $+12m = (m-1)m(m+1) + 12m$. Число $12m$ делится на 3 (содержит множитель $12 \vdots 3$), число $(m-1)m(m+1)$ делится на 3 как произведение трех последовательных натуральных чисел.

Также доказательство можно провести методом математической индукции.

Задача. Доказать, что число $2^{10} + 5^{12}$ составное.

Доказательство. Составное число имеет делители, отличные от единицы и самого себя. Попробуем сумму $2^{10} + 5^{12}$ разложить на множители. Замечаем, что каждое из слагаемых есть квадрат некоторого числа, далее по формулам сокращенного умножения имеем следующее:

$$2^{10} + 5^{12} = (2^5)^2 + (5^6)^2 = (2^5 + 5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 =$$
$$= (2^5 + 5^6)^2 - 2^6 \cdot 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2 =$$
$$= (2^5 + 5^6 - 2^3 \cdot 5^3)(2^5 + 5^6 + 2^3 \cdot 5^3).$$

Полученные множители отличны от единицы: $\left(2^5 + 5^6 - 2^3 \cdot 5^3\right) > 1$ и $(2^5 + 5^6 + 2^3 \cdot 5^3) > 1$.

Итак, исходное число представлено в виде произведения двух натуральных чисел, каждое из которых больше единицы. Следовательно, по основной теореме арифметики [8, с. 35] это число составное.

Задача. Доказать, что при любом натуральном n число $n^5 - 5n^3 +$ $+4n$ делится без остатка на 120.

Доказательство. Разложим число $n^5 - 5n^3 + 4n$ на множители.

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$
$$= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) =$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Замечаем, что результат есть произведение пяти последовательных натуральных чисел. Среди этих чисел будут по крайней мере два последовательных четных числа. Значит, произведение делится на 8, так как среди двух последовательных четных чисел одно точно делится на 4. В пятерке последовательных чисел обязательно встретится хотя бы одно число, кратное 3 (значит, произведение делится на 3), и по крайней мере одно число, кратное 5 (значит, произведение разделится на 5). Имеем: $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Следовательно, число $n^5 - 5n^3 + 4n$ при любом натуральном n делится без остатка на 120.

Разные разделы учебных математических дисциплин содержат утверждения и задания, требующие обоснования: в логике это установление равносильности высказываний (доказательство проводят по определению равносильности), для числовых множеств это нахождение их счетности и взаимной эквивалентности (доказательство проводят по определениям счетного и эквивалентных множеств), для арифметических операций обязательна основательная проверка их существования (доказательство проводят по определению операции на конкретном числовом множестве) и единственности. Последнее требование для объектов чаще всего устанавливается методом от противного. Равенства, неравенства, многие утверждения при аксиоматическом определении числа доказываются методом математической индукции. Для задачи, имеющей сравнительно небольшое количество решений, иногда удобен метод перебора всевозможных вариантов решения.

Рейтинг-контроль по теме «Виды математических доказательств»

В заданиях 1 – 10 докажите справедливость числовых равенств.

1. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

2. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

4. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}$.

5. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

6. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

7. $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

8. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

9. $\frac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

10. $\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

В заданиях 11 – 20 установите равенство/тождество.

11. Докажите, что если $z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$, то $z^3+3bz-2a=0$.

12. Докажите, что если $a+b=1$, то $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

13. Докажите, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

14. Докажите тождество $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-x)(y-z)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$.

15. Докажите тождество

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

16. Докажите, что если для чисел x,y,z,m,n,p выполняются равенства $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$, $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них выполняется также и равенство $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

17. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b $(a>b)$ в m раз больше их среднего геометрического. Докажите, что $\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$.

18. Методом математической индукции докажите тождество

$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\cdots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n$.

19. Методом математической индукции докажите тождество

$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{n+1}}$, $|x|\neq 1$.

20. Методом математической индукции докажите тождество

$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^8}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2n}}=\frac{1}{1-x}\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, $|x|\neq 1$.

В заданиях 21 – 30 проведите доказательство предложений в указанных числовых множествах.

В заданиях 21 – 25 в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, полученном в результате расширения множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, целое число определяется упорядоченной парой натуральных чисел (x,y), $x,y\in\mathbb{N}$, и для элементов множества $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2$ имеет место определение отношения эквивалентности упорядоченных пар: $(\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}\,)$ $[(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = y_1 + x_2]$.

21. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a, b) + (a, b) \sim (a, b) \cdot (n + 2, n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

22. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a, b) + (n, n) \sim (a, b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

23. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a, b) \cdot (n, n) \sim (m, m)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

24. Найдите значение выражения $\big((7, 3) + (9, 20)\big) \cdot \big((5, 3) - (9, 13)\big)$. Сравните ответ с результатом, получаемым путем замены пары (a, b) разностью $a - b$ и последующим вычислением.

25. Найдите значение выражения $(5, 12)\cdot\big((8, 4)+(17, 29)\big)-(7, 1)$. Сравните ответ с результатом, получаемым путем замены пары (a, b) разностью $a - b$ и последующим вычислением.

26 Укажите, при каких условиях для множества $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство: а) $r_1 : (r_2 \cdot r_3) = (r_1 : r_2) : r_3$; б) $(r_1 + r_2) : r_3 = r_1 : r_3 + r_2 : r_3$, – и докажите его. При проведении доказательства учтите, что для записи чисел r_1, r_2, r_3 используются соответственно дроби $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$.

27. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел докажите, что числа $\sqrt{8}$ и $\sqrt{3}$ иррациональные.

28. Докажите, что множество натуральных чисел, кратных 5, бесконечно.

29. Докажите, что множество натуральных чисел, кратных 5, счетно.

30. Докажите, что множество натуральных чисел, кратных 5, с множеством натуральных чисел, кратных 10, равномощны.

Глава 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ НУМЕРАЦИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Материал главы соответствует логике изложения вопросов методики начальной математики педагогами-методистами А. М. Пышкало, Н. Б. Истоминой, М. И. Моро, М. А. Бантовой [4; 11 – 15].

Чтобы подготовить детей к обучению математике, учитель должен овладеть специальными знаниями и умениями, называемыми методическими. Особенность методических знаний и умений – их непосредственная связь с психолого-педагогическими и математическими знаниями.

В 1-м классе детям дается задание: сравни числа 5 и 9 и поставь между ними знак сравнения (>, <, =) так, чтобы запись получилась верная.

Для выполнения задания требуется владеть следующими понятиями: количественное число, установление взаимно-однозначного соответствия, теоретико-множественный подход к определению отношений «больше», «меньше», «равно». В соответствии с этими понятиями учитель выбирает способ деятельности для работы над заданием.

Учитывая наглядно-образный характер мышления ребенка данного возраста, учитель предлагает одному ученику выложить пять кружков, а другому – девять треугольников. Как подходящим образом расположить эти фигуры, чтобы увидеть, каких больше?

Если все справились, то учитель просит учеников обосновать ответ. В таком случае понадобятся понятия «счет» и «натуральный ряд чисел». Число, которое называется при счете раньше, всегда меньше числа, которое следует за ним.

2.1. Методика обучения нумерации в традиционной системе обучения

Нумерация целых неотрицательных чисел: основные понятия. Счет в пределах десяти

Согласно словарю С. И. Ожегова, в разговорной речи под терминами «нумерация», «нумеровать» понимают: 1) ставить номера на чем-либо или на ком-либо; 2) цифровое обозначение предметов, расположенных в последовательном порядке.

В курсе математики *нумерацией*, или *системой счисления*, называют язык для наименования цифр, их записи и выполнения действий над ними.

Различают *позиционные* и *непозиционные* системы счисления.

В позиционной системе счисления один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа.

В десятичной системе счисления используется 10 знаков: 0, 1, …, 9. Из них образуют конечные последовательности – краткие записи чисел [8].

Любое число в десятичной системе счисления может быть представлено в виде суммы разрядных слагаемых. Например, число 2745 по теореме о представлении числа в позиционной системе счисления записывается так: $2745 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

$10^0 = 1$, 10^1, 10^2, …, 10^n называют *разрядными единицами* первого, второго, …, $n - 1$-го разряда, при этом десять единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда.

Умение читать и записывать числа в десятичной системе счисления тесно связано с такими понятиями, как натуральное число, число и цифра 0, натуральная последовательность чисел, разряд, класс, разрядные слагаемые и т. д. Эти понятия очень сложны и формируются у детей постепенно.

1. Понятие натурального числа: усвоить это понятие для ребенка – значит понимать, как оно образуется, как обозначается на письме.

Натуральное число – общая характеристика класса эквивалентных множеств, оно осознается в процессе установления взаимно-однозначного соответствия между элементами различных множеств (теоретико-множественный подход к определению натурального числа студенты изучали в рамках дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» [Там же]).

2. Число «нуль» – это не натуральное число.

Понятие о числе «нуль» формируется у учащихся как характеристика класса пустых множеств.

В нумерации нуль используется и как число, и как цифра.

Нуль обозначает отсутствие единиц какого-нибудь разряда или класса (30, 25 000).

3. *Натуральная последовательность* – это запись, построенная по определенному закону, натуральный ряд чисел. Часть такого ряда от числа 1 до числа a образует отрезок $\mathbb{N}_a$ натурального ряда.

Различают *устную* и *письменную* нумерацию.

4. *Устная нумерация* – это совокупность правил, которые позволяют с помощью немногих слов составить названия для большого количества чисел. Укажем эти правила:

– учащиеся начальных классов усваивают 16 числительных – названий основных чисел;

– с помощью числительных образуются названия чисел по общему правилу: единицы высших разрядов и классов, затем низших;

– исключение составляют числа от 11 до 19: сначала называют единицы, затем десятки;

– разрядные числа образуются так: сначала озвучивают их количество, а потом название.

5. *Письменная нумерация* – совокупность правил, которые позволяют с помощью нескольких знаков (их 10) записать любые числа:

– особые знаки для первых 10 чисел: 0, 1, 2, …, 9 используются как цифра и как число;

– при помощи принципа поместного значения цифр и 10 знаков можно записать любое число;

– в числах при письме различают классы: числа записывают, начиная с высших разрядов (классов).

Кроме перечисленных понятий, при изучении нумерации рассматривают вопросы, которые непосредственно связаны с нумерацией и помогают детям ее усвоить:

– сложение и вычитание единицы;

– случаи сложения и вычитания на основе знания десятичного состава чисел;

– увеличение, уменьшение в 10, 100, 1000 раз (на основе позиционного принципа).

В традиционной программе по математике начальной школы (автор М. И. Моро) изучение темы «Нумерация» выстраивается по следующим концентрам: десяток, сотня, тысяча, многозначные. Под *концентром* понимают объединенную по общим признакам совокупность (область, множество) рассматриваемых чисел.

Выделение десятка в особый концентр объясняется следующими причинами:

1) нумерация в пределах 10 имеет особенности: 10 – основание десятичной системы счисления, поэтому числа от 1 до 10 образуются в результате счета простых единиц. В связи с этим для обозначения каждого числа первого десятка в устной речи используется особое слово – числительное, а на письме – особый знак;

2) небольшие числа создают благоприятные условия для раскрытия учащимся целого ряда математических понятий:

– натуральное число;

– отношение между числами;

– количественные и порядковые числительные и т. п.;

3) счет в пределах 10 – основа овладения счетом вообще: другие разрядные единицы (десятки, сотни, тысячи) считают точно так же, как и простые единицы. Название и обозначение чисел первого десятка – исходные для обозначения и называния любых многозначных чисел.

При изучении концентра «десяток» выделяют следующие этапы: подготовительный; изучение нумерации от 1 до 5; изучение нумерации от 6 до 10.

Подготовительный этап. Основные задачи учителя следующие:

– выявить математический запас детей;

– подготовить учащихся к изучению нумерации в пределах 10.

Необходимо выяснить, в каких пределах первоклассник может считать предметы, понимает ли арифметический смысл сравнений «больше», «меньше», «столько же» и каков запас у ребенка геометрических представлений, то есть различает ли он понятия «слева», «справа», «вверху», «внизу», «впереди», «позади», «между», «перед», «после».

Посчитайте предметы.

Возьмите в левую руку столько палочек, сколько нарисовано кружков.

Узнайте, каких кружков больше – зеленых или красных (под рядом из шести малых кружков нарисованы четыре больших круга).

Посмотрите на картинку и скажите, кто стоит перед Жучкой, кто – между внучкой и дедушкой.

Главное внимание направлено на отработку у детей определенных умений, необходимых для изучения чисел первого десятка:

– умения считать предметы: каждый ребенок имеет дидактический материал (кружочки, треугольники, квадратики); считая, нельзя пропускать предметы, повторять два раза один и тот же; считать можно по-разному: слева направо, справа налево, снизу вверх, сверху вниз, с угла на угол; при счете можно пользоваться как количественными, так и порядковыми числительными. Учащиеся постепенно должны усвоить, что если последний предмет оказался пятым при счете, то всего пять предметов, и наоборот;

– умения сравнивать совокупности предметов по их числу:

а) путем пересчитывания;

б) установления взаимно-однозначного соответствия.

Чтобы отработать это умение, учитель предлагает задания.

Положите на парту семь треугольников, под каждый треугольник положите по кружку. Кто, не считая, скажет, сколько кружков?

Возьмите, не считая, в левую руку несколько больших кружков, а в правую – несколько маленьких. Разложите эти кружки друг под другом так, чтобы видно было, каких больше, каких меньше.

Нарисуйте в тетради три треугольника. Под каждым треугольником нарисуйте квадрат. Что нужно сделать, чтобы квадратов было больше?

– умения сравнивать предметы совокупностей путем соотнесения их один к одному. Это дает возможность устанавливать не только где больше, где меньше, но и на сколько. При выполнении подобных упражнений важно каждый раз обращать внимание детей на взаимосвязь отношений «больше» и «меньше»: например, если квадратов на один больше, то кружков на один меньше, чем квадратов.

При отработке умения сравнивать включают задания на преобразование неравных совокупностей в равные и равных – в неравные. При выполнении упражнений на сравнение и преобразование совокупностей дети не только усваивают отношения «больше», «меньше», «столько же», но и накапливают наблюдения о количественных изменениях.

Уточняют пространственное представление учащихся, например таким образом.

Положите тетрадь слева, учебники справа, найдите картинку в верхнем правом углу страницы, отступите от края тетради слева и сверху на две клеточки, поставьте между первым и вторым кружком флажок.

Фаланги пальцев к письму подготавливают рисованием различных бордюров.

Изучение нумерации от 1 до 5 и от 6 до 10. На этих этапах дети должны усвоить:

– как образуется каждое число при счете из предыдущего числа и единицы и следующего числа и единицы;

– как называется каждое число и как оно обозначается печатной и письменной цифрой;

– на сколько каждое число больше непосредственно предшествующего ему;

– какое место занимает каждое число в ряду чисел от 1 до 10.

Образование каждого числа из других чисел, количественное и порядковое отношения между числами можно раскрыть лишь в том случае, если рассмотреть не определенные числа, а отрезки натурального ряда чисел от 1 до того числа, которое изучается.

От 1 до 5

1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5

От 6 до 10

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

На данном этапе предлагаются задания, связанные с образованием чисел в натуральном ряду:

а) присчитывание и отсчитывание по одному (с иллюстрацией на предметах);

б) образование числовых последовательностей (числовые лесенки);

Нарисуйте в тетради два кружка, ниже нарисуйте столько же зеленых кружков.

Нарисуйте еще один кружок, нарисуйте под зелеными кружками столько же красных, добавьте еще один.

в) решение иллюстрированных задач;

В коробке лежало пять карандашей, туда положили еще один. Сколько стало?

г) черчение и измерение отрезков;

д) знакомство с печатной и письменной цифрой;

е) установление количественных отношений между последовательными числами натурального ряда с опорой на сравнение совокупностей. Например, три цыпленка больше, чем два лягушонка. Следовательно, $3 > 2$. Можно использовать наглядность (рисунки) не только в таких целях.

Сознательному усвоению количественных отношений способствуют упражнения следующих видов.

Вместо звездочки впишите знаки <, >, = так, чтобы неравенство было верным: $5 \ast 6$, $6 \ast 7$, $4 \ast 4$.

Впишите в окошко подходящее число: $5 < \square$, $\square > 3$, $\square = \square$.

Исправьте ошибки: $7 > 8$, $9 < 8$, $6 > 5$.

ж) выяснение порядковых отношений между числами натурального ряда с опорой на счет предметов и сравнение совокупностей. Составляя из предметов (или зарисовывая) числовые лесенки, дети убеждаются в том, что после числа 1 идет число 2, которое больше его на единицу и т. д.

Понятие нумерации дети отрабатывают с помощью следующих упражнений.

Впишите пропущенные числа. $1, \square, 3, \square, \square, 6, 7, \square, 9$.

Расположите числа в порядке, как они идут при счете: 2, 8, 3, 10, 6.

Отсчитывайте от числа 5 числа до 10 и от 10 в обратном порядке.

Какое число стоит между 8 и 10, 6 и 4? После какого числа идет число 5? Назовите соседей числа 8.

Знакомство с числом и цифрой 0 необходимо для осознания натурального ряда чисел. В классе должно быть вывешено наглядное пособие, которое создает образ натурального ряда, иллюстрируя количественные и порядковые отношения. При изучении натурального ряда чисел в пределах первого десятка отрабатывается состав чисел.

После того как дети познакомились с числами 1 – 10, они приступают к изучению числа и цифры 0 (нуль). Символ (цифру) 0 дети встречали при записи числа 10 и при работе с отрезками, измеряя их линейкой. Понятие о нуле, как и понятие о любом другом числе, дается на основе практических действий с предметными множествами. Нуль характеризует пустое множество (множество, которое не содержит ни одного элемента). Вычитая из какого-либо числа последовательно все его единицы, в результате получаем всё меньшие и меньшие числа и, наконец, вычтя последнюю единицу, получаем нуль.

Соответствующие упражнения подводят детей к пониманию, что нуль получается в результате вычитания единицы из единицы, следовательно, число 0 на один меньше, чем число 1, и в ряду чисел оно должно занять место перед числом 1 как число, ему предшествующее.

Далее рассматривается линейка и даётся истолкование: почему первая цифра, которая на ней обозначена, именно 0, а не 1. Теперь можно осмыслить и значение цифры 0 в записи числа 10 (в числе нет других единиц, кроме тех, которые образовали десяток).

Методика обучения нумерации чисел в пределах ста

В рамках изучения концентра «сотня» учащиеся получают представление о десятке как новой счетной единице, знакомятся с новым понятием – разряд. *Разрядом* называют место, занимаемое цифрой в записи числа в позиционной системе счисления. Количество занятых цифрами мест – это количество разрядов числа. Принцип образования, названия и записи двузначных чисел – основа для усвоения устной и письменной нумерации чисел за пределами сотни.

Принципом поместного значения цифр, или *позиционным принципом*, называют способ изображения чисел, при котором одними и теми же цифрами могут обозначаться разные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого цифрами при записи конкретного числа. (Теоретико-практический материал о позиционных системах счисления представлен в учебно-практическом пособии [8].)

Устная и письменная нумерация чисел больше 10 строится на базе десятичной системы счисления, то есть при счете группируются единицы, используется счет составных единиц. Дети в устной речи применяют такие понятия, как разряд, классы, принцип поместного значения цифр при записи чисел.

В изучении нумерации двузначных чисел выделяют две ступени: от 11 до 19; от 20 до 100.

Такой порядок изучения нумерации чисел обусловлен прежде всего тем, что названия чисел второго десятка образуются из тех же слов, что и названия разрядных чисел.

Однако слова *два*, *три, пять* и так далее в числительных *две-на-дцать, три-на-дцать* обозначают число единиц, а в числительных *два-дцать, три-дцать* – число десятков. Эта особенность требует того, чтобы числа 11 – 19 были рассмотрены отдельно. Иначе дети путают 12 и 20, 13 и 30.

Существует еще одна особенность, которая создает трудности при овладении детьми письменной нумерацией чисел от 11 до 19: при их написании устное произношение/прочтение и порядок записи различаются (читаем *один* (единицы числа)-*на-дцать* (десятки числа), а запись выполняем слева направо: в ней следует сначала цифра десятков, затем единиц; для сопоставления, например, число 37: произносим сначала десятки и прописываем цифру десятков – *тридцать*, потом читаем единицы и прописываем цифру единиц – *семь*). За исключением чисел второго концентра для всех остальных двузначных чисел их чтение и запись совпадают.

Методика изучения нумерации двузначных чисел сходна с методикой изучения нумерации однозначных: устная и письменная нумерация чисел опирается на десятичную группировку единиц при счете и принцип поместного значения цифр при записи чисел.

Таким образом, конечные результаты обучения в рамках изучения второго концентра можно сформулировать так:

– расширение понятия о числе;

– сформированное понятие о десятке как новой счетной единице;

– счет до 20, пересчитывание и отсчитывание по одному, десятку и равными числовыми группами (по 2, 5, 4);

– знакомство с десятичным составом числа;

– сформированное представление об однозначных и двузначных числах;

– умение читать и записывать числа от 11 до 20 цифрами;

– сформированное понятие о принципе поместного значения цифр.

Необходимо довести до сознания каждого ребенка конкретный смысл каждого числа, они должны понимать его место в натуральном ряду чисел, десятичный состав, особенности письменного обозначения каждого числа и всех чисел второго десятка, поместное значение цифр в числе. Для этого требуются тщательно продуманная система изучения нумерации, постоянная опора на средства наглядности, задействование слуховых, зрительных, кинестетических анализаторов, систематическая работа над этой темой в течение всего года, постоянное внимание учителя к практическому использованию знаний в повседневной жизни.

Обратим внимание на особенности поэтапного изучения нумерации.

Подготовительная работа по изучению нумерации двузначных чисел проводится еще при изучении однозначных чисел. С этой целью учителя дают следующие виды заданий:

– счет предметов с выходом за десяток;

– счет групп предметов с выходом за десяток.

На следующем этапе изучают ***устную нумерацию*** (1-й класс 2-я часть). У детей формируют понятие о десятке как новой счетной единице. Десятки складывают, вычитают, сравнивают (2д + 3д = 5д, 5д – 3д = 2д, 2д < 3д). В качестве наглядных пособий дети работают: 1) с палочками (предметное представление единиц) и пучками палочек (предметное представление десятков: один пучок содержит десять палочек); 2) полосками, каждая из которых разбита на 10 квадратиков (это наглядное пособие дети изготавливают сами). Опираясь на практические упражнения со счетными палочками или полосками, дети выполняют задания на закрепление десятичного состава чисел.

Отсчитайте 12 палочек. Узнайте, сколько здесь десятков палочек, сколько отдельных единиц? (один десяток и две единицы)

Возьмите один десяток и четыре палочки. Сколько получится? (14)

Сколько десятков и единиц в числе 17?

Какое число состоит из одного десятка и восьми единиц?

Помимо десятичного состава чисел, рассматриваются образование чисел в натуральной последовательности, их количественные и порядковые отношения.

Присчитывайте по одному и называйте числа, начиная с 13.

Отсчитайте по одному, начиная с 17.

Какое число при счете называется перед числом 15? После какого числа следует 16? Какое число стоит между 18 и 20?

Назовите число, которое больше 17 на один.

Если к 13 прибавить один, какое число получится?

На работу с устной нумерацией обычно требуется выделить 3 – 5 уроков. Учащиеся должны познакомиться с образованием чисел от 11 до 20, научиться считать в пределах 20 по одному в прямом и обратном порядке, понимать десятичный состав чисел второго концентра (11 – 20). Данные знания и умения нужны для следующего этапа работы с числами второго десятка – письменной нумерации.

Письменная нумерация основана на десятичной группировке единиц при счете и принципе поместного значения цифр.

Незаменимое пособие при изучении письменной нумерации – абак. Десятичным абаком служат деревянные русские счёты. В них используется десятичная система счисления. Счёты появились в России на рубеже XV – XVI вв. и активно применялись в торговле вплоть до последнего десятилетия XX в. С момента своего возникновения счёты практически не изменились. Для ученика начальной школы абак представляется двумя разрядами (один ряд – единицы, другой ряд – десятки). Такой наглядный инструмент можно изготовить из бумаги: полоска единиц окрашена одним цветом, а полоска десятков – другим. На абаке учащиеся видят состав числа, место единиц и десятков. На первых порах детям целесообразно двузначные числа записывать в таблице.

Десятки	Единицы
1	8
1	9
2	0

Учащиеся должны уметь записывать числа по порядку от 1 до 20, от 11 до 20 – под диктовку учителя, но не по порядку.

Работа с таблицами чисел от 1 до 20, записанных в два горизонтальных ряда по десять, позволяет наглядно сопоставлять все числа первого и второго десятков, подмечать сходство и различие в записи и чтении этих чисел. Цифры, обозначающие единицы, могут быть записаны одним цветом, а десятки – другим. Сопоставляя в таблице числа первого и второго десятков, учащиеся устанавливают, что для записи чисел, состоящих только из единиц, требуется одна цифра (один знак), а для записи чисел, состоящих из десятков и единиц (или только из десятков), – два знака. Поэтому числа от 1 до 9 называют однозначными, а числа от 10 до 20 – двузначными.

Учитель просит детей определить на слух и обозначить число, записать самое маленькое двузначное число, которое они знают.

Далее сравнивают числа. Учащиеся усваивают правило: все числа, стоящие в числовом ряду слева от данного числа, меньше его, а все числа, стоящие в числовом ряду справа от данного числа, больше его.

Числа второго десятка сравнивают по величине: определяется, какое число больше (меньше), сколько лишних единиц в большем числе и сколько их недостает в меньшем числе. Учащиеся выполняют задания, в которых требуется правильно расставить знаки отношений (>, <, =).

Для закрепления знаний о месте числа в натуральном ряду выполняют упражнения на нахождение: а) пропущенных чисел, б) соседних чисел. Во время работы над изучением второго десятка необходимо закреплять навыки сознательного счета: счет не только от 1, но и от любого заданного числа. Большое внимание, как и при изучении чисел первого десятка, уделяется порядковому счету.

При изучении нумерации в пределах 100 школьники должны овладеть следующими знаниями, умениями и навыками:

1) считать до 100 в прямом и обратном порядке единицами и десятками;

2) присчитывать и отсчитывать по одному, десятку и равными числовыми группами (по 2, 5, 20) как отвлеченно, так и на предметных пособиях;

3) пользоваться порядковыми числительными;

4) знать место каждого числа в натуральном ряду чисел в пределах 100, понимать свойство этого ряда: каждое число на единицу больше предшествующего и на единицу меньше последующего;

5) понимать десятичный состав чисел. Дети практически должны осознать, как записать число в виде суммы разрядных слагаемых;

6) сравнивать числа, то есть определять, какое число больше или меньше другого, равно ему;

7) записывать и читать числа первой сотни, понимать поместное значение цифр в числе;

8) знать, что такое дециметр и метр.

При выполнении разнообразных заданий из учебника, предложенных учителем, придуманных для соседа по парте, у детей отрабатываются основные понятия: следование чисел в натуральном ряду, десятичный состав числа, принцип поместного значения.

Изучение нумерации в пределах 100 для детей связано с преодолением ряда трудностей. В период изучения чисел в пределах 100 закладывается основа понимания сущности десятичной системы: из 10 простых счетных единиц образуется новая (составная) счетная единица (более крупная) – десяток. Залогом успешности обучения в данном случае служит наглядная база, постоянное сравнение чисел первого, второго десятков с числами 21 – 99, например: 2 и 20, 2 и 12, чисел 1, 10 и 100. Некоторые учащиеся испытывают затруднения в запоминании названий круглых десятков (например, сорок и девяносто), их последовательности и особенно в их счете в прямом и обратном порядке. По аналогии с образованием числительных второго концентра дети порой десятки называют «четырнадцать» (вместо «сорок»), «девять десять» (вместо «девяносто»), а при переходе к новому десятку считают «двадцать девять, двадцать десять, двадцать одиннадцать» и т. д. При изучении нумерации двузначных чисел учащихся больше всего затрудняет счет в обратном порядке, присчитывание и отсчитывание равными числовыми группами. При изучении письменной нумерации иногда дети долго не усваивают позиционное значение цифр в числе: вместо 35 записывают 53, при чтении чисел вначале произносят единицы, а потом десятки. Некоторые учащиеся, усвоив образование новых десятков, ещё долгое время испытывают затруднения в понимании образования числа 100. Овладев устной нумерацией, некоторые учащиеся не могут овладеть письменной нумерацией. Некоторые, наоборот, правильно записывают числовой ряд, а при устном пересчете допускают ошибки.

С целью систематизации знаний в учебник включены задания такого характера.

Расскажите о числе всё, что знаете.

Например, число 33 содержит три десятка и три единицы или состоит из трёх единиц второго разряда и трёх единиц первого разряда; $33 = 30 + 3$.

Натуральное следование числа 33 – перед 34 и после 32.

Двузначное число: в записи цифра 3 использована два раза.

Итак, тема нумерации в пределах 100 рассматривалась в такой последовательности: повторение нумерации в пределах 10 и 20; изучение нумерации круглых десятков; изучение нумерации чисел от 21 до 99 (сначала устной, затем письменной). Далее переходим к методическим особенностям изучения нумерации трехзначных чисел, придерживаясь такой же, как и для двузначных чисел, последовательности изложения темы.

Методика изучения нумерации в пределах тысячи

Знакомство с трехзначными числами по традиционным учебникам начинается в 3-м классе. Все те знания, которые были приобретены детьми ранее при изучении чисел в пределах 10, а затем в пределах 100, должны быть распространены на расширенную область чисел (на числа трехзначные). Устная и письменная нумерация трехзначных чисел далее служит основой для усвоения нумерации многозначных чисел.

Задачи обучения следующие:

1) познакомить учащихся с новой счетной единицей – сотней;

2) разъяснить соотношение разрядных единиц в числе;

3) закрепить принцип поместного, или позиционного, построения системы счисления;

4) сформировать навык чтения и записи трехзначных чисел.

Каждая из этих задач заслуживает внимания: необходимы тщательный отбор учебных заданий, использование наглядных пособий, проверка правильности произношения и прочтения чисел, продуманная структура каждого урока, включающая в себя практико-предметную деятельность учеников. В своей совокупности они нацелены на успешное усвоение темы.

Обучение нумерации трехзначных чисел, так же как и обучение нумерации двузначных чисел, происходит поэтапно: подготовительный этап, устная нумерация, письменная нумерация, систематизация знаний по теме.

Учебные задания преследуют цель научить детей определять натуральный состав числа, понимать принцип поместного значения цифр, называть и записывать ответы на вопросы про десятичный состав числа.

Подготовительная работа начинается задолго до перехода к концентру «тысяча». Усвоение нумерации трехзначных чисел в значительной мере опирается на принципы образования двузначных чисел, поэтому необходимо повторить нумерацию двузначных чисел. Детям предлагают задания следующего содержания:

1) соотношение разрядных единиц;

Сколько десятков в сотне?
Во сколько раз десяток больше единицы?
На сколько десяток меньше, чем сотня?

2) десятичный состав двузначных чисел;

Какое число состоит из пяти десятков и семи единиц?

Какое число состоит из шести единиц второго разряда, трех единиц первого разряда?

Сколько единиц каждого разряда в числах 49; 87; 78; 94?

3) натуральная последовательность в пределах 100;

Присчитайте по одному, начиная с любого числа.
Отсчитайте по одному, начиная с любого числа.
Присчитайте группами (по три).
Отсчитайте группами (по три).

4) принцип поместного значения чисел.

Назовите и запишите число, в котором два десятка и шесть единиц.

Назовите и запишите число, содержащее три единицы первого разряда и три единицы второго разряда. Дайте названия разрядным единицам.

Необходимо психологически подготовить детей к изучению новой темы, то есть создать интерес к большим числам.

Перечисленные задания и упражнения помогают учащимся осознать, что существуют числа больше 100, их образование и названия имеют сходство с теми числами, которые уже известны.

На втором этапе дети знакомятся с ***устной нумерацией*** трехзначных чисел (3-й класс 2-я часть). Работа начинается с формирования у детей понятия о сотне как новой счетной единице. Для этого нужно использовать наглядность, но палочки применять уже неудобно. Заменяем их на полоски и квадраты: отсчитываем 10 полосок, выкладываем их на партах рядом друг с другом, заменяем полоски большим квадратом (сотней). Так идет работа над счетом. Сотни можно складывать и вычитать.

Покажите с помощью счетных палочек или полосок, сколько будет сотен, если сложить две сотни и три сотни.

Отсчитайте семь сотен, уберите три сотни. Сколько сотен останется?

Что больше – пять сотен или две сотни?

Благодаря наглядности дети устанавливают соотношения:

10 единиц = 1 десяток

10 десятков = 1 сотня

10 сотен = 1 тысяча

В процессе изучения нумерации дети должны усвоить десятичный состав трехзначных чисел: понять, как эти числа образуются в результате счета сотен, десятков, единиц. Этой цели служит упражнение на образование чисел из разрядных составляющих.

Выложите на парте в одну линию, а затем изобразите в тетради три квадрата, пять полосок, пять квадратиков. Наблюдаем число 355. А какое число показано двумя квадратами и тремя квадратиками? Это число 203.

Опираясь на наглядное пособие, дети учатся устанавливать общее количество единиц и общее количество десятков, содержащихся в данном числе.

Составьте число 357. Сколько в нем единиц в разряде десятков? А всего в этом числе сколько десятков? Сколько в этом числе единиц в разряде единиц? Из скольких единиц составлено данное число? (ответ: 5, 35; 7, 357).

Для закрепления правильного представления о натуральной последовательности чисел за пределами сотни необходимо с первого урока включать упражнения на счет предметов или присчитывание по одному.

В процессе изучения устной нумерации ведется подготовка к письменной нумерации. С этой целью повторяется письменная нумерация двузначных чисел. Дети приходят к выводу о том, что единицы пишутся на первом месте, считая справа налево, а десятки – на втором. Нуль обозначает отсутствие единиц данного разряда.

сотни	десятки	единицы
1	6	5
3	6	0
3	0	5

сотни	десятки	единицы
⁎⁎⁎	⁎⁎	⁎
4	2	2

Далее переходят к ***письменной нумерации***. На первых порах дети используют таблицы разрядов. Они записывают под диктовку числа, которые называет учитель.

Для того чтобы они осознали позиционный принцип записи числа в таблице разрядов, количество единиц каждого разряда следует обозначать при помощи одинаковых значков.

Работая с такой таблицей, дети узнают, что сотни – это единицы третьего разряда.

Позиционный принцип для трехзначных чисел детям помогают осознать следующие задания.

Что обозначает каждая цифра в записи этих чисел?

Что обозначает цифра 4 в записи каждого числа: 473, 49, 444?

Сколько всего цифр? Сколько различных из них используется при записи числа 35, числа 33?

Используя цифры 2, 3, 4, запишите шесть трехзначных чисел.

Используя цифры 7 и 8, запишите все однозначные, двузначные и трехзначные числа.

Особое внимание следует уделить числам, в записи которых имеются нули. С этой целью предлагаются следующие задания.

Запишите числа и установите, чем они похожи, чем различаются.

Сравните числа, вставьте пропущенный знак <, >, =.

Вставьте пропущенные цифры так, чтобы записи были верные.

Используя цифры 1, 0, 2, запишите четыре трехзначных числа.

Особенно много ошибок встречается при записи чисел с отсутствующими единицами какого-либо разряда: вместо 805 и 850 дети могут записать 85. Чтение таких чисел зачастую вызывает затруднения. Во избежание ошибок предлагается работа с карточками. На карточках разрядные числа (под разрядным числом понимаем число, состоящее из единиц одного разряда; 1, 2, 3, …, 10, 20, 30, …, 100, 200, 300, …, 900). С помощью карточек дети должны представить любое трёхзначное число в виде суммы разрядных слагаемых (например, число $562 = 500 + 60 + 2$), замечая при этом в некоторых числах отсутствие единиц каких-либо разрядов (например, число 340: его разрядные слагаемые 300 и 40, единицы первого разряда отсутствуют; число 304 в виде суммы разрядных слагаемых записывается так: $304 = 300 + 4$, единиц второго разряда нет).

Методика изучения многозначных чисел

Предметные результаты обучения нумерации многозначных чисел следующие:

– сформированное понятие о новой счетной единице – тысяче – как единице второго класса;

– чтение и запись многозначных чисел с опорой на понятие класса;

– обобщенные знания детей о нумерации целых неотрицательных чисел.

Методика работы включает в себя подготовительный, основной и заключительный этапы.

На ***подготовительном этапе*** необходимо актуализировать знания детей по основным вопросам нумерации. Необходимо повторить известные соотношения разрядных единиц: десять единиц какого-либо разряда составляют одну единицу более старшего разряда. Учащимся могут быть предложены следующие задания:

– на повторение десятичного состава трехзначных чисел;

Какое число состоит из семи сотен и пяти десятков; из двух единиц третьего разряда и двух единиц первого разряда? Сколько единиц каждого разряда в числе 995? Сколько всего единиц? Сколько всего десятков, сотен? Замените числа 380, 308, 388 суммой разрядных слагаемых.

– закрепление навыка счета натуральной последовательности чисел равными частями: присчитыванием и отсчитыванием по одному, 10, 20, 50, 100, начиная с любого числа;

Назовите число, следующее при счете за числом 399; число, предшествующее числу 700, соседей некоторого числа; число, окруженное данными числами, и т. д.

– понимание особенностей записи трехзначных чисел: как ученик представляет поместное значение цифр числа;

Рассмотрим число 909. Сколько в нем цифр? Три. Сколько в нем различных цифр? Две. Запишите этими цифрами другое число. Что обозначают нули в числах 990, 909? Используя цифру 8, запишите трехзначное число 888. Что обозначает цифра 8?

– выполнение практических упражнений с наглядными пособиями. В данном случае наиболее подходящее средство – счеты. На них удобно показать условное обозначение и принцип поместного значения цифр. Работая со счетами, дети откладывают самые разнообразные числа.

Как на счетах можно получить тысячу? Начиная с 995, присчитываем по одному до 999. Откладываем на счетах. Следующее за 999 число открывает отсчет тысячами. Тысячу принимаем за простую единицу.

Это задание со счетами может быть переходным к ***основному этапу*** знакомства с многозначными числами. Опираясь на счет тысяч, показывают образование новых разрядных единиц (единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч, миллион). На счетах удобно продемонстрировать, что 10 единиц тысяч – это один десяток тысяч, 10 десятков тысяч – одна сотня тысяч, 10 сотен тысяч – один миллион.

Далее дети устно считают до одного миллиона новыми счетными единицами: десятками тысяч и сотнями тысяч, знакомятся с еще одной разрядной единицей – единицей миллионов.

На основном этапе дети работают с нумерационной таблицей.

Второй класс – тысячи			Первый класс – единицы		
сотни	десятки	единицы	сотни	десятки	единицы
т ы с я ч					

По таблице учатся и запоминают, что единицы, десятки, сотни образуют первый класс – класс единиц, а единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч образуют второй класс – класс тысяч. Сравнивая классы, дети определяют: чем они похожи, чем различаются.

Сходства

В каждом классе по три разряда.

Единица каждого разряда в 10 раз больше предыдущей единицы.

Различия

В первом классе считают и группируют единицы, а во втором классе – тысячи.

Далее идет работа с круглыми тысячами (5000, 78 000, 146 000) как числами, не имеющими единиц первого класса. Дети выполняют задание: записывают в тетради и откладывают на счетах числа 2000, 92 000, 692 000, 690 000, 600 000. Рассматривая круглые тысячи, важно подчеркнуть, что эти числа обозначаются и читаются, как числа первого класса, только отличаются своей величиной, поэтому разрядные единицы имеют другие места в таблице и на счетах.

Потом приступают к изучению многозначных чисел, состоящих из единиц первого и второго классов. Записывают круглую тысячу – число 615 000, а дальше учитель на нули первого класса ставит карточки с цифрами 3, 5, 4 и предлагает прочитать число 615 354. Потом рассматривают число 615 004, рассуждают и проговаривают, что́ изменилось в записи числа, как оно изменилось: стало меньше или больше.

Во избежание трудностей и ошибок в работе с многозначными числами полезно заранее предусмотреть следующие задания.

Установите десятичный состав числа 600 040.
Запишите под диктовку число 157 001.
Определите количество цифр в числе 362 008 и числе 362 080.
Сравните числа 70 004 ∗ 700 004, 8003 ∗ 8030.

Обобщая знания о натуральном ряде чисел, необходимо познакомить детей с бесконечностью: 1, 2, 3, …, 9, 10, ..., 56, …, 99, 100, …, 999, 1000, …, 9999, …

На ***заключительном этапе*** приступают к изучению нумерации чисел в пределах миллиона, рассматривая любое многозначное число как сумму разрядных слагаемых. Здесь же проводится анализ многозначных чисел по десятичному составу: дети определяют, называют и записывают классы и разряды данного числа, а также решают обратную задачу – составляют числа по данным классам и разрядам.

Рассмотрением многозначных чисел заканчивается начальный курс математики, поэтому возникает необходимость обобщить знания учащихся по нумерации целых неотрицательных чисел. Для этого предлагается схема разбора числа. Ниже представлен такой алгоритм и образец разбора числа по данному алгоритму.

Схема разбора числа

1. Прочитайте/запишите число.
2. Назовите число единиц каждого разряда и каждого класса.
3. Назовите общее число единиц каждого разряда.
4. Замените число суммой разрядных слагаемых.
5. Назовите число, предшествующее при счете данному и следующее за данным.
6. Назовите наименьшее и наибольшее числа, которые имеют столько же разрядов, сколько и данное.
7. Сколько всего цифр? Сколько различных?
8. Используя все цифры, запишите наибольшие и наименьшие числа.

Например, число 900 900.

1. Девятьсот тысяч девятьсот, 900 900.
2. Число единиц первого разряда – 0; второго разряда – 0; третьего разряда – 9; четвертого разряда – 0; пятого разряда – 0; шестого разряда – 9.

Число единиц первого класса – 900; число единиц второго класса – 900.

3. Общее число единиц каждого разряда: единиц первого разряда – 900 900; единиц второго разряда (или количество десятков в исходном числе) – 90 090; единиц третьего разряда (или количество сотен в ис-

ходном числе) – 9009; единиц четвертого разряда (или количество единиц тысяч в исходном числе) – 900; единиц пятого разряда (или количество десятков тысяч в исходном числе) – 90; единиц шестого разряда (или количество сотен тысяч в исходном числе) – 9.

4. Сумма разрядных слагаемых имеет вид: 900 000 + 900 = 900 900.

5. Число, предшествующее при счете данному, – 900 899; число, следующее при счете за данным, – 900 901.

6. Наименьшее и наибольшее числа, которые имеют столько же разрядов, сколько и данное, соответственно 100 000; 999 999.

7. В числе всего шесть цифр; из них две различные.

8. Из цифр данного числа можно составить наибольшее число – 990 000 и наименьшее число – 900 009.

2.2. Методика обучения нумерации в системе развивающего обучения

Особенность изучения нумерации чисел при данном подходе – первоначальное усвоение последовательности числительных, необходимой для счета предметов. Затем учащиеся овладевают операцией счета. Это происходит путем установления взаимно-однозначного соответствия между предметом и числительным. Заменяя числительные знаками (в произвольном порядке), обучающиеся знакомятся с цифрами и учатся красиво писать их. Начинают с цифры 1, затем следуют цифры 7, 4, 6, 5, 9, 3, 2, 8, 0.

Отличительная черта раскрытия темы «Нумерация» по программе Н. Б. Истоминой – это изучение не по концентрам, а по темам. Выделяются темы: «Однозначные числа», «Двузначные числа», «Трехзначные числа», «Четырехзначные числа», «Пятизначные и шестизначные числа», в процессе изучения которых у учащихся формируются сознательные навыки чтения и записи чисел. Выделение тем, названия которых сориентированы на количество знаков в числе, способствует пониманию детьми различий между числом и цифрой.

Итак, в начальной математике по системе развивающего обучения устная и письменная нумерация рассматривается одновременно, наряду с этим происходит изучение действий сложения и вычитания. Применяются наглядные пособия: треугольниками малыми моделируют десятки, треугольниками большими – сотни, кружки – единицы.

Методика изучения однозначных чисел

При ознакомлении с однозначными числами выделяют следующие этапы:

– подготовительный этап (цель – подготовить детей к знакомству с понятиями «число» и «цифра»);

– этап знакомства детей с понятиями «число» и «цифра» и их различиями;

– этап обучения письму цифр;

– этап знакомства с натуральным рядом чисел: отрезок натурального ряда от 1 до 9;

– этап усвоения принципа построения натурального ряда чисел.

На подготовительном этапе дети выполняют специальные задания, связанные:

– с ознакомлением с признаками предметов (цвет, форма, размер);

– написанием элементов цифр при помощи рисования бордюров;

– уточнением пространственных представлений;

– формированием отношений «больше», «меньше», «столько же».

Например, среди заданий встречаются такие.

Сравните предметы на картинках (по разным признакам).

Определите, какой из предметов лишний.

Продолжите узор, в котором используются наклонные линии и точки, ломаная линия, геометрические фигуры (квадраты, треугольники, круги).

Охарактеризуйте, по каким признакам меняются фигуры в ряду.

Хватит ли белкам орехов, если каждой дать: а) по одному; б) два; в) три ореха?

В преддверии знакомства с числом и цифрой нужно упражняться в сопоставлении элементов двух множеств.

На картинке слева пять свечей, а справа пять кружочков, или слева – восемь косточек, справа – восемь щенков. По какому признаку подобраны картинки слева?

Основная цель – научить детей устанавливать взаимно-однозначные соответствия между предметами двух совокупностей. Это соответствие устанавливается разными способами:

– наложением (например, на каждый квадрат положите треугольник);

– приложением;

– образованием пар (каждая свеча имеет свою подставку-кружочек, каждая косточка принадлежит определенному щенку).

Используя эти способы взаимно-однозначного соответствия, дети учатся вычленять отдельные элементы множества и, значит, готовятся к сознательному овладению операцией счета.

В учебнике Н. Б. Истоминой для уточнения порядка числительных при счете используют, например, следующее задание.

Посчитайте предметы на картинке. Называйте номера предметов при счете.

Таким образом, операция счета сводится к нумерации данных объектов в определенной последовательности, то есть речь идет об установлении взаимно-однозначного соответствия между каждым объектом данной совокупности и числительными, которые называются в определенном порядке. После такой работы дети переходят к знакомству с символическим обозначением каждого числа.

На следующем этапе вводятся термины «число» и «цифра». В качестве наглядного пособия используют модель калькулятора и карточки с числовыми фигурами. Карточка с определенным количеством кружков сопоставляется кнопке калькулятора с цифрой, соответствующей количеству кружков на карточке. От каждой числовой фигуры проводится линия к определенной цифре. Учитель подводит детей к пониманию того, что с помощью специального знака, который называют цифрой, можно обозначить число (количество) кругов. Далее вводится определение. *Цифра* – это знак для обозначения числа, полученного в результате счета предметов.

Для того чтобы дети осознали смысл взаимосвязи между числом и цифрой, в учебнике предусмотрены специальные задания. Среди них такие.

Посмотрите на картинку с головными уборами и выберите цифру, которой вы запишете: а) число кепок; б) число синих головных уборов.

Чтобы дети различали эти термины, предлагается использовать методический прием «картинка – цифра – общее – читается».

⁎⁎⁎ ↔

□□□ ↔ 3 ↔ $\boxed{ooo}$ ↔ три

ООО ↔

Следующий этап – письмо цифр. Письмо цифр распределяется во времени и включается в темы «Точка», «Прямая и кривая линии», «Длина предмета. Отрезок». При обучении письму цифр в учебнике не ориентируются на порядок (последовательность) чисел в натуральном ряду. Первоклассники учатся письму цифр в таком порядке: 1, 7, 4, 6, 5, 9, 3, 2, 8, 0.

После того как дети научатся писать все цифры (1 – 9), переходят к знакомству с натуральным рядом чисел. Дети считают игрушки, которые расположены на наборном полотне, записывают числа, которые получаются, то есть 1, 2, 3, … , 9. Учитель подводит детей к пониманию того, что появление каждого нового числа связано с добавлением одного нового предмета. В результате такой работы детей подводят к правилу, по которому записывается данный ряд чисел. Выясняется, как же получается каждое следующее число (добавлением единицы). Далее учитель делает вывод: в результате получается ряд чисел, с помощью которого можно считать предметы (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Учитель обращает внимание, что в этом ряду числа, записанные цифрами, располагаются в определенной последовательности. Так дети усваивают *принцип построения натурального ряда чисел и его взаимосвязь со счетом предметов*:

– каждое следующее число больше предыдущего на один;

– каждое предыдущее число меньше этого на один.

Учеников подводят к пониманию того, какой ряд чисел можно использовать для счета предметов, а какой – нет.

Учащимся предлагают следующие задания:

1) на действия с предметами;

2) сравнение чисел ($<$; $>$; $=$) с использованием разных моделей: предметных, графических, символьных. Детей знакомят со знаками $<$, $>$ (вместо записи слов «меньше», «больше»). Записи с такими знаками называют неравенствами. Основа *предметных моделей* – установление взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств.

На картинках изображено разное количество овощей, требуется сравнить количество предметов на картинках и записать неравенства: $\square > \square$, $\square < \square$.

В качестве *графической модели* используется числовой луч, на котором отмечаются точки, соответствующие натуральному ряду чисел. Работая с числовым лучом, дети выполняют задания на устное сравнение «больше» или «меньше».

Методика изучения двузначных чисел

Изучение распределено во времени и нацелено:

– на осознание учащимися принципа записи чисел в десятичной системе счисления;

– формирование умений складывать, вычитать числа в пределах 100. В основе изучения двузначных чисел лежат:

а) представление о соотношении предметных и знаковых моделей;

б) знание разрядного состава числа;

в) табличные навыки сложения и вычитания однозначных чисел.

При изучении нумерации двузначных чисел на подготовительном этапе изучают понятие «десяток» (считать предметы можно не только по одному, но и десятками). Специальные задания подводят детей к называнию любых двузначных чисел с использованием понятий «десятки» и «единицы».

Не выделяется устная и письменная нумерация.

Внимание акцентируется на разрядном составе двузначного числа и значении каждой цифры в его записи.

При работе с двузначными числами учащиеся выполняют сравнение.

Для изучения двузначных чисел используют наглядные пособия: треугольник – десятки, кружки – единицы. На первых порах дети работают с этими моделями и устанавливают соответствие между ними и символами записанных чисел.

Основной принцип записи двузначных чисел на примере модели помогает детям осознать основные понятия: 1) десятичный состав; 2) принцип поместного значения.

Учащихся просят записать цифрами числа, которые соответствуют рисункам. На рисунках могут быть изображены: а) пять треугольников и три кружка (дети записывают число 53); б) только пять треугольников (это число 50); в) пять треугольников и четыре кружка (дети записывают число 54); г) пять треугольников и шесть кружков (число 56).

Проводится следующая беседа.

Сравните рисунки и скажите, чем они похожи и чем различаются (одинаковое количество треугольников, то есть десятков; разное количество кружков, то есть единиц). Сходство и различие рисунков отражены и в записи этих чисел. Цифры, обозначающие единицы, – разные, а цифры, обозначающие десятки, – одинаковые. Для записи числа 55 используется одна и та же цифра, обозначающая количество десятков и количество единиц.

Далее выполняются упражнения на запись состава числа по разрядным слагаемым. Любое двузначное число состоит из двух разрядов – единицы и десятки.

Запишите числа 27, 91, 36 в виде суммы разрядных слагаемых: $27 = 20 + 7$; $91 = 90 + 1$, $36 = 30 + 6$. Представьте каждое число в виде суммы разрядных слагаемых и сравните выражения: 1) 71 и 79; 2) 56 и 52; 3) 64 и 68.

При изучении двузначных чисел продолжается работа над усвоением последовательности чисел в натуральном ряду.

Наблюдайте, что произойдет, если числа 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 увеличить на один, запишите верные равенства. Уменьшите числа 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 на один и запишите верные равенства. Напишите равенство, соответствующее рисунку. Разгадайте правило, по которому записан ряд чисел, и продолжите его: 1) 20, 21, 31, 32, 42, …; 2) 13, 15, 25, 27, 37, … .

Основные способы, которые позволяют учащимся представить структуру двузначных чисел, – анализ и сравнение наглядных изображений чисел (моделей) и соотнесение их с символической записью. Так, дети рассуждают, сколько можно добавлять разрядных единиц и к какой цифре двузначного числа, так чтобы другая цифра не менялась.

Встречаются комбинаторные задачи.

Запишите шесть двузначных чисел, используя цифры 4, 5, 1. Сколько двузначных чисел можно записать из цифр 7, 0, 8?

Методика изучения трехзначных чисел

Трехзначные числа вводятся во 2-м классе (часть 2) в рамках сравнения с двузначными числами. В качестве подготовительного этапа актуализируются знания учащихся с целью повторения:

– натурального следования;

– принципа поместного значения;

– десятичного состава числа.

Алгоритм изучения трехзначных чисел тот же, что и при изучении двузначных чисел. Специальные упражнения включают в себя работу с моделью: теперь это большой треугольник, внутри которого десять малых, каждый малый треугольник содержит десять кружков. Рядом с моделью в рамке определение: в трехзначном числе три разряда – единицы, десятки, сотни.

При работе с трехзначными числами широко используется калькулятор: выполняются упражнения, дети наблюдают изменения (что произойдет, если к трехзначному числу 523 добавлять одну сотню, две сотни и так далее; что будет, если к тому же трехзначному числу добавлять один десяток, два десятка, три десятка и так далее; а если добавлять только единицы: одну, две, три и т. д.), делают выводы. Работа с калькулятором способствует усвоению разрядного состава трехзначных чисел, дети понимают, что считать сотни можно так же, как десятки и единицы.

Выполняя задания с трехзначными числами, разность которых равна 10, дети наблюдают соотношение между разрядами десятков.

Запишите все трехзначные числа, у которых в разряде единиц стоит цифра 8, а в разряде сотен – цифра 1.

Запишите в порядке возрастания и скажите, чему равна разность двух соседних чисел: 108, 128, 118, 138, 158, 148, 178, 168, 188, 198.

Определите лишнее число в ряду: 542, 813, 208, 375, 481, 299.

Комбинаторные задачи следующие.

Используя цифры 4 и 7, запишите все трехзначные числа (444, 447, 474, 477, 747, 744, 774, 777).

Задания учебника подобраны так, чтобы показать детям, что при изучении трехзначных чисел используются уже усвоенные математические понятия из области двузначных чисел (число, цифра, принцип поместного значения).

По какому признаку можно разбить данные числа на две группы: 581, 685, 584, 681, 589, 686, 582? Каждую группу дополните числами.

Задание на натуральное следование такое.

Запишите числа в порядке убывания/возрастания: а) 499, 600, 500, 599, 399, 609; б) 199, 300, 399, 200, 400, 599.

Методика изучения четырех-, пяти-, шестизначных чисел

Изучаются в 3-м классе. Для формирования умений читать и записывать многозначные числа детям предлагаются следующие задания:

– на выявление признаков сходств и различий трех- и четырехзначных чисел;

– запись четырехзначных чисел определенными цифрами.

Даны цифры 2 и 4; запишите восемь четырехзначных чисел с этими цифрами (2222, 4444, 2244, 4422, 2424, 4242, 4224, 2442). Получится ли составить также восемь четырехзначных чисел из цифр 5, 0, 7? Придумайте алгоритм записи четырехзначных чисел, которые будут содержать цифры 9, 4, 3, 0.

Далее при изучении темы идут задания: а) на сравнение чисел;

Восстановите цифры в окошках, чтобы получилась верная запись $(3025 > 30\square 5,\ 7\square 17 < 7417)$.

б) классификацию;

По какому признаку можно разбить числа на две группы: 3581, 4685, 3584, 4681, 3589, 4686, 3582?

в) выявление закономерностей.

Определите, по какому правилу составлен каждый ряд чисел, и продолжите ряд по тому же правилу: а) 3004, 3008, 3012, 3016, …; б) 1002, 2004, 3006, 4008, 5010, … .

При выполнении заданий по нумерации четырехзначных чисел формируются понятия «натуральное следование числа в числовом ряду», «десятичный состав числа», «принцип поместного значения». Кроме того, специальные задания способствуют формированию умения читать и записывать четырехзначные числа.

Аналогичные перечисленным выше будут и задания при рассмотрении пятизначных и шестизначных чисел. Их изучают после четырехзначных чисел в 3-м классе. Работа начинается с актуализации знаний по нумерации чисел. Далее учатся записывать пятизначные числа, формируется умение записи многозначного числа. Дети знакомятся с понятием «класс». Отрабатываются умения выполнять задания на десятичный состав числа, натуральное следование чисел, принцип поместного значения цифр, а также на классификацию.

Задания для контрольной работы

1. Запишите все цифры.
2. Запишите самое маленькое число из всех известных в множестве натуральных чисел, в множестве целых неотрицательных чисел.
3. Запишите самое большое известное число.
4. Запишите наименьшее трехзначное число.
5. Запишите наибольшее двузначное число.
6. Сколько цифр используется для записи числа 317 213? В этом числе сколько единиц? Сколько десятков? Сколько тысяч? Сколько единиц первого класса? Сколько единиц второго класса? Сколько единиц третьего класса? Сколько единиц первого разряда? Сколько единиц второго разряда? Сколько единиц пятого разряда? Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых.
7. Есть ли разница между числом и цифрой? Какая?

Рейтинг-контроль по теме
«Нумерация целых неотрицательных чисел»

Вариант I

1. Нумерация – это:

а) разрядный состав числа;

б) язык для наименования цифр, их записи и выполнения действий над ними;

в) множество целых неотрицательных чисел или множество натуральных чисел.

2. В позиционной системе счисления:

а) десять цифр;

б) один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа;

в) один и тот же знак не может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа;

г) выделяют разрядные единицы первого, второго, …, $n-1$-го разрядов;

д) всегда есть нуль.

3. Совокупность правил, которые позволяют с помощью 10 знаков записать любые числа, определяется:

а) как множество особых знаков для первых 10 чисел: 0, 1, 2, …, 9;

б) свод законов арифметических действий (сложения и умножения);

в) письменная нумерация;

г) устная нумерация;

д) счет.

4. Первые представления детей о числе связаны:

а) с качественной характеристикой числа;

б) со счетом;

в) с количественной характеристикой числа, ребенок может отвечать на вопрос «сколько?», не владея счетом.

5. Учитель предложил ученикам задание: «Я буду надевать кольца на пирамидку, а вы выкладывайте карточки с цифрами, которые будут обозначать число колец». Данное задание формирует у учащихся:

а) представление о количественном числе;

б) представление о порядковом числе;

в) знание состава каждого числа;

г) представление о принципе получения каждого следующего числа натурального ряда.

6. Разнообразные задания по теме «Нумерация в пределах 100» позволяют детям отработать следующие основные понятия:

а) натуральное следование чисел;

б) счет чисел;

в) десятичный состав чисел;

г) принцип поместного значения.

7. В числе 382 531: 1) сколько единиц первого класса; 2) сколько единиц третьего разряда?

1)		2)	
а) 1	д) 8	а) 1	д) 8
б) 2	е) 31	б) 2	е) 31
в) 3	ж) 531	в) 3	ж) 531
г) 5	з) 82	г) 5	з) 82
	и) 382		и) 382

8. Запишите наименьшее трехзначное число.

9. Принцип поместного значения цифр удобно наглядно показывать с помощью:

а) абака;

б) фланелеграфа;

в) счет;

г) счетных палочек;

д) различных фигурок.

10. Детям дали задание: «По какому признаку можно разбить числа на две группы: 3581, 4685, 3584, 4681, 3589, 4686, 3582?» К какому виду заданий относится это упражнение:

а) выявление признаков сходств и различий трех- и четырехзначных чисел;

б) сравнение чисел;

в) запись четырехзначных чисел определенными цифрами;

г) классификация;

д) выявление закономерностей?

Вариант II

1. В представленном перечне укажите синоним к понятию нумерации:

а) множество натуральных чисел;

б) язык для записи цифр;

в) система счисления;

г) разрядный состав числа.

2. В десятичной системе счисления:

а) десять цифр;

б) десять единиц одного разряда составляют единицу следующего (высшего) разряда;

в) один и тот же знак не может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа;

г) выделяют разрядные единицы первого, второго, …, $n - 1$-го разрядов.

3. Совокупность правил, которые позволяют с помощью немногих слов составить названия для большого количества чисел, определяется:

а) как множество особых знаков для первых 10 чисел: 0, 1, 2, …, 9;

б) свод законов арифметических действий (сложения и умножения);

в) письменная нумерация;

г) устная нумерация;

д) счет.

4. Восстановите высказывание: «Операция счета сводится к установлению _________ соответствия между каждым объектом данной совокупности и __________, которые называются в определенном порядке».

а) взаимно-однозначного; множеством натуральных чисел;

б) взаимного; рядом натуральных чисел;

в) однозначного; рядом натуральных чисел;

г) определенного; рядом натуральных чисел.

5. Сколько этапов выделяют при изучении концентра «десяток»:

а) 2;

б) 3;

в) 4;

г) 5?

6. Письменная нумерация основана на десятичной группировке единиц при счете и применении принципа поместного значения цифр. Роль места в обозначении двузначного числа цифрами поясняется с помощью:

а) счетных палочек;

б) абака;

в) фланелеграфа;

г) кассы цифр и предметов.

7. В числе 382 531: 1) сколько единиц второго класса; 2) сколько единиц второго разряда?

1)		2)	
а) 1	д) 8	а) 1	д) 8
б) 2	е) 31	б) 2	е) 31
в) 3	ж) 531	в) 3	ж) 531
г) 5	з) 82	г) 5	з) 82
	и) 382		и) 382

8. Запишите наибольшее двузначное число.

9. При изучении темы «Нумерация» по различным учебно-методическим комплексам (М. И. Моро; Н. Б. Истомина) используются наглядные пособия:

а) одинаковые;

б) разные.

10. Детям дали задание: «По какому признаку можно разбить данные числа на две группы: 581, 685, 584, 681, 589, 686, 582?» К какому виду заданий относится это упражнение:

а) запись трехзначных чисел определенными цифрами;

б) сравнение чисел;

в) классификация;

г) выявление закономерностей;

д) выявление признаков сходств и различий трех- и четырехзначных чисел?

Глава 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Понятие величины в начальном курсе математики

Понятие «величина» применяется не только в математике, но и в других науках (физика, химия, биология). В школе это понятие используется не всегда корректно: синонимами считают такие понятия, как величина и количество. Смешивают термины «величина» и «значение величины». Это объясняется тем, что понятие величины не является чисто математическим.

В естественных науках под величиной понимают определенные свойства физических тел.

Некоторые величины (длина, площадь, масса, время и др.) называют основными. Они изучаются в начальном курсе математики.

Конкретного определения величины в математике нет! Однако с помощью исходных свойств, которые характеризуют величину, строится теория величин. Хотя представление о той или иной величине имеет свои особенности, тем не менее в методике изучения величин выделяются их общие черты.

Изучение величин включает в себя следующие этапы:

– подготовительный: уточняются имеющиеся у детей представления о данной величине (обращение к опыту ребенка);

– выполняется сравнение однородных величин (визуально, с помощью ощущений, наложением, приложением, с помощью мерок);

– происходит знакомство с первой единицей (единицами) измерения данной величины и измерительным прибором;

– формируются измерительные умения и навыки;

– выполняется сложение и вычитание однородных величин, выраженных в единицах одного наименования;

– происходит знакомство с новыми единицами величины и выполняется перевод однородных величин, выраженных единицами одних наименований, в другие и наоборот;

– выполняется сложение и вычитание величин, выраженных в единицах двух наименований;

– выполняется умножение и деление величины на число.

С целью формирования представлений о величинах на уроках проводятся различные практические работы, используются задания проблемного характера, демонстрационные и индивидуальные наглядные средства. При этом варьируются коллективные, индивидуальные и групповые формы работы на уроке.

Изучение величины «длина». Единицы измерения длины

Задачи учителя следующие:

1) познакомить детей с таким свойством предметов, как линейная протяженность;

2) уточнить пространственные представления детей;

3) познакомить их с единицами измерения длины и соотношениями между этими единицами;

4) учить детей выполнять действия с величинами, выраженными в единицах длины.

Опираясь на опыт ребенка, учитель должен строить обучение так, чтобы ребенок среди предлагаемых предметов сумел выделить такие свойства, относительно которых можно ввести отношения «больше», «меньше»: если две полоски по длине не одинаковые, то одна длиннее другой. Дети доказывают это наложением. Учитель поясняет, что в этом случае говорят так: «Длина оранжевой полоски больше, чем длина черной полоски».

Основу деятельности ученика на этапе сравнения величин составляют практические действия, выполняемые не только учителем, но и детьми.

Важный шаг в изучении величин вообще – формирование у детей представлений об измерении. Чтобы дети осознали процесс измерения, необходимо на уроках использовать различные ситуации проблемного характера. Приведем примеры таких проблемных ситуаций.

Ситуация А. На доске прикрепляют полоски (или учитель рисует две полоски): одна – красная (длиной 60 см), а вторая – зеленая (80 см).

«Посмотрите на доску и сравните эти полоски. Длина какой полоски меньше, какой – больше? Докажите». Можно взять ручку и уложить в отрезок.

Учитель берет мерку: «По красной полоске уложилось три мерки, а по зеленой – четыре». Записывает: $3 < 4$.

«Давайте подтвердим наш результат».

Возьмем другую мерку: $6 < 8$.

«Теперь я хочу сама проверить». Учитель берет вторую мерку, укладывает в красную полоску, получается шесть мерок, первую мерку укладывает в зеленую полоску, получается четыре мерки ($6 > 4$). Дети приходят к выводу, что для сравнения длин полосок нужно пользоваться одной меркой.

Ситуация Б. Детей подводят к пониманию того, что числовое значение величины зависит от выбранной мерки. Этот вывод следует закрепить. Детям раздают полоски (одна на парту) и две разные мерки. Задание – измерить эту полоску. Дети на первом варианте используют красную мерку, на втором – зеленую мерку. Какие же получились результаты? (4 и 6) Почему измерили одну и ту же полоску, а результаты получились разные?

Ситуация В. Причина разных ответов – в использовании разных мерок при измерении одной и той же полоски.

Выдается листок клетчатой бумаги, на котором начерчена полоска. Трое учеников измеряли этот отрезок и получили следующие результаты: 12, 6, 4. Почему так получилось? Кто из детей прав?

Ученики брали за основу разные единицы измерения: длину одной клетки, длину двух клеток, длину трех клеток.

12 □   6 □□   4 □□□

Ситуация Г. Задание – измерить длину класса шагами.

Такая практическая деятельность подводит учеников к необходимости введения первой единицы длины.

Вводят единицу измерения «сантиметр». Дети обводят в тетради две клеточки и заштриховывают, записывают: 1 см.

Они укладывают модель сантиметра в отрезок и определяют, сколько сантиметров в отрезке.

Затем учащиеся знакомятся с измерительным прибором. На первых порах лучше использовать самодельную линейку (подготовить одинаковые фабричные линейки).

Дети выполняют разнообразные задания. Например, в учебниках М. И. Моро (1-й класс, 1-я часть [14]) измеряют карандаш, отрезки, сравнивают длины отрезков.

При знакомстве с новой единицей длины нужно использовать новую проблемную ситуацию и практическое задание.

Например, при знакомстве с дециметром создается проблемная ситуация.

На партах у учеников две полоски (20 и 30 см) и в качестве мерок – модель сантиметра и полоска (длиной 1 дм, но пока детям это не сообщается). Используя эти мерки, дети должны сравнить длины полосок.

Какой меркой было удобнее пользоваться для сравнения полосок? Второй меркой было пользоваться удобнее. Уложите в большую мерку маленькую. Получили 10 см.

Учитель поясняет: 1 дм = 10 см.

Величина «площадь». Единицы измерения площади

Понятие площади фигуры отображает тот факт, что каждая фигура занимает определенное место на плоскости, является частью плоскости и может «закрывать» или «накрывать» бо́льшую или меньшую часть плоскости.

Задачи учителя следующие:

1) сформировать у детей конкретные представления о площади фигуры и ее измерении;

2) разъяснить учащимся способ вычисления площади прямоугольника и сформировать умение применять этот способ для решения практических задач.

Измерить площадь – значит вычислить количество квадратных единиц данной фигуры. Заметим, что для измерения площади каждой из фигур учитель применяет разные способы и не говорит об общем способе получения площади.

Учитель обращает внимание на то, чтобы у учащихся формировались правильные представления о качественном различии таких понятий, как «площадь фигуры ограничена ломаной линией», «площадь прямоугольника», «площадь криволинейной фигуры»;

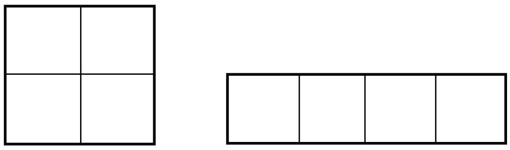
3) дать представление детям о конкретном смысле измерения площади. Начать следует с очень простых упражнений.

Учитель показывает две фигуры – квадрат и круг (сторона квадрата равна диаметру круга). Одну фигуру накладывает на другую, просит охарактеризовать взаимное положение этих фигур. Дети приходят к выводу, что площадь первой фигуры больше площади второй фигуры.

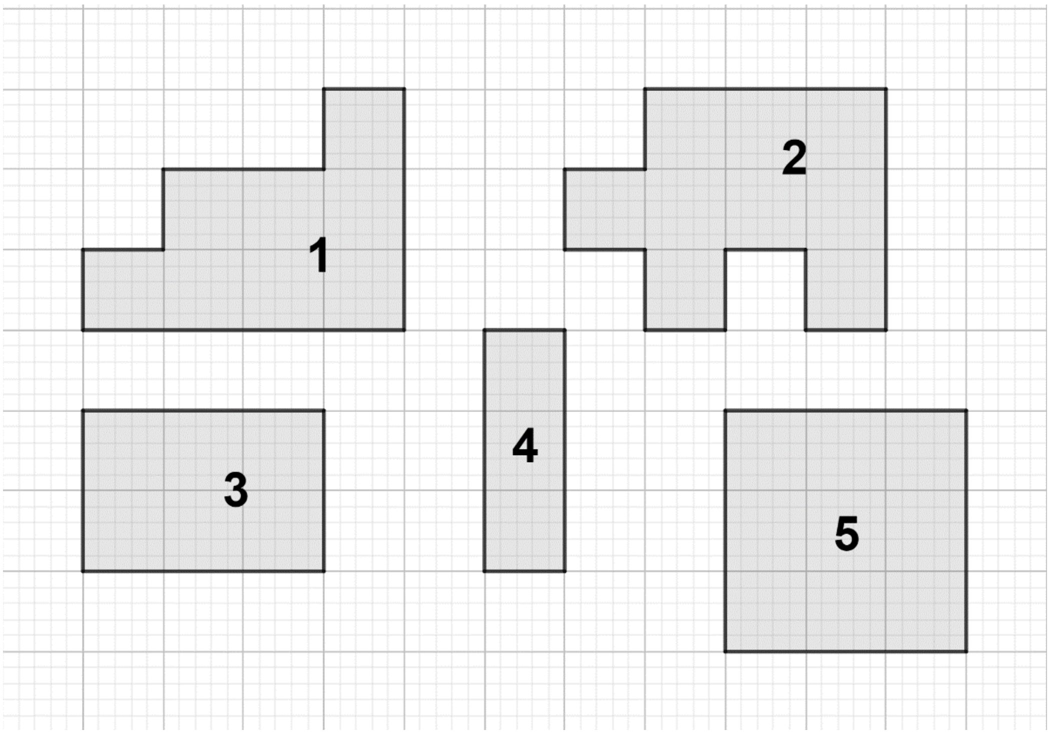
Проверяя, как дети усвоили новый термин, учитель показывает еще две фигуры и спрашивает, как выяснить, какая фигура больше.

Важно провести работу с раздаточным материалом. Каждому ученику учитель на парту кладет две фигуры и предлагает узнать, площадь какой фигуры больше, какой – меньше (все фигуры пронумерованы). При этом используется прием наложения.

Далее учитель демонстрирует фигуры, которые нельзя сравнить наложением. Их нужно разбить на клетки (или другие одинаковые мерки).



Следует провести отдельное занятие по разбиению фигур на клетки. С этой целью учитель раздает детям карточки, на клетчатой бумаге пронумерованы фигуры. Требуется узнать площади этих фигур и разложить их в порядке возрастания числового значения площади.



Эти задания подготавливают введение новой единицы площади – квадратного сантиметра. Дети обводят четыре клеточки, заштриховывают, учитель записывает: 1 см^2.

Фрагмент урока, на котором дети знакомятся с квадратными сантиметрами и учатся измерять площадь фигур с помощью этой единицы измерения, представлен ниже.

Цель – научить детей измерять площадь фигур:

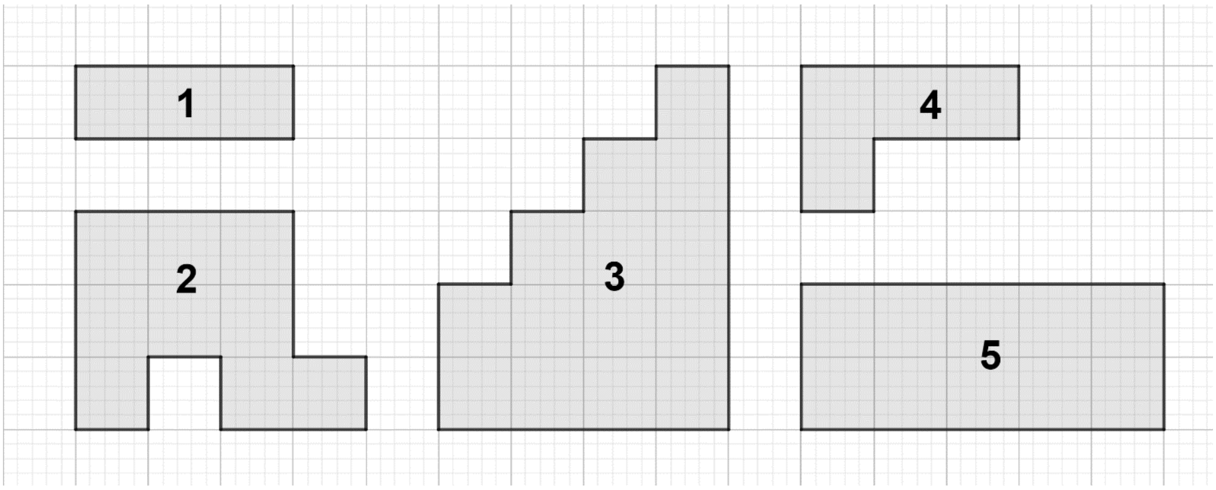
1) путем покрытия фигуры моделями квадратного сантиметра;

2) разбиения фигуры на квадратные сантиметры с помощью карандаша и линейки;

3) с помощью палетки (прозрачная пластинка).

Оборудование: приготовить палетку (квадратный сантиметр и квадратный дециметр), модели квадратного сантиметра (10 штук), карточки с фигурами на нелинованной бумаге.

У учеников модели квадратного сантиметра. С их помощью они находят площадь фигуры (укладывают на фигуре модели квадратного сантиметра).



Беседа следующая.

Сколько же квадратных сантиметров в фигуре *1*? 3 см^2.

В этом случае говорят, что площадь фигуры *1* равна 3 см^2.

Объясните, что обозначает «площадь фигуры *1* равна 3 см^2».

Это значит, что в фигуре *1* содержится 3 см^2, то есть в фигуре *1* поместились три модели квадратного сантиметра или, что то же самое, модель квадратного сантиметра в фигуре *1* поместилась три раза.

Найдите фигуру *2* и уложите на нее модели квадратного сантиметра. Сколько же квадратных сантиметров содержится в данной фигуре?

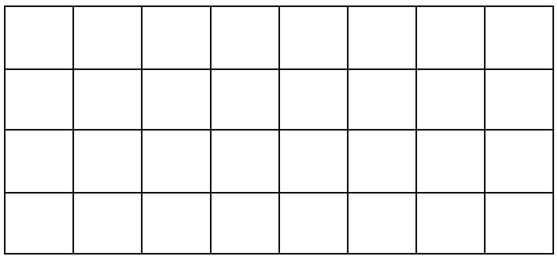
Найдите фигуру *3*. Разбейте ее на квадратные сантиметры с помощью карандаша и линейки. S = 14 см^2.

Какой прибор мы использовали для измерения длины? Линейку.

Для измерения площади можно использовать другой измерительный прибор – палетку. Для нахождения площади фигуры нужно наложить палетку так, чтобы стороны квадрата на палетке совпали со сторонами фигуры. Убедитесь теперь с помощью палетки, что площадь фигуры *3* равна 14 см^2. Определите площадь фигуры *4* с помощью палетки.

Обратимся к фигуре *5*. Заметим, что фигура состоит из полосок, а каждая полоска – из квадратов. Поэтому рационально подсчитать площадь фигуры *5*, отвечая на вопросы: сколько квадратов в полоске и сколько таких полосок.

Подводя итог, учитель выясняет, какими же способами можно вычислить площадь фигуры. После этого он подводит детей к рациональному способу вычисления площади прямоугольника.



Детям предлагается:

1) найти длину прямоугольника (8 см);

2) найти его ширину (4 см).

При помощи палетки учащиеся разбили фигуру на квадратные сантиметры. Пересчитали квадраты, нашли, что S = 32 см^2:

$8 \cdot 4 = 32$ см^2,

$4 \cdot 8 = 32$ см^2.

Сразу же проводится работа по предупреждению смешения понятий «площадь прямоугольника» и «периметр прямоугольника». Для этой цели дети выполняют следующие задания.

Начертите прямоугольник, длины сторон которого 3 и 5 см. Вычислите площадь и периметр этого прямоугольника. (Ответ: P = 16 см, S = 15 см^2)

Сумма длин всех сторон прямоугольника равна 24 см. Какими могут быть длина и ширина таких прямоугольников? Чему равны площади? (Ответ: например, $a = 10$ см, $b = 2$ см, $S = 20$ см^2, или $a = 8$ см, $b = 4$ см, $S = 32$ см^2, или $a = 7$ см, $b = 5$ см, $S = 35$ см^2)

Площадь прямоугольника равна 30 см^2. Каким может быть его периметр? (Ответ: например, 34, 26, 62 см.)

Учебной программой предусмотрен отдельный урок для знакомства с приближенным вычислением площади фигуры при помощи палетки.

1. Сначала подсчитываем число целых квадратных сантиметров.

2. Подсчитываем число нецелых квадратных сантиметров. Это число делим на два и затем к нему прибавляем число целых квадратных сантиметров.

Площадь прямоугольника 72 см^2. Чему равна его ширина, если его длина равна 9 см? Чему равен периметр? (Ответ: 8 см, 34 см)

Длина прямоугольника равна 8 см, ширина – в два раза меньше. Начертите этот прямоугольник и узнайте, каковы площадь и периметр. (Ответ: 32 см^2, 24 см)

Длины сторон одного прямоугольника 8 и 3 см, другого – 4 и 3 см. Во сколько раз площадь одного прямоугольника больше площади другого? На сколько площадь одного больше другого? У какого прямоугольника периметр больше и на сколько? (Ответ: в два раза, на 12 см^2, у первого периметр на 8 см больше)

Таким образом, при ознакомлении с площадью фигуры необходимо сразу же, как только введены квадратные сантиметры, использовать измерительный прибор – палетку. Это позволит подчеркнуть общность понятия площади для всех фигур независимо от формы. Дети должны правильно ответить на вопрос: «Что значит измерить площадь фигуры?»

Величина «масса». Единицы измерения массы

Понятие массы возникло в связи с тем, что все тела притягиваются к Земле, но по-разному – с различной силой. В связи с этим задачи изучения этой темы следующие:

– сформировать конкретные представления о массе тела;

– познакомить учащихся с единицами измерения массы и соотношением между ними;

– сформировать умение переводить массу, выраженную в единицах одних наименований, в единицы других наименований;

– сформировать умение выполнять арифметические действия с этой величиной.

Учитель выясняет, какие у учеников представления о массе. На уроке создается проблемная ситуация (имеются совершенно одинаковые по цвету, форме, материалу коробки, но в одну коробку что-то положено) и ученикам предлагается сравнить предметы.

У детей возникает потребность потрогать. Ребенок видит, что одна коробка тяжелее другой. Учитель вводит понятие массы. Слова «тяжелее» и «легче» связаны с таким свойством предметов, как масса. Вместо слова «легче» говорят «масса меньше»; вместо слова «тяжелее» – «масса больше».

Затем предлагают сравнить два предмета, одинаковых по форме, но немного различающихся по массе. Чтобы определить последнюю, нужно использовать весы.

С помощью кубиков вводят единицу массы: масса предмета равна двум белым кубикам, четырем зеленым кубикам, шести красным кубикам. Далее демонстрируются гири массой 1, 2, 3, 5 кг. По рисункам с весами рассматривается масса:

5 кг + 1 кг = 6 кг

6 кг – 3 кг = 3 кг

Далее рисунки сложнее: на одной чаше весов мишка и гиря массой 21 кг, на другой – две гири по 10 кг и одна гиря массой 1 кг.

Величина «время». Единицы времени

Задачи учителя следующие:

– познакомить учащихся с единицами времени и их соотношениями;

– научить определять время по часам;

– сформировать умения складывать и вычитать величины, выраженные в единицах времени.

В соответствии с программой на изучение этой темы отведено небольшое количество часов, которые распределены по классам небольшими порциями (2 – 4-й класс).

Время – это важнейшая величина, так как вся жизнь человека тесно связана со временем, то есть с умением измерять, распределять, ценить время.

Главная особенность – время течет непрерывно. Восприятие промежутков времени, а также сравнение событий по продолжительности очень затруднительны. Восприятие времени несовершенно (кажется, что оно течет то очень быстро, то очень медленно). Все зависит от того, чем заполнен этот промежуток времени.

Временны́е представления у детей развиваются медленно в процессе длительных наблюдений, накопления жизненного опыта, изучения других величин. Первые представления о времени дети получают еще в дошкольный период. Они наблюдают смену времен года. Дошкольники знакомятся с событиями в сказках, рассказах, других художественных произведениях. Но, несмотря на это, формирование временных представлений о последовательности событий затруднительно. Одна из типичных ошибок в восприятии последовательности событий – путаница понятий «вчера» и «завтра». Современные программы детского сада предусматривают формирование у детей 5 – 6-летнего возраста некоторых временных представлений:

– дни недели;
– месяцы;
– режим дня;
– смена дня и ночи.

В 1-м классе не предусмотрено знакомство с единицами времени, но учителю необходимо формировать временные представления в процессе учебной деятельности. В сентябре проводится беседа о режиме дня, и учитель сразу же выясняет, кто умеет определять время по часам. Уточняя временные промежутки, дети усваивают последовательность дней недели: «Какой сегодня день недели? Какой был вчера? Какой будет завтра? Какой будет послезавтра?». Дети запоминают последовательность месяцев. Каждый день дети и учитель говорят дату (день, месяц). Уточняются понятия «сегодня», «вчера», «завтра», «послезавтра». Дети учатся сравнивать некоторые временные промежутки (урок – перемена).

Целесообразно создать у детей представление об определенном промежутке времени.

Прошел сентябрь. Мы изучили все цифры от 0 до 9.

Прошло три месяца – сентябрь, октябрь, ноябрь. Мы выучили все буквы, научились читать и писать.

Закончилось первое полугодие: сентябрь – декабрь, наступил Новый год.

Уже в 1-м классе дети знакомятся с календарем природы, ведут ежедневно наблюдения, отмечают изменения погоды. С минутой дети неявно знакомятся в 1-м классе (прочитать вслух за 1 минуту).

Такая подготовка позволяет начать формирование у первоклассников целого ряда временных представлений.

Во 2-м классе дети на уроке знакомятся с часом и минутой, разными видами часов, учатся определять время по часам.

Необходимо к этим урокам заранее готовиться: продумать наглядность (циферблат) и организационные работы на уроке.

Чтобы сформировать конкретное представление о каждой единице времени, важно предусматривать специальные практические упражнения. Например, при знакомстве с минутой полезно выполнить следующие задания.

На доске выражения: табличный случай сложения и вычитания; не табличный случай сложения и вычитания; табличный случай умножения. Дети записывают в тетрадь только результаты в течение 1 минуты. Когда учитель скажет «стоп», дети подсчитывают, сколько вычислили в течение минуты.

Запишите в тетрадь красиво, по порядку все цифры, начиная с единицы, за 1 минуту.

Посчитайте с определенного места шаги.

Эффективно следующее задание. Учитель предлагает ученикам хлопнуть после того, как прошла минута.

При знакомстве с минутой полезно провести беседу на тему «Дорогая минута». Что можно сделать в течение минуты?

В 3-м классе вводятся единицы: год, месяц, неделя, понятия табеля, календаря.

На уроках дети учатся пользоваться календарем, часами и с их помощью решать задачи, связанные с вычислением продолжительности событий.

Три вида задач, связанных с продолжительностью событий, следующие.

1. Известны продолжительность события и начало, узнать конец. Например, фильм шел 2 ч 50 мин. Когда он закончится, если начался в 16:30?

Ответ: 19:20

2. Известно начало и конец события. Определить его продолжительность.

8:20 – начало, 9:50 – конец

9:50 – 8:20 = 1:30

3. Известен конец и продолжительность события. Узнать его начало.

Конец – 10:15, продолжительность – 20 мин.

Ответ: 9:55

В 4-м классе знания детей о единицах времени расширяются, уточняются и обобщаются. Дети знакомятся с веком, секундой (М. И. Моро). При знакомстве с секундой детям показывают секундомер, они наблюдают за движением секундной стрелки. Демонстрируют метроном. Составляется таблица единиц времени.

При формировании и обобщении временных представлений учитываются межпредметные связи, в частности связь с окружающим миром, так как на уроках окружающего мира изучается тема «Отчего происходит смена дня и ночи и времен года?». На этих уроках учащиеся знакомятся с научным определением суток.

Дети, используя фонарик и глобус, экспериментально убеждаются в смене дня и ночи. Если фонариком светить на неподвижный глобус, то одна сторона его освещается (это день), а другая остается в тени (это ночь). Земля вращается вокруг собственной оси, полный такой оборот совершается за сутки, следовательно, в течение суток происходит смена дня и ночи. Земля вращается и вокруг Солнца, этот оборот продолжается год (365 суток и 6 часов), в течение данного времени наблюдается смена времен года.

Связь уроков математики и окружающего мира позволяет усвоить таблицу единиц времени.

В конце 4-го года обучения дети усваивают сложение и вычитание величин, выраженных в единицах времени. Некоторые затруднения у учащихся вызывают понятия 12-часового и 24-часового счета времени в сутках. За начало суток берут двенадцать часов ночи – полночь (00:00). Если короткую стрелку часов передвигать по кругу от цифры 12 и до цифры 12, то прошла первая половина суток. С двенадцати часов дня начинается вторая половина суток.

Учитель сразу делает такое обобщение: как только стрелки начали движение после полуночи и большая стрелка прошла один круг, значит, время – один час ночи; один круг, совершенный большой стрелкой после полудня, показывает один час дня, или 13 часов. На вокзалах, в аэропортах используют 24-часовой формат времени.

Для закрепления учитель задает следующие вопросы.

Сколько часов будет по 24-часовому счету времени, если по 12-часовому счету два часа дня, одиннадцать часов ночи (поясните, как узнали)? К числу, обозначающему час, добавить 12.

Сколько часов будет по 12-часовому счету, если по 24-часовому счету 14 часов, 22 часа (поясните, как узнали)? Из числа, обозначающего час, вычесть 12.

При знакомстве с веком целесообразно выяснить с детьми, в каком веке произошло то или иное событие (по учебнику).

Таким образом, к концу 4-го класса дети должны научиться определять время суток по 12-часовому и 24-часовому счету; пользоваться моделью часов и табелем-календарем; знать таблицу соотношения единиц времени и конкретно представлять каждую единицу времени, не смешивая временной промежуток минуты и секунды, часа и суток и так далее; уметь выражать крупные единицы мелкими и наоборот; выполнять действия сложения, вычитания величин.

Действия с величинами

Изучение величин при различных подходах к обучению (программа М. И. Моро и программа Н. Б. Истоминой) выстроено по плану: знакомство с конкретной величиной и единицами ее измерения, обобщение знаний о соотношении единиц и величин, действия с величинами.

В учебниках М. И. Моро за 4-й класс [14] обобщаются единицы длины, площади, массы, времени, приводятся таблицы соотношений единиц времени, единиц массы.

Действия с величинами, выражающимися в единицах двух наименований, выполняются при изучении темы «Письменные приемы сложения, вычитания, умножения и деления».

Наибольшие затруднения при выполнении действий с величинами у учащихся возникают, когда величина выражается в единицах различных наименований. В этом случае одни единицы однородной величины переводятся в другие, например километры в метры, часы в секунды, килограммы в граммы и т. д. Предлагаются упражнения на измерение, сравнение, перевод одних единиц в другие.

Выразите:

в метрах	в часах	в минутах	в квадратных дециметрах
27 км 32 м	3 суток	1 ч 40 мин	8 м^2, 14 м^2, 2768 см^2
Ответ: 27 032 м	Ответ: 72 ч	Ответ: 100 мин	Ответ: 800 дм^2, 1400 дм^2, 27,68 дм^2

Формируя у детей представления о величине, во избежание указанных трудностей учитель должен обратить особое внимание на отбор практических упражнений по измерению конкретных величин, предусмотреть разнообразные задания, связанные с переводом одних единиц однородных величин в другие.

В учебниках за 4-й класс Н. Б. Истоминой [13] с целью обобщения знаний о соотношении единиц и величин, а также для выполнения действий с ними введена специальная тема – «Действия с величинами».

Дети сначала вспоминают единицы измерения величин: длина – сантиметры, миллиметры, километры, метры, дециметры; масса – килограммы, граммы, тонны, центнеры; площадь – квадратные сантиметры, метры, дециметры; время – минута, секунда, год, час; объем – литр, кубический дециметр.

Затем, осознавая, какими единицами нужно пользоваться при измерении каждой величины, выполняют следующие задания.

На какие группы можно разбить единицы величин: см, г, дм, т, ц, см^2, м^2?

Площадь	Масса	Длина	Дополните
см^2, м^2, дм^2	г, т, ц, кг	см, дм, мм, м, км	

Какая величина лишняя?

а) 3080 см; 5040 км; 6027 дм; 4078 кг; 18 009 м

б) 12 070 м; 54 704 км; 38 004 см^2; 4507 см; 2 дм

в) 12 м^2; 15 дм^2; 16 м; 27 см^2

г) 120 см; 12 дм; 1 м 2 дм; 1 м 20 см; 1 м 2 см

Углублению знаний детей способствуют дополнительные вопросы.

Запишите величины в порядке убывания (возрастания). Выразите каждую величину в единицах других наименований.

Ниже представлены задания, выполняя которые учащиеся отрабатывают умение соотносить единицы измерения с определенной величиной. Приводятся и такие упражнения, в которых надо выбрать признак сравнения.

Установите правила, по которым записываются величины в первом столбике, и составьте столбики по этому правилу для других величин.

6 000 000 мм	3 000 000 г
600 000 см	3000 кг
60 000 дм	30 ц
6 км	3 т
6000 м	

Какие величины можно сложить: м + дм, м + $м^2$?

Найдите закономерность и продолжите ряды величин.

1) 3 дм 3 см, 27 дм 9 см, 83 дм 7 см, 251 дм 7 см ...
2) 3 м 4 дм, 6 м 8 дм, 13 м 6 дм, 27 м 2 дм ...
3) 44 см, 2 м 20 см, 11 м, 55 м ...
4) 755 дм 1 см, 2265 дм 3 см ...
5) 54 м 4 дм, 108 м, 8 дм ...

Для каждой величины слева выберите равные справа.

<table>
<tr><td>5 см 2 мм
5 дм 2 см
5 м 2 дм</td><td>5200 мм
520 см
52 мм</td><td>520 мм
52 дм
52 см</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ответ: 5 см 2 мм = 52 мм, 5 дм 2 см = 52 см = 520 мм,
5 м 2 дм = 520 см = 5200 мм = 52 дм</td></tr>
<tr><td>Дополните до 5 т</td><td colspan="2">3 т 275 кг + 1725 кг
4 т 28 кг + 972 кг
4 т 998 кг + 2 кг
4 т 8 кг + 992 кг
3 т 788 кг + 1112 кг
1 т 980 кг + 3020 кг</td></tr>
</table>

По какому правилу записывают тройки величин.

	2700 кг	
3 т		3 ц

	270 см	
3 м		3 дм

	29 970 дм	
3 км		3 м

	?	
3 дм		3 см

	?	
3 ч		3 мин

	?	
3 ц		3 кг

Определите, по какому правилу составляется каждая строка таблицы. Пользуясь этим правилом, вставьте пропущенные значения величины.

7 кг	70 кг	7 ц	7 т	70 т
4 мм	4 см	… дм	… м	… м
… г	5 кг	… кг	… ц	… т
… мм	… см	… дм	900 м	9 км

Сравните величины.

6 м 3 с 362 с 2 сут 5 ч 2 ч
1 ч 12 м 82 м 18 с 1 м
20 м 1 ч 23 ч 1 сут
7 сут 180 ч 180 ч 1 сут 12 ч 36 ч
14 ч 20 мин + 50 мин = 15 ч 10 мин

Рейтинг-контроль по теме «Величины и их измерение»

Вариант I

1. В методике математики выделяется ли как один из этапов изучения величин этап, на котором происходит знакомство с новыми единицами величины и выполняется перевод однородных величин, выраженных единицами одних наименований, в другие:

а) да;

б) нет?

2. Формирование представлений о величинах у ученика начальной школы происходит:

а) благодаря изучению сугубо теоретического материала по теме;

б) выполнению различных практических работ;

в) решению педагогических задач;

г) заданиям проблемного характера.

3. Укажите величину, которая не изучается в начальной школе:

а) масса;

б) объем;

в) ускорение;

г) площадь;

д) время.

4. Для чего дети измеряют длину учебника полоской 10 см:

а) знакомятся с новой единицей измерения;

б) отрабатывают навыки счета;

в) узнают, сколько это составит в метрах?

5. Для описания такого свойства предмета, как масса, используются слова:

а) «темнее»;

б) «тяжелее»;

в) «длиннее»;

г) «объемнее»;

д) «короче»;

е) «меньше»;

ж) «легче»;

з) «красивее».

6. Представления о какой величине у детей развиваются медленно, в процессе длительных наблюдений, накопления жизненного опыта, изучения других величин:

а) скорость;

б) счет чисел;

в) емкость;

г) время?

7. Ар – это единица измерения:

а) длины;

б) массы;

в) ширины;

г) времени;

д) площади.

8. Для практического измерения площади фигуры можно использовать:

а) абак;

б) палетку;

в) счеты;

г) линейку-метр;

д) угольник;

е) транспортир.

9. По собственному опыту оцените, трудно ли выполнять действия с величинами, которые выражаются в единицах различных наименований:

а) да;

б) нет;

в) затрудняюсь ответить.

10. Выполните перевод:

а) 3 ч 12 мин – в минуты;

б) 2768 м^2 – в квадратные дециметры;

в) 20,5 кг – в центнеры.

Вариант II

1. Из учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» известно:

а) какую подготовительную работу при изучении величин необходимо проводить с учениками начальной школы;

б) аксиоматическое определение скалярной величины;

в) как определяется число с точки зрения теории измерения величин.

2. Выберите все формы организации работы на уроке, которые используются на различных этапах формирования представлений о величинах у ученика начальной школы:

а) коллективные;

б) индивидуальные;

в) фронтальные;

г) групповые.

3. Укажите величину, которая не изучается в начальной школе:

а) масса;

б) сила;

в) длина;

г) площадь;

д) время.

4. Практическое задание «Измерьте размеры класса шагами» будет уместным при изучении величины:

а) время;

б) площадь;

в) длина;

г) масса.

5. Формируется ли в начальной школе умение переводить массу, выраженную в единицах одних наименований, в единицы других наименований:

а) да;

б) нет;

в) затрудняюсь ответить?

6. Календарь природы для уроков окружающего мира помогает формировать представление о величине:

а) скорость;

б) счет чисел;

в) емкость;

г) масса;

д) время.

7. Гектар – это единица измерения:

а) длины;

б) массы;

в) ширины;

г) площади;

д) времени.

8. Выполните перевод:

а) 3 ч 12 мин – в секунды;

б) 2768 см^2 – в квадратные дециметры;

в) 2,5 т – в центнеры.

9. При записи величин в порядке возрастания или убывания у учащихся отрабатывается умение:

а) классифицировать единицы измерения величин;

б) соотносить единицы измерения с определенной величиной;

в) вычислять единицы измерения.

10. Сравните величины:

а) 6 мин 3 с и 362 с;

б) 1 ч 12 мин и 82 мин;

в) 20 м^2 и 2000 дм^2.

Глава 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

При работе над текстовой задачей один из важнейших вопросов следующий: как научить детей устанавливать связи между данными и искомыми. Желательно увлечь ребенка содержанием текста задачи, предложить ему вжиться в те события, о которых говорится в задаче. Если речь о движении автобуса, поезда, лодки, самолета, прочего средства передвижения, то значит, сам ученик (который сейчас читает и решает данную задачу) едет в том самом автобусе, поезде, плывет на лодке и т. д. В задаче на пошив одежды ученик мыслит себя портным.

После того как связи между данными и искомыми установлены, надо выбрать и далее выполнить арифметические действия.

Различные точки зрения на формирование умения решать задачи можно группировать в два отличающихся друг от друга подхода: традиционный и в рамках развивающего обучения. Две различные точки зрения диктуют разные математические подходы к обучению решению задач (к практической деятельности школьника при работе с задачами). Поэтому сначала задачи решаются на предметном уровне, с помощью счета или присчитывания предметов (подготовительный этап), затем дается образец записи решения в виде числового равенства (второй этап – ознакомление с решением задачи), далее задачи этого вида закрепляются в процессе решения аналогичных задач (третий этап). Ниже рассмотрим особенности каждого подхода, отметим их характерные признаки.

4.1. Последовательность изучения задач по методике традиционного обучения

В рамках традиционного обучения учащиеся решают задачи определенных видов (типов). Сначала нужно научить решать простые задачи, далее комбинации простых задач приводят к необходимости работать с задачами составными.

Классификация простых задач (по методике М. И. Моро)

1. При решении усваивается конкретный смысл арифметических действий:

1) нахождение суммы;

2) нахождение остатка;

3) нахождение суммы одинаковых слагаемых;

4) деление на равные части; деление по содержанию.

2. При решении усваиваются связи между компонентами и результатами арифметических действий, то есть это простые задачи на нахождение неизвестного компонента:

1) нахождение первого слагаемого по известной сумме и второму слагаемому;

2) нахождение второго слагаемого по известной сумме и первому слагаемому;

3) нахождение уменьшаемого по известным вычитаемому и разности;

4) нахождение вычитаемого по известным уменьшаемому и разности;

5) нахождение первого множителя по произведению и второму множителю;

6) нахождение второго множителя по произведению и первому множителю;

7) нахождение делителя по известным делимому и частному;

8) нахождение делимого по известным делителю и частному.

3. При решении раскрываются:

понятия разности:

1) задачи с вопросом: «На сколько больше ...?»;

2) задачи с вопросом: «На сколько меньше ...?»;

3) задачи на увеличение числа на несколько единиц (прямая форма);

4) задачи на увеличение числа на несколько единиц (косвенная форма);

5) задачи на уменьшение числа на несколько единиц (прямая форма);

6) задачи на уменьшение числа на несколько единиц (косвенная форма);

кратного отношения:

7) кратное сравнение чисел с вопросом: «На сколько больше ...?»;

8) кратное сравнение чисел с вопросом: «На сколько меньше ...?»;

9) задачи на увеличение числа в несколько раз (прямая форма);

10) задачи на увеличение числа в несколько раз (косвенная форма);

11) задачи на уменьшение числа в несколько раз (прямая форма);

12) задачи на уменьшение числа в несколько раз (косвенная форма).

Выделим особенности традиционного подхода к формированию умения решать задачи.

По методике М. И. Моро [14; 15; 11] дети знакомятся с соответствующими видами простых задач, то есть математические понятия усваиваются в процессе решения простых задач. (Особенность 1. В процессе решения задач усваиваются математические понятия.)

Процесс решения текстовой задачи требует анализа ее текста: выделяются условие, вопрос, известные и неизвестные данные, отношения между ними, выбираются арифметические действия.

1-й класс – решение простых задач есть, а представлений об арифметических действиях нет. (Особенность 2)

Учащиеся «узнают» задачу по словам-действиям: было – осталось, пришли – ушли, дали – взяли и так далее – и решают новую задачу по образцу. «Похожая задача решалась вычитанием, значит, и эту задачу буду так решать». Но задачей повышенной трудности будет следующая задача: «С аэродрома улетело семь самолетов, а затем еще два. Сколько всего улетело?» Почему? Ориентир на слово «улетело» диктует арифметическое действие вычитание, а задача решается сложением. (Особенность 3. Слова-подсказки диктуют определенное действие, а задача решается другим действием.)

Как будет выстраиваться методика работы с составными задачами при традиционном подходе? Оптимально разбиение составной задачи на две (или несколько) простых. Поэтому пропедевтика решения составных задач следующая: усвоение решения простых задач должно увенчаться успехом. Дети должны владеть умением решать простые задачи.

Сколько раз (в лучшем случае) приходится прочитывать текст задачи? Пять: первый – учитель или ученик с места; второй – про себя; третий – повторить, проговорить; четвертый – выделить условие и вопрос задачи; пятый – что известно, что неизвестно. Обязательно несколько раз проработать текст, чтобы «узнать» задачу. (Особенность 4. Многократное воспроизведение текста неэффективно, отрицательно влияет на продуктивность деятельности ученика.) Ученик выделил условие и вопрос, но самостоятельно решить задачу не может.

Что учителю приходится делать? Проводить беседу! И выполнять краткую запись. Задавать вопросы: «Что означает одно данное число?», «Что означает другое данное число?», «Что можно узнать по этим данным?», «Что нужно узнать, чтобы ответить на вопрос задачи?», «Для чего это нужно знать?». От вопросов учителя зависит, как будет выстраиваться ход решения задачи. Рассмотрение последовательности вопросов (от данных к вопросу задачи) – синтетический способ разбора задачи. Можно двигаться от вопроса задачи к данным, то есть использовать аналитический способ разбора.

«Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи?»

«Мы знаем, сколько было всего?» (нет)

«Это можно узнать?» (да, сложив одно с другим)

«Теперь можно ответить на вопрос задачи?» (да, нужно из всего вычесть то, что отдали)

Так, постепенно набираясь опыта, ученики будут сами задавать вопросы и выстраивать рассуждения в определенной последовательности, пользуясь любым из способов: аналитическим или синтетическим.

Однако видов составных задач много. Предусмотреть все невозможно, тем более разобрать все виды с учениками, чтобы позже они решали бы по образцу. (Особенность 5. Всевозможные виды составных задач предусмотреть не получится.)

Ученики привыкли, что в формулировках задач сначала идет условие, а потом вопрос. А по-другому может быть? «Сколько израсходовано ткани на пошив костюма, если на пошив брюк пошло на 1 м ткани меньше, чем на пиджак. На пиджак ушло 2 м ткани». (Особенность 6. Задача начинается с вопроса. Структура задачи изменилась.)

Такая задача незнакома ученику и будет считаться задачей творческого характера. К таким задачам также относятся задачи с лишними, недостающими данными, данными, озвученными в косвенной форме.

Часто ли в учебнике встречаются такие задачи? Когда их можно предлагать ученикам? Когда уже сформировано умение решать составные задачи. Задачи повышенной трудности помогают научиться вдумчиво относиться к содержанию задачи, четко представлять связи между данными и искомыми.

Итак, основной метод обучения решению составных задач – показ способов решения различных видов задач и трудоемкая практика по овладению ими. Новая задача – новая большая проблема! (Особенность 7. Различные виды составных задач и овладение способами их решения.)

С какими из выделенных особенностей учитель не столкнется при развивающем подходе? Какие новые нюансы возникают при обучении решению задач в рамках развивающего обучения?

4.2. Последовательность изучения задач по методике развивающего обучения

Развивающее обучение имеет целью научить детей анализировать текстовые задачи (выполнять семантический и математический анализ текстовых задач, определять взаимосвязи между условием и вопросом, между данными и искомыми и далее моделировать выделенные связи, представлять их в виде схем). В рамках этого подхода (автор Н. Б. Истомина) процесс решения задачи выстраивается как переход от словесной модели к модели математической, схематической. В основе этого подхода лежит математический анализ текста задачи. Следовательно, идет направленная работа с математическими понятиями и отношениями между ними. К началу обучения решению задач у ученика должно быть:

1) сформировано умение работать с математическими понятиями (навык чтения, усвоены смысл действий сложения и вычитания, их взаимосвязи, понятия «увеличить на», «уменьшить на», разностное сравнение);

2) освоены логические приемы мышления (основные мыслительные операции): анализ, синтез, сравнение, обобщение, обеспечивающие мыслительную деятельность в процессе решения задач;

3) накоплен опыт работы с моделями (предметными, текстовыми, семантическими, символьными), потому что задачу придется интерпретировать: язык текста следует перевести на язык математики (описывать предметные ситуации и переводить их на язык схем, чертить, складывать и вычитать отрезки, переводить текстовые ситуации в предметные и схематические модели).

На подготовительном этапе предлагаются следующие задания.

1. Ира утром съела три яблока, а вечером еще четыре.

а) Нарисуйте столько кругов, сколько Ира съела яблок.

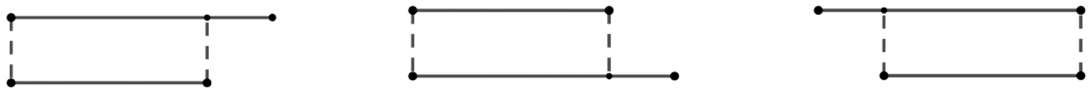
б) Закрасьте красным яблоки, которые Ира съела утром, а желтым – которые съела вечером.

в) Обведите кривой замкнутой линией множество всех яблок, которые съела Ира.

2. У дороги сидело три вороны и четыре сороки. Нарисуйте столько кругов, сколько птиц сидело у дороги.

3. Даны несколько схем с отрезками-результатами, полученными при сложении и вычитании отрезков разной длины. Под каждой схемой стоят выражения, например 9 – 4, 9 – 5, 3 + 2, 4 + 3, 7 – 5, 6 + 2. Обведите на каждой схеме красным цветом отрезок, который соответствует данному выражению.

4. Ручка длиннее карандаша на 3 см. Отметьте на каждой схеме отрезок, который обозначает 3 см.



5. У Кати три ленты разного цвета: синего, красного, желтого.

а) Обозначьте на схеме ленту каждого цвета отрезком, если красная лента длиннее синей и короче желтой.

б) Отметьте на схеме *1* отрезок, который показывает, на сколько красная лента короче желтой.

в) Отметьте на схеме *2* отрезок, который показывает, на сколько желтая лента длиннее синей.

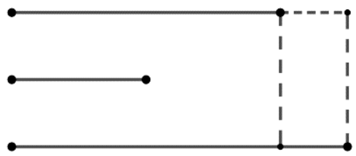


Схема 1

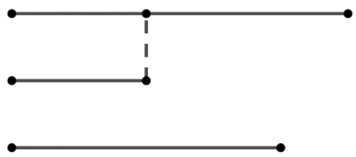


Схема 2

За 1-й класс (по учебникам Н. Б. Истоминой [13; 12]) учащиеся приобретают опыт в семантическом и математическом анализе различных текстовых конструкций, у них формируются умения представлять их в виде схематических и символьных моделей.

Работа на подготовительном этапе (в 1-м классе) позволяет организовать деятельность детей, направленную на усвоение структуры задачи и осознание процесса ее решения.

Средства организации такой деятельности охватывают специальные обучающие задания, включающие в себя методические приемы сравнения, выбора, преобразования, конструирования.

Знакомство с задачей происходит во 2-м классе. Идет работа со структурой задачи, учитывающая признаки задачи.

1. Какой текст можно назвать задачей, а какой – нет?

а) Девочка нашла пять грибов, а мальчик – на два больше.

б) Сколько всего учеников в классе?

в) Девочка нашла пять грибов, а мальчик – на два больше. Сколько всего грибов нашли мальчик и девочка?

г) На сколько больше марок у Пети, чем у Лёни?

2. Любая задача должна состоять из условия и вопроса.

В классе 10 девочек и 20 мальчиков. Сколько учеников в классе?

Учитель спрашивает: как ответить на вопрос задачи?

Объединить всех детей – девочек и мальчиков, то есть выполнить действие сложения.

$10 + 20$

Это решение задачи.

Так сколько же учеников в классе?

$10 + 20 = 30$ (уч.)

Ответ: 30 учеников в классе.

На одной тарелке лежало три яблока, на другой – четыре. Сколько груш на двух тарелках?

В вопросе спрашивается про груши, а в условии – яблоки. Условие и вопрос не связаны.

У Пети 12 марок, а у Лёни – 9. На сколько больше марок у Пети, чем у Лёни?

Учитель спрашивает: на сколько больше?

$12 - 9 = 3$ (м.)

Ответ: На 3 марки больше у Пети, чем у Лёни.

На клумбе росло пять тюльпанов и три розы. Сколько тюльпанов росло на клумбе?

В вопросе речь о том, что уже известно в условии.

Следовательно, условие и вопрос должны быть связаны между собой. Очень важно научиться читать текст задачи.

3. Чем похожи тексты задач, чем различаются? Какую задачу можно решить, а какую – нет?

а) На одном проводе сидели ласточки, на другом – семь воробьев. Сколько всего птиц?

б) На одном проводе сидело восемь ласточек, на другом – семь воробьев. Сколько всего птиц?

4. Сравните тексты задач. Чем они похожи, чем различаются? Можно ли утверждать, что решения этих задач будут одинаковыми?

Возле дома росло семь яблонь и три вишни. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?	Возле дома росло семь яблонь, три вишни и три березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?

5. На какие вопросы можно ответить, пользуясь условием второй задачи?

а) На сколько больше яблонь, чем вишен?
б) На сколько меньше берез, чем яблонь?
в) Сколько всего деревьев росло возле дома?
г) Сколько елочек росло возле дома?

В приведенном примере использованы тексты задач с недостающими и измененными данными, противоречивыми условием и вопросом, вопросом, в котором спрашивается о том, что известно.

6. В условии есть известные числа, но на вопрос ответить нельзя.

В вазе было семь конфет. Леша съел девять. Сколько конфет осталось?

7. Составьте условия к данному вопросу (задания должны постоянно усложняться).

а) Предлагается такой вопрос, для которого можно составить только один вариант условия.

Сколько открыток в двух данных конвертах?
На сколько шаров у Саши больше, чем у Миши?

б) Включаются такие вопросы, которые предполагают разные формулировки условия. Записывается вопрос и ниже предлагается ряд условий, из которых надо сделать выбор.

Сколько открыток во втором конверте?
1) В первом конверте пять открыток, а во втором – на три больше.
2) В первом конверте пять открыток, а во втором – три открытки.
3) В первом конверте пять открыток, а во втором – на три меньше.
4) В двух конвертах восемь открыток, в первом из них – пять.

Приемы, которые используются при выполнении заданий, направленных на формирование умения выбирать арифметические действия, следующие.

1. Выбор схемы

В пенале 12 карандашей. Из них семь цветных, остальные простые. Сколько простых карандашей в пенале? Выберите схему, соответствующую тексту задачи.

2. Выбор вопросов

От куска ткани длиной 12 м отрезали сначала 4 м, потом еще 6 м. Подумайте, на какие вопросы можно ответить, пользуясь этим условием.

а) Сколько всего метров ткани отрезали?
б) На сколько метров меньше отрезали в первый раз, чем во второй?
в) На сколько метров кусок ткани стал короче?
г) Сколько метров ткани осталось?

3. Выбор выражений

На велогонках стартовало 70 спортсменов. На первом этапе с трассы сошло четыре велосипедиста, на втором – шесть. Сколько спортсменов пришло к финишу? Выберите выражение, которое является решением задачи: а) $6+4$; б) $6-4$; в) $70-6$; г) $70-6-4$; д) $70-4-6$; е) $70-4$.

4. Выбор условия к данному вопросу

Есть вопрос, надо выбрать условие из пяти предложенных.

Сколько всего детей занимается в студии?

а) В студии 30 детей, из них 16 – мальчики.
б) В студии занимаются мальчики и девочки. Мальчиков на семь меньше, чем девочек.
в) В студии восемь мальчиков и 20 девочек.
г) В студии восемь мальчиков, а девочек – на две больше.
д) В студии занимаются восемь мальчиков, а девочек – на две меньше.

5. Выбор данных

На аэродроме было 45 самолетов. Сколько самолетов (улетело) осталось? Почему нельзя решить эту задачу? Выберите данные, которыми можно дополнить условие задачи, чтобы ответить на поставленный в ней вопрос.

а) Утром прилетело 10 самолетов, а улетело 30.

б) Улетело на 20 самолетов больше, чем было.

в) Улетело сначала 10 самолетов, а потом 20.

6. Изменение текста задачи в соответствии с данным решением

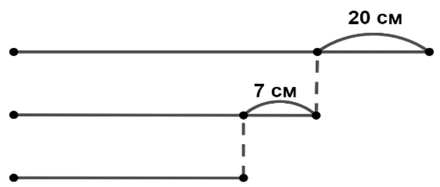
Что нужно изменить в текстах задач, чтобы выражение 9 – 6 было решением каждой?

а) На двух скамейках сидело шесть девочек, на одной из них – девять. Сколько девочек сидело на второй скамейке?

б) В саду девять кустов красной смородины, а кустов черной смородины – на шесть больше. Сколько кустов черной смородины в саду?

в) В гараже девять легковых машин и шесть грузовых. Сколько всего машин в гараже?

7. Постановка вопроса, соответствующего данной схеме



Игорь выше Пети на 20 см, а Петя выше Вовы на 7 см. Рассмотрите схему и подумайте, на какой вопрос можно ответить, пользуясь данным условием.

8. Объяснение выражений, составленных по данному условию

Фермер отправил в магазин 45 кг укропа, петрушки – на 4 кг больше и 19 кг сельдерея. Сколько всего килограммов зелени отправил фермер в магазин? Что обозначают выражения, составленные по условию задачи?

а) $45 - 19$ (На сколько укропа больше, чем сельдерея?)

б) $45 + 19$ (Сколько укропа и сельдерея вместе?)

в) $45 + 4$ (Сколько петрушки?)

г) $45 - 4$ (не имеет смысла)

9. Выбор решения задачи

Курица легче зайца на 4 кг, а заяц легче собаки на 8 кг. На сколько собака тяжелее курицы? На сколько курица легче собаки?

$8 + 4 = 12$ (кг), $8 - 4 = 4$ (кг)

Также предусмотрена и самостоятельная работа учащихся. Организация такой работы имеет целью формирование у детей следующих умений: анализировать текст, устанавливать взаимосвязь между условием и вопросом, соотносить различные виды задач и модели.

Примеры заданий следующие.

Прочитайте условие задачи. Ответьте на каждый вопрос.

Рассмотрите схему. Вставьте в текст задачи пропущенные слова и числа.

Вставьте пропущенные числа в текст, так чтобы выражение $7 - 5$ являлось решением каждой задачи.

Составьте текст задачи, используя решение задачи: $30 + 12 = 42$ (д.), $42 + 30 = 72$ (д.)

Попробуйте составить текст задачи, используя данные.

4.3. Примеры текстовых задач и их решений

Задача 1. Предложенный весовщиком уплотненный способ погрузки в вагоны позволяет грузить в вагон по 250 автопокрышек вместо 220, что высвобождает за месяц 96 вагонов. Сколько автопокрышек грузят в месяц?

Способ	Количество вагонов	Количество покрышек в одном вагоне	Общее количество покрышек
Старый	На 96 > ↲	220	Одинаковое
Новый		250	

Решение. 1. На сколько покрышек стали грузить больше?

$250 - 220 = 30$

2. Сколько покрышек перевозили по старому способу 96 вагонов?

$96 \cdot 220 = 21\,120$

3. Сколько вагонов грузили по новому способу?

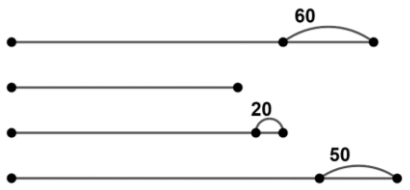
$21\,120 : 30 = 704$

4. Сколько покрышек грузят в месяц?

$704 \cdot 250 = 176\ 000$

Ответ: в месяц стали грузить 176 000 автопокрышек.

Задача 2. На лекциях в четырех аудиториях присутствуют 870 студентов, причем в первой аудитории на 60 студентов больше, чем во второй, во второй – на 20 студентов меньше, чем в третьей, а в третьей – на 50 меньше, чем в четвертой. Сколько студентов в каждой аудитории?

Схема-модель на отрезках	Решение
	1. 870 – (60 + 20 · 2 + 50) = 720 (ст.) 2. 720 : 4 = 180 (ст.) – во второй ауд. 3. 180 + 60 = 240 (ст.) – в первой ауд. 4. 180 + 20 = 200 (ст.) – в третьей ауд. 5. 180 + 20 + 50 = 250 (ст.) – в четвертой ауд.

Ответ: 240, 180, 200, 250 студентов.

Тест по теме «Методика обучения решению задач»

Вариант I

1. В традиционной системе обучения при решении простых задач:

а) усваивается конкретный смысл арифметических действий;

б) рассматриваются отношения между компонентами арифметических действий;

в) усваивается связь между компонентами и результатами арифметических действий;

г) раскрываются представления о разности и кратном отношении;

д) происходит усвоение математических представлений начальной математики.

2. Задача, в которой для ответа на вопрос требуется выполнить два или более действия, называется:

а) простой;

б) составной;

в) обобщенной;

г) с несколькими неизвестными данными;

д) с лишними данными.

3. Какими способами из предложенных можно решить следующую задачу: «Было 12 птиц. Среди них две сороки, семь галок, остальные – воробьи. Сколько воробьев?»

а) практическим;

б) арифметическим;

в) алгебраическим;

г) графическим;

д) комбинированным;

е) устным;

ж) всеми указанными способами.

4. Формы записи решения задач арифметическим способом могут быть следующие:

а) по действиям;

б) по действиям с пояснениями или вопросами;

в) выражением;

г) подходят все предложенные варианты.

5. Что означает словосочетание «решить задачу»:

а) установить связи между числовыми данными и искомыми, озвученными в условии задачи;

б) установить связи между числовыми данными и искомыми, продиктованными условием задачи, на основе чего выбрать, а затем выполнить арифметические действия и дать ответ на вопрос задачи;

в) согласно числовым данным задачи выбрать арифметические действия, затем выполнить их и дать ответ на вопрос задачи;

г) озвучить ответ задачи?

6. Среди предложенных вариантов выберите те, которые относятся к видам проверки решения задач:

а) прикидка ответа;

б) решение задачи на модели или схеме;

в) составление и решение обратной задачи;

г) установление соответствия между числами, данными в условии задачи и полученными в ответе;

д) решение задачи другим способом;

е) все варианты ответов подходят.

7. Выберите компоненты, отражающие ход работы над задачей:

а) условие – вопрос – рассуждение – ответ;

б) данные – искомые – решение – ответ;

в) условие – вопрос – решение – ответ;

г) термины – условие – вопросы – ответы.

8. К задачам, связанным пропорциональной зависимостью, относят:

а) задачи на пропорциональное деление;

б) задачи на нахождение неизвестного по двум разностям;

в) задачи на согласованное соответствие данных и искомых;

г) задачи на движение;

д) все предложенные виды задач.

9. Что состоит из следующих этапов: 1) подготовительный; 2) ознакомительный; 3) формирование умения решать задачи:

а) алгоритм изучения задач в начальной школе;

б) практикум по решению задач начальной математики;

в) обучение решению составных задач;

г) методика обучения решению задач?

10. Аналитический ход разбора задачи предполагает движение:

а) от вопроса задачи к данным;

б) от данных к вопросу задачи.

11. Синтетический способ разбора задачи предполагает движение:

а) от вопроса задачи к данным;

б) от данных к вопросу задачи.

12. Какие из предложенных видов задач следует отнести к задачам творческого характера:

а) задачи с лишними данными;

б) задачи с недостающими данными;

в) задачи, начинающиеся с вопроса;

г) задачи с составлением выражения.

13. Процесс решения задачи выстраивается как переход от словесной модели к модели математической и/или схематической в методике:

а) М. И. Моро;

б) Н. Б. Истоминой;

в) И. И. Аргинской.

14. Выберите методические приемы (по методике Н. Б. Истоминой), которые используются на подготовительном этапе работы с задачами:

а) все нижеперечисленные приемы относятся к подготовительному этапу;

б) выберите схему;

в) закрасьте и обведите столько, сколько было;

г) нарисуйте столько фигур, сколько было, и раскрасьте те, про которые известно ...;

д) обозначьте на схеме цветом каждую ленту, если известно соотношение их длин;

е) обведите на каждой схеме отрезок, который будет соответствовать данному выражению;

ж) ни один из указанных приемов не подходит.

15. По методике Н. Б. Истоминой на подготовительном этапе решения задач формируются:

а) навык чтения;

б) понимание смысла действий сложения и вычитания, их взаимосвязи;

в) представления «увеличить/уменьшить на», разностное сравнение;

г) логические приемы мышления;

д) умение чертить, складывать и вычитать отрезки;

е) умение переводить текстовые ситуации в предметные и схематические модели;

ж) умение описывать предметные ситуации и переводить их на язык схем;

з) все приведенные ответы.

16. Выберите методические приемы (по методике Н. Б. Истоминой), которые используются при выполнении заданий, направленных на формирование умения выбирать арифметические действия:

а) обозначьте цветом и отметьте на данной схеме данные и искомые задачи;

б) объясните выражения, составленные по данному условию;

в) выберите схему;

г) выберите выражение;

д) выберите вопрос;

е) все варианты подходят.

17. Выберите методические приемы (по методике Н. Б. Истоминой), которые используются на этапе формирования умения решать задачи:

а) выберите условие к данному вопросу;

б) выберите данные;

в) измените текст задачи в соответствии с данным решением;

г) сконструируйте задачи на сравнение;

д) выберите решение задачи;

е) все приведенные приемы.

18. Выберите методические приемы (по методике Н. Б. Истоминой), которые используются на ознакомительном этапе работы с задачами:

а) нарисуйте столько, сколько было;

б) сравните тексты задач: чем они похожи и чем различаются;

в) составьте задачу, обратную данной;

г) составьте условие к данному вопросу;

д) выберите схему;

е) все приведенные приемы.

19. Работа на каком этапе (по методике Н. Б. Истоминой) позволяет организовать деятельность детей, направленную на усвоение структуры задачи и осознание процесса ее решения:

а) подготовительном;

б) установления связей между данными и искомыми;

в) формирования умения решать различные задачи?

20. Методические приемы сравнения, выбора, преобразования, конструирования относятся:

а) к средствам организации деятельности, направленной на формирование умения представлять условия в виде схематических и символьных моделей;

б) приобретению опыта семантического и математического анализа различных конструкций задач;

в) работе с задачами на подготовительном этапе;

г) не указано правильного ответа.

Вариант II

1. На этапе формирования умений решать задачи проводится работа с задачами:

а) на движение;

б) разных видов;

в) с пропорциональными величинами;

г) которые решаются арифметическим способом.

2. Выберите из списка главные элементы задачи:

а) способ решения; д) условие;

б) ответ; е) решение;

в) этапы рассуждения; ж) прочтение условия;

г) ход решения; з) вопрос.

3. Какой из перечисленных способов не относится к способам решения задач:

а) графический; г) практический;

б) алгебраический; д) арифметический;

в) художественный; е) путем подбора?

4. Применим ли в начальной школе табличный способ для решения задач начальной математики:

а) да;

б) нет;

в) не знаю?

5. Проверка решения задач относится к формированию:

а) умения решать задачу другим способом;

б) самоконтроля учащихся;

в) и развитию процессов мышления и памяти.

6. Повышение интереса к математике развивается в том числе благодаря решению:

а) сложных задач;

б) трудных задач;

в) задач разными способами.

7. Задачи с несколькими вопросами относятся к задачам:

а) сложным; г) составным;

б) трудным; д) интересным;

в) простым; е) творческого характера.

8. Масса трех одинаковых коробок пряников равна 18 кг. Коробка зефира на 2 кг легче коробки пряников. Чему равна масса шести коробок зефира? Это задача:

а) с пропорциональными величинами на разностное сравнение;

б) на пропорциональное деление;

в) нахождение неизвестного по двум суммам;

г) нахождение четвертого пропорционального.

9. Одна девочка купила 10 тетрадей, другая – шесть. Первая заплатила на 12 руб. больше, чем вторая. Сколько денег заплатила за тетради каждая девочка? Это задача:

а) с пропорциональными величинами на разностное сравнение;

б) на пропорциональное деление;

в) нахождение неизвестного по двум разностям;

г) нахождение неизвестного по двум суммам;

д) нахождение четвертого пропорционального.

10. Три ученика решали задачи. Первый решил пять задач, второй – девять, третий – десять. Общее количество баллов, набранных учениками, – 72. Сколько баллов заработал каждый ученик за решенные задачи? Это задача:

а) с пропорциональными величинами на разностное сравнение;

б) на пропорциональное деление;

в) нахождение неизвестного по двум разностям;

г) нахождение неизвестного по двум суммам;

д) нахождение четвертого пропорционального.

Вопросы для индивидуального собеседования со студентами по теме «Методика обучения решению задач»*

1. Можно ли любое математическое задание интерпретировать как задачу? *Да, выделив в нем условие – ту часть, в которой содержатся сведения об известных и неизвестных значениях величин, отношениях между ними, – и требование, то есть указание на то, что нужно найти.*

2. Можно ли отнести к требованию задачи (то есть к указанию на то, что нужно найти) понимание отношений между известными и неизвестными значениями величин? (В случае положительного ответа проведите цепочку рассуждений, подтверждающих наличие признаков задачи. Приведите пример задания.) *Решите уравнение «х + 4 = 9». В условии дано уравнение. Требование – решить его, то есть подставить вместо х такое число, чтобы получилось истинное равенство.*

---

* Ответы приведены по тексту курсивом.

3. Различные виды математических задач (например, арифметические, комбинаторные, задачи на преобразование, построение, доказательство и др.) могут ли быть классифицированы по способу или методу действия в зависимости от вопроса задачи? *Именно так, могут.*

4. Попробуйте подобрать синонимы к сочетанию «арифметическая задача» из следующего списка: ролевая, простая, составная, текстовая, комбинаторная, интересная, сложная, легкая, вычислительная, первоклассная, сюжетная (подтвердите сделанный выбор). *Текстовая, вычислительная, сюжетная. 1. В процессе решения подобных задач у ребенка можно формировать умения, необходимые для решения любой математической задачи: выделять данные и искомое, определять условие и вопрос, устанавливать зависимость между условием и вопросом, строить умозаключения, моделировать, проверять полученный результат. 2. Решение таких задач позволяет ребенку осознать практическую значимость тех математических понятий, которыми он овладевает в начальном курсе математики. 3. В сюжетах находят отражение ситуации из жизни ребенка, что помогает осознать реальные количественные отношения между различными объектами (величинами) и тем самым углубить и расширить представления детей о действительности.*

5. Какие умения формируются у ребенка в процессе решения любой математической задачи? В качестве подсказки выберите из предложенного списка подходящие ответы: выделять данные и искомое, определять условие и вопрос, устанавливать зависимость между условием и вопросом, строить умозаключения, моделировать, проверять полученный результат. *Все указанные.*

6. Раскройте понятие «решение задачи». *1. Решение как результат, то есть как ответ на вопрос, поставленный в задаче. 2. Решение как процесс нахождения результата (сам процесс с точки зрения методики решения задач можно понимать: а) как способ нахождения результата и б) как последовательность тех действий, которые входят в тот или иной способ).*

7. Для задачи «Восемь яблок разложили по два на несколько тарелок. Сколько понадобилось тарелок?» приведите хотя бы три способа решения. Попробуйте дать названия выбранным способам. *1. Предметный, или практический, способ основан на теоретико-множественном подходе (раскладывают по два яблока на тарелки, затем*

пересчитывают тарелки). 2. Графический – на отрезках, где каждое яблоко – отрезок (теория измерения величин как основа). 3. Алгебраический – с использованием х, решая уравнение 2х = 8.

8. Перечислите четыре различные формы записи решения задач. *По действиям, по действиям с пояснением, с вопросами, выражением.*

9. Какие методические подходы к формированию умения решать задачи вам известны? Раскройте вопрос, опираясь на разные методические школы. *Один подход нацелен на формирование у учащихся умения решать задачи определенных типов (видов). Другой подход имеет целью «научить детей выполнять семантический и математический анализ текстовых задач, выявлять взаимосвязи между условием и вопросом, данными и искомыми и представлять эти связи в виде схематических и символьных моделей».*

10. Деятельность по приобретению учащимися опыта в семантическом и математическом анализе различных текстовых конструкций задач и формированию умения представлять задачи в виде схематических и символьных моделей требует организационных средств. Такими средствами служат специальные обучающие задания, включающие в себя определенные методические приемы. Выберите подходящее из перечисленного: решение задачи разными способами, конструирование, выбор, преобразование, сравнение, синтез, анализ, рассуждение. *Методические приемы – конструирование, выбор, преобразование, сравнение.*

Контрольная работа «Текстовые задачи»

Вариант I

1. Сумма чисел равна 150, а их разность равна 30. Найдите эти числа.

2. В двух бочках 200 л воды. Если из первой бочки во вторую перелить 10 л, то в ней все равно останется на 20 л воды больше, чем станет во второй. Сколько литров воды в каждой бочке?

3. Сад имеет форму прямоугольника длиной 280 м и шириной 204 м. Параллельно ширине сад разбит на три части, из которых одна на 31 м меньше второй и на 33 м больше третьей. С большего участка собрано фруктов на 195 ц 84 кг больше, чем с меньшего. Определите урожай, собранный со всего сада.

4. Турист подсчитал, что если во время путешествия из имеющейся суммы он будет тратить 50 руб. в день, то у него останется 30 руб. Если же он будет тратить по 70 руб. в день, то на один день путешествия денег ему не хватит. Какую сумму предполагал потратить путешественник и какова длительность его путешествия?

5. Токарь должен изготовить определенное число деталей к назначенному сроку. Если он будет производить по 20 деталей в день, то не успеет изготовить 120 деталей, а если же он будет производить по 30 деталей в день, то изготовит к сроку на 120 деталей больше. Сколько деталей и за какое время должен изготовить токарь?

Вариант II

1. Даны два числа. Известно, что первое из них больше второго на 100, а их сумма равна 200. Найдите эти числа.

2. В двух коробках 84 карандаша. Если из первой коробки переложить во вторую четыре карандаша, то в первой все равно останется на четыре карандаша больше, чем станет во второй. Сколько карандашей было первоначально в каждой коробке?

3. Автомобиль израсходовал на три поездки 22 кг 750 г бензина. В третью поездку израсходовано бензина на 1 кг 625 г больше, чем во вторую, а во вторую – на 2 кг 875 г больше, чем в первую. Сколько километров проехал автомобиль во вторую поездку, если в третью он проехал на 36 км больше, чем в первую?

4. Ученик подсчитал, что если будет прочитывать по пять страниц книги в день, то не успеет к сроку прочитать 16 страниц. Если же он будет прочитывать в день по восемь страниц, то закончит читать книгу на день раньше срока. За какое время нужно прочитать книгу ученику и сколько в ней страниц?

5. Автопредприятие занимается ремонтом машин и должно к назначенному сроку ремонтировать определенное число машин. Если в день будут ремонтировать по пять машин, то число отремонтированных к сроку машин будет на 10 меньше планируемого, а если в день будут ремонтировать по семь машин, то к сроку будет отремонтировано на 10 машин больше плана. Сколько машин и за какое время должно отремонтировать автопредприятие по плану?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Множества и операции над ними

1. Дано множество $C = \{213, 45, 324, 732, 136\}$. Составьте подмножество множества C из чисел, которые: а) делятся на 3; б) делятся на 9; в) не делятся на 4; г) не делятся на 5; д) не делятся на 3.

2. Даны множества: A – множество натуральных чисел, B – множество четных натуральных чисел, C – множество нечетных натуральных чисел, D – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно, E – множество чисел, десятичная запись которых оканчивается нулем, F – множество чисел, кратных 6, K – множество чисел, кратных 3, M – множество чисел, кратных 2 и 5 одновременно. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других данных множеств. Есть ли среди данных множеств равные?

3. Изобразите на числовой прямой множества:

а) $|x| < 5$;

б) $|x + 3| \leq 4$;

в) $|x - 3| \geq 4$;

г) $|x + 1| > 3$.

4. Пусть $E_1 = \{x |\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 20 = 0\}$, $E_2 = \{x |\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 12 = 0\}$. Задайте множества E_1, E_2 перечислением элементов. Образуйте множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$.

5. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Укажите характеристическое свойство элементов множеств $A \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$.

6. Постройте диаграммы Эйлера – Венна для данных множеств:

а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество прямоугольных треугольников плоскости, B – множество трапеций плоскости, C – множество многоугольников, имеющих хотя бы один прямой угол;

б) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество прямоугольников плоскости, B – множество четырехугольников плоскости, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали, C – множество параллелограммов плоскости;

в) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x |\ x \in \mathbb{N}$ и $x < 300\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N}$ и $x < 100\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 5\}$;

г) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x |\ x \in \mathbb{N}$ и $x < 100\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 10\}$, C – множество трехзначных натуральных чисел.

Ответ обоснуйте.

7. На диаграммах Эйлера – Венна отметьте штриховкой следующие множества:

а) $X = (A \cup B)\backslash((C\backslash B) \cup (C\backslash A))$;

б) $Y = \overline{((A \cap B)\backslash C) \cup (C\backslash A)}$;

в) $K = (B \cup C)\backslash A \cup (B \cap C)$;

г) $L = (B\backslash(A \cap C)) \cap (A \cup C)$;

д) $T = \overline{(A \cap B) \cup (B \cap C)}$;

е) $P = ((A\backslash B)\backslash C) \cup (C\backslash(A \cap B))$.

Ответ поясните. При построении диаграммы считайте, что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

8. На диаграмме Эйлера – Венна отметьте штриховкой множество X и сформулируйте характеристическое свойство его элементов. Ответ обоснуйте.

а) $X = \bar{C} \cap (A\backslash B)$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 3\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 4\}$ (универсальным считать множество натуральных чисел);

б) $X = \bar{A} \cap (B\backslash C)$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 300\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 100\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x < 200\}$ (универсальным считать множество натуральных чисел);

в) $X = \bar{A} \cap (B \cup C)$, если A – множество квадратов плоскости, B – множество трапеций плоскости, C – множество ромбов плоскости (универсальным считать множество геометрических фигур плоскости);

г) $X = \bar{B} \cap (A\backslash C)$, если A – множество параллелограммов плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество прямоугольников плоскости (универсальным считать множество геометрических фигур плоскости);

д) $X = (\bar{C}\backslash A) \cap (B \cup C)$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 7\}$, B – множество двузначных натуральных чисел, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$ (универсальным считать множество натуральных чисел).

9. Даны множества $A = (-\infty, 1)$, $B = (-3, +\infty)$, $C = (7, 12]$. Отметьте на числовой прямой множество $X = B \backslash (A \cup C)$ и сформулируйте характеристическое свойство его элементов. Ответ обоснуйте. Можно указать в множестве X наибольшее натуральное число? Существует ли в множестве X наименьшее натуральное число? Если наименьшее или наибольшее натуральное число существует, то назовите его.

10. Отметьте на числовой прямой следующие множества: а) $X = B \backslash (A \backslash C)$, $Y = (A \cap B) \backslash C$, $H = (A \cup B) \backslash (B \backslash C)$, если $A = (-\infty, 8)$, $B = (-7, +\infty)$, $C = [-2, 5]$; б) $P = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$, $L = (A \cup B) \cap C$, $D = (A \cup C) \cap B$, если $A = [-2, 3)$, $B = [1, 7]$, $C = (5, 9)$ – и сформулируйте характеристические свойства их элементов. Ответ поясните.

11. Докажите, что для любых множеств A, B, C верны равенства $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$ и $A \cap B \backslash C = A \cap (B \backslash C)$. Сначала осуществите проверку справедливости равенств на диаграмме Эйлера – Венна, затем проведите развернутое доказательство их, пользуясь определениями операций объединения, пересечения и разности множеств.

12. Проведите развернутое доказательство равенств указанных множеств, предварительно выполнив проверку на диаграммах Эйлера – Венна. Считайте, что данное равенство имеет место для любых произвольных множеств A, B, C:

а) $(A \backslash B) \cup (A \cap C) = A \cap (\overline{B \backslash C})$;

б) $B \cup (C \backslash A) = (B \cup C) \cap (\overline{A \backslash B})$;

в) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (\overline{C \backslash A})$;

г) $B \backslash (A \cup C) = (B \backslash C) \cap (\overline{A \backslash C})$;

д) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (\overline{B \backslash C})$.

13. Даны множества: $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$. Докажите, что множество $A \times (B \cup C)$ равно множеству $(A \times B) \cup (A \times C)$, множество $(B \backslash C) \times A$ равно множеству $(B \times A) \backslash (C \times A)$.

14. В координатной плоскости постройте изображения декартовых произведений $X \times Y$, $Y \times X$. Для каждого случая выполните отдельный чертеж:

а) $X = \{x | \; x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}$, $Y = \{y | \; y \in \mathbb{Z}, -7 \leq y < 1\}$;

б) $X = \{x | \; x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}$, $Y = \{y | \; y \in \mathbb{R}, -7 \leq y < 1\}$;

в) $X = \{x | \; x \in \mathbb{R}, |x| = 5\}$, $Y = \{y | \; y \in \mathbb{R}, -7 \leq y < 1\}$;

г) $X = \{x | \; x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$, $Y = \{y | \; y \in \mathbb{N}, y < 5\}$;

д) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$, $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y < 5\}$;

е) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < 3\}$, $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y < 5\}$.

15. В координатной плоскости постройте прямые, параллельные оси OY и проходящие через точки $(2, 3)$ и $(-2, 3)$. Установите, декартово произведение каких двух множеств изображается в координатной плоскости в виде полосы, заключенной между построенными прямыми.

16. Проверьте правильность следующих классификаций: а) треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные; б) все пары окружностей делятся на концентрические и пересекающиеся; в) натуральные числа разделяются на четные, нечетные и делящиеся на 3; г) целые числа разделяются на положительные и отрицательные. В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

17. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных 2; 115 чисел, кратных 3; 120 чисел, кратных 5; 45 чисел, кратных 6; 38 чисел, кратных 10; 50 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30. Составьте диаграмму Эйлера – Венна и определите, сколько элементов в заданном множестве.

18. Решение задач а) – г) выполните по следующему алгоритму:

1) определите, сколько свойств задано для элементов рассматриваемого множества;

2) выясните, в каких отношениях находятся между собой подмножества, выделяемые этими свойствами;

3) изобразите с помощью кругов Эйлера диаграмму, соответствующую условию задачи;

4) определите, на сколько классов разбилось рассматриваемое множество, и сформулируйте характеристические свойства элементов каждого класса;

5) составьте краткую запись условия задачи;

6) приведите обоснованное решение задачи.

а) Из 100 чисел 50 делятся на 5, 75 чисел делятся на 3, 10 чисел не делятся ни на 5, ни на 3. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 15?

б) Из 120 чисел 50 делятся на 3, 70 чисел делятся на 8, 20 чисел не делятся ни на 3, ни на 8. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 24?

в) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 75 неправильных треугольников, 60 непрямоугольных треугольников, а 35 неправильных треугольников не являются прямоугольными?

г) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 95 параллелограммов, 90 фигур не являются ромбами, а 85 фигур являются ромбами, но не параллелограммами?

19. а) Сколько всего учеников в классе, если 24 из них любят в свободное время играть в электронные игры, 23 ученика любят в свободное время смотреть фильмы, а 21 – в свободное время любит читать, при этом два ученика не любят ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в электронные игры, 10 учеников любят играть в электронные игры и читать, 10 – любят читать и смотреть фильмы, 15 учеников любят играть в электронные игры и смотреть фильмы, из которых пять еще и любят читать?

б) Известно, что из 30 ребят один в свободное время не любит ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в электронные игры, четверо ребят любят смотреть фильмы, но не любят ни играть, ни читать, трое любят читать, но не любят играть в электронные игры и смотреть фильмы. Всего ребят, которые любят играть в электронные игры, 20, а ребят, которые любят смотреть фильмы, 14, при этом пять любят играть и смотреть фильмы, но не любят читать. Сколько ребят любит играть в электронные игры и смотреть фильмы? Сколько ребят любит играть в электронные игры, но не любит смотреть фильмы? Сколько ребят любит читать и смотреть фильмы?

в) Сколько чисел в множестве M, если 35 из них делятся на 3, 35 чисел делятся на 5, 18 чисел делятся на 25, 10 чисел не делятся ни на 3, ни на 5, 8 чисел делятся на 75, 15 чисел делятся на 3, но не делятся на 5. Сколько в множестве M чисел, которые делятся на 15, но не делятся на 75? Сколько чисел делится на 5, но не делится на 25 и 3? Сколько чисел делится на 25, но не делится на 3?

20. а) Сколько кондитерских изделий приобрели для праздничного чаепития, если среди 30 пирожных оказались 20 с клубничным джемом. Всего с клубничным джемом было 50 кондитерских изделий, из которых 15 имели форму рулетов. Всего в покупке было 60 кондитерских изделий в форме рулетов, из которых 15 являлись пирожными. Еще было куплено 50 мясных пирожков-треугольничков, то есть данные

кондитерские изделия не были пирожными, не имели ни клубничной начинки, ни формы рулетов, а 10 кондитерских изделий назывались «Клубничные пирожные-рулетики».

б) Для праздничного чаепития купили 120 кондитерских изделий. В покупке было 30 пирожных, 45 кондитерских изделий с клубничным джемом, из них 25 ватрушек, 20 изделий в форме рулетов не имели клубнично-джемовой прослойки и не считались пирожными, назывались «Мясной рулет из лаваша», 10 пирожных-корзиночек с клубничным джемом и еще 40 мясных пирожков-треугольничков. Сколько всего кондитерских изделий «Клубничные пирожные-рулетики» было куплено? Сколько было рулетов с клубничным джемом, не являющихся пирожными? Сколько всего было куплено пирожных без клубничного джема?

в) Сколько чисел в множестве M, если 80 из них делятся на 3, 70 чисел делятся на 10, 30 чисел делятся на 100, 45 чисел делятся на 30, 10 чисел делятся на 100, но не делятся на 3, 15 чисел не делятся ни на 3, ни на 10. Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 300? Сколько чисел делится на 30, но не делится на 300? Сколько чисел делится на 10, но не делится ни на 100, ни на 3?

21. а) Сколько дней велись наблюдения за погодой, если известно, что в это время 13 дней дул восточный ветер, 11 дней атмосферное давление было ниже нормы (меньше 760 мм рт. ст.), 12 дней стояла ясная погода, из которых семь дней дул восточный ветер, а шесть дней давление было ниже нормы? Восемь дней при восточном ветре давление было ниже нормы, из которых только пять дней были ясными. Кроме того, в период наблюдений 10 дней дул южный ветер, давление было не ниже нормы и было пасмурно.

б) В течение 28 дней велись наблюдения за погодой. Выяснилось, что 12 дней дул восточный ветер, из которых один день был пасмурным, с атмосферным давлением выше нормы, 13 дней стояла ясная погода, из которых семь дней атмосферное давление было ниже нормы. Один день при давлении ниже нормы был пасмурным и не дул восточный ветер, восемь дней при давлении не ниже нормы и отсутствии восточного ветра было пасмурно, а четыре дня при восточном ветре и давлении ниже нормы стояла ясная погода. Сколько дней в наблюдаемый период давление было ниже нормы? Сколько дней при восточном ветре и давлении не ниже нормы стояла ясная погода? Сколько дней при отсутствии восточного ветра стояла ясная погода?

в) Сколько чисел в множестве M, если из них 40 делятся на 3, 50 чисел делятся на 11, 20 чисел делятся на 22, из которых 15 не делятся на 3, 25 чисел делятся на 3, но не делятся на 11, 25 чисел не делятся ни на 3, ни на 11. Сколько чисел делится на 33? Сколько чисел делится на 33, но не делится на 66? Сколько чисел делится на 11, но не делится ни на 22, ни на 3?

Математические предложения и их структуры

1. Сформулируйте высказывания заданной структуры:

а) $(A \Leftrightarrow D) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$; б) $(\bar{A} \wedge B) \Leftrightarrow (\bar{C} \vee D)$; в) $\overline{B \Rightarrow (C \wedge \bar{D})}$; г) $\overline{(D \Rightarrow A) \wedge (B \Leftrightarrow C)}$ – и определите их значения истинности, если A: «7 – простое число», B: «7 – делитель 20», C: «7 меньше 10 на 2», D: «7 – четное число».

2. Определите значения истинности следующих сложных высказываний, если известно, что P – «л», Q – «и», R – «и»: а) $P \wedge (Q \wedge R)$; б) $(P \wedge Q) \wedge R$; в) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$; г) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$; д) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (R \vee \bar{Q})$; е) $((P \vee Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.

3. Докажите тождественную истинность формул:

а) $(A \vee B \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$;

б) $(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A$.

4. Докажите тождественную ложность формул:

а) $\overline{(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A}$;

б) $\overline{(A \wedge B \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)}$.

5. Определите структуру следующих высказываний и найдите их значения истинности: а) если 4 делится на 2 или на 3, то число 4 меньше 3 и простое; б) число 17 – простое и двузначное тогда и только тогда, когда число 17 – четное или нечетное; в) если число 12 – четное тогда и только тогда, когда делится на 2, то 12 делится на 3; г) $8 = 2^3$ и $8 > 10$ или если $8 = 2^3$, то $8 < 10$; д) если число 33 делится на 3 и 11, то $3 > 11$ или $3 < 11$.

6. Составьте таблицы истинности следующих составных высказываний: а) $\bar{A} \wedge \bar{B}$; б) $A \wedge (B \vee C)$; в) $A \Rightarrow B \vee C$; г) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$; д) $\overline{A \vee B}$. Какие из высказываний равносильные?

7. Составьте таблицы истинности высказываний заданной структуры и приведите пример конкретных высказываний A, B и C так, чтобы высказывание этой структуры было истинным: а) $(C \Leftrightarrow A) \Rightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})$; б) $(A \vee C) \Rightarrow (\bar{B} \wedge C)$; в) $(A \wedge \bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{B} \vee A)$; г) $((A \wedge B) \Rightarrow \bar{A}) \vee C$; д) $(C \wedge (A \vee B)) \Rightarrow \bar{B}$.

8. Проверьте, являются ли высказывания заданной структуры тавтологиями: а) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Leftrightarrow A$; б) $((B \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow B$; в) $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$; г) $((B \Rightarrow A) \wedge B) \Rightarrow A$; д) $(B \Rightarrow A) \Rightarrow (\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$. Ответ обоснуйте.

9. С помощью таблиц истинности проверьте, будут ли равносильными высказывания заданной структуры: а) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Leftrightarrow C) \Rightarrow$ $\Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$; б) $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C)$; в) $A \Leftrightarrow (B \vee C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$; г) $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$. Ответ обоснуйте.

10. С использованием таблиц истинности обоснуйте ответ на вопрос задачи. Проверьте, имеет ли место: а) правый дистрибутивный закон конъюнкции относительно эквиваленции; б) левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно импликации; в) правый дистрибутивный закон импликации относительно конъюнкции; г) левый дистрибутивный закон импликации относительно конъюнкции; д) левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно эквиваленции.

11. Выразите следующие теоремы без использования союзов «если..., то...»: а) если треугольники подобны, то их высоты относятся как сходственные стороны; б) если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; в) если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны; г) если две стороны треугольника конгруэнтны друг другу, то биссектриса угла между ними перпендикулярна третьей стороне и делит ее пополам; д) если стороны параллелограмма конгруэнтны, то его диагонали взаимно перпендикулярны; е) если хорды одной и той же окружности конгруэнтны, то они стягивают конгруэнтные дуги.

12. Ответьте (с помощью диаграмм Эйлера – Венна), предварительно записав посылки и предполагаемое заключение на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение [16].

Посылки	*Заключение*
Все B суть C; все B суть A	1) Все A суть C
	2) Некоторые A суть C
	3) Все C суть A
	4) Некоторые C суть A
Все B суть C; ни одно B не есть A	1) Ни одно C не есть A
	2) Некоторые C не суть A
	3) Ни одно A не есть C
	4) Некоторые A не суть C
Все C суть B; все A суть B	1) Все A суть C
	2) Некоторые A суть C
	3) Все C суть A
	4) Некоторые C суть A
Все C суть B; ни одно A не есть B	1) Ни одно C не есть A
	2) Некоторые C не суть A
	3) Ни одно A не есть C
	4) Некоторые A не суть C

13. Ответьте (с помощью диаграмм Эйлера – Венна), предварительно записав посылку и предполагаемое заключение на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение.

Посылка	*Заключение*
Все A суть B	1) Все B суть A
	2) Некоторые B суть A
	3) Некоторые B не суть A
	4) Некоторые A суть B
Некоторые A суть B	1) Некоторые A не суть B
	2) Некоторые B суть A
	3) Некоторые B не суть A
Ни одно A не есть B	1) Ни одно B не есть A
	2) Некоторые A не суть B
	3) Некоторые B не суть A
Некоторые A не суть B	1) Некоторые B не суть A
	2) Ни одно B не есть A
	3) Некоторые B суть A
	4) Некоторые A суть B

14. На множестве $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z},\ |x| \leq 5\}$ заданы предикаты $A(x)$ и $B(x)$.

1) Найдите область истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

2) Определите предикаты $\overline{A(x)}$, $\overline{B(x)}$, $A(x) \wedge B(x)$, $A(x) \vee B(x)$, $A(x) \Rightarrow B(x)$, $B(x) \Rightarrow A(x)$, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, а также предикаты $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$, $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$, $\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$, $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$, $\overline{A(x)} \Leftrightarrow \overline{B(x)}$ и найдите их области истинности.

3) Среди сформулированных предикатов выберите равносильные: а) $A(x)$: «x – четное число», $B(x)$: «$2x - 1 > 0$»; б) $A(x)$: «x – неотрицательное число», $B(x)$: «x делится на 3»; в) $A(x)$: «$x^2 \geq 4$», $B(x)$: «$2 - 3x > -10$»; г) $A(x)$: «x делится на 2», $B(x)$: «$7 - 3x > 11$»; д) $A(x)$: «$1 - 2x < 3$», $B(x)$: «$x^2 - 16 \geq 0$».

15. Даны предикаты: $P(a, b)$: «прямая a параллельна прямой b», $Q(a, \alpha)$: «прямая a лежит в плоскости α», $R(a, \alpha)$: «прямая a параллельна плоскости α». Запишите словами следующие высказывания, приведенные в символическом виде:

а) $(\forall\alpha)(\exists a)Q(a, \alpha)$;

б) $(\forall a)(\forall b)(\forall\alpha)(Q(a, \alpha) \wedge P(a, b) \Rightarrow Q(b, \alpha))$;

в) $(\forall a)(\forall\alpha)(\overline{R(a, \alpha)} \Rightarrow \overline{Q(a, \alpha)})$.

16. Пусть $n \vdots m$ обозначает двухместный предикат «n делится на m без остатка». С помощью этого предиката запишите в символическом виде следующие предложения: а) для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3; б) если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6; в) существуют целые числа, делящиеся на 2 и 3; г) неверно, что существует единственное число, делящееся на 71.

17. Равносильны ли теоремы: а) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность и притом только одну; б) через любые три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность; в) любые три точки окружности не лежат на одной прямой?

18. Данные в а) – г) предикаты обратите в высказывания с помощью кванторов, определите их значения истинности. Рассмотрите все возможные варианты. Сформулируйте отрицание этих высказываний и укажите их значения истинности. Ответы поясните.

а) $A(x)$: «x делится на 2» (X – множество натуральных чисел);

$A(x, y)$: «прямая x параллельна прямой y» (X – множество прямых плоскости);

б) $A(x)$: «четырехугольник x – трапеция» (X – множество четырехугольников плоскости);

$A(x, y)$: «число x больше числа y на 2» (X – множество действительных чисел);

в) $A(x)$: «$x < 3$» (X – множество действительных чисел);

$A(x, y)$: «прямая x перпендикулярна прямой y» (X – множество прямых плоскости);

г) $A(x)$: «x – правильный многоугольник» (X – множество многоугольников плоскости).

19. Установите, находятся ли данные предикаты $A(x)$ и $B(x)$ в отношении логического следования: а) $A(x)$: «$x > 15$», $B(x)$: «$x - 5 > 20$» (X – множество натуральных чисел); б) $A(x)$: «четырехугольник x – ромб», $B(x)$: «четырехугольник x – квадрат» (X – множество четырехугольников плоскости); в) $A(x)$: «$x = 5$», $B(x)$: «$x^2 = 25$» (X – множество действительных чисел); г) $A(x)$: «четырехугольник x – прямоугольник», $B(x)$: «четырехугольник x – квадрат» (X – множество четырехугольников). Если эти предикаты находятся в отношении логического следования, то сформулируйте предложение разными способами.

20. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученное предложение было истинным: а) для того чтобы диагонали в четырехугольнике были взаимно перпендикулярны, …, чтобы он был ромбом; б) для того чтобы $2n > 7$, …, чтобы $n > 4$, где n – натуральное число; в) для того чтобы число делилось на 24, …, чтобы оно делилось на 4 и 3; г) для того чтобы элемент принадлежал разности множеств A и B, …, чтобы он принадлежал множеству A; д) для того чтобы высказывание B было истинным, …, чтобы импликация высказываний A и B была истинной.

21. Для данной теоремы сформулируйте предложения: обратное, противоположное, обратное противоположному – и определите, являются ли эти предложения теоремами. Ответы поясните: а) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; б) во всяком прямоугольнике диагонали равны; в) если разность двух натуральных чисел – натуральное число, то уменьшаемое больше вычитаемого; г) если произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из этих множителей равен нулю; д) любой параллелограмм имеет центр симметрии.

22. Определите схему рассуждения приведенных умозаключений, проверьте, будут ли они правильными. Ответ установите построением заключения из посылок и иллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера – Венна: а) все квадраты – правильные многоугольники; ни один разносторонний прямоугольник не есть правильный многоугольник; следовательно, ни один разносторонний прямоугольник не есть квадрат; б) все целые числа – рациональные; некоторые дроби не являются целыми числами; следовательно, некоторые дроби не являются рациональными числами; в) лимон, малина, облепиха относятся к продуктам с низким содержанием сахара; значит, к продуктам с высоким содержанием сахара лимон, малина, облепиха не относятся.

23. Определите схему рассуждения и проверьте, будет ли оно правильным. Ответ обоснуйте: а) все равновеликие фигуры имеют одинаковую площадь; фигуры F_1 и F_2 имеют одинаковую площадь; следовательно, фигуры F_1 и F_2 равновелики; б) все числа, кратные 100, делятся на 10; все числа, кратные 10, делятся на 5; следовательно, все числа, кратные 100, делятся на 5; в) некоторые прямые плоскости параллельны; некоторые прямые плоскости пересекаются; следовательно, все пересекающиеся прямые плоскости не параллельны; г) все предложения, являющиеся аксиомами, истинны; следовательно, если предложение не является аксиомой, то оно не может быть истинным; д) некоторые четырехугольники являются трапециями; некоторые трапеции имеют ось симметрии; следовательно, некоторые четырехугольники имеют ось симметрии.

Бинарные соответствия и отношения

1. Для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, найдите область определения, область значений, график соответствия, полные образы и полные прообразы элементов множеств X и Y, а также постройте граф и таблицу, задающие данное соответствие R:

а) $R(x, y)$: «число x делится на число y», $X = \{1, 10, 4, 5\}$, $Y = \{0, 2, 3, 5\}$;

б) $R(x, y)$: «число x больше числа y», $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{3, 5, 7, 9\}$;

в) $R(x, y)$: «число x не меньше числа y», $X = \{9, 8, 7, 6\}$, $Y = \{4, 5, 7, 6\}$;

г) $R(x, y)$: «сумма чисел x и y больше 10», $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{7, 8, 9, 6\}$;

д) $R(x, y)$: «произведение чисел x и y больше 15», $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 6, 7, 8\}$.

2. Для нижеследующих соответствий сформулируйте противоположные, обратные и противоположные обратным соответствия: а) «точка a лежит на прямой b»; б) «число a является корнем уравнения b»; в) «прямая a пересекает окружность b»; г) «прямая a пересекает прямую b»; д) «число a больше числа b»; е) «элемент a принадлежит множеству b»; ж) «прямая a перпендикулярна прямой b»; з) «число a является делителем числа b»; и) «$|a| = b$»; к) «$a \leq b$»; л) «человек a выше человека b»; м) «слово a согласовано со словом b в роде, числе и падеже»; н) «город a находится в стране b»; о) «длина отрезка a равна числу b»; п) «река a впадает в море b».

3. Для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, задайте соответствие R^{-1}, обратное данному, и соответствие $\bar{R}$, противоположное данному. Найдите их области определения и области значений, а также графики. Постройте графики соответствий R^{-1} и $\bar{R}$ в координатной плоскости. Постройте графы соответствий R^{-1} и $\bar{R}$. Найдите полные образы и полные прообразы элементов при соответствиях R^{-1} и $\bar{R}$:

а) $R(x, y)$: «$x = y^2$», $X = \{1, 4, 5, 9, 16\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$;

б) $R(x, y)$: «число x меньше числа y», $X = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$, $Y = \{-4, -3, -2, 0, 1\}$;

в) $R(x, y)$: «$\sqrt{x} = y$», $X = \{0, 1, 2, 4, 9\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$;

г) $R(x, y)$: «число x в три раза больше числа y», $X = \{0, 5, 6, 9, 12\}$, $Y = \{0, 2, 3, 4, 5\}$;

д) $R(x, y)$: «число x – делитель числа y», $X = \{0, 2, 3, 5, 7\}$, $Y = \{0, 4, 6, 11, 15\}$.

4. Какие из следующих математических символов – знаки отношений или соответствий, а какие – знаки действий: а) $>$; б) $\neq$; в) $<$; г) $+$; д) $\leq$; е) $-$; ж) $\parallel$; з) $\perp$; и) $\cdot$; к) $\subset$; л) $\cap$; м) $\approx$; н) $\vdots$; о) $\cup$; п) $\in$; р) $\setminus$; с) $\sim$; т) : ? Для символов – знаков отношений укажите множества,

в которых обычно рассматриваются эти отношения (например, $\parallel$ – отношение параллельности на множестве прямых, или отношение параллельности на множестве плоскостей, или соответствие параллельности между прямыми и плоскостями).

5. Для отношения R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x, y \in X$, 1) найдите область определения, область значений, график отношения, полные образы и полные прообразы элементов множества X, находящихся в отношении R, а также постройте граф и таблицу, задающие данное отношение R; 2) определите отношения R^{-1} и $\bar{R}$, найдите их графики, а также постройте графы этих отношений:

а) $R(x, y)$: «число x с числом y образуют правильную дробь вида $\frac{x}{y}$», $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (правильная дробь меньше единицы);

б) $R(x, y)$: «числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 3», $X = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ (при делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2);

в) $R(x, y)$: «сумма чисел x и y больше 7», $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

г) $R(x, y)$: «число x при счете появляется не позже числа y», $X = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;

д) $R(x, y)$: «числа x и y не имеют общих делителей, отличных от единицы», $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

6. Определите бинарное отношение для элементов данного множества и используйте его граф при решении следующих задач.

а) Имеется семь сортов конфет. Известно, что конфеты «Красная Шапочка» дороже «Аленки», но дешевле конфет «Каракум», конфеты «Нива» дороже конфет «Ласточка», но дешевле «Аленки», а «Грильяж» дороже конфет «Птичье молоко», но дешевле «Ласточки». Какие конфеты самые дорогие? Какие из конфет дешевле – «Красная Шапочка» или «Нива»?

б) Имеется семь фирм-производителей мобильных телефонов: Apple, Fly, Lenovo, Sony, Nokia, Samsung, Xiaomi. Известно, что некоторый телефон марки Sony можно приобрести дешевле, чем телефон марки Lenovo, но дороже, чем телефон марки Fly. Некоторый телефон марки Nokia оказался дешевле телефона Samsung, но дороже телефона Lenovo, а телефон Xiaomi – дешевле некоторого телефона Apple, но дороже телефона Samsung. Телефон какого производителя оказался самым дорогим? Какой телефон самый дешевый?

в) Из семи бригад скорой помощи в течение месяца первая совершила больше всех выездов, четвертая бригада выезжала на вызовы чаще, чем вторая, но реже, чем третья, седьмая бригада имеет выездов больше, чем пятая, но меньше, чем вторая, а пятая бригада выезжала на вызовы чаще шестой. Какая бригада совершила меньше всех выездов? Какая из бригад выезжала на вызовы чаще: седьмая или четвертая?

г) Имеется семь различных автобусных маршрутов. Известно, что на втором маршруте остановок больше, чем на третьем, но меньше, чем на четвертом, на седьмом маршруте остановок больше, чем на четвертом, но меньше, чем на шестом, на третьем – остановок больше, чем на пятом, а на шестом – остановок меньше, чем на первом. На каком из маршрутов меньше всего остановок? На каком из маршрутов остановок больше: на первом или пятом? На третьем или седьмом?

7. Выясните, какими свойствами обладают следующие отношения, назовите среди них отношения эквивалентности: а) «a конгруэнтно b» (в множестве треугольников); б) «a концентрично b» (в множестве окружностей плоскости); в) «a равно b» (в множестве рациональных чисел); г) «a меньше или равно b» (в множестве целых чисел); д) «a не больше, чем b» (в множестве целых чисел); е) «a кратно b» (в множестве натуральных чисел); ж) «A является подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); з) «A является собственным подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); и) «A является дополнением B до прямоугольника» (в множестве геометрических фигур); к) «a следует за b» (в множестве натуральных чисел).

8. На множестве $X = \{a, b, c, p\}$ задано отношение M. Является ли оно отношением порядка, если:

а) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p), (b, c), (p, b)\}$;

б) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (a, b), (b, c), (a, c)\}$;

в) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p)\}$.

9. Даны два множества: $A = \{17, 315, 26, 10, 125, 7\}$, $B = \{2, 3\}$. Изобразите эти множества при помощи диаграмм Эйлера – Венна и постройте графы двух соответствий, одно из которых являлось бы отображением множества A во множество B, а другое – отображением множества A на множество B. Могут ли эти отображения оказаться инъективными?

10. Выясните, является ли соответствие R, определяемое предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, отображением. В случае, когда R – отображение, определите его тип. Ответ обоснуйте:

а) $R(x, y)$: «в трапецию x вписана окружность y», X – множество трапеций плоскости, Y – множество окружностей плоскости;

б) $R(x, y)$: «из вершины x выходит биссектриса y», X – множество вершин треугольника, Y – множество биссектрис этого треугольника;

в) $R(x, y)$: «треугольник x имеет площадь y», X – множество треугольников плоскости, Y – множество положительных действительных чисел;

г) $R(x, y)$: «улица с названием x находится в городе y», X – множество всех возможных названий улиц, Y – множество городов России;

д) $R(x, y)$: «на странице x начинается параграф y», X – множество страниц учебника, Y – множество параграфов учебника.

11. Докажите, что множество натуральных чисел равномощно множеству: а) четных натуральных чисел; б) целых отрицательных чисел; в) кубов натуральных чисел; г) натуральных чисел, кратных 8.

12. Для доказательства следующих предложений используйте соответствующие определения:

а) множество натуральных чисел, кратных 10, счетное;

б) множество точек окружности, вписанной в треугольник, и множество точек окружности, описанной около этого треугольника, равномощные;

в) множество натуральных чисел, кратных 5, счетное;

г) множество натуральных чисел, кратных 5, бесконечное;

д) множество точек сторон выпуклого многоугольника, описанного вокруг окружности, и множество точек сторон выпуклого многоугольника, вписанного в эту окружность, равномощные.

Алгебраические операции и структуры

1. Определите, для каких пар $\langle *, B\rangle$ истинно высказывание «$*$ является алгебраической операцией на множестве B». Приведите обоснованное решение: а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – вычитание, B – множество целых чисел; в) $*$ – образование наибольшего общего делителя, B – множество натуральных чисел; г) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n$, $n \in \mathbb{N}$;

д) $*$ – образование степени: $\langle m,\ n\rangle \to m^2$, B – множество натуральных чисел.

2. Определите, относительно каких алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) замкнуты числовые множества: а) $\{3n+1\}$, n – целое; б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; в) {положительные рациональные числа}; г) $\{0, 1\}$; д) {четные целые числа}. При решении воспользуйтесь определением замкнутости множества.

3. Установите, какие алгебраические операции коммутативные: 1) в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$; 2) в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; решение нужно обосновать: а) умножение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x + 2y$; в) $\langle x,\ y\rangle \to$ НОК(x, y); г) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x^2 - y^2$; д) вычитание; е) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to |x + y|$; ж) $\langle x,\ y\rangle \to$ НОД(x, y); з) сложение; и) деление.

4. Докажите или опровергните, что данные алгебраические операции ассоциативные в указанных множествах:

а) операция вычитания множеств в универсальном множестве U;

б) операция вычитания в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$;

в) операция эквиваленции в множестве высказываний;

г) операция возведения в степень в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

д) операция импликации в множестве высказываний;

е) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to 2x - y$, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$;

ж) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to |x - y|$, в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$;

з) операция пересечения множеств в универсальном множестве U;

и) операция умножения в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

5. Установите, существует ли: 1) нейтральный элемент для данной операции в указанном множестве; 2) симметричный данному элемент относительно данной операции в указанном множестве; в случае положительного ответа найдите эти элементы: а) для операции сложения в множестве отрицательных действительных чисел; б) операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A: $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ в универсальном множестве U; в) операции $\langle x,\ y\rangle \to$ $\to x + y + xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; г) операции умножения в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; д) операции декартова умножения множеств, элементы которых – целые числа (в рамках

задачи речь идет о нейтральном элементе справа); е) операции деления в множестве отрицательных чисел; ж) операции возведения в степень в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$; з) операции пересечения множеств A и B в универсальном множестве U; и) операции объединения множеств A и B в универсальном множестве U.

6. Проверьте, является ли операция $*$ дистрибутивной относительно операции $\circ$ в множестве M. Для операций на множестве множеств U ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Для операций на числовых множествах или множестве высказываний проведите аналитические рассуждения, используя определение дистрибутивной операции:

а) $*$ – деление, $\circ$ – сложение, M – множество положительных чисел;

б) $*$ – вычитание, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество;

в) $*$ – вычитание, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

г) $*$ – объединение, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество;

д) $*$ – пересечение, $\circ$ – объединение, $M = U$ – универсальное множество;

е) $*$ – сложение, $\circ$ – вычитание, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

ж) $*$ – деление, $\circ$ – умножение, M – множество положительных чисел;

з) $*$ – конъюнкция, $\circ$ – импликация, M – множество высказываний;

и) $*$ – возведение в степень, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. (Докажите, что операция $*$ дистрибутивна справа.)

7. Задайте множество $\mathbb{Z}_k$ перечислением элементов при: а) $k = 11$; б) $k = 7$; в) $k = 6$; г) $k = 3$; д) $k = 4$; е) $k = 9$. Выполните следующее задание. Множество $\mathbb{Z}_k$ состоит из чисел $0, 1, 2, \dots, k-1$. Операции сложения и умножения определяются так: суммой чисел a и b называют остаток от деления $a + b$ на k, а произведением этих чисел – остаток от деления $a \cdot b$ на k. Докажите, что сложение и умножение – алгебраические операции в множестве $\mathbb{Z}_k$. Составьте таблицы сложения

и умножения в множестве $\mathbb{Z}_k$. Коммутативны ли эти операции в множестве $\mathbb{Z}_k$? Какой элемент нейтрален относительно сложения, а какой – относительно умножения? Найдите элемент, противоположный элементу $k-2$. Найдите элемент, обратный элементу $k-1$. Ассоциативны ли сложение и умножение в множестве $\mathbb{Z}_k$? Проверьте, является ли $\mathbb{Z}_k$ полем или только кольцом.

Комбинаторика

1. Сколькими способами можно составить список студентов группы, в которой 25 человек?

2. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму из четырех столбцов четырехцветной шариковой ручкой так, чтобы каждый столбец был окрашен в определенный цвет?

3. Сколькими способами можно выбрать старосту, профорга и физорга из 25 студентов?

4. В классе 20 мальчиков и 12 девочек. Из них нужно назначить одного дежурного в столовую. Сколькими способами можно это сделать?

5. В кружке «Юный математик» занимаются 25 человек. Необходимо избрать старосту кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно их избрать?

6. Сколько разных слов можно образовать при помощи букв слова «соединение»?

7. Сколько автомашин можно обеспечить трехзначными номерами?

8. Из 12 девушек и 15 юношей нужно выбрать четыре пары для танца. Сколькими способами можно осуществить выбор?

9. В гастрономе три вида коробок с конфетами. Сколькими способами можно купить набор из пяти коробок?

10. На книжной полке стоят 20 книг по алгебре, 12 книг по геометрии и семь учебников русского языка. Сколькими способами можно выбрать одну книгу по математике?

11. Имеется пять билетов «Русское лото», шесть билетов «Спортлото» и 10 билетов «Золотой ключ». Сколькими способами можно выбрать один билет «Русское лото» или «Золотой ключ»?

12. Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

13. Из цифр 1, 3, 5 составьте различные трехзначные числа так, чтобы: а) в числе не было одинаковых цифр; б) в числе цифры могли повторяться.

14. Из цифр 2, 4, 6, 8 составьте различные трехзначные числа так, чтобы цифры в числе не повторялись.

15. Сколько четных трехзначных чисел можно записать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в записи числа не повторяются)?

16. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составьте всевозможные четырехзначные числа, кратные 5. Сколько таких чисел?

17. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 0, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в записи числа: а) не повторяются; б) повторяются?

18. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 8 и 9?

19. Сколько различных стартовых шестерок можно образовать из 10 волейболистов? Сколькими способами можно их расставить на площадке?

20. Сколько пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0 и 1?

21. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя вместо звездочки пропущенные цифры в записи числа: *2*5; 3*7*?

22. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в записи числа: а) не должны повторяться; б) могут повторяться?

23. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 1869?

24. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2 и 3, не повторяя цифры в числе?

25. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 5 и 7, не повторяя цифры в числе.

26. Сколько различных перестановок цифр может быть сделано в числе 123 589, чтобы каждый раз получалось четное число?

27. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из чисел 7, 2, 11, 9, 5, 3?

28. Сколько различных дробей можно записать с помощью чисел 3, 5, 7, 1, 13, 16, используя каждый раз только два числа?

29. В магазине пять сортов шоколадных конфет и четыре сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

30. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех разных имен?

31. Сколько хорд можно провести через восемь точек, лежащих на одной окружности?

32. Сколькими способами можно выбрать из слова «кортеж» две согласные и одну гласную?

33. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на белых полях шахматной доски?

34. Определите число всех диагоналей у пяти-, восьми-, двенадцати- и пятнадцатиугольника?

35. У одного студента семь книг по математике, а у другого – девять. Сколькими способами они могут обменять друг у друга по две книги?

36. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6 и 7 см?

37. Сколькими способами могут разместиться шесть человек на одной скамейке?

38. В группе 25 студентов. Они обменялись друг с другом фотографиями. Сколько всего было роздано фотографий?

39. Сколькими способами можно группу из 15 студентов разделить на две так, чтобы в одной было четыре человека, а в другой – 11?

40. В поезде освободилось четырехместное купе. На билеты претендуют семь человек. Сколько имеется различных вариантов выдачи билетов, если: а) места занумерованы; б) места не занумерованы?

41. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С – три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из города А в город С?

42. В подразделении 40 солдат и пять офицеров. Сколькими способами можно назначить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера?

43. Сколькими способами можно рассадить трех человек, если есть семь свободных мест?

44. В автобусном парке 38 машин. Сколькими способами диспетчер может назначить 36 машин для выхода в рейс?

45. Из десяти букв (a, b, c, d, e, f, g, h, i, k) нужно выбрать пять так, чтобы среди выбранных была буква d. Сколькими способами это можно сделать?

46. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову. Сколькими способами это можно сделать?

47. Сколькими способами из колоды, содержащей 36 карт, можно выбрать по одной карте каждой масти?

48. Сколько сигналов можно передать с помощью четырех различных флажков, если каждый сигнал подается не менее чем двумя флажками?

49. Сколькими способами можно записать подряд четыре единицы и шесть нулей?

50. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может в записи числа встречаться несколько раз?

51. Имеется три груши, четыре яблока и два персика. Сколько возможно комбинаций для выбора нескольких фруктов так, чтобы среди выбранных были и груши, и яблоки, и персики?

52. Для полета на Марс необходимо составить экипаж космического корабля: командир корабля и его помощник, два бортинженера и врач. К полету готовятся 15 летчиков, 20 инженеров, знающих устройство космического корабля, и восемь врачей. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

53. Для несения почетного караула из 10 человек приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погранвойск, артиллерии, морского флота и ракетных войск. Сколькими способами можно выбрать состав почетного караула?

54. На студенческий вечер собрались юноши и девушки восьми факультетов. Для исполнения русской народной пляски пригласили 10 студентов. Сколькими способами можно выбрать эту десятку? Сколькими способами можно сделать так, чтобы среди танцующих были студенты факультета начального образования?

55. Имеется неограниченное количество монет по 1, 10 и 50 копеек. Сколькими способами можно образовать набор из 20 монет?

56. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно записать из букв слова «ученик»?

57. Из натуральных чисел от 1 до 24 выбирают три числа так, чтобы их сумма была четной. Сколькими способами это можно осуществить?

58. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

59. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «выборка» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

60. Имеется четыре чашки, пять блюдец и шесть чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

61. Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных учебников между четырьмя студентами?

62. Из трех инженеров и девяти экономистов нужно составить комиссию из семи человек. Сколькими способами это можно сделать, если в нее должен входить хотя бы один инженер?

63. Сколькими способами можно выбрать из 25 человек бригаду для работы, чтобы в нее входило не менее трех человек?

64. Среди перестановок цифр числа 1 234 567 сколько таких, которые: а) начинаются с 123; б) кончаются 123; в) начинаются с цифр 1, 2 или 3; г) начинаются со стоящих рядом цифр 1 и 2?

65. Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно из них составить набор, если в наборе должно быть четное число конфет?

66. На плоскости расположены 10 точек так, что только три из них лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки?

67. По условию матча между шахматистами A и B победителем считается тот, кто первым выиграет у противника три партии (необязательно подряд), ничьи исключаются. Сколькими способами может сложиться матч?

68. При составлении кода Морзе каждая буква и цифра обозначается цепочкой, составленной из знаков «точка» и «тире». Сколько существует различных цепочек длиной не более пяти знаков?

69. Поезд состоит из двух багажных вагонов, четырех плацкартных и трех купейных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные должны стоять в начале поезда, а купейные – в конце?

70. Двадцать студентов разделили на три группы. В первую вошли три человека, во вторую – пять, а в третью – 12. Сколькими способами можно разделить студентов?

71. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

72. Пять юношей и три девушки играют в шахматы. Сколькими способами они могут разбиться на две команды, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке?

73. Из группы, состоящей из семи мужчин и четырех женщин, надо выбрать шесть человек так, чтобы среди них было не менее двух мужчин. Сколькими способами это можно сделать?

74. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

75. В вазе стоят 10 красных и пять розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

76. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

77. Сколькими способами можно распределить пять учеников по трем параллельным классам?

78. Сколькими способами можно распределить пять одинаковых подарков между тремя детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

79. Сколькими способами можно подарить пять разных игрушек трем детям так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы одну игрушку?

80. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

Системы счисления

1. В задачах при выполнении решения использовать десятичную запись числа.

а) Найдите двузначное число, если известно, что оно больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на 18, а при делении этих чисел в частном получается 2 и в остатке 5.

б) Найдите двузначное число, если известно, что оно больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на 45. Если же между цифрами искомого числа вписать 0 и разделить полученное на искомое, то неполное частное будет равно 9, а остаток 54.

в) Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 7, а число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, больше искомого на 27.

г) Найдите двузначное число, цифра десятков которого на один больше цифры единиц. Если к этому числу приписать справа 2, то полученное число будет на 108 больше числа, которое получится, если к искомому числу приписать 2 слева.

2. Найдите неизвестное x (либо основание системы счисления, либо число в указанной системе счисления) при условии равенства данных чисел: а) число 1020_8 и число x_3; б) число 103 и число 403_x; в) число 53 и число 203_x; г) число 3455_6 и число x_{12}; д) число 11011_2 и число x_7.

3. Назовем круглыми все числа, оканчивающиеся на 0, и совсем круглыми все числа, оканчивающиеся на 00. Каким свойством должно обладать десятичное число, чтобы после перевода: а) в семеричную; б) пятеричную систему счисления – оно было круглым? Совсем круглым?

4. Обоснуйте алгоритмы сложения, вычитания, умножения и деления чисел ℓ_1 и ℓ_2: а) $\ell_1 = 5267$, $\ell_2 = 354$; б) $\ell_1 = 3752$, $\ell_2 = 468$; в) $\ell_1 = 4825$, $\ell_2 = 796$.

5. При решении следующих задач используйте теорему о представлении числа в позиционной системе счисления с основанием p.

а) В какой системе счисления верно равенство $113 - 24 \cdot 3 = 17$?

б) В какой системе счисления при делении числа 151 на 34 в частном получится 3 и в остатке 13?

в) В какой системе счисления верно равенство $144 - 23 \cdot 3 = 31$?

г) В какой системе счисления при делении числа 140 на 34 в частном получится 3 и в остатке 2?

6. Найдите значение выражения в заданной системе счисления, а затем выполните проверку в десятичной системе:

а) $(4377_9 + 122_9 \cdot 45_9): (264_9 - 23_9 \cdot 8_9)$;

б) $(7715_8 + 311_8 \cdot 76_8): (570_8 - 77_8 \cdot 5_8)$;

в) $(6615_7 + 466_7 \cdot 56_7): (1300_7 - 46_7 \cdot 16_7)$.

Делимость натуральных чисел

1. Среди чисел $211, 247, 307, 357, 547, 589$ выберите простые и ответ обоснуйте.

2. Докажите, что сумма, составленная из двузначного, трехзначного и четырехзначного чисел, записанных с помощью одной и той же цифры, делится на 3.

3. Пусть $p \geq 5$ – простое число. Докажите, что $p^4 - 1$ делится без остатка на 48.

4. Докажите, что если числа p, $p^2 + 2$ простые, то $p^3 + 2$ – простое число.

5. Докажите, что всякое простое число, большее 3, имеет вид $6k + 1$ или $6k + 5$, где k – натуральное число.

6. Докажите, что при всех натуральных $n > 1$ число: а) $n^4 + 4$ – составное; б) $n^5 + n^4 + 1$ – составное; в) $n^4 + 64$ – составное.

7. Вместо $*$ впишите цифры так, чтобы полученное число делилось на заданное по условию число: $332\ 4*2$ – на 4; $107\ *25$ – на 3; 3 41* 0*1 – на 9; 2 477 **0 – на 25. Ответ обоснуйте.

8. Не находя значения выражения, выясните, делится ли оно на заданное число d. Ответ обоснуйте.

1) $d = 12$	2) $d = 18$
а) $18\,936 + 23\,986 + 93\,458$	а) $16\,020 + 18\,026 + 15\,256$
б) $66\,389 - 13\,466 + 66\,144$	б) $9846 + 6086 - 4808$
в) $3179 \cdot 3993 \cdot 8788$	в) $8591 \cdot 6422 \cdot 3267$
г) $3388 \cdot 4628 \cdot 8372$	г) $2314 \cdot 6591 \cdot 6591$
д) $8366 \cdot 4539 \cdot 4418$	д) $3179 \cdot 4539 \cdot 6270$

3) $d = 20$

а) $3390 + 5790 + 19\,580$

б) $23\,600 + 12\,784 - 12\,464$

в) $4732 \cdot 3971 \cdot 3115$

г) $5915 \cdot 10\,082 \cdot 15\,842$

д) $2890 \cdot 3179 \cdot 5766$

4) $d = 24$

а) $2136 + 2338 + 2390$

б) $9240 + 6866 - 5378$

в) $3872 \cdot 6241 \cdot 23\,763$

г) $13\,706 \cdot 7436 \cdot 2937$

д) $8525 \cdot 3124 \cdot 3042$

5) $d = 28$

а) $4986 + 3388 + 4758$

б) $48\,408 + 17\,444 - 21\,864$

в) $1309 \cdot 1749 \cdot 5340$

г) $5041 \cdot 2366 \cdot 1378$

д) $1958 \cdot 3266 \cdot 4725$

6) $d = 36$

а) $6069 + 6984 + 7692$

б) $4428 + 16\,412 - 5288$

в) $7921 \cdot 2314 \cdot 2178$

г) $4056 \cdot 5041 \cdot 5577$

д) $2379 \cdot 3549 \cdot 3916$

7) $d = 40$

а) $6770 + 7120 + 9870$

б) $5890 + 6360 - 3570$

в) $3916 \cdot 7921 \cdot 9790$

г) $8281 \cdot 5432 \cdot 4615$

д) $9295 \cdot 5538 \cdot 3724$

8) $d = 42$

а) $6186 + 6678 + 5196$

б) $13\,484 + 10\,416 - 11\,258$

в) $5070 \cdot 5785 \cdot 6853$

г) $7921 \cdot 5607 \cdot 3380$

д) $2769 \cdot 3692 \cdot 5467$

9) $d = 45$

а) $7625 + 4815 + 7185$

б) $87\,750 + 19\,850 - 13\,235$

в) $4563 \cdot 5041 \cdot 9295$

г) $3721 \cdot 4539 \cdot 7455$

д) $6162 \cdot 5538 \cdot 3355$

10) $d = 50$

а) $8460 + 13\,350 + 39\,090$

б) $22\,800 + 32\,720 - 31\,170$

в) $2209 \cdot 3382 \cdot 4225$

г) $3355 \cdot 3718 \cdot 9295$

д) $5043 \cdot 7810 \cdot 9165$

9. Найдите хотя бы одно натуральное n, которое делится на 11 без остатка, а при делении на $2, 3, \ldots, 10$ дает в остатке 1.

10. Докажите, что если натуральное число при делении на 5 дает в остатке 1, то и квадрат его при делении на 5 дает остаток 1.

11. Число a при делении на 3 дает остаток 1. Какой остаток при делении на 3 дадут числа a^2, a^3?

12. Докажите, что $7^{191} - 1$ делится на 6.

13. Докажите, что для всех натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, число $mn(m^2 - n^2)$ делится на 6.

14. Докажите, что произведение: а) любых четырех последовательных натуральных чисел делится нацело на 24; б) любых пяти последовательных натуральных чисел делится нацело на 120. Что можно сказать о делителе произведения шести последовательных натуральных чисел?

15. Известно, что $(n-1) \vdots 2, (n-2) \vdots 5$. Докажите, что $(n+3) \vdots 10$.

16. Число m при делении на 4 дает в остатке 1, а при делении на 5 дает в остатке 2. Чему равен остаток от деления числа m на 20?

17. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 разными способами, если: а) $\ell_1 = 383\,328$, $\ell_2 = 574\,992$, $\ell_3 = 1\,054\,152$; б) $\ell_1 = 470\,448$, $\ell_2 = 555\,984$, $\ell_3 = 1\,881\,792$.

18. Найдите числа ℓ_1, ℓ_2 по известным данным, решение обоснуйте:

а) $\ell_1 : \ell_2 = 7 : 13$, $\ell_1 \cdot \ell_2 = 20\,475$;

б) $\text{НОД}(\ell_1, \ell_2) = 11$, $\text{НОК}(\ell_1, \ell_2) = 3740$;

в) $\ell_1 : \ell_2 = 11 : 17$, $\text{НОК}(\ell_1, \ell_2) = 5610$;

г) $\ell_1 : \ell_2 = 11 : 17$, $\ell_1 \cdot \ell_2 = 60\,588$.

19. При решении задач а) – г) используйте понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного нескольких чисел.

а) Какое наибольшее число одинаковых наборов можно составить из 1085 простых карандашей, 1395 тетрадей в линейку и 1705 тетрадей в клетку?

б) Какое наименьшее число делится на 9, но при делении на 7 и 8 дает в остатке 1?

в) В магазины доставляли яблоки в одинаковых ящиках. Какова наибольшая возможная масса одного ящика, если в первый магазин доставили 1815 кг яблок, во второй магазин – 2535 кг, а в третий – 1215 кг?

г) Три киоска продают бумагу в одинаковых пачках. Каково наибольшее возможное число листов в одной пачке, если известно, что первый киоск продал 7350 листов бумаги, второй – 5100 листов, а третий – 4350 листов бумаги?

20. Определите истинность высказываний. Будут ли в указанном перечне высказываний взаимно обратные и взаимно противоположные: а) «если число не делится на 9 и 2, то оно не делится на 18»; б) «если число не делится на 9 или 2, то оно не делится на 18»; в) «если число делится хотя бы на одно из чисел – 9 или 2, то оно делится

на 18»; г) «если число делится на 9 и 2, то оно делится на 18»; д) «если число делится на 26, то оно делится на 2 и 13»; е) «если число делится на 26, то оно делится на 2 или 13»; ж) «если число не делится на 26, то оно не делится на 2 и 13»; з) «если число не делится на 26, то оно не делится на 2 или 13».

Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел

1. На основе теоретико-множественного подхода к определению суммы, разности, произведения и частного целых неотрицательных чисел найдите значения выражений: а) $2 + 6$; $8 - 2$; $4 \cdot 3$; $12 : 4$; б) $7 + 3$; $10 - 7$; $2 \cdot 7$; $14 : 7$.

2. Не находя значений выражений, сравните их, используя теоретико-множественный подход к определениям основных понятий и отношений.

1. а) $2 \cdot 3$ и $8 - 2$; б) $2 + 3$ и $8 - 2$; в) $9 : 3$ и $12 : 3$.

2. а) $5 \cdot 2$ и $4 + 6$; б) $8 + 5$ и $5 \cdot 2$; в) $12 : 3$ и $15 : 3$.

3. Обоснуйте равенство: а) $(12 - 5) - 4 = 12 - (5 + 4)$; б) $10 - (4 + 3) = (10 - 4) - 3$; в) $(7 + 5) - 4 = (7 - 4) + 5$, используя теоретико-множественный подход к определению натуральных чисел и операций над ними, а также приведите пример задачи школьного типа, при решении которой можно использовать выражения из левой и правой частей равенства.

4. Обоснуйте выбор действия при решении задач школьного типа.

а) На аллее в парке растет восемь берез, а кленов – на четыре больше. Сколько кленов растет на аллее в парке?

б) На аллее в парке растет 12 кленов. Это на четыре больше, чем берез. Сколько берез растет на аллее в парке?

в) На аллее в парке растет восемь берез. Это в два раза больше, чем кленов. Сколько кленов растет на аллее в парке?

г) На аллее в парке растет восемь берез, а кленов – в два раза больше. Сколько кленов растет на аллее в парке?

д) Ученики первого класса изготовили пять скворечников, а ученики второго класса – на три больше. Сколько скворечников изготовили ученики второго класса?

е) Ученики второго класса изготовили восемь скворечников, а ученики первого класса – пять. На сколько скворечников меньше изготовили ученики первого класса?

ж) Ученики первого класса изготовили пять скворечников, а ученики второго класса – в два раза больше. Сколько скворечников изготовили ученики второго класса?

з) Ученики второго класса изготовили 10 скворечников, а ученики первого класса – пять. Во сколько раз меньше скворечников изготовили ученики первого класса?

5. При решении задач используйте теорему о делении с остатком.

а) Найдите, какой остаток при делении на 15 дают сумма, разность и произведение чисел ℓ_1 и ℓ_2, если известно, что эти числа делятся на 5, а при делении на 15 дают разные остатки, отличные от нуля.

б) Найдите, какой остаток при делении на 11 дают сумма, разность и произведение чисел ℓ_1 и ℓ_2, если известно, что ℓ_1 при делении на 11 дает в остатке 8, а ℓ_2 при делении на 11 дает в остатке 7.

в) Найдите, какой остаток при делении на 8 дают сумма, разность и произведение чисел ℓ_1 и ℓ_2, если известно, что эти числа делятся на 4, а при делении на 8 дают одинаковые остатки, отличные от нуля.

г) Найдите, какой остаток при делении на 18 дают сумма, разность и произведение чисел ℓ_1 и ℓ_2, если известно, что эти числа делятся на 6, а при делении на 18 дают разные остатки, отличные от нуля.

6. На множестве M бинарное отношение R задано предикатом $R(x, y)$: «числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 5». Постройте граф этого отношения и определите его свойства.

Доказательство равенств и делимости выражений на число методом математической индукции

В задачах 1 – 30 докажите, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место следующее равенство.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
3. $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
4. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$.

5. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

6. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

7. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$.

8. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\dots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

9. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\dots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

10. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

11. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

12. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

13. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\dots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}$.

14. $\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 22}+\dots+\frac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\frac{n}{7n+1}$.

15. $\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 25}+\dots+\frac{1}{(8n-7)(8n+1)}=\frac{n}{8n+1}$.

16. $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$.

17. $\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\dots+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{n}{5(2n+5)}$.

18. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

19. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

20. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

21. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

22. $-1+3-5+7-9+\dots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$.

23. $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

24. $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

25. $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

26. $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

27. $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

28. $1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

29. $0\cdot 1^2+1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\dots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

30. $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\dots+n\cdot 2^n=2+(n-1)2^{n+1}$.

В задачах 31 – 40 докажите, используя метод математической индукции, делимость данных выражений на заданное число при любом натуральном значении переменной n.

31. а) $(2n^3+3n^2+7n)\,\vdots\,2$
б) $(n^4-n^2)\,\vdots\,12$
в) $(6^{n+2}+7^{2n+1})\,\vdots\,43$
г) $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})\,\vdots\,17$
д) $(3^{2n+1}+40n-67)\,\vdots\,64$

32. а) $(n^3+2n)\,\vdots\,3$
б) $(n^4+6n^3+11n^2+6n)\,\vdots\,2$
в) $(3^{2n+1}+1)\,\vdots\,4$
г) $(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})\,\vdots\,37$
д) $(4\cdot 6^n+5n-4)\,\vdots\,5$

33. а) $(n^3+3n^2+5n)\,\vdots\,3$
б) $n^2(n^2-1)\,\vdots\,4$
в) $(49^n-1)\,\vdots\,6$
г) $(3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-2^{2n}\cdot 3^{3n+2})\,\vdots\,1053$
д) $(7^n+3n-1)\,\vdots\,9$

34. а) $n(14n^2+9n+1)\,\vdots\,6$
б) $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)\,\vdots\,9$
в) $(36^n-1)\,\vdots\,5$
г) $(11^{n+1}+12^{2n-1})\,\vdots\,133$
д) $(9^{n+1}-18n-9)\,\vdots\,18$

35. а) $(n^5-n)\,\vdots\,5$
б) $(2n^3+3n^2+7n)\,\vdots\,3$
в) $(5^{2n-1}+1)\,\vdots\,2$
г) $(7^{n+2}+8^{2n+1})\,\vdots\,57$
д) $(4^n+15n-1)\,\vdots\,9$

36. а) $(n^3+11n)\,\vdots\,3$
б) $n(n+1)(n+2)(n+3)\,\vdots\,4$
в) $(5^{n+3}\cdot 2^n-125)\,\vdots\,9$
г) $(11^{n+2}+12^{2n+1})\,\vdots\,133$
д) $(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)\,\vdots\,25$

37. а) $(n^3-7n+6)\,\vdots\,6$
б) $(2n^2+n)(7n+1)\,\vdots\,3$
в) $(8\cdot 2^{3n}-1)\,\vdots\,7$
г) $(5^{n+3}\cdot 2^n-125)\,\vdots\,45$
д) $(3^{2n+2}-8n-9)\,\vdots\,64$

38. а) $(n^3+5n)\,\vdots\,3$
б) $(n^6-3n^5+6n^4-7n^3+$
$+5n^2-2n)\,\vdots\,24$
в) $(7^{2n}-1)\,\vdots\,8$
г) $(2\cdot 7^n+1)\,\vdots\,3$
д) $(4^n+15n-1)\,\vdots\,3$

39. а) $n(2n^2-3n+1)\,\vdots\,6$
б) $(n^7-n)\,\vdots\,7$
в) $(7^{n+2}+8^{2n+1})\,\vdots\,19$
г) $(6^{2n}-1)\,\vdots\,35$
д) $(9^n-8n-1)\,\vdots\,8$

40. а) $(n^3+5n)\,\vdots\,6$
б) $(2n^2+n)(7n+1)\,\vdots\,6$
в) $(3^{2n+1}+5)\,\vdots\,8$
г) $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})\,\vdots\,17$
д) $(7^n+3n-1)\,\vdots\,3$

В задачах 41 – 50 докажите тождество в множестве целых неотрицательных чисел по указанной в задаче переменной, применяя метод математической индукции.

41. $(a+b)c = ac + bc$ (по b).
42. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ (по b).
43. $a(b+c) = ab + ac$ (по a).
44. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$ (по c).
45. $a(b+c) = ab + ac$ (по b).
46. $a + (b+c) = (a+b) + c$ (по b).
47. $1 + a = a'$.
48. $a \cdot b = b \cdot a$ (по b).
49. $a + b = b + a$ (по b).
50. $a + 1 = a'$.

Натуральное число как результат измерения величины

1. Найдите сумму, разность, произведение и частное данных чисел, рассматривая при этом натуральные числа как результат измерения величин: а) $6+4$; $12-8$; $7 \cdot 2$; $15 : 3$; б) $9+5$; $15-8$; $3 \cdot 6$; $24 : 6$.

2. Обоснуйте выбор действия при решении задач школьного типа, определив величины, о которых идет речь в задачах, единицы их измерения, а также используя определения суммы, разности, произведения или частного натуральных чисел, являющихся результатом измерения величин.

а) Пшеницу посеяли на поле площадью 12 га, а рожь – на поле площадью 4 га. Во сколько раз площадь, занятая пшеницей, больше площади, занятой рожью. Какова общая площадь посевов?

б) В магазине купили два пакета муки и три пакета сахара. Какова масса всей покупки, если масса одного пакета муки – 3 кг, а масса одного пакета сахара – 2 кг?

в) Лодка за первый час прошла 8 км. Это на 2 км больше, чем за второй, и на 2 км меньше, чем за третий час. Какой путь прошла лодка за три часа?

г) Площадь первой комнаты 16 м^2. Это на 6 м^2 больше, чем площадь второй комнаты, и на 2 м^2 меньше, чем площадь третьей. Какова общая площадь всех трех комнат?

д) Турист за три часа прошел 12 км. Какое расстояние он пройдет за четыре часа, двигаясь с той же скоростью?

е) Чтобы приготовить бронзу для статуи, взяли 36 кг меди, 4 кг цинка и 2 кг олова. Во сколько раз масса меди больше массы цинка? На сколько килограммов масса олова меньше массы цинка?

ж) В бочке было 180 л воды. На полив огурцов израсходовали 60 л. Это на 20 л больше, чем израсходовали на полив помидоров. Сколько литров воды осталось в бочке после того, как полили огурцы и помидоры?

з) В магазине купили 6 кг муки и 6 кг сахара, расфасованных в пакеты. Известно, что масса одного пакета с мукой – 2 кг, а одного пакета с сахаром – 3 кг. Сколько пакетов с мукой и пакетов с сахаром купили в магазине?

3. Обоснуйте равенство: а) $(4+5)-3=(4-3)+5$; б) $(10-3)-$ $-4=(10-4)-3$; в) $(12-5)-3=(12-3)-5$, рассматривая при этом натуральные числа как результат измерения величин.

4. Дайте ответ на следующие вопросы, подтвердив его моделями на отрезках.

а) Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины увеличить в три раза?

б) Изменится ли числовое значение величины, если в процессе измерения единица этой величины остается постоянной?

в) Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины уменьшить в четыре раза?

г) Изменится ли числовое значение величины, если в процессе измерения единица этой величины уменьшается?

д) Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины увеличить в n раз?

е) Как изменится числовое значение величины, если единицу этой величины изменить в $\frac{1}{n}$ раз?

Аксиоматическая теория скалярных величин

1. Постройте квадрат, равновеликий сумме квадратов.

2. Постройте квадрат, равновеликий разности данных квадратов.

3. Докажите теорему. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь второго равна $\frac{3}{4}$ площади первого.

4. Докажите теорему. Два четырехугольника равновелики, если у них равны соответственно диагонали и угол между ними.

5. Докажите теорему. В параллелограмме расстояния от любой точки диагонали до двух прилежащих сторон обратно пропорциональны этим сторонам.

6. Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две трапеции, площади которых равны. Найдите длину этого отрезка.

7. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF имеют равные площади.

8. Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

9. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

10. Докажите теорему. Если площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции и образуемых пересечением его диагоналей, равны соответственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеции равна $(p+q)^2$.

11. Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

12. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведенный из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

13. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK – точка P так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2.

14. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK. Прямые ED и KB пересекаются в точке O. Докажите, что площади четырехугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

15. Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырехугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырехугольника.

16. Точка A лежит внутри угла, равного $60°$. Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

17. Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M. Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны S_1 и S_2.

18. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K. Прямая, проведенная через точку K параллельно AB, пересекает BD в точке T, а прямая, проведенная через точку M параллельно CD, пересекает AC в точке E. Докажите, что прямые BE и CT параллельны.

19. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

20. В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок KA перпендикулярен к AB и равен DC, отрезок CM перпендикулярен к BC и равен AD. Докажите, что отрезки MB и KB равны.

Расширение числовых множеств

1. Найдите значение выражения $\big((3,5)+(7,16)\big)\big((6,4)-(7,11)\big)$. Сравните полученный ответ с результатом, получаемым путем замены пары (a,b) разностью $a-b$ с последующим вычислением.

2. Докажите, что $(a+m,a)+(b+n,b) \sim (c+m+n,c)$ и $(a+m,a)(b+n,b) \sim (c+m\cdot n,c)$.

3. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a,b)(n+1,n) \sim (a,b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

4. Докажите, что для любой пары (a,b) имеет место отношение $(a,b)(a+1,b) \sim (a,b)(a,b)+(a,b)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

5. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a,b)+(a+1,b) \sim \big((a,b)+(a,b)\big)+(n+1,n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

6. Определите, при каких условиях для положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство: а) $r_1 - (r_2 + r_3) = (r_1 - r_3) - r_2$; б) $r_1(r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$ – и докажите его.

7. Выясните, какие из следующих обыкновенных дробей: $\frac{561}{1650}$, $\frac{693}{792}$, $\frac{357}{1050}$, $\frac{8225}{8400}$, $\frac{454}{2050}$, $\frac{315}{365}$, $\frac{175}{180}$, $\frac{472}{480}$, $\frac{3096}{4400}$, $\frac{522}{1200}$, $\frac{222}{542}$, $\frac{674}{675}$ – могут быть записаны в виде: а) конечных десятичных дробей; б) периодических десятичных дробей. В первом случае дробь обратите в десятичную (не производя деления числителя на знаменатель), во втором случае определите длины периода и предпериода десятичной дроби.

8. Периодические десятичные дроби обратите в обыкновенные (с обоснованием правил) и найдите значения выражений:

а) $0,(714285) \cdot 0,58(3) : 0,(45) - 0,41(6)$;

б) $0,(925) \cdot 0,61(36) : 0,(714285) - 0,0(45)$.

9. Решите уравнения, используя зависимость между результатом и компонентами действий:

а) $\left(1 - \left(\frac{484}{847} - \frac{235}{329}x\right) : \frac{76}{133}\right) : \frac{273}{364} + \frac{79}{237} = \frac{46}{69}$;

б) $\left(1 - \left(\frac{89}{178} - \frac{363}{605}x\right) : \frac{364}{455}\right) : \frac{338}{507} + \frac{71}{568} = \frac{217}{248}$;

в) $\left(1 - \left(\frac{118}{413} - \frac{129}{301}x\right) : \frac{102}{238}\right) : \frac{155}{186} - \frac{57}{190} = \frac{79}{158}$.

10. Найдите значения выражений с точностью до 0,001:

а) $\dfrac{\left(\frac{4}{17}\sqrt{11} + \frac{17}{3}\right) : \sqrt{18}}{\left(\frac{17}{3}\sqrt{18} - \frac{4}{17}\right) : \sqrt{11}}$;

б) $\dfrac{\left(\frac{5}{6}\sqrt{14} + \frac{22}{7}\right) : \sqrt{3}}{\left(\frac{22}{7}\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right) : \sqrt{14}}$.

11. Докажите, что числа $\sqrt{7}$ и $\sqrt{10}$; $\sqrt{12}$ и $\sqrt{5}$ иррациональные.

Элементы геометрии

Построение фигур циркулем и линейкой

1. Задачи на построение треугольника циркулем и линейкой

Постройте треугольник:

а) по трем сторонам;

б) двум сторонам и углу между ними;

в) стороне и двум прилежащим углам;

г) двум сторонам и углу, лежащему против большей из них;

д) двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них;

е) двум углам и стороне, лежащей против одного из них;

ж) основанию, высоте и боковой стороне;

з) углу и двум высотам, проведенным на стороны угла;

и) двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне;

к) основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

Постройте равнобедренный треугольник:

а) по основанию и боковой стороне;

б) основанию и прилежащему углу;

в) боковой стороне и углу при вершине;

г) боковой стороне и углу при основании;

д) боковой стороне и высоте;

е) основанию и углу при вершине;

ж) основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону;

з) углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону;

и) боковой стороне и высоте, опущенной на боковую сторону.

Постройте равносторонний треугольник по стороне.

Постройте прямоугольный треугольник:

а) по двум катетам;

б) равнобедренный, по основанию и боковой стороне;

в) гипотенузе и острому углу;

г) катету и гипотенузе (два способа);

д) катету и острому углу, прилежащему к катету;

е) катету и противолежащему острому углу.

2. Задачи на построение четырехугольника циркулем и линейкой

Постройте параллелограмм:

а) по двум неравным сторонам и одной диагонали;

б) стороне и двум диагоналям;

в) двум диагоналям и углу между ними;

г) основанию, высоте и диагонали;

д) двум диагоналям и высоте.

Постройте прямоугольник:

а) по диагонали и углу между диагоналями;

б) стороне и диагонали.

Постройте ромб:

а) по стороне и диагонали;

б) двум диагоналям;

в) высоте и диагонали;

г) углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла;

д) диагонали и противолежащему углу.

Постройте квадрат:

а) по диагонали;

б) стороне;

в) сумме стороны и диагонали.

Постройте трапецию:

а) по диагоналям, углу между ними и боковой стороне;

б) двум параллельным сторонам и двум диагоналям;

в) одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.

3. Использование геометрических мест точек при решении задач на построение

1. На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух точек на прямой.

2. Постройте точку, равноудаленную от всех вершин треугольника.

3. Постройте точку, равноудаленную от всех сторон треугольника.

4. На прямой, пересекающей стороны, найдите точку, равноудаленную от сторон данного угла.

5. На прямой найдите точку, равноудаленную от сторон угла.

6. В треугольнике ABC найдите точку, равноудаленную от сторон угла A и от вершин B и C.

7. Найдите точку, равноудаленную от сторон угла A и находящуюся на расстоянии b от точки A.

8. Найдите точку, равноудаленную от вершин B и C треугольника и находящуюся на расстоянии b от вершины A.

Элементы конструктивной геометрии

1. Постройте треугольник по двум углам α, β и периметру p.

2. Постройте параллелограмм, зная середины его трех сторон.

3. Постройте треугольник по основанию и двум медианам, проведенным к боковым сторонам.

4. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного треугольника AOB и отстоящих вдвое дальше от стороны OA, чем от стороны OB.

5. Постройте треугольник, зная биссектрису, медиану и высоту, проведенные из одной вершины.

6. Постройте треугольник по высотам h_b, h_c и медиане m_c.

7. Постройте прямоугольный треугольник по катету, если известно, что его гипотенуза втрое больше другого катета.

8. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

9. Постройте касательную из данной точки к данной окружности.

10. Постройте треугольник по двум медианам m_a, m_b и высоте h_a.

11. Дан отрезок AB и окружность. Постройте на данной окружности точку X, расстояние от которой до точки A вдвое больше, чем до точки B.

12. Постройте треугольник по разности углов при основании и боковым сторонам.

13. Через точку A, лежащую внутри угла, проведите прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился бы точкой A пополам.

14. На прямой даны четыре точки B, P, H, C. Постройте $\triangle ABC$, высота которого проходит через H, а биссектриса – через P.

15. Постройте треугольник по стороне a, углу α и медиане m_a.

16. Постройте треугольник по стороне a, углу α и медиане m_b.

17. Постройте один равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

18. Постройте треугольник по трем медианам.

19. Постройте треугольник по трем высотам.

20. Дан единичный отрезок. Постройте отрезок, длина которого была бы равна $2-\sqrt{2}$.

21. Постройте отрезки по формулам $x=\frac{a^3+b^3}{a^2}$, $y=\sqrt[4]{a^3b-b^3a}$.

22. Постройте отрезки по формулам $x=\frac{a^3+b^3}{ab+ac}$, $y=\sqrt[4]{abcd}$.

23. Как построить выражения $x=\sqrt{a^2-\frac{b^5}{a^3}}$, $y=\sqrt[4]{\frac{a^5-b^5+c^5}{a+b+c}}$?

24. Дан единичный отрезок. Постройте отрезок, длина которого была бы равна $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

25. Постройте отрезок $y=\sqrt[4]{a^4-a^2b^2+b^4}$ алгебраическим методом.

Решение задач на построение методом преобразования

1. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
2. Постройте трапецию по стороне, диагоналям и углу между диагоналями.
3. Постройте треугольник по трем его медианам.
4. Даны две точки A и B по разные стороны от данной прямой a. Отложите на прямой a отрезок MN, равный данному отрезку l, так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.
5. Из трех данных прямых две параллельны, а третья их пересекает. Постройте равносторонний треугольник с вершинами на этих прямых и стороной, равной данному отрезку a.
6. Через данную точку проведите прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, был равен данному отрезку.
7. Между сторонами данного угла поместите отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен данной прямой, пересекающей обе стороны данного угла.
8. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Проведите окружность, проходящую через эту точку и касательную к данным прямым (решите методом переноса).
9. Между сторонами данного угла поместите отрезок, равный данному, так, чтобы он отсекал от стороны угла равные отрезки (решите методом переноса).
10. Постройте параллелограмм, основанием которого служит данный отрезок, а две другие его вершины лежат на двух данных окружностях.
11. Проведите параллельно данной прямой a секущую к двум данным окружностям так, чтобы сумма (или разность) образуемых ею хорд была равна данному отрезку.

12. Постройте четырехугольник по трем сторонам и двум углам, прилежащим к неизвестной стороне.

13. Постройте четырехугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными его сторонами.

14. Постройте четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум смежным (или несмежным) его сторонам.

15. На боковых сторонах AB и AC треугольника ABC найдите соответственно такие точки X и Y, чтобы прямая XY была параллельна прямой BC и выполнялось соотношение $BX = AY$.

16. Между пунктами A и B расположены два канала. Где выбрать места для мостов через эти каналы, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим? (Предполагается, что берега каждого канала – параллельные прямые и мосты должны быть перпендикулярны берегам.)

17. Поверните вокруг данной точки M на данный угол α в указанном направлении: а) данную окружность; б) данный квадрат.

18. Постройте равносторонний треугольник, имеющий одной своей вершиной данную точку A, а две другие вершины расположены на данных параллельных прямых.

19. Из данной точки P как из центра опишите дугу окружности так, чтобы концы ее лежали на данных двух окружностях, а градусная мера ее была равна градусной мере данного угла.

20. Через данную точку P проведите прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между двумя данными окружностями, делился этой точкой пополам.

21. В данный параллелограмм впишите квадрат.

22. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник.

23. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

24. Найдите на двух данных прямых a и b две точки, симметричные относительно третьей данной прямой c.

25. Даны две окружности. Найдите на данной прямой AB такую точку X, чтобы касательные, проведенные из этой точки к данным окружностям, были наклонены к AB под равными углами.

Текстовые задачи

Задачи на нахождение чисел по их сумме и разности

1. Обь, Лена и Амур имеют общую длину 14 206 км. Обь и Лена вместе имеют длину 9852 км, а Лена и Амур – 8623 км. Какова длина каждой из этих рек?

2. Площадь двух смежных участков равна 2960 га. Если от первого участка отрезать и прибавить ко второму 420 га, то на обоих участках земли будет поровну. Сколько земли на каждом участке? На сколько гектаров один участок больше другого?

3. Который теперь час, если оставшаяся часть суток на 4 ч 30 мин меньше прошедшей части?

4. В двух коробках было 6260 перьев. Когда из первой коробки переложили во вторую 400 перьев, то в первой осталось еще на 220 перьев больше, чем стало во второй. Сколько перьев было первоначально в каждой коробке?

5. На двух складах 7528 м^3 дров. Когда с одного склада на другой перевезли 240 м^3 дров, то на первом осталось на 358 м^3 больше, чем стало на втором. Сколько дров было первоначально на каждом складе?

6. На двух складах хранится 45 т 875 кг хлопка в кипах одинаковой массы. На первом складе на 58 ц 75 кг больше хлопка, чем на втором. Сколько кип хлопка на каждом складе, если на первом складе на 47 кип больше, чем на втором?

7. Высота здания вместе со шпилем равна 176 м, а высота шпиля – на 94 м меньше высоты самого здания (без шпиля). Какова высота шпиля?

8. Два звена с одинаковых участков общей площадью 4 га собрали 358 ц 90 кг зеленого чайного листа. Первое звено собрало с каждого гектара на 10 ц 45 кг листа больше, чем второе звено. Сколько листа собрало в среднем с 1 га первое звено?

9. Вычислите количество ячменя и пшеницы, необходимое для засева участка, имеющего форму прямоугольника со сторонами 1500 и 800 м, если на 1 га высевается ячменя 56 кг, а пшеницы – 64 кг; площадь под пшеницей на 36 га больше площади под ячменем.

10. Колхоз засеял рожью и пшеницей всего 579 га, причем рожью на 111 га меньше, чем пшеницей, и собрал всего 12 074 ц зерна, причем пшеницы на 2948 ц больше, чем ржи. Определите средний урожай пшеницы с 1 га.

11. По плану две зерноочистительные машины должны за 24 дня очистить 7680 ц зерна, а очистили 1680 ц зерна сверх плана. Первая машина очистила на 480 ц зерна больше, чем вторая. Сколько зерна очищала в среднем за день каждая из этих машин?

12. Автомобиль израсходовал на три поездки 22 кг 750 г бензина. В третью поездку израсходовано бензина на 1 кг 625 г больше, чем во вторую, а во вторую – на 2 кг 875 г больше, чем в первую. Сколько километров проехал автомобиль во вторую поездку, если в третью он проехал на 36 км больше, чем в первую?

13. Обувной магазин продал за день детской и дамской обуви на 880 руб., причем за дамскую обувь выручка была на 520 руб. больше, чем за детскую. Сколько пар той и другой обуви было продано, если пара детской обуви стоила 4 руб., а две пары дамской стоили столько же, сколько семь пар детской?

14. Два колхозника купили 500 штук рассады капусты и заплатили поровну. В огороде у одного из них поместилось на 40 штук рассады больше, чем у другого, и он доплатил второму 50 коп. Сколько рассады посадил каждый колхозник и сколько стоил один ее десяток?

15. На земле насчитывается 17 000 видов земноводных, пресмыкающихся и рыб вместе взятых. Сколько видов земноводных, пресмыкающихся и рыб в отдельности, если пресмыкающихся в три раза больше, чем земноводных, а рыб на 7000 больше, чем земноводных?

16. С трех участков собрали 1396 т 5 ц пшеницы. С первого участка собрано на 35 т 7 ц больше, чем со второго, а с третьего – на 113 т 4 ц больше, чем со второго. Сколько пшеницы собрано с каждого участка при одинаковом урожае в 21 ц с 1 га и какова площадь каждого участка?

17. В библиотеке 65 000 книг: русских, французских и немецких. Книг на французском языке на 25 600 меньше, чем на русском, а на немецком – на 2200 больше, чем на французском. Сколько книг на каждом языке в отдельности?

18. Сад имеет форму прямоугольника длиной 289 м и шириной 204 м. Параллельно ширине сад разбит на три участка путем деления его длины на три части, из которых одна на 31 м меньше второй и на 33 м больше третьей. С большего участка собрано фруктов на 195 ц 84 кг больше, чем с меньшего. Определите урожай, собранный со всего сада.

19. На фабрике за три смены выработали 12 840 м ткани. В первую смену выработали на 594 м больше, чем во вторую, а во вторую – на 312 м меньше, чем в третью. Сколько метров ткани выработали в каждую смену?

20. Совхоз засеял 4725 га рожью, овсом и гречихой. Рожью засеяно на 684 га больше, чем овсом, а гречихой – на 1473 га меньше, чем рожью. Сколько гектаров было засеяно рожью, овсом и гречихой в отдельности?

21. В 100 г перьев зеленого лука содержится 66 мг витаминов А и С вместе, причем витамина А содержится на 54 мг меньше, чем витамина С. Сколько витамина С содержится в 1 кг лука?

22. Длина забора вокруг огорода равна 320 м, причем длина на 40 м больше ширины. Огород разбит на три участка, из которых один занят капустой, другой – картофелем, третий – помидорами. Чему равна площадь, занятая картофелем, если под помидорами площадь на 2800 м^2 меньше, чем под картофелем, и на 400 м^2 больше, чем под капустой?

23. Посеяли кукурузу на двух делянках общей площадью 13 га. Площадь первой делянки на 3 га больше площади другой. С каждого ара (сотки) первой делянки было собрано на 90 кг кукурузы больше, чем с каждого ара второй делянки. Со всей засеянной площади было собрано 345 т кукурузы. Сколько кукурузы собрано с каждой делянки?

24. Моторная лодка прошла за 2 часа $27\frac{1}{2}$ км. В первый час она прошла на $2\frac{7}{10}$ км меньше, чем во второй. Какое расстояние прошла лодка в первый час и какое – во второй?

25. Часть шоссе, длина которого $7\frac{9}{10}$ км, залита асфальтом, а остальная замощена булыжником. Асфальтом залито на $2\frac{2}{5}$ км больше, чем замощено булыжником. Сколько километров шоссе залито асфальтом и сколько замощено булыжником?

26. Двое рабочих сэкономили за месяц 58 руб. 50 коп. С одной детали они экономили 25 коп. Сколько деталей сделал каждый, если один сделал на 14 деталей больше другого?

27. Площадь двух участков $24\frac{1}{4}$ га. Если площадь первого участка уменьшить на $3\frac{1}{2}$ га и на столько же увеличить площадь второго, то

площадь первого участка будет на $\frac{3}{5}$ га больше, чем второго. Узнайте площади участков.

28. Ученик заплатил 1 руб. 29 коп. за три учебника: по химии, алгебре и физике; причем учебник по химии стоил на 20 коп. дороже учебника по алгебре, а учебник по физике был в два раза дешевле двух других учебников вместе взятых. Сколько стоил каждый учебник?

29. Из 5 т ржи и 5 т картофеля можно получить $3756\frac{1}{4}$ кг крахмала. Из 5 т ржи можно получить крахмала на $2251\frac{1}{4}$ кг больше, чем из 5 т картофеля. Сколько килограммов крахмала можно получить из 1 т ржи и 1 т картофеля в отдельности?

Задачи на вычисление неизвестного по двум разностям

30. Два поезда прошли с одинаковой скоростью: один – 961 км, другой – 248 км, причем первый был в пути на 23 часа больше второго. Сколько часов был в пути каждый поезд?

31. Из двух кусков материи сшили одинаковые платья. Из одного куска вышло 42 платья, из другого – 34 платья. Второй кусок на 27 м 20 см меньше первого. Определите длину каждого куска материи.

32. Мастер купил за 15 руб. два куска медной проволоки: 64 и 36 м длиной (толщина одинаковая). Сколько стоил 1 кг проволоки, если первый кусок был на 7 кг тяжелее второго?

33. По новому способу укладки на каждую платформу можно грузить на 34 автомобильной рамы больше, чем раньше. Сколько рам грузят по новому способу на одну платформу, если то количество рам, которое раньше перевозили на 27 платформах, теперь перевозят на 10?

34. Девочка наклеивала в альбом картинки. Если на каждую страницу наклеить по одной картинке, то останутся четыре картинки; если же на каждую страницу наклеить по две картинки, то одна страница останется пустой. Сколько было картинок и сколько страниц в альбоме?

35. Экскурсанты переправлялись через реку в лодках. Если бы в каждую лодку село по шесть человек, то не хватило бы места для четырех человек. Если бы в лодку село по восемь человек, то одна лодка оказалась бы свободной. Сколько было лодок и сколько экскурсантов?

36. По плану бригада должна была выгружать по 125 т угля за один час. Применив оптимизирующие приемы работы, бригада выгружала по 500 т угля за час и закончила работу на девять часов раньше срока. Сколько тонн угля выгрузила бригада?

37. В колхозе имеются жерди двух сортов длиной по 8 м 50 см и 8 м. Если огородить участок жердями длиной 8 м 50 см, то не хватит 2 м 50 см жердей, а если огородить участок жердями длиной 8 м, то не хватит 5 м жердей. Какова длина изгороди?

38. Завод должен выпустить определенное число плугов в установленный планом срок. Если в день будут выпускать по 180 плугов, то к сроку будет готово на 300 плугов меньше, чем заказано. Если же в день будет выпускаться по 210 плугов, то к сроку будет заготовлено на 150 плугов больше, чем заказано. Сколько плугов заказано заводу и какой срок установлен для выполнения этого заказа?

39. Для детской елки готовят детям пакеты с подарками. Если в каждый пакет положить по 80 г пряников, то их останется 2 кг, если же положить по 100 г, то для заполнения пакетов не хватит 200 г. Сколько детей было на елке и сколько килограммов пряников было куплено?

40. Чтобы огородить пришкольный участок, было заготовлено некоторое количество кольев. Если расстояние между двумя соседними кольями сделать равным 5 м, то не хватит семи кольев, если же расстояние между кольями сделать равным 6 м, то заготовленных кольев будет достаточно. Каков периметр огораживаемого участка?

41. В школьном зале стояли скамейки. Во время собрания учащихся выяснилось, что если на каждую скамейку сядут по семь человек, то на одной скамейке окажется пять человек, а если бы на каждую скамейку садилось по шесть человек, то 37 учащимся не хватило бы места. Сколько скамеек стояло в зале?

42. Если на каждую скамейку в клубе поместится по 12 человек, то на одной скамейке останется четыре свободных места; если же на каждую скамейку сядут по 10 человек, то 196 человек останутся без места. Сколько человек должны разместиться в клубе?

43. Турист рассчитывал пробыть на экскурсии 25 дней и истратить определенную сумму денег. Так как он пробыл на экскурсии на пять дней больше и расходовал в день на 40 коп. больше, то за все время он израсходовал на 30 руб. больше, чем предполагал. Сколько денег предполагал израсходовать турист во время экскурсии?

44. Два мальчика измерили шагами длину одного и того же участка шоссе. Один из них сделал при измерении на 40 шагов больше другого. Длина шага одного мальчика равна 50 см, а другого – 55 см. Найдите длину измеренного участка шоссе (в метрах).

45. Партию помидоров надо упаковать в ящики. Если взять ящики на 8 кг, то 180 кг помидоров останутся неупакованными; если же взять столько же ящиков на 12 кг, то 35 ящиков останутся пустыми. Сколько ящиков на 12 кг нужно для упаковки и какую массу помидоров надо упаковать?

46. Две доски распилили на равные части. Из одной получилось шесть частей, из другой – $4\frac{1}{2}$ части. Первая доска была длиннее второй на $1\frac{1}{5}$ м. Какой длины была каждая доска?

47. Если заправить 40 автомашин имеющимся в гараже бензином, то его останется $538\frac{1}{2}$ л. Если же увеличить запас бензина на $311\frac{1}{2}$ л, то можно было бы заправить 106 машин. Сколько литров бензина требуется для заправки одной машины?

48. Стены из камышита площадью 152 м^2 на 125 руб. 40 коп. дешевле 92 м^2 кирпичных стен, так как 1 м^2 камышитовых стен на 5 руб. 70 коп. дешевле 1 м^2 кирпичных стен. Сколько стоил 1 м^2 кирпичных и 1 м^2 камышитовых стен?

49. Один совхоз от 132 коров получил на 895 ц 90 кг молока больше, чем второй совхоз от 101 коровы, несмотря на то, что во втором совхозе от каждой коровы получали на 310 кг больше, чем в первом. Сколько молока получали от каждой коровы во втором совхозе?

50. В пошивочной мастерской имеется два куска ткани различного сорта. Первый кусок (цена за 1 м – $3\frac{3}{4}$ руб.) стоит на $7\frac{1}{2}$ руб. дешевле второго, хотя он на $1\frac{1}{2}$ м длиннее второго куска (цена за 1 м – $4\frac{1}{2}$ руб.). Определите длину каждого куска.

51. Куплены билеты в кино по 25 коп. за билет и билеты в театр по 4 руб. за билет. Все билеты в кино стоят на 50 руб. дешевле, хотя их куплено на 10 больше. Сколько куплено билетов в кино и в театр?

52. Несколько человек собирают деньги на покупку подарка товарищу. Если каждый внесет по $5\frac{1}{5}$ руб., то составится сумма на 2 руб.

больше требующейся; если же каждый внесет по $3\frac{3}{4}$ руб., то не хватит $12\frac{1}{2}$ руб. Сколько было лиц, покупавших подарок?

53. Если поезд, вышедший со станции А, будет проходить 1 км пути за $\frac{1}{25}$ ч, то он придет на станцию В получасом позже назначенного времени; если же он будет проходить 1 км пути за $\frac{1}{30}$ ч, то придет на станцию двумя часами раньше срока. Найдите расстояние между станциями.

54. Путешественник должен прибыть из города А в город В к назначенному сроку. Он рассчитал, что если будет проезжать в час по $13\frac{1}{2}$ км, то придет раньше срока на $1\frac{1}{5}$ ч; если же будет проезжать в час $10\frac{7}{8}$ км, то опоздает на $\frac{4}{5}$ ч. Найдите расстояние между этими городами.

55. Мотоциклист, отправляясь на экскурсию, рассчитал, что если он будет проезжать по 20 км в час, то приедет на место на $\frac{1}{4}$ ч раньше, чем если он будет ехать со скоростью $\frac{9}{10}$ км в $\frac{1}{20}$ ч. Какое расстояние он должен проехать?

56. Колхоз засыпал $\frac{3}{8}$ запаса овса в первый амбар, а остальной овес – во второй. Когда из первого амбара израсходовали 20 ц, а из второго – $41\frac{1}{2}$ ц овса, то в них осталось его поровну. Сколько овса было в каждом амбаре?

Задачи на исключение неизвестного при помощи вычитания

57. Для производства 12 т никеля и 5 т меди перерабатывается 2300 т руды, а для производства 5 т меди и 6 т никеля перерабатывается 1400 т руды. Сколько нужно добыть руды, чтобы выработать 300 т меди и 30 т никеля?

58. 28 кг винограда и 50 кг яблок стоят 34 руб. 90 коп., а 28 кг винограда и 75 кг яблок по тем же ценам стоят 41 руб. 15 коп. Определите цену 1 кг винограда и 1 кг яблок.

59. 30 учащихся 5-го класса и 10 учащихся 7-го класса собрали 1510 кг металлолома, а 15 учащихся 5-го класса и 10 учащихся

7-го класса собрали 1165 кг металлолома. По сколько килограммов металлолома собрал в среднем один ученик 5-го и 7-го классов в отдельности?

60. С 205 плодовых деревьев и 506 ягодных кустов собрали 11 768 кг плодов и ягод, а с 205 плодовых деревьев и 130 ягодных кустов собрали 10 640 кг плодов и ягод. Сколько килограммов плодов собрали с одного дерева и сколько килограммов ягод собрали с одного куста?

61. Реактивный самолет за два часа и винтовой за шесть часов пролетают 3660 км. Винтовой самолет за восемь часов и реактивный за один час пролетают 2880 км. С какой скоростью летит реактивный самолет и с какой – винтовой?

62. 1 л бензина и 6 л керосина весят 5,5 кг, а 1 л бензина и 3 л керосина – $3\frac{1}{10}$ кг. Найдите массу 1 л бензина и 1 л керосина.

63. Бригада с $133\frac{1}{2}$ га и звено с 24 га собрали $8642\frac{1}{2}$ ц зерна кукурузы. Сколько центнеров зерна собрала бригада и сколько звено с 1 га, если бригада со 100 га и звено с 24 га собрали 6880 ц?

64. На 13 поездах и девяти электровозах было перевезено $4529\frac{3}{4}$ т груза. Сколько тонн груза может быть перевезено на одном поезде и одном электровозе в отдельности, если шесть поездов и девять электровозов могут перевезти $3182\frac{1}{4}$ т груза?

65. Одна покупательница купила $\frac{1}{2}$ куска парусины и $\frac{2}{5}$ куска ситца, всего $24\frac{1}{4}$ м, а другая взяла остатки обоих кусков, всего $28\frac{3}{4}$ м. Сколько метров было в куске ситца и сколько – в куске парусина?

66. От 25 коров ярославской породы и 30 холмогорской за год получено 277 286 кг молока. Сколько в среднем получено молока от каждой коровы ярославской и холмогорской пород, если одна корова ярославской породы и одна холмогорской за год дают в среднем $10\,078\frac{3}{5}$ кг молока?

Задачи на замену данных

67. Четыре активиста 5-го класса и два активиста 6-го класса собрали для агрофирмы 180 кг золы. Каждый активист 6-го класса собирал в среднем на 15 кг золы больше, чем активист 5-го класса. По

сколько килограммов золы собрал в среднем активист 6-го класса и активист 5-го класса отдельно?

68. В час одним экскаватором вынимают на 60 $м^3$ земли больше, чем другим. Двумя экскаваторами вынули вместе 10 320 $м^3$ земли, причем на первом работали 20 часов, а на втором – 18 часов. Сколько кубометров земли вынимает каждый экскаватор в час?

69. Мотоциклист проехал четыре часа по грунтовой дороге и три часа по шоссе, всего 195 км. Скорость езды по шоссе на 30 км/ч больше, чем скорость езды по грунтовой дороге. Определите скорость езды по шоссе и по грунтовой дороге.

70. На двух автомобилях перевезли 15 т 750 кг картофеля. На одном сделали пять поездок, на другом – три. Сколько тонн картофеля перевезли на каждом автомобиле, если на первом за две поездки перевезли столько, сколько на втором за три?

71. Путешественник ехал по железной дороге 3 ч и 1 ч плыл на пароходе. Сколько километров в час проезжал он по железной дороге и плыл на пароходе, если известно, что всего он проехал $110\frac{1}{3}$ км, а поезд в час проходил на $14\frac{5}{6}$ км больше, чем пароход?

72. На три одинаковых пальто и пять одинаковых костюмов затратили $31\frac{3}{4}$ м материи. Сколько материи затратили на каждое пальто и каждый костюм, если на костюм израсходовано материи на $\frac{3}{4}$ м больше, чем на пальто?

73. Двое измеряли длину аллеи своими шагами, причем первый сделал на ее протяжении на 28 шагов меньше, чем второй. Зная, что шаг первого равнялся в среднем $\frac{7}{10}$ м, а шаг второго – $\frac{1}{2}$ м, определите длину аллеи.

74. На ткацком станке новой конструкции за час можно выткать на $1\frac{3}{4}$ м ткани больше, чем на ткацком станке старой конструкции. За девять часов на ткацком станке теперь можно выработать столько же метров ткани, сколько раньше вырабатывалось за 14 ч. Сколько метров ткани вырабатывается за 1 ч на станках той и другой конструкции?

75. Одно и то же количество керосина сгорает в одной лампе за три дня, а в другой – за два дня, потому что во второй лампе сгорает в

день на $\frac{5}{16}$ л больше, чем в первой. Сколько керосина сгорает в первой лампе за 15 дней? За 12 дней?

76. Кассир продал 75 билетов в мягкие вагоны и 180 билетов в жесткие, всего на $1140\frac{3}{4}$ руб. Билет в мягкий вагон стоил на $1\frac{1}{10}$ руб. дороже, чем в жесткий. Сколько стоили билет в мягкий и билет в жесткий вагоны?

77. $3\frac{3}{4}$ м алюминиевой проволоки и $\frac{3}{4}$ м железной того же сечения весят $15\frac{3}{5}$ г. Сколько весит один метр той и другой проволоки в отдельности, если удельный вес алюминия в три раза меньше удельного веса железа?

78. Два трактора различной мощности вспахали вместе 246 га целины. Более мощный трактор работал 15 дней, а другой – 12 дней, причем первый трактор вспахивал в день в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем второй. Сколько гектаров земли вспахивал каждый трактор в день?

79. Купили шесть книг, восемь тетрадей и шесть блокнотов. За все заплатили $4\frac{3}{10}$ руб. Тетрадь стоит в семь раз дешевле книги и на 3 коп. дороже блокнота. Сколько стоит одна книга, одна тетрадь и один блокнот в отдельности?

80. Турист ехал $3\frac{1}{3}$ ч на лошади, 7 ч плыл на пароходе и $\frac{4}{5}$ ч ехал на автомобиле. Скорость автомобиля в $3\frac{1}{3}$ раза больше скорости парохода, скорость лошади на $4\frac{1}{2}$ км/ч меньше скорости парохода. Турист проехал всего $199\frac{1}{2}$ км. Узнайте скорости автомобиля, парохода и лошади.

Задачи на предположение

81. В вагон нагрузили 15 т 240 кг муки 1-го и 2-го сорта, всего 200 мешков. Мешок муки 1-го сорта весил 80 кг, 2-го сорта – 72 кг. Сколько было мешков муки каждого сорта?

82. В штабеле 300 шпал, сосновых и дубовых, общей массой 10 524 кг. Сосновая шпала весит 284 кг, дубовая – 46 кг. Сколько тех и других шпал уложено в штабель?

83. Для школы купили еловые и березовые дрова по цене 3 руб. 15 коп. и 3 руб. 60 коп. за 1 $м^3$ соответственно. Сколько кубометров еловых и березовых дров в отдельности купили для школы, если известно, что всего было закуплено 196 $м^3$ на сумму 662 руб. 40 коп.?

84. С двух участков общей площадью 225 га собрали 3600 ц табака. Какова площадь каждого участка, если урожай на первом участке – 18 ц с гектара, а на втором – 15 ц с гектара?

85. Для учреждения купили 19 отрывных календарей, заплатив за них 8 руб. 15 коп. Одни из них стоили по $\frac{1}{2}$ руб., а другие – по 35 коп. Сколько купили тех и других календарей?

86. Лодка, проплыв часть пути против течения, а часть пути – по течению, прошла за пять часов 14 км. По течению она шла со скоростью $5\frac{1}{5}$ км/ч, а против течения – со скоростью $1\frac{1}{5}$ км/ч. Сколько часов шла лодка по течению и сколько – против течения?

87. Две электрические веялки работали одна после другой в течение семи часов и израсходовали вместе 3 кВт/ч энергии. Первая веялка расходовала $\frac{1}{2}$ кВт/ч энергии, вторая – $\frac{3}{8}$ кВт/ч. Сколько времени работала каждая веялка?

88. На заводе изготовили 293 детали двух видов. На изготовление одной детали первого вида затрачивали $1\frac{2}{3}$ ч, а второго вида – $1\frac{7}{12}$ ч. В среднем на каждую деталь затрачивали $1\frac{543}{879}$ ч. Сколько сделали деталей каждого вида?

89. Слиток меди и серебра массой $1\frac{13}{24}$ кг в воде весит на $\frac{7}{45}$ кг меньше. Сколько в слитке того и другого металла, если 20 г серебра весят в воде 18 г, а 1 кг меди – $\frac{8}{9}$ кг?

90. Слиток из олова и свинца массой 2 кг в воде весит на $\frac{1}{5}$ кг меньше. Сколько олова и свинца в этом слитке, если известно, что при погружении в воду кусок олова теряет $\frac{11}{80}$ своей массы, а кусок свинца – $\frac{3}{40}$ своей массы?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии содержится подборка основных видов математических задач для подготовки бакалавров начального педагогического образования. Выделены задачи на доказательство, приведены подробные их решения. Работа с доказательствами развивает логическое мышление, учит рассуждению, готовит к изучению геометрического материала.

В пособие включены темы «Нумерация целых неотрицательных чисел и величины», «Задачи в начальной школе», открывающие рассмотрение вопросов методики преподавания математики в начальной школе. Методические особенности изучения арифметических действий с целыми неотрицательными числами, алгебраического и геометрического материала будут раскрыты в следующем учебно-методическом пособии «Актуальные вопросы методики преподавания математики в начальной школе».

Ценность будущего учителя начальной школы возрастает благодаря практическому опыту как в целом в профессиональной сфере, так и в конкретной предметной области. Решение задач активизирует умственную деятельность обучающегося, приучает к математической культуре. Сам процесс работы над задачей представляет собой последовательность шагов в рассуждении о тексте задачи и в ходе ее решения.

Методическая подготовка бакалавров интегрирует специальные (математические), психолого-педагогические и методические знания. Бакалавр профиля «Начальное образование. Логопедическая работа в начальной школе», владеющий умениями анализировать, исследовать решение задачи, грамотно и содержательно выстраивать доказательство математических предложений, готовый к реализации и развитию творческих идей, самостоятельной и креативной работе в рамках личностно-деятельностного подхода к обучению, считается усвоившим учебные программы дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов», «Актуальные проблемы методики преподавания математики», и его компетенции отвечают требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования, предъявляемым к учителям начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Виленкин, Н. Я.* Математика. 4 – 5 классы. Теоретические основы / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1974. – 223 с.

2. Задачник-практикум по математике / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 208 с.

3. *Лаврова, Н. Н.* Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 184 с.

4. *Пышкало, А. М.* Геометрия в I – IV классах / А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1965. – 244 с.

5. *Стойлова, Л. П.* Математика : учебник / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2013. – 271 с. – ISBN 978-5-7695-9911-8.

6. *Стойлова, Л. П.* Теоретические основы начального курса математики / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2014. – 272 с. – ISBN 978-5-4468-0768-0.

7. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Множества : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с. – ISBN 978-5-9984-1234-9.

8. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Целые неотрицательные числа. Величины : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-1394-0.

9. *Тихомирова, С. В.* Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов : учеб. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 152 с. – ISBN 978-5-9984-1420-6.

10. *Успенский, В. А.* Простейшие примеры математических доказательств / В. А. Успенский. – М. : Изд-во МЦНМО, 2012. – 56 с. – ISBN 978-5-94057-879-6.

Дополнительная литература

11. *Бантова, М. А.* Методика преподавания математики в начальных классах : учеб. пособие / М. А. Бантова, Г. В. Бельтюкова. – М. : Просвещение, 1984. – 335 с.

12. *Истомина, Н. Б.* Методика обучения математике в начальной школе. Развивающее обучение / Н. Б. Истомина. – 2-е изд., испр. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-89308-699-7.

13. *Истомина, Н. Б.* Математика. Учебники с 1 по 4 классы. УМК «Гармония» [Электронный ресурс]. – URL: https://go.11klasov.net (дата обращения: 20.08.2023).

14. *Моро, М. И.* Математика. Учебники с 1 по 4 классы. УМК «Школа России» [Электронный ресурс]. – URL: https://uchebniks online.ru/uchebniki (дата обращения: 20.08.2023).

15. *Моро, М. И.* Методика обучения математике в 1 – 3 классах : пособие для учителя / М. И. Моро, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1978. – 336 с.

16. *Столяр, А. А.* Логическое введение в математику / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйш. шк., 1971. – 224 с.

17. *Тихомирова, С. В.* Виды доказательств математических предложений / С. В. Тихомирова // Начальная школа. – 2022. – № 2. – С. 49 – 54.

Интернет-источники

1. Решаем задачи по математике (1 класс) [Электронный ресурс]. – URL: https://www.klass39.ru/reshaem-zadachi-po-matematike-1-klass/ (дата обращения: 20.08.2022).

2. Сборник задач по математике для 1 класса [Электронный ресурс]. – URL: http://reshalka.me/zadaniya/matematika/87-sbornik-zadach-po-matematike-dlya-1-klassa (дата обращения: 20.08.2022).

3. Задачи с несколькими способами решения для 5 – 6 классов [Электронный ресурс]. – URL: https://multiurok.ru/files/zadachi-s-nieskol-kimi-sposobami-rieshieniia-dlia-4-5-klassov.html (дата обращения: 20.08.2022).

4. Сборник текстовых задач. 3 класс [Электронный ресурс]. – URL: https://multiurok.ru/files/sbornik-tiekstovykh-zadach-3-klass.html (дата обращения: 20.08.2022).

5. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости [Электронный ресурс]. – URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/ArgunovBalk1957ru.pdf (дата обращения: 24.09.2021).

Учебное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МЕТОДИКИ ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Т. В. Евстюничева
Технический редактор Ш. Ш. Амирсейидов
Компьютерная верстка Е. А. Герасиной
Корректор О. В. Балашова
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 20.12.23.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,07. Тираж 30 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.