Владимирский государственный университет

А. М. ГУБЕРНАТОРОВ

ЭКОНОМИКА НА PYTHON

Учебное пособие

Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. М. ГУБЕРНАТОРОВ

ЭКОНОМИКА НА PYTHON

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2023

ISBN 978-5-9984-1873-0

УДК 330.3
ББК 65.01

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор
зав. кафедрой бизнес-информатики и экономики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
И. Б. Тесленко

Кандидат экономических наук, доцент
зав. кафедрой экономики и финансов Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации (Владимирский филиал)
Д. В. Кузнецов

Губернаторов, А. М.
Экономика на Python [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. М. Губернаторов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 290 с. – ISBN 978-5-9984-1873-0. – Электрон. дан. (6,5 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-R. – Загл. с титул. экрана.

Содержит интегрированное изложение теоретических разделов экономической теории и ее практической реализации с помощью математического аппарата в среде Python. Отличается подробным описанием решений многочисленных примеров как традиционными, так и цифровыми методами. Даны задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры направления подготовки «Бизнес-информатика», может быть полезно студентам других экономических направлений всех форм обучения, аспирантам, руководителям компаний и специалистам.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 7. Табл. 10. Библиогр.: 17 назв.

ISBN 978-5-9984-1873-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В условиях стремительной цифровизации всех форм социально-экономической жизни роль информации и связанных с ней процессов трудно переоценить. Инновационное развитие на всех уровнях экономической иерархии требует использования качественно новых информационных технологий для анализа и оценки современных общенаучных методов, в том числе методов классификации инструментов экономико-статистического и сравнительного анализов, анализа документов, экспертных оценкок, процедуры мониторинга, экономико-математических методов, а также ряда частных приемов исследований (табличный, графический, контент-анализ). Проникновение информационных технологий в моделирование поведения систем настоятельно требует развития новых подходов, определяющих переход от традиционных методов решения поставленных задач на информационные рельсы, и социально-экономические воспроизводственные системы и происходящие в них процессы не должны являться исключением.

Цифровая трансформация процесса подготовки современного студента экономических направлений строится путем приложения математического аппарата для анализа и решения различных классических задач исследования предельных и средних величин, производственных функций в экономике, а также моделей поведения товаропроизводителей и потребителей в условиях неопределенности и ограниченности информации. Многие экономические задачи не только сводятся к системе уравнений и неравенств с несколькими переменными, но и описываются на основе методов математического анализа (дифференцирование, интегрирование, исследование наибольших и наименьших значений функций), решение которых бывает достаточно сложно без цифровой обработки.

Решение традиционных экономических задач, имеющих математическое воплощение, облегчается благодаря овладению навыками использования обучающимися информационных технологий для обработки и анализа данных. Одним из популярных современных объектно-ориентированных языков программирования высокого уровня является Python, который входит в пятерку по популярности в мире по применению математических функций и возможностей визуализации данных.

В учебном пособии предпринята попытка реализовать возможности языка Python для решения типовых задач в рамках базовых экономических дисциплин.

Цель пособия − помочь студентам овладеть основными методами решения экономических задач в среде Python. Пособие содержит десять разделов, охватывающих фундаментальные темы экономической теории.

Первый раздел посвящен вопросам, связанным с изучением микроэкономических основ рыночной экономики, основ общественного производства и проблем выбора в экономике.

Второй раздел посвящен раскрытию рыночного механизма хозяйствования через теорию спроса и предложения.

В рамках *третьего раздела* ставятся и успешно решаются задачи моделирования поведения потребителей на рынке из условия максимизации полезности.

Четвертый раздел пособия математически реализует процесс производства через описание разнообразных производственных функций, отображающих зависимость между максимальным объемом производимого продукта и физическим объемом факторов производства при данном уровне технических знаний.

Пятый раздел математически описывает поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции.

Шестой раздел математически описывает поведение фирмы на рынке монопольной власти.

Седьмой раздел количественно описывает поведение субъектов на факторных рынках с позиции моделирования ценообразования и доходов, которые получают владельцы факторов производства в форме заработной платы, процента, ренты или предпринимательской прибыли.

В восьмом разделе системно дается представление об общественном выборе в экономике и проблемах общественного благосостояния.

Центральное место в данном разделе занимает процесс принятия решений, с помощью расчета и анализа внешних эффектов и внешних издержек, оптимальных критериев, которые должны отражать интересы большинства населения.

Девятый раздел исследует вопросы моделирования финансовых результатов фирмы в условиях государственного регулирования через механизмы налогообложения.

В десятом разделе моделируются некоторые классы задач линейного программирования в экономике. Представлен материал по разделам прикладной математики, освоение которых необходимо для первоначального ознакомления с математическими методами принятия решений в экономико-управленческой сфере.

Приводится классификация задач принятия решений, дается понятие математического моделирования. Подробно излагаются методы линейного программирования, включая теорию двойственности и послеоптимизационный анализ. Даются основы нелинейного программирования.

В пособии приведены базовые понятия и определения экономических законов и основ программирования на языке Python. Представлено описание теоретических аспектов и решения практических задач. Материал сопровождается большим количеством примеров. Для самостоятельной подготовки и контроля качества полученных знаний приводятся упражнения и задачи с ответами и указаниями.

ВВЕДЕНИЕ

Установка Python

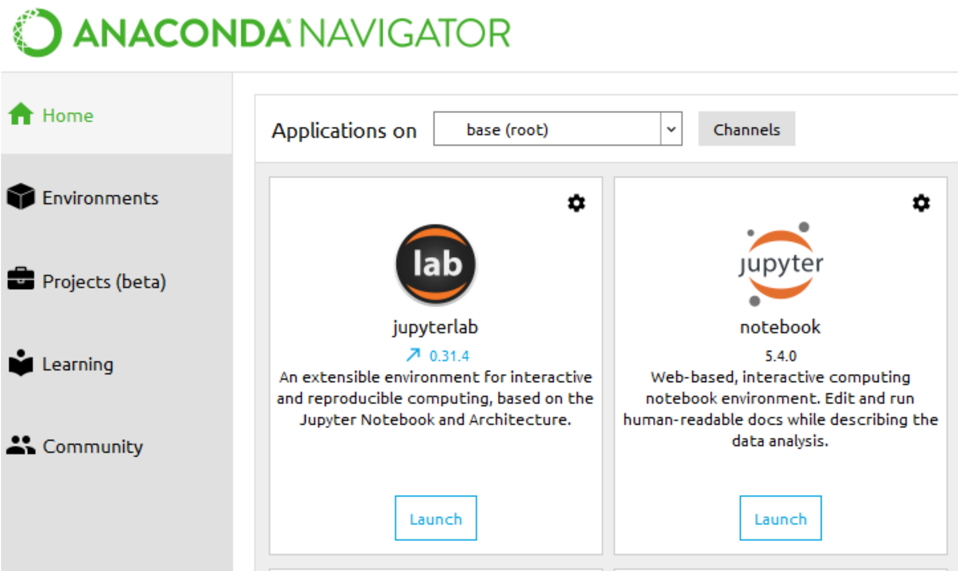
Начнем с описания общего алгоритма работы.

1. Установка Python на ПК
2. Установка библиотек Python
3. Решение задачи
4. Вывод ответа

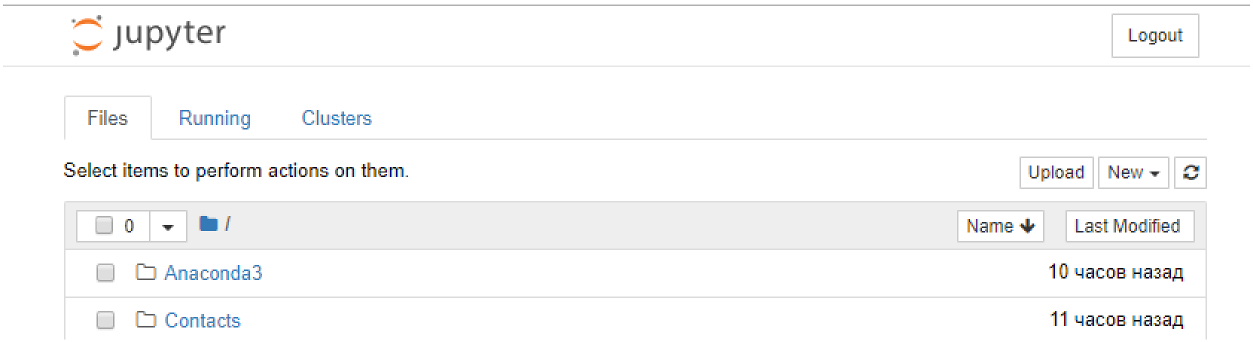
Остановимся на каждом пункте подробнее.

1. Установка Python на компьютер описана, например, в [1].

Установим на компьютер программу Anaconda версию 3, 64 bit. Например, с сайта https://www.anaconda.com/download/ нужно скачать установочный файл и следовать указаниям. Отметим, что установка возможна если в названии вашего профиля на компьютере только латинские буквы, иначе нужно будет создать новый профиль с латинским названием и потом установить Anaconda. После установки, активируем программу, откроется Анаконда навигатор

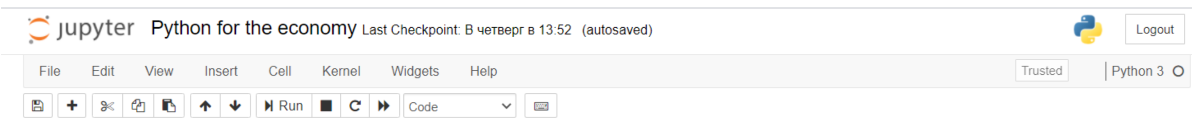


Нажмем на jupyter, в результате получим на экране следующее



Создадим папку для нашего документа. Для этого нажмем на New справа на экране и выберем Folder. Поставим галочку напротив имени папки “Untitled folder” и нажмем Rename, назовем папку “Python for the economy”.

Зайдем в эту папку, и создадим в ней ноутбук, для этого нажмем на New и выберем Python 3. Все, можем работать. Код или текст будем вводить в строки, показанные ниже.



Если это код, то на панели инструментов нужно выбрать “Code”, если текст, то “Markdown”. Если мы хотим написать пояснения в одной строчке с кодом, после кода в строке, введем # и потом текст пояснения.

Для запуска программы используем сочетание клавиш Ctrl+Enter или Shift+Enter, или нажмите на значок 

Импортировать файлы с программами, называемые библиотеками (модулями), позволяет инструкция import.

Общее правило загрузки библиотеки (синтаксис) состоит в наборе инструкции

«import название библиотеки».

Библиотеки

Библиотека Math.

Для вычислений с действительными числами применяется библиотека Math, которая содержит много полезных функций. Ниже приведены основные функции, которые включены в эту библиотеку.

Для подключения библиотеки используем import. Загрузим библиотеку math и выведем число е.

```
import math
math.e
```

```
2.718281828459045
```

Можно это сделать, используя псевдоним библиотеки. Например, так

```
import math as m
m.e
```

```
2.718281828459045
```

Библиотека Mathplotlib

Библиотека matplotlib - это набор методов для создания двумерной графики. Загрузить библиотеку можно с помощью команды «import matplotlib»

Библиотека Sympy

Библиотека Sympy предназначена для символьных вычислений. В нее входят команды для работы с матрицами и векторами.

Библиотека NumPy

Библиотека Numpy в Python широко используется для выполнения математических операций с матрицами. Одна из самых популярных библиотек машинного обучения в Python.

Библиотека SciPy

Библиотека math предоставляется Python научные инструменты. В ней есть различные модели для математической оптимизации, линейной алгебры. Модуль numpy предоставляет базовую структуру данных массива библиотеке SciPy.

Библиотека Scikit-learn

Машинное обучение является важным математическим аспектом науки о данных. Используя различные инструменты машинного обучения, вы можете легко классифицировать данные и прогнозировать результаты. Для этой цели Scikit-learn предлагает различные функции, упрощающие методы классификации, регрессии и кластеризации.

Загружаются эти библиотеки с помощью той же команды «import название библиотеки».

Основные блоки для решения задач – детали конструктора

Будем подробно разбирать каждую команду на примерах блоков из которых собирается общее решение, подобно работе с конструктором. Рассмотрим экономические задачи и их цифровое решение.

Блоки.

1. Загрузить библиотеку, задать переменные

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
```

2. Задать функцию U

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
```

и вывести

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
U
```

$x^{0.53} + 3x - 7$

Или так

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
print(U)
```

```
x**0.53 + 3*x - 7
```

3. Найти производную функции одной переменной

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
diff(U,x)
```

$$\frac{0.53}{x^{0.47}} + 3$$

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
print(diff(U,x))
print(diff(U,x,2))
```

```
0.53*x**(-0.47) + 3
-0.2491*x**(-1.47)
```

Или

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
print(diff(U,x))
```

```
0.53*x**(-0.47) + 3
```

4. Найти частную производную функции нескольких переменных

```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
f = x**(0.75)*y**(0.25)
print(diff(f,x))
print(diff(f,y))
```

```
0.75*x**(-0.25)*y**0.25
0.25*x**0.75*y**(-0.75)
```

Или так

```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
f = x**(0.75)*y**(0.25)
diff(f,x)
```

$$\frac{0.75y^{0.25}}{x^{0.25}}$$

```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
f = x**(0.75)*y**(0.25)
diff(f,y)
```

$$\frac{0.25x^{0.75}}{y^{0.75}}$$

5. Найти значение функции в точке (с различными округлениями)

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y, x0, y0 =symbols('x y x0 y0')
U=x**0.53+3*x-7
u=U.subs({x:y0})
print(u)
```

```
y0**0.53 + 3*y0 - 7
```

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
U=x**0.53+3*x-7
v=U.subs({x:3})
print(v)
print(v.n(3))
print(round(v,4))
print(round(v))
```

```
3.79008752086274
3.79
3.7901
4
```

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y =symbols('x y')
U=x**2+y**2-7
v=U.subs({x:3, y:1})
print(v)
```

```
3
```

6. Решить уравнение, неравенство

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
U=x**2+3*x-7
print(solve(U,x))
```

```
[-3/2 + sqrt(37)/2, -sqrt(37)/2 - 3/2]
```

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
y=x**2-4
solve(y>=1)
```

$$\left(x \le -\sqrt{5} \wedge -\infty < x\right) \vee \left(\sqrt{5} \le x \wedge x < \infty\right)$$

7. Выписать первое, второе и так далее решения уравнения с разной степенью точности

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
U=x**2+3*x-7
print(solve(U,x))
print(solve(U,x)[0])
print(solve(U,x)[1])
print(solve(U,x)[1].n(3))
```

```
[-3/2 + sqrt(37)/2, -sqrt(37)/2 - 3/2]
-3/2 + sqrt(37)/2
-sqrt(37)/2 - 3/2
-4.54
```

8. Решить систему уравнений, неравенств

```
import numpy as np
from numpy import linalg
A=np.array([[0,1],[10,1]])
B=np.array([30,10])
X=np.linalg.solve(A,B)
for b,a in zip(X,['a=','b=']):
    print(a,b)
```

```
a= -2.0
b= 30.0
```

Или так

```
import numpy as np
from numpy import linalg
a, b=symbols('a b')
print(solve([b-30,10*a+b-10],[a,b]))
```

```
{a: -2, b: 30}
```

Для системы неравенств

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
y=x**2-4
solve([y>=1,x>2])
```

$$\sqrt{5} \leq x \wedge x < \infty$$

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
y=x**2-4
solve([y>=1,y<2])
```

$$\left(\sqrt{5} \leq x \wedge x < \sqrt{6}\right) \vee \left(x \leq -\sqrt{5} \wedge -\sqrt{6} < x\right)$$

9. Найти неопределенный интеграл

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
print(integrate(2*x,x))
```

```
x**2
```

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
integrate(2*x,x)
```

x^2

10. Найти определенный интеграл

```
import numpy as np
from sympy import *
x =symbols('x')
print(integrate(2*x,(x,1,2)))
```

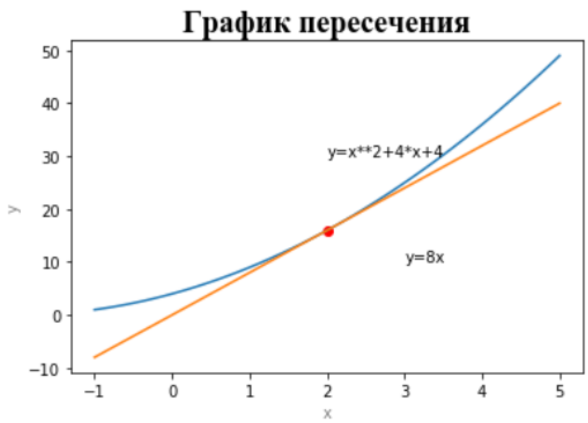
```
3
```

11. Построить график функции

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis([0,5,0,6])
plt.title('График функции', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
plt.xlabel('Переменная x', color='gray')
plt.ylabel('Переменная y',color='gray')
plt.text(1,1,'1 ограничение')
plt.text(2,2,'2 ограничение')
plt.text(3,3,'3')
plt.text(4,4,'4')
plt.text(1,4,r'$y = x$', fontsize=20, bbox={'facecolor':'yellow','alpha':0.2})
plt.grid(True)
plt.plot([1,2,3,4],[1,2,3,4],'ro')
plt.plot([1,2,3,4],[0,1,2,3],'g^')
plt.plot([1,2,3,4],[2,3,4,5],'b*')
plt.legend(['1 уровень','2 уровень','3 уровень'], loc=2)
plt.show()
```

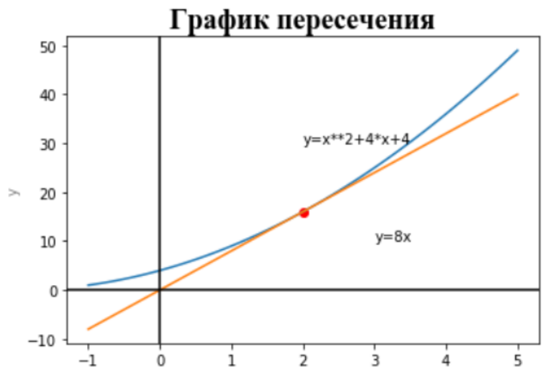
```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.title('График пересечения', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
plt.xlabel('x', color='gray')
plt.ylabel('y',color='gray')
plt.text(2,30,'y=x**2+4*x+4')
plt.text(3,10,'y=8x')
plt.plot(2,16,'ro')
x=np.linspace(-1,5,100)
y1=x**2+4*x+4
y2=8*x
plt.plot(x,y1,x,y2)
plt.show
```

```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```



Функция копирует график и сохраняет его как рисунок plt.savefig('my_chart.png')

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.title('График пересечения', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
plt.xlabel('x', color='gray')
plt.ylabel('y',color='gray')
plt.text(2,30,'y=x**2+4*x+4')
plt.text(3,10,'y=8x')
plt.plot(2,16,'ro')
x=np.linspace(-1,5,100)
y1=x**2+4*x+4
y2=8*x
plt.plot(x,y1,x,y2)
ax = plt.gca()
ax.axhline(y=0, color='k') # plot Y - axis
ax.axvline(x=0, color='k') # plot X - axis
plt.show
plt.savefig('my_chart.png')
```



12. Нахождение экстремума функции одной переменной

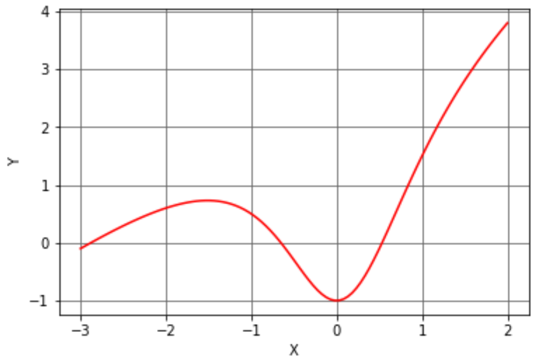
Найдем экстремум функции $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Зададим функцию

```
f = lambda x: (x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
```

Построим график этой функции

```
''' График заданной функции '''
x = np.linspace(-3,2,50)
plt.plot(x, f(x), 'r')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.grid(True, linestyle='-', color='0.4')
plt.show()
```



Из графика видим, что в качестве начальных точек можно взять: $x_0 = -2$ и $x_0 = 0$. Около точки $x_0 = -2$, как показывает график, нужно искать точку максимума, а около $x_0 = 0$, минимума.

```
''' 1. Минимум '''
res = minimize(f, 1)
print('x_min: %.3f f_min: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_min: 0.000 f_min: -1.000
```

```
''' 2. Максимум
Максимум функции f ищем как минимум функции -f '''
f_max = lambda x: -(x**3+3*x**2-1) / (x**2+1)
res = minimize(f_max, -2)
print('x_max: %.3f f_max: %.3f' % (res.x, f(res.x)))
```

```
x_max: -1.513 f_max: 0.731
```

Ответ: $x_{min} = 0$; $x_{max} = -1{,}513$.

13. Нахождение экстремума функции двух переменных.

Исследуем на экстремум функцию

$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

1. Находим критические точки, используя функцию ctitical_points():

```
from sympy import *

x, y = symbols('x y')
z = x**4 + y**4 - 2*x**2 + 4*x*y - 2*y**2

cr_point, A, D = critical_points(z)
cr_point
```

```
[{x: 0, y: 0}, {x: -sqrt(2), y: sqrt(2)}, {x: sqrt(2), y: -sqrt(2)}]
```

Три критические точки. Их значения возвращаются в виде кортежа словарей.

Для каждой критической точки проверяем достаточный признак экстремума, используя функцию suff_indic().

```
''' 1-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[0])
D0, A0
```

```
(0, -4)
```

```
''' 2-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[1])
D0, A0
```

```
(384, 20)
```

```
''' 3-я точка '''
D0, A0 = suff_indic(A, D, cr_point[2])
D0, A0
```

```
(384, 20)
```

Вторая и третья точка являются точками минимума ($\Delta = 384 > 0$, $A = 20 > 0$). Значения функции в этих точках:

```
z.subs(cr_p[1])
```

-8

```
z.subs(cr_p[2])
```

-8

В точке (0;0) значение $\Delta = 0$. По графику функции можно заключить, что это седловая точка. Проверим это аналитически, вычислив значения функции в близких к началу координат точках.

```
z = lambda w: w[0]**4 + w[1]**4 - 2*w[0]**2 + \
              4*w[0]*w[1] - 2*w[1]**2
''' Значение функции в самой точке '''
z((0,0))
```

```
0
```

```
''' Сдвинемся по оси Ox '''
''' Функция S() переводит аргумент
    в символьное значение, а метод .n(k)
    позволяет вывести на печать
    ограниченное число знаков '''
S(z((0.1,0))).n(4)
```

-0.0199

```
''' Сдвинемся вдоль прямой y=x '''
S(z((0.1,0.1))).n(5)
```

0.0002

Получены значения, и меньшие, и большие, чем значение в исследуемой точке, следовательно, она не является точкой экстремума.

Ответ: $z_{min} = z\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = z\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

14. Нахождение условного экстремума

Для поиска экстремума с использованием библиотеки sympy применяем признак условного экстремума функции двух переменных.

Пусть необходимо исследовать на экстремум функцию $f(x,y)$ при выполнении условия $g(x,y)=0$. Введем обозначения:

функция Лагранжа: $L(x,y) = f + \lambda g(x,y)$, (λ – множитель Лагранжа);

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Необходимый признак. Для того, чтобы функция $f(x,y)$ достигала экстремума в некоторой точке $(x_0;y_0)$, такой, что $g(x_0;y_0)=0$, необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные L'_x, L'_y, L'_λ:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Достаточный признак. Функция $f(x,y)$ достигает минимума в критической точке $(x_0;y_0)$, такой, что $g(x_0;y_0)=0$, если выполняется условие: $\Delta > 0$ и максимума, если $\Delta < 0$.

Если $\Delta = 0$ – необходимо дополнительное исследование.

Приведенная ниже функция critical_points_conditional() находит критические точки функции Лагранжа и также выражение для определителя Δ.

```
def critical_points_conditional(f, g):
    ''' Нахождение критических точек
        функции Лагранжа L
        и определителя Delta
        f - целевая функция, g - условие '''
    ''' Функция Лагранжа '''
    lam = symbols('lam')
    L = f + lam*g

    ''' Производные 1-го порядка'''
    gradL = [diff(L,c) for c in [x,y]]
    ''' Производная по lam совпадает с g '''
    ''' Набор производных '''
    eqs = gradL + [g]

    ''' Ищем критические точки,
        приравнивая производные к нулю '''
    cr_point = solve(eqs, [x, y, lam], dict=True)
    ''' Производные функции g'''
    g_x = diff(g,x)
    g_y = diff(g,y)
    ''' Производные 2-го порядка '''
    L_xx = diff(L,x,2)
    L_xy = diff(L,x,y)
    L_yy = diff(L,y,2)
    ''' Определитель D'''
    M = Matrix([[0,g_x,g_y], [g_x,L_xx, L_xy], [g_y,L_xy,L_yy]])
    D = -det(M)
    return cr_point, D
```

Рассмотрим пример: найти экстремумы функции
$z = x - y + 2$ при ограничении: $x^2 + y^2 = 1$.

```
from sympy import *
x, y, lam = symbols('x y lam')
''' Целевая функция '''
f = 1.5*x - y + 1
''' Условие '''
g = x**2 + y**2 - 1
cr_point, D = critical_points_conditional(f,g)
cr_point
```

```
[{x: 0.832050294337844, y: -0.554700196225229, lam: -0.901387818865997},
 {x: -0.832050294337844, y: 0.554700196225229, lam: 0.901387818865997}]
```

Две критические точки. Найдем значения определителя Δ в этих точках:

```python
''' Значения определителя D
    в критических точках '''
[D.subs(p) for p in cr_point]
```

```
[-7.21110255092798, 7.21110255092798]
```

В первой точке – максимум ($\Delta < 0$), во второй – минимум ($\Delta > 0$). Значения функции в точках экстремума:

```python
''' Значения функции f '''
[f.subs(p) for p in cr_point]
```

```
[2.80277563773199, -0.802775637731995]
```

Ответ: $z_{\min} = z(-0,832;\,0,555) = -0,803;$

$z_{\max} = z(0,832;-0,555) = 2,803$.

Экономические задачи.

Объединим блоки Python для решения экономических вопросов и рассмотрим примеры решения экономических задач традиционным способом и на Python.

Экономические задачи взяты из отдельных глав дисциплины «Микроэкономика», изучаемой студентами 1 курса Финуниверситета. Заметим, что источники задач разнообразны: учебники, экономические олимпиады и Интернет-ресурс.

Раздел 1. ПРОБЛЕМА ВЫБОРА В ЭКОНОМИКЕ. КРИВАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. ПАРЕТО-ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Теоретический материал

Ограниченность ресурсов — экономическое понятие, выражающее конечность, редкость, дефицитность ресурсов, доступных человеку и человечеству в каждый конкретный момент, относительную их недостаточность в сравнении с безграничными человеческими потребностями, для удовлетворения которых эти ресурсы употребляются.

Проблема оптимального выбора описывается с помощью кривой производственных возможностей (КПВ) (рис. 1).

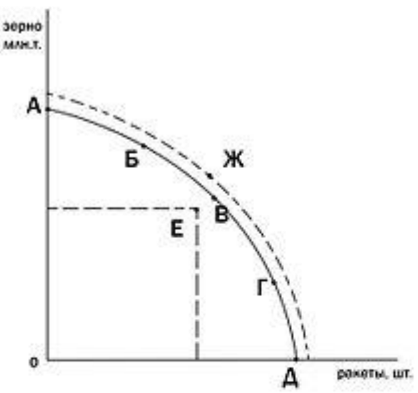


Рисунок 1. Кривая производственных возможностей

Решая проблему ограниченности ресурсов и безграничности потребностей возникает выбор: какие потребности требуют немедленного удовлетворения, какие можно отложить, а от каких отказаться. В ходе выбора возникает альтернативная стоимость - эта стоимость наилучшая из упущенных возможностей, которая обладает большей ценностью. Графически выбор иллюстрируется кривой производственных возможностей (КПВ). Альтернативная стоимость растет в результате убывания производительностей ресурсов. КПВ всегда выпукла от начала координат, так как характеризуется ростом альтернативных издержек. Если точки лежат на кривой, то это эффективное производство, так как затрачиваются все ресурсы. Точка Е характеризует неэффективное производство, ввиду не использования части ресурсов, Ж -

невозможный объем производства. КПВ может изменить свое положение если:

1. улучшается технология производства одного товара, изменяется угол наклона и увеличиваются возможности производства одного из товаров;
2. если увеличивается количество располагаемых ресурсов, КПВ смещается от начала координат.

Альтернативные издержки, издержки упущенной выгоды или издержки альтернативных возможностей в результате выбора одного из альтернативных вариантов использования ресурсов и, тем самым, отказа от других возможностей. Величина упущенной выгоды определяется полезностью наиболее ценной из отброшенных альтернатив. Альтернативные издержки - неотделимая часть любого принятия решений Экономическая эффективность по Парето

Экономическая эффективность по Парето, это такое состояние рынка, при котором никто не может улучшить свое положение, одновременно не ухудшая положения хотя бы одного из участников. По-другому, подобную ситуацию называют Парето-оптимальным состоянием (оптимум Парето). Когда все субъекты рынка, стремясь каждый к своей выгоде, достигают взаимного равновесия интересов и выгод, суммарное удовлетворение всех членов общества достигает своего максимума.

Примеры решения задач

Пример 1. Юный финансист Фрэнк, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 100 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Фрэнк дает другу 100 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 200 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 40 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Фрэнк может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 20 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 20 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада

«Забугор») эта цена вырастет до 30 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Фрэнка через 2 года, если он максимизирует доход?
Решение:
Сравним суммы, полученные через 2 года (к концу 11-го класса) в результате реализации каждой из альтернатив.
Если Фрэнк отдаст 100 ливро Элджернону, сумма будет равна 200 ливро.
Если Фрэнк откроет вклад «Супервыгодный», сумма будет равна $100\times(1{,}4)^2=196$ ливро.
Открывая вклад «Забугор», Фрэнк положит на него 100 / 20 = 5 тюбингов. Через 2 года на вкладе будет сумма $5\times1{,}2^2=7{,}2$ тюбинга. Итоговая сумма в ливро: $7{,}2\times30=216$ ливро.
Значит, самой выгодной альтернативой будет открытие вклада «Забугор», и у Фрэнка будет 216 ливро на руках.
Ответ: 216 ливро.

Решение на Python.
Загрузим библиотеки
```
import math
from sympy import*
```
Ответ в первом варианте получается простым умножением
```
S1=100*2 # первый вариант
print(S1)
```
Обратим внимание, что пояснение написано через #, и для вывода ответа
нужно ввести с маленькой буквы и в скобочках print(S1) и про компилировать, нажав комбинацию клавиш Ctrl + Enter.
Если мы хотим дополнить ответ пояснениями нужно придерживаться такого синтаксиса

```
import math
from sympy import*
S1=100*2
print('В первом случае через 2 года Френк получает S1=',S1,'ливро')
```
```
В первом случае через 2 года Френк получает S1= 200 ливро
```

Для второго случая используем формулу наращения по сложным процентам

```
i=Symbol("i")
S2=100*(1+i)**2 # второй вариант
s2=S2.subs({i:40/100})
print('Во втором случае через 2 года Френк получает S2=',s2.n(3),'ливро')
```

```
Во втором случае через 2 года Френк получает S2= 196. ливро
```

Обратим внимание, что здесь мы задали символьную переменную i, и с помощью метода .subs() вычислили значение S2 при i=40/100.

Для вывода на печать k знаков используем метод - .n(k).
Без этого мы бы получили много лишних знаков после запятой. Также можно использовать round(s2), если мы хотим ответ получить в целом виде, или round(s2, k), если с цифрами после запятой.

```
i=Symbol("i")
S2=100*(1+i)**2 # второй вариант
s2=S2.subs({i:40/100})
print('Во втором случае через 2 года Френк получает S2=',s2,'ливро')
```

```
Во втором случае через 2 года Френк получает S2= 196.000000000000 ливро
```

```
print('Во втором случае через 2 года Френк получает S2=',round(s2),'ливро')
```

```
Во втором случае через 2 года Френк получает S2= 196 ливро
```

Так же поступаем в третьем случае

```
S3=100/20*(1+i)**2 # третий вариант
s3=30*S3.subs({i:20/100})
print('В третьем случае через 2 года Френк получает S3=',s3.n(3),'ливро')
```

```
В третьем случае через 2 года Френк получает S3= 216. ливро
```

Чтобы выбрать наибольшее число из этих трех используем конструкцию if… else:

```
if S1>s2:
    print('Ответ:',S1.n(3),'ливро') if S1>s3 else print('Ответ:',s3.n(3),'ливро')
else:
    print('Ответ:',s2.n(3),'ливро') if s2>s3 else print('Ответ:',s3.n(3),'ливро')
```

```
Ответ: 216. ливро
```

А можно через max(*[…,…,…])
И все решение вместе.

```
import math
from sympy import*
S1=100*2 # первый вариант
print('В первом случае через 2 года Френк получает S1=',S1,'ливро')
i=Symbol("i")
S2=100*(1+i)**2 # второй вариант
s2=S2.subs({i:40/100})
print('Во втором случае через 2 года Френк получает S2=',s2.n(3),'ливро')
S3=100/20*(1+i)**2 # третий вариант
s3=30*S3.subs({i:20/100})
print('В третьем случае через 2 года Френк получает S3=',s3.n(3),'ливро')
if S1>s2:
    print('Ответ:',S1.n(3),'ливро') if S1>s3 else print('Ответ:',s3.n(3),'ливро')
else:
    print('Ответ:',s2.n(3),'ливро') if s2>s3 else print('Ответ:',s3.n(3),'ливро')
```

```
В первом случае через 2 года Френк получает S1= 200 ливро
Во втором случае через 2 года Френк получает S2= 196. ливро
В третьем случае через 2 года Френк получает S3= 216. ливро
Ответ: 216. ливро
```

Или так

```
S1=100*2 # первый вариант
print('1 вариант - ',S1,' ливро')
import math
from sympy import*
i=Symbol("i")
S2=100*(1+i)**2 #второй вариант
i=40
S2=(100*(1+i/100)**2)
print('2 вариант - ',round(S2),' ливро')
import math
from sympy import*
i=Symbol("i")
S3=100/20*(1+i/100)**2*30 #третий вариант
i=20
S3=(100/20*(1+i/100)**2*30)
print('3 вариант - ',round(S3),' ливро')
print( ' Ответ: наибольший доход',max( *[ round(S1), round(S2), round(S3)] ) )
```

```
1 вариант -  200  ливро
2 вариант -  196  ливро
3 вариант -  216  ливро
 Ответ: наибольший доход 216
```

Пример 2. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 30 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 10-ти кораблей, не может считаться флотом.

«Флот в размере 10-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в три раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной.

Ответ: $y = -2x + 30$, y – это количество домов, а x – количество кораблей.

Решение:

По условию нам даны две точки на КПВ: 30 домов и 0 кораблей и 10 кораблей и 10 домов. Этого достаточно, чтобы восстановить кривую производственных возможностей. Пусть y – это количество домов, а x – количество кораблей. Тогда:

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} 30 = a \cdot 0 + b \\ 10 = 10a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 30 \\ 10a = -20 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

Ответ: $y = -2x + 30$, где y – это количество домов, а x – количество кораблей.

Решение на Python.

Воспользуемся модулем линейная алгебра linalg библиотеки numpy для решения системы линейных уравнений в матричном виде.

Система

$$\begin{cases} 30 = a \cdot 0 + b \\ 10 = 10a + b \end{cases}$$

в матричном виде запишется так

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Матрицы или массивы в Python задаются с помощью np.array ([[,],…,[,]]).

Так матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ задается так

```
A=np.array([[0,1],[10,1]])
```

Итак, мы активируем библиотеки

```
import numpy as np
from numpy import linalg
```

Задаем матрицы A, B и X и решаем систему относительно a, b.

Синтаксис показан ниже, можно экспериментировать, совершенствуя программу.

```
import numpy as np
from numpy import linalg
A=np.array([[0,1],[10,1]])
B=np.array([30,10])
X=np.linalg.solve(A,B)
for b,a in zip(X,['a=','b=',]):
    print(a,b)
print('Ответ: количество домов y=',-2,'x+',b,', где x количество караблей')
```

```
a= -2.0
b= 30.0
Ответ: количество домов y= -2 x+ 30.0 , где x количество караблей
```

```
import numpy as np
from numpy import linalg
a, b=symbols('a b')
print(solve([b-30,10*a+b-10],[a,b]))
```

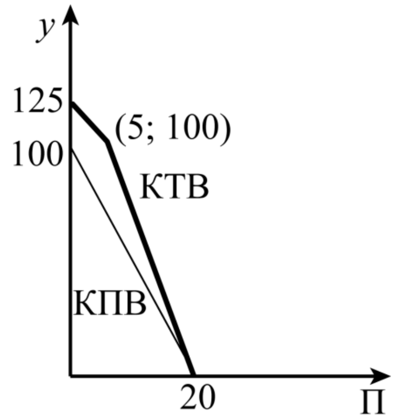
```
{a: -2, b: 30}
```

Пример 3. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 100 уток или до 20-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 20 уток можно получить 3-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 100 уток и 50 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 5$ за каждую утку и 30$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

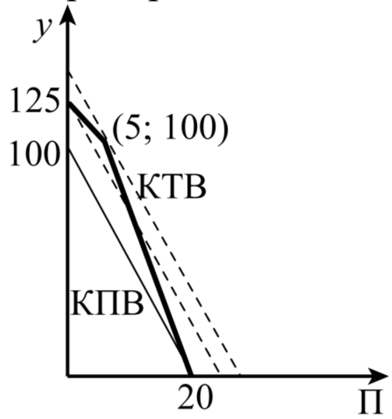
Решение:

Пропорция обмена выгодна Хоггету, он может увеличить свои производственные возможности. Пусть Хоггет произвел 20 поросят: 15 можно обменять на 100 уток, а оставшиеся 5 поросят эквивалентны 25 уткам.

Кривая торговых возможностей Хоггета при обмене с соседом выглядит так:



Исходя из цен, которые предлагают на ярмарке, Хоггету необходимо продать поросят и уток в пропорции 1:6. Проведем линии уровня с такой пропорцией:



Самая дальняя от начала координат линия уровня пересекает КТВ в точке (5;100). Таким образом, максимально возможный доход $= 5 \cdot 30 + 100 \cdot 5 = 650$.

Также можно рассуждать иначе. Пусть Хоггет производит только уток, тогда 1 поросенок стоит 30$ и эквивалентен 5-ти уткам, которые стоят 25$ – имеет смысл переключаться на производство поросят. Мы переходим на графике в точку (5;100). Теперь 1 дополнительный поросенок за 30$ эквивалентен 20/3 уток, которые стоят $\frac{20}{3} \cdot 5 > 30$, то есть невыгодно дальше производить поросят.

Ответ: 650

Решение на Python.

Эта задача линейного программирования (ЗЛП). Запишем ее в удобном виде. Пусть x уток, y поросят имеет Хоггет. Прибыль $5*x + y$ должна быть максимальной

$$5*x + y \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 5x + y \le 125, \\ 20x + 3y \le 400 \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Для решения задач линейного программирования используется модуль `scipy.optimize`, библиотека `linprog`. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 125 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le b$$

Целевая функция $z = -5*x - y \to \min$ (что бы задача удовлетворяла условиям ЗЛП, нужно минимизировать целевую функцию, поэтому искомый максимум будет равен минус искомый минимум).

Ее матрица $c = (-5 \quad -1)$. Будем искать минимум z.

```
from scipy.optimize import linprog
c=[-5,-1]
A_ub=[[5,1],
      [20,3]]
b_ub=[125,
      400]
opt=linprog(c, A_ub, b_ub,method="simplex")
print(opt)
```

```
     con: array([], dtype=float64)
     fun: -125.0
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 3
   slack: array([0., 0.])
  status: 0
 success: True
       x: array([  5., 100.])
```

_ub – обозначает неравенство (обязательно ≤),

_eq – используется для равенств, если они есть в системе ограничений. (в нашей задаче их нет, только два неравенства).

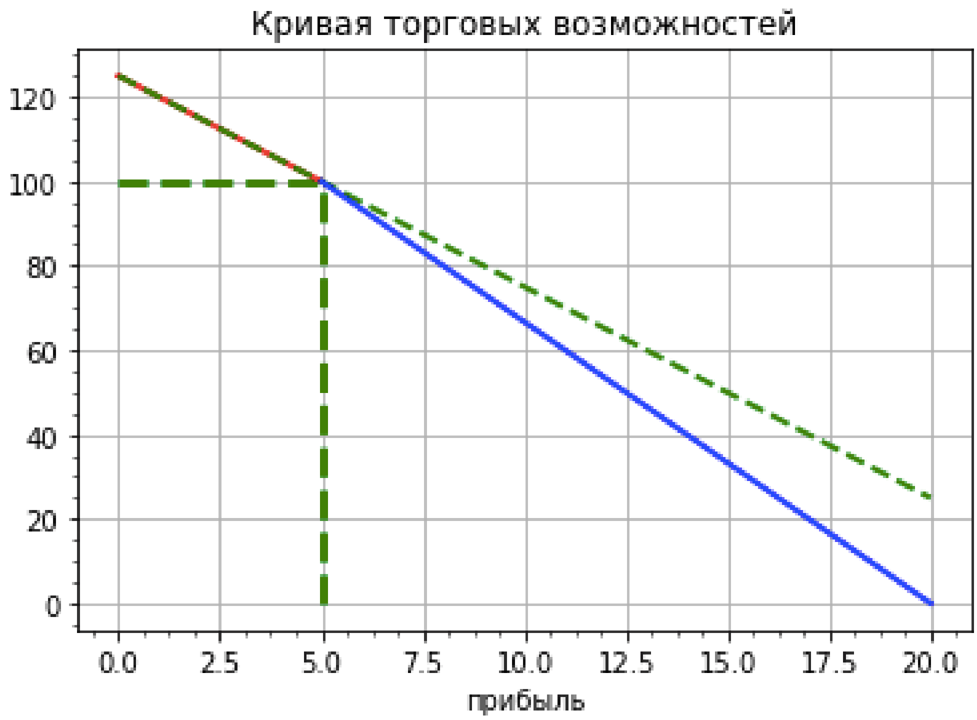
Таким образом, функция прибыли достигает своего максимума при наличии 5 поросят и 100 уток, а максимальная прибыль равна 650 $.

```
M=30*5+5*100
print('наибольшая возможная прибыль составит',M,'$')
```

```
наибольшая возможная прибыль составит 650 $
```

Для наглядности можно представить задачу графически.
График задается следующими кодами:

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,5,50)
x2=np.linspace(0,20,50)
x3=np.linspace(5,20,50)
y1=125-x1*5
y3=1/3*(400-20*x3)
y2=-5*x2+125
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x1, y1, color = 'r', linewidth = 2)
ax.plot(x2, y2, color = 'g', linewidth = 2,
        linestyle = '--')
ax.plot(x3, y3, color = 'b', linewidth = 2)
ax.grid()
plt.title('Кривая торговых возможностей')
#  Горизонтальные линии:
ax.hlines(100,0, 5,color = 'g',
          linewidth = 3,
          linestyle = '--')
#  Вертикальные линии:
ax.vlines(5, 0, 100,color = 'g',
          linewidth = 3,
          linestyle = '--')
ax.set_xlabel('прибыль')
ax.set_ylabel('y')
#  Включаем видимость вспомогательных делений:
ax.minorticks_on()
plt.show()
```



Задачи для самостоятельного решения.

1.1.1. Юный финансист Майк, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы накопленные к концу 9-го класса 200 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Майка дает другу 200 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 400 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 30 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Майк может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 10 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 10 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 40 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Майка через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.2. Юный финансист Джон, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 150 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку:

сейчас Майка дает другу 150 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 300 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 25 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Джон может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 13 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 15 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 25 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Джона через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.3. Юный финансист Элис, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 190 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Элис дает другу 190 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 380 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 20 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Элис может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 20 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 20 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 30 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Элис через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.4. Юный финансист Пьер, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 250 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Пьер дает другу 250 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 500 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 27 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Пьер может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 21 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 27 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 35 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Пьера через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.5. Юный финансист Ромео, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 300 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Ромео дает другу 300 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 600 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 45 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Ромео может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 10 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 7 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 18 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Ромео через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.6. Юный финансист Гарри, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 325 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Гарри дает другу 325 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 650 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 13 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Гарри может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 10 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 10 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 20 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Гарри через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.7. Юный финансист Георг, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 15 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Георг дает другу 15 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 30 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 17 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Георг может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 15 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 15 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 26 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Георг через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.8. Юный финансист Томас, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 23 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Томас дает другу 23 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 46 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 7 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Томас может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 10 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 15 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 26 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Томаса через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.9. Юный финансист Билл, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 120 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Билл дает другу 120 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 240 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 14% годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Билл может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 19 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 20 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 30 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Билла через 2 года, если он максимизирует доход?

1.1.10. Юный финансист Чарли, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к концу 9-го класса 134 ливро. Его друг Элджернон предлагает сделку: сейчас Чарли дает другу 134 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Элджернона 268 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 17% годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Чарли может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 19 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 20 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 30 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Чарли через 2 года, если он максимизирует доход?

1.2.1. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 40 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 15-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 15-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в три раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.2. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 45 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 13-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 13-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в пять раз по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.3. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 33 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 11-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 11-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в три раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.4. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 44 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 10-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 10-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в четыре раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.5. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 20 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 12-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 12-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в два раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.6. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 40 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 17-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 17-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в четыре раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.7. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 30 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 16-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 16-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в три раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.8. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 55 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 20-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 20-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в пять раз по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.9. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 36 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 12-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 12-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в три раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.2.10. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 60 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 25-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 25-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в четыре раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

1.3.1. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 110 уток или до 30-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 25 уток можно получить 4-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 105 уток и 55 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 7$ за каждую утку и 33$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.2. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 108 уток или до 32-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 27 уток можно получить 2-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 127 уток и 45 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 6$ за каждую утку и 23$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.3. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 118 уток или до 24-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 20 уток можно получить 6-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 150 уток и 25 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 10$ за каждую утку и 47$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.4. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 143 уток или до 36-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 29 уток можно получить 4-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 134 уток и 55 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 8$ за каждую утку и 26$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.5. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 128 уток или до 28-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 12 уток можно получить 2-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 138 уток и 22 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 9$ за каждую утку и 24$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.6. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 146 уток или до 26-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 20 уток можно получить 2-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 115 уток и 43 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 7$ за каждую утку и 37$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.7. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 128 уток или до 24-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 12 уток можно получить 3-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 150 уток и 52 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 6$ за каждую утку и 23$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.8. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 140 уток или до 50-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 40 уток можно получить 5-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 110 уток и 25 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 10$ за каждую утку и 37$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.9. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 160 уток или до 35-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 12 уток можно получить 2-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 126 уток и 35 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 5$ за каждую утку и 15$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

1.3.10. Артур Хоггет занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 200 уток или до 70-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Хоггет может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 48 уток можно получить 6-х поросят и наоборот, причем у соседа есть 150 уток и 67 поросят. Ежегодно Артура Хоггета приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 12$ за каждую утку и 50$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Хоггет по итогам одного лета?

Контрольная работа

1. Юный финансист Евгений, думая о своем будущем, решает, как выгоднее всего сохранить до окончания школы, накопленные к

концу 9-го класса 100 ливро. Его друг Олег предлагает сделку: сейчас Женя дает другу 100 ливро взаймы, а ровно через два года, к окончанию 11-го класса, получает от Олега 200 ливро.

Второй альтернативой является «Супервыгодный» двухлетний ливровый вклад в банке под 40 % годовых (проценты начисляются каждый год на всю сумму, лежащую в банке).

Третий вариант самый изощренный: Женя может перевести ливро в иностранную валюту – тюбинги, – и открыть вклад «Забугор» так же на два года. Проценты по вкладу «Забугор» начисляются каждый год на всю сумму по ставке 20 % годовых. Сейчас один тюбинг можно купить за 20 ливро. По прогнозам никогда не ошибающихся аналитиков, через два года (как раз тогда, когда истечет срок вклада «Забугор») эта цена вырастет до 30 ливро за тюбинг. Сколько ливро на руках будет у Фрэнка через 2 года, если он максимизирует доход?

2. Король одного далекого королевства захотел построить себе флот. Но он был мудрый король, и перед стройкой позвал к себе придворного экономиста, чтобы тот помог ему принять верное решение. Экономист заметил, что дуб и труд – ресурсы ограниченные и строительство флота, состоящего из того количества кораблей, которое хочет король, теоретически возможно, но потребует переключения всех производственных мощностей исключительно на это. Если же флот не строить совсем, то все производственные мощности будут, как и прежде, направлены на застройку близлежащих регионов (максимум 20 домов). Экономист предложил не забрасывать строительство домов совсем. Король согласился на это, но гордо заметил, что флот, состоящий меньше, чем из 12-ти кораблей, не может считаться флотом. «Флот в размере 12-ти кораблей в результате уменьшит производство домов в два раза по сравнению с сегодняшним», – грустно вздохнул экономист, но приказ выполнил. Задайте КПВ страны аналитически, считая ее линейной, и укажите альтернативную стоимость одного корабля (в домах).

3. Артур Пирожков занимается разведением животных. На его ферме каждое лето могут жить до 118 уток или до 24-ти поросят. Утки и поросята могут соседствовать на одной ферме в любом линейном соотношении. Пирожков может обмениваться животными с соседом в такой пропорции, что за каждые 20 уток можно получить 6-х поросят и

наоборот, причем у соседа есть 150 уток и 25 поросят. Ежегодно Артура приглашают на ярмарку в город, где ему готовы заплатить 10$ за каждую утку и 47$ за каждого поросенка. Сколько максимально сможет заработать Артур Пирожков по итогам одного лета?

Раздел 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЫНОЧНОГО СПРОСА. РЫНОЧНОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ. РЫНОЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Теоретический материал

Спрос (рыночный) – оплаченная потребность, когда в рамках конкретного промежутка времени определенное число покупателей, может и хочет приобрести товар по определенной цене.

Предложение – это объем предложенного и реально проданного товара; количество товаров, которое будет предложено производителем на рынке по каждой данной цене в течение определенного промежутка времени.

Спрос D на некоторый товар и предложение S зависят от цены p, которая, в свою очередь, зависит от времени t. Равновесной ценой называется цена, при которой спрос совпадает с предложением: $D(p)=S(p)$.

Любое отклонение от такого состояния приводит в движение силы, способные вернуть рынок в состояние равновесия: устранить дефицит
($D(p)>S(p)$) или излишек (избыток) товаров на рынке ($D(p)<S(p)$).
Пусть $D=D(P)$ – функция спроса в зависимости от цены товара P. Эластичность спроса (относительное изменение спроса при изменении цены товара на один процент) вычисляется по формуле
$E(D)=P\cdot\dfrac{D'(P)}{D(P)}$ и показывает на сколько % изменится спрос, если цена возрастет на 1%.
Эластичность предложения (относительное изменение предложения при изменении цены товара на один процент) вычисляется по формуле

$E(S) = P \cdot \frac{S'(P)}{S(P)}$ и показывает на сколько % изменится предложение, если цена возрастет на 1%.

Средняя и точечная эластичность функции.

Пусть $f(x)$ определенная и дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция.

Для любой точки $x_0 \in (a; b)$ и для любого значения $\Delta x:\ x_0 + \Delta x \in (a; b)$ точечной средней эластичностью функции в точке x_0 называется величина

$$E_{f/x} = \frac{\frac{\Delta f}{f_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}},$$

где $f_0 = f(x_0)$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Заметим, что средняя эластичность зависит как от точки x_0, так и от приращения Δx.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим определение точечной эластичности через производную: для любой точки $x_0 \in (a; b)$ точечной эластичностью функции в точке x_0 называется величина

$$E_{f/x} = f'(x_0)\frac{x_0}{f_0}.$$

где $f_0 = f(x_0)$.

Отметим два полезных свойства точечной эластичности функции:

1. Эластичность произведения нескольких функций равна сумме эластичностей этих функций. В частности,
$$E_{fg/x} = E_{f/x} + E_{g/x}$$
2. Функция является функцией с постоянной эластичностью, тогда и только тогда, когда эта функция степенная.

Наряду с точечной средней эластичностью рассматривают дуговую среднюю эластичность.

Для любых точек $x_1, x_2 \in (a; b): x_1 \neq x_2$ дуговой средней эластичностью функции называется величина

$$E_{f/x} = \frac{\frac{\Delta f}{\overline{f}}}{\frac{\Delta x}{\overline{x}}},$$

где $\overline{f}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$, $\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$, $\Delta x=x_2-x_1$.

Если предельные величины, характеризуют абсолютное изменение функции, то эластичность характеризует ее относительное изменение. Можно сказать, что эластичность функции показывает на сколько процентов в среднем изменится значение функции при увеличении аргумента на один процент.

Обычно принято считать, что если эластичность по модулю меньше единицы, то функция является неэластичной по переменной x. Если эластичность больше 1, то говорят, что функция эластична по x, так как каждый процент изменения аргумента приводит к еще большему изменению функции.

Если эластичность равна 1, то говорят о единичной эластичности. В предельном случае, когда эластичность равна бесконечности, говорят о совершенной эластичности. При нулевой эластичности – о совершенной неэластичности.

Примеры решения задач

Пример 1. Для функции $f(x)=e^{2-2x}\frac{1}{x^2}$ найдите

точечную эластичность в точке $x_0=1$;

точечную среднюю эластичность в точке $x_0=1$ при $\Delta x=0,1$;

дуговую среднюю эластичность при $x_1=1$ и $x_2=1,1$.

Решение.

$$E_{f/x}=\left(e^{2-2x}\frac{1}{x^2}\right)'\frac{x}{e^{2-2x}\frac{1}{x^2}}=\left(e^{2-2x}\right)'\frac{x}{e^{2-2x}}+\left(\frac{1}{x^2}\right)'\frac{x}{\frac{1}{x^2}}=$$

$$=-2e^{2-2x}\frac{x}{e^{2-2x}}-2\frac{1}{x^3}x^3=-2x-2.$$

$E_{f/x}(1)=-4$.

$f_0=f(1)=e^{2-2}\frac{1}{1^2}=1$.

$$\Delta f=f(1,1)-f(1)=e^{2-2\cdot1,1}\frac{1}{1,1^2}-1\approx-0,3234$$

$$E_{f/x}=\frac{\frac{\Delta f}{f_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}}\approx\frac{\frac{-0,3234}{1}}{\frac{0,1}{1}}=-3,234$$

$$\bar{f}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{e^{2-2}\frac{1}{1^2}+e^{2-2\cdot 1,1}\frac{1}{1,1^2}}{2}\approx 0,8383$$

$$\Delta f=f(x_2)-f(x_1)=e^{2-2}\frac{1}{1^2}-e^{2-2\cdot 1,1}\frac{1}{1,1^2}\approx -0,3234$$

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+1,1}{2}=1,05$$

$$\Delta x=x_2-x_1=0,1$$

$$E_{f/x}=\frac{\frac{\Delta f}{\bar{f}}}{\frac{\Delta x}{\bar{x}}}\approx\frac{\frac{-0,3234}{0,8383}}{\frac{0,1}{1,05}}\approx -4,05$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
x=symbols(' x')
f=exp(2-2*x)*x**(-2)
E=diff(f,x)*x/f
print(E)
E1=E.subs({x:1})
print(E1)
f1=f.subs({x:1.1})-f.subs({x:1})
print(f1)
f0=f.subs({x:1})
print(f0)
E2=f1/f0*1/0.1
print(E2)
Fcp=(f.subs({x:1.1})+f.subs({x:1}))/2
E3=f1/Fcp/(1.1-1)*(1.1+1)/2
print(E3.n(3))
```

```
x**3*(-2*exp(2 - 2*x)/x**2 - 2*exp(2 - 2*x)/x**3)*exp(2*x - 2)
-4
-0.323363013985139
1
-3.23363013985139
-4.05
```

Пример 2.

1. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=2500-200P и Qs=1000+100P. Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

Решение:

2500-200P=1000+100P

2500-1000=200P+100P

1500=300P

P=5

Qd=2500-200*5=1500

Ответ: равновесная цена равна 5 рублям, равновесный объем составил 1500 ед.

Решение на Python.

Загружаем библиотеки, задаем переменные и функции, решаем уравнение,

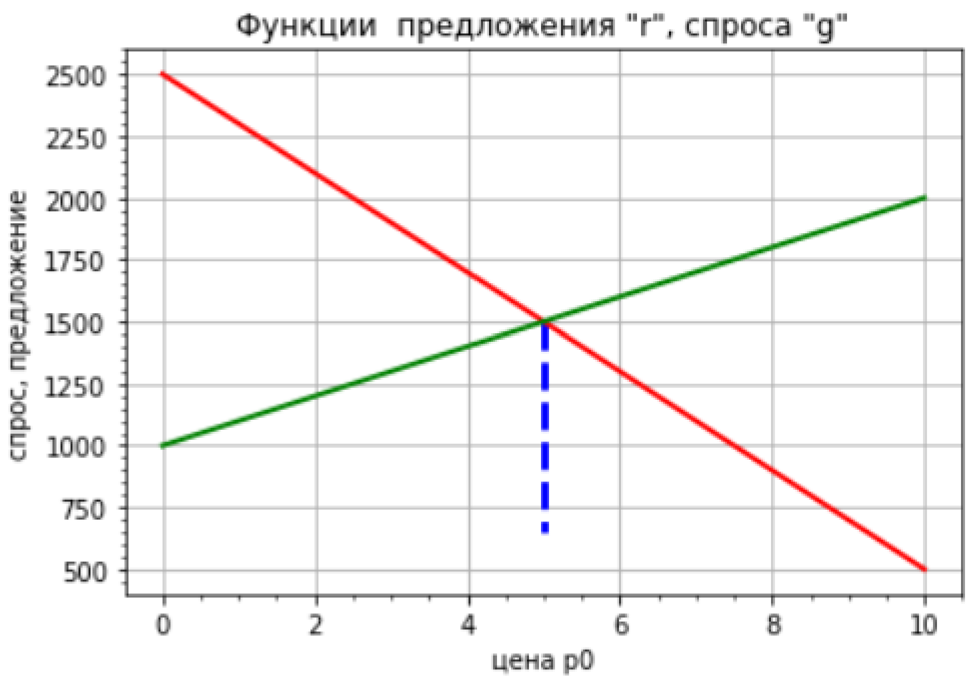
выводим ответ

```
import math
from sympy import*
p=symbols('p')
p0=solve(2500-200*p-1000-100*p,p)
print('Ответ: а)равновесная цена',p0)
Qd=p*(-200)+2500
Qd=Qd.subs({p:5})
print(Qd,'спрос при равновесной цене')
```

```
Ответ: а)равновесная цена [5]
1500 спрос при равновесной цене
```

Изображаем графически

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 10, 100)
y = 2500-200*x
z=100*x+1000
fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(x, y, color = 'r', linewidth = 2)
ax.plot(x, z, color = 'g', linewidth = 2)
ax.grid()

#  Вертикальные линии:
ax.vlines(5, 1500, 650,color = 'b',
          linewidth = 3,
          linestyle = '--')
ax.set_xlabel('цена p0')
ax.set_ylabel('спрос, предложение')
#  Включаем видимость вспомогательных делений:
ax.minorticks_on()
plt.title('Функции  предложения "r", спроса "g"')
plt.show()
```



Пример 3. Зависимость функции спроса D от цены P выражается формулой

$$D(P) = 15e^{-0,4P^2}.$$

При каких значениях цены P спрос будет эластичным?

Решение.

Эластичность спроса:

```
P = symbols('P')
D = 15*exp(-0.4*P**2)
Dprim = diff(D,P)
E = P*Dprim/D
E
```

$-0.8P^2$

Модуль эластичности спроса равен $0{,}8P^2$. Найдем, при какой цене эластичность равна 1.

```
''' |P| = -P '''
solve(-E-1,P)
```

```
[-1.11803398874989, 1.11803398874989]
```

Ответ: Спрос эластичный при значениях цены $P > 1{,}118$.

Пример 4. Определить коэффициенты эластичности производственной функции Кобба-Дугласа $z = 4{,}5x^{0,33}y^{0,66}$.

Решение на Python.

```
''' Частные производные: '''
z = 4.5*x**(0.33) * y**(0.66)
z_x = diff(z, x)
z_y = diff(z, y)

''' Коэффициенты эластичности '''
E_x = (x/z)*z_x
E_y = (y/z)*z_y
print('E_x: %.2f E_y: %.2f' % (E_x, E_y))
```

```
E_x: 0.33 E_y: 0.66
```

Дуговая эластичность $Э = \dfrac{(Q_2 - Q_1)(P_1 + P_2)}{(Q_1 + Q_2)(P_2 - P_1)}$

```python
from sympy import *
p, p1, p2 = symbols('p p1 p2')
Q=2020*p**(-2)
E=(diff(Q,p)*p/Q)
print('точечная эластичность E =',E)
Q1=Q.subs({p:p1})
Q2=Q.subs({p:p2})
print(Q1 ,',', Q2)
Ed=((Q2-Q1)*(p1+p2)/(p1-p2)/(Q2+Q1))
print('Дуговая эластичность Ed =',sympy.simplify(Ed))
```

```
точечная эластичность E = -2
2020/p1**2 , 2020/p2**2
Дуговая эластичность Ed = (p1**2 + 2*p1*p2 + p2**2)/(p1**2 + p2**2)
```

Точечная эластичность $E_{QK} = \frac{Q_K^{'}}{Q} K$

Пример 5. Для заданной производственной функции $Q(K,L) = \frac{L^{0,1} 7^K}{1+7^K}$, где Q – объем выпускаемой продукции, K – объем фондов (капитала), L – объем трудовых ресурсов, при $K_0 = 6$, $L_0 = 8$ найдите эластичность выпуска по фондам. Ответ дайте в виде десятичной дроби с достаточным числом знаков после десятичной запятой.

Решение на Python.

```python
import numpy as np
from sympy import *
L, K =symbols('L K')
Q=((L**0.1)*(7**K))/(1+7**K)
E=diff(Q,K)*K/Q
e=E.subs({K:6,L:8})
print(e)
print(e.n(3))
if abs(e)>1:
    print('Ответ: Эластичность выпуска по фондам E = ',e.n(3), 'выпуск по фондам эластичен')
else:
    print('Ответ: Эластичность выпуска по фондам E = ',e.n(3), 'выпуск по фондам не эластичен')
```

```
3*log(7)/58825
9.92e-5
Ответ: Эластичность выпуска по фондам E =  9.92e-5 выпуск по фондам не эластичен
```

Пример 6. В математической модели рынка некоторого товара с функцией спроса $D(p) = 1 + 2p - 15p^2$, где p – цена товара в рублях, выяснить, при каких ценах спрос будет эластичным.

Р е ш е н и е. Функция $D(p)$ – эластична тогда и только тогда, когда

$$|E_D| > 1 \Rightarrow \begin{cases} E > 1 \\ E < -1 \end{cases}, \quad \text{где} \quad E_D(p) = \frac{D'(p)}{D(p)} p.$$

В данном примере функция спроса $D(p) = 1 + 2p - 15p^2$ при $p > 0$ – убывающая и положительная. Значит, $D'(p) < 0, \quad D(p) > 0, \quad \Rightarrow \quad E_D < 0$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $E_D < -1$.

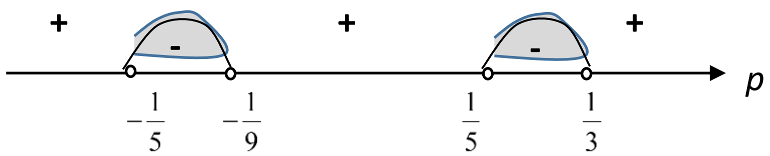
Вычисляем эластичность функции спроса:

$$E_D(p) = \frac{D'(p)}{D(p)} p = \frac{2 - 30p}{1 + 2p - 15p^2} \cdot p.$$

Решим неравенство $E_D < -1$:

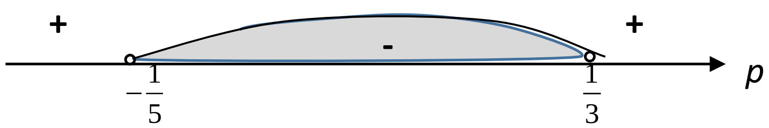
$$\frac{(2 - 30p)p}{1 + 2p - 15p^2} < -1 \Rightarrow \frac{-45p^2 + 4p + 1}{1 + 2p - 15p^2} < 0 \Rightarrow \frac{45p^2 - 4p - 1}{15p^2 - 2p - 1} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{45 \cdot (p - \frac{1}{5}) \cdot (p + \frac{1}{9})}{15 \cdot (p - \frac{1}{3}) \cdot (p + \frac{1}{5})} < 0 \Rightarrow \frac{(p - \frac{1}{5}) \cdot (p + \frac{1}{9})}{(p - \frac{1}{3}) \cdot (p + \frac{1}{5})} < 0 \Rightarrow p \in \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right).$$



Найдем значения цены p, при которых $D(p) > 0$:

$$1 + 2p - 15p^2 > 0 \Rightarrow (p - \frac{1}{3}) \cdot (p + \frac{1}{5}) < 0 \Rightarrow p \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right).$$



Совмещая полученные результаты и учитывая положительность цены p, заключаем: $p \in \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

О т в е т: $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
t,x=symbols('t x')
D=1+2*p-15*p**2
E=diff(D,p)*p/D
print(E)
print(solve([p>0,D>0,E-1>0,abs(E)>1]))
```

или

```
import numpy as np
from sympy import *
t,x=symbols('t x')
D=1+2*p-15*p**2
E=diff(D,p)*p/D
print(E)
print(solve([p>0,D>0,abs(E)-1>0],[p]))
```

```
p*(2 - 30*p)/(-15*p**2 + 2*p + 1)
(0 < p) & (p < 1/3) & (((-oo < p) & (p < -1/5)) | ((-1/5 < p) & (p < -1/9)) | ((1/5 < p) & (p < 1/3)) | ((1/3 < p) & (p < oo)))
```

Пример 7. Функция спроса D и предложения S от цены p имеют вид: $D(p) = 40 - 1,3p$, $S(p) = 20 + 1,2p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

Решение. Находим равновесную цену из условия $D = S$:

```
p = symbols('p')
D = 40 - 1.3*p
S = 20 + 1.2*p
p0 = solve(D-S1,p)
p0[0].n(2)
```

8.0

Функция solve() возвращает решение $p0$ в виде списка, и для вывода на печать берется нулевой элемент списка $p0[0]$. Для вывода на печать заданного числа k знаков используется метод .n(k).

Находим значение эластичности.

```
Dprim = diff(D,p)
E = (p*Dprim/D).subs(p,p0[0])
E.n(3)
```

–0.351

Ответ: $E(D) = -0,351$.

Пример 8. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D=10$ единиц, цена p составляла 90 денежных единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D)=\frac{D-100}{D}$, $(0<D<100)$.

Решение. Записываем условие на эластичность.

$E_p(D)=\frac{p}{D}D'=\frac{D-100}{D}$; $pD'=D-100$.

Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$p\frac{dD}{dp}=D-100; \qquad \frac{dD}{D-100}=\frac{dp}{p}; \qquad \int\frac{dD}{D-100}=\int\frac{dp}{p};$$

$$\ln(D-100)=\ln Cp; \quad D=Cp+100.$$

По условию: $10=C\cdot 90+100$; $C=-1$.

Ответ: $D=100-p$.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p, C = symbols('p C')
D= Function('D')
eq=(D(p)-100)/D(p)-diff(D(p),p)*p/D(p)
des=dsolve(eq,D(p))
print(des)
C0=solve(C*90+100-10,C)
print('C1 = ',C0[0])
```

```
Eq(D(p), C1*p + 100)
C1 =  -1
```

Пример 9. Функции спроса D и предложения S в зависимости от цены p и ее производной имеют следующий вид:

$$D(p)=3p'-2p+19; \quad S(p)=4p'-p+9.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени $p=9$. Исследовать равновесную цену на устойчивость.

Решение. Приравнивая спрос и предложение, получим уравнение для цены:

$3p'-2p+19=4p'-p+9$; $p'+p-10=0$.

Линейное с постоянными коэффициентами (и с разделяющимися переменными).

```
t = symbols('t')
p = Function('p')
eq = diff(p(t),t)+p(t)-10
des = dsolve(eq,p(t))
des
```

$p(t) = C_1 e^{-t} + 10$

С учетом начального условия $p(0)=9$, получаем уравнение:

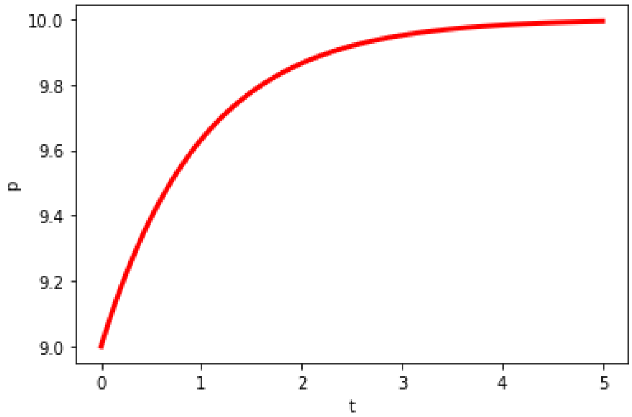
$$p(t)=10-e^{-t}.$$

Равновесная цена является устойчивой, если для нее существует конечный предел при $t \to \infty$. В нашем случае это выполняется.

$$\lim_{t\to\infty}\left(10-e^{-t}\right)=10.$$

График зависимости цены от времени имеет следующий вид:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
t = np.linspace(0,5,100)
p = 10-np.exp(-t)
plt.plot(t,p,c='r',linewidth=3)
plt.ylabel("p")
plt.xlabel("t")
plt.show()
```



Пример 10. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $q_d = 20 - P$. Рыночное предложение задано функцией $Q_S = 50P - 250$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

Ответ: 10 единиц

Решение:

Суммарный спрос: $Q_d = 25 \times (20 - P) = 500 - 25P$.

В равновесии спрос равен предложению: 500 – 25P = 50P – 250, Q* = 250

Следовательно, каждый из 25-ти потребителей покупает 10 единиц.

Решение на Python.

Аналогично предыдущей задаче загружаем библиотеки, задаем переменные и функции, решаем уравнение, выводим ответ.

```
import math
from sympy import*
import numpy as np
p=symbols('p')
qd = 20-p  #Функция индивидуального спроса на товар Т
QS = 50*p-250 #Функция рыночного предложения Т
n=25 #число потребителей товара Т
Qd=n*qd
print('Сумарный спрос Qd=',Qd)
p0=solve(Qd-QS,p) #В равновесии спрос равен предложению
print('равновесная цена =',p0[0])
qd=qd.subs({p:10})
print('Ответ: каждый из 25 потребителей будет преобретать',qd,'едениц товара.')
```

```
Сумарный спрос Qd= 500 - 25*p
равновесная цена = 10
Ответ: каждый из 25 потребителей будет преобретать 10 едениц товара.
```

Пример 11. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 200 до 260 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 220 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 автомобиля?

Решение:

Пусть функция предложения $Q_S = c + dP$.

Восстанавливаем функцию предложения по двум данным в условии точкам, имеем систему:

$$\begin{cases} 8 = c + 260d \\ 5 = c + 200d \end{cases}$$

P = 100 + 20Q

При цене 220 величина предложения равна 6, а величина спроса равна 4 (по условию), следовательно, профицит равен двум автомобилям.

Ответ: 2 автомобиля.

Решение на Python.

Воспользуемся модулем линейная алгебра linalg библиотеки numpy для решения системы линейных уравнений в матричном виде.

Система

$$\begin{cases} 8 = c + 260d \\ 5 = c + 200d \end{cases}$$

в матричном виде запишется так

$$\begin{pmatrix} 1 & 260 \\ 1 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Матрицы или массивы в Python задаются с помощью np.array ([[,],…,[,]]).

Так матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 260 \\ 1 & 200 \end{pmatrix}$ задается так

```
A=np.array([[1,260],[1,200]])
```

Итак, мы активируем библиотеки

```
import numpy as np
from numpy import linalg
```

Задаем матрицы A, B и X и решаем систему относительно x, y.

```
#Восстанавливаем линейную функцию предложения по двум
#данным в условии точкам, имеем систему:
#x+200y=5, x+260y=8
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
A=np.array([[1,260],[1,200]])
B=np.array([8,5])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, [' x=',' y=']):#Выведем решение
    print (x,t)
Qs=-5+0.05*p
Qs=Qs.subs({p:220})
print('(спрос при цене 220)=',round(Qs))
print('Ответ:(излишек)=',round(Qs-4))
```

```
 x= -5.0
 y= 0.05
(спрос при цене 220)= 6
Ответ:(излишек)= 2
```

Можно воспользоваться функцией nsolve которая годится для решения не только систем линейных, но и нелинейных уравнений

```
n=nsolve([8-x-260*y,5-x-200*y],[x,y],[1,1])
```

Первые квадратные скобки содержат уравнения, записанные в виде $f(x)=0$, вторые – переменные, третьи примерное значение ответа (выбираем произвольно).

```
import numpy as np
from numpy import linalg
x, y=symbols('x y')
n=nsolve([8-x-260*y,5-x-200*y],[x,y],[1,1])
print(n)
```

```
Matrix([[-5.00000000000000], [0.0500000000000000]])
```

Пример 12. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 57 - \frac{1}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_S = \sqrt{P} - 3$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{3}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?
Ответ: выручка упадет на 378
Решение:
Изначальное равновесие определяется из равенства спроса и предложения:

$$Q_d = Q_S$$

$$57 - \frac{1}{3}P = \sqrt{P} - 3$$

P = 144, Q = 9

При введении квоты количество становится равно $Q = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$.

Цена определяется из уравнения спроса: $57 - \frac{1}{3}P = 6$, P = 153.

Тогда первоначальная выручка: $TR_1 = 144 \times 9 = 1296$.
Новая выручка: $TR_2 = 153 \times 6 = 918$.
Изменения выручки: $\Delta TR = -378$.
Решение на Python.
В решение пользуемся функцией solve, разобранной ранее.

```
import math
from sympy import*
import numpy as np
p=symbols('p')
Qd=57-p/3
Qs=pow(p,1/2)-3
p=solve(Qd-Qs,p)
print('равновесная цена p0= ',p[0].n(3))
print('равновестный спрос Qp0=',pow(144,1/2)-3)
print('Тогда первоначальная выручка TR1= ',9*144)
print('При введении квоты количество становится равно ',2/3*(pow(144,1/2)-3))
p=symbols('p')
Qd=57-p/3
a=solve(Qd-6,p)
print('Цена определяется из уравнения спроса:',a[0])
print('Новая выручка TR2= ',153*6)
print('Ответ: изменения выручки = ',153*6-9*144)
```

```
равновесная цена p0=  144.
равновестный спрос Qp0= 9.0
Тогда первоначальная выручка TR1=  1296
При введении квоты количество становится равно  6.0
Цена определяется из уравнения спроса: 153
Новая выручка TR2=  918
Ответ: изменения выручки =  -378
```

Пример 13. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 50{,}6 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_s(p) = \max\{p - 5; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

Решение:

Находим равновесие с учетом потоварного налога на потребителей:

$$Q_d^1 = 50{,}6 - p - t = Q_s = n(p - 5)$$

$$p^* = \frac{50{,}6 - t + 5n}{n + 1}$$

$$Q^* = n\left(\frac{50{,}6 - t - 5}{n + 1}\right)$$

Суммарные налоговые сборы: $T = t \times Q = \frac{n}{n+1}(45{,}6t - t^2)$.

Максимизирующее налоговые сборы значение t^* не зависит от n.

Ответ: 0%, не изменится

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p, t, n, p1, p0=symbols('p t n p1 p0')
D=50.6-p-t
S=n*(p-5)
p0=solve(D-S,p)
print('равновесная цена с учетом налога p0=',p0)
Q1=n*((5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0)-5)
print('равновесное предложение',Q1)
T=n*((5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0)-5)*t
print('суммарные налоговые сборы T=',T)
d=diff(T,t)
print('производная T',d)
s=solve(d,t)
print('Ответ: максимализирующее T значене t*=',s[0].n(3), 'не зависит от n')
```

```
равновесная цена с учетом налога p0= [(5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0)]
равновесное предложение n*(-5 + (5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0))
суммарные налоговые сборы T= n*t*(-5 + (5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0))
производная T -n*t/(n + 1.0) + n*(-5 + (5.0*n - t + 50.6)/(n + 1.0))
Ответ: максимализирующее T значене t*= 22.8 не зависит от n
```

Пример 14. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 50 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 50 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -10 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 30 единиц. Чему равна ставка налога t?

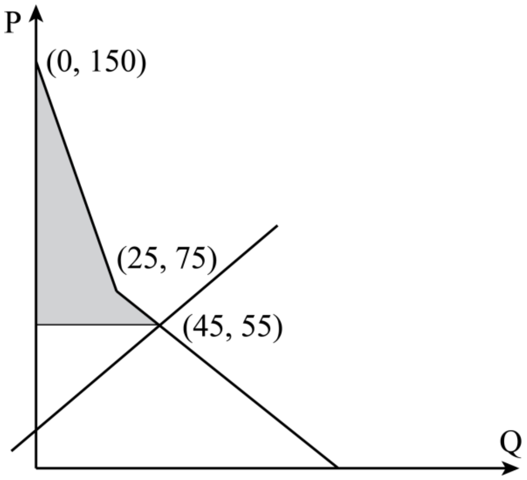
Решение:

Составим общую функцию спроса. При цене выше 150 рублей никто не покупает игры, при цене в интервале от 75 до 150 рублей игры покупают только геймеры. При цене ниже 75 рублей игры покупают обе категории потребителей.

Таким образом, общая функция спроса:

$$\begin{cases} 0, \quad P > 150 \\ 50 - \frac{1}{3}P, \quad 75 < P \le 150 \\ 100 - P, \quad P \le 75 \end{cases}$$

Далее находим равновесную цену и количество. Функция $Q = -10 + P$ пересекает функцию спроса на третьем участке в точке $Q = 45, P = 55$.



Новое равновесное количество уменьшилось на 30 единиц и стало равно 15. Тогда равновесная цена равна 105, покупают игры только геймеры.

Новая функция предложения: $Q = -10 + P - t$. Подставляя равновесные цену и количество, получаем, что ставка налога равна 80.

Ответ: 80.

Решение на Python.

```
import numpy as np
import sympy
from sympy import*
p,t=symbols('p t') # цена, доход
p0=10 #  равновесная цена
Dp = 50-p/3# спрос
Sp =50-2/3*p # предложение
Q=-10+p
p0=solve(100-p-Q,p)
print('равновесная цена =',p0[0])
Q0=Q.subs({p:55})
print('равновесный объем =',Q0)
Qr=Q0-30
print('Новое равновесное количество ', Qr)
pr=solve(Dp-15,p)
print('равновесная цена равна', pr[0])
t=solve(-10+105-t-15,t)
print('ставка налога равна ', t[0])
```

```
равновесная цена = 55
равновесный объем = 45
Новое равновесное количество  15
равновесная цена равна 105
ставка налога равна  80
```

Пример 15. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 50 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 50 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -10 + P$. Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

Ответ: 1637,5

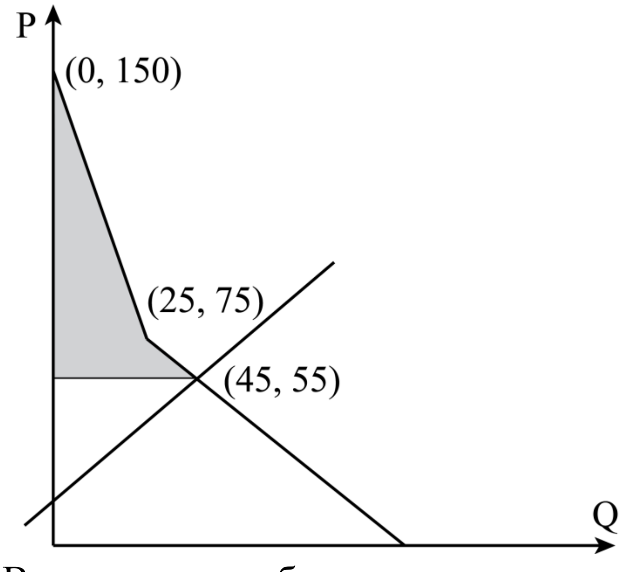
Решение:

Составим общую функцию спроса. При цене выше 150 рублей никто не покупает игры, при цене в интервале от 75 до 150 рублей игры покупают только геймеры. При цене ниже 75 рублей игры покупают обе категории потребителей.

Таким образом, общая функция спроса:

$$\begin{cases} 0, & P > 150 \\ 50 - \frac{1}{3}P, & 75 < P \le 150 \\ 100 - P, & P \le 75 \end{cases}$$

Далее находим равновесную цену и количество. Функция $Q = -10 + P$ пересекает функцию спроса на третьем участке в точке $Q = 45,\ P = 55$.



Величина потребительского излишка равна площади закрашенной области, которая может быть вычислена как сумма площадей треугольника и трапеции.

$$CS=\frac{(150-75)\cdot 25}{2}+\frac{(25+45)\cdot(75-55)}{2}=1637{,}5$$

Решение на Python.

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
a=integrate(100-x, (x, 55, 75))
b=integrate(50-x/3, (x, 75, 150))
c=a+b
print('Величина потребительского излишка равна',a+b,'=',c.n(5))
```

```
Величина потребительского излишка равна 3275/2 = 1637.5
```

Пример 16. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2008}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

Решение:

Приведенная функция спроса обладает постоянным значением точечной эластичности, равным -2.

Ответ: нет.

Решение:

Пусть P_1, P_2 - произвольные цены.

Тогда дуговая эластичность в данном ценовом интервале будет равна:

$$\frac{2008/P_2^2-2008/P_1^2}{P_2-P_1}\cdot\frac{P_2+P_1}{2008/P_1^2+2008/P_2^2}<-2$$

После преобразований получаем:

$(P_1-P_2)^2<0$ – неравенство, неразрешимое в действительных числах.

Решение на Python.

Функция diff(Q,p) выдает производную Q относительно p.

Sympy.simplify(F) преобразует F к более простому виду, abs(D) - модуль D.

```
import math
from sympy import*
p, p1, p2=symbols('p p1 p2')
Q=2020*p**(-2)
E=diff(Q,p)*p/Q
print('Точечная эластичность E=',E,'<0, а по модулю >0')
Q1=Q.subs({p:p1})
Q2=Q.subs({p:p2})
Ed=sympy.simplify(((Q2-Q1)*(p1+p2))/((p1-p2)*(Q2+Q1)))
print('дуговая эластичность Ed=',Ed,'>0, как не трудно видеть')
print('модуль точечной эластичности abs(E)=', abs(E))
print('разность abs(Ed)-abs(E)=',sympy.simplify(Ed+E),'<0, всегда')
print('Ответ: нет')
```

```
Точечная эластичность E= -2 <0, а по модулю >0
дуговая эластичность Ed= (p1**2 + 2*p1*p2 + p2**2)/(p1**2 + p2**2) >0, как не трудно видеть
модуль точечной эластичности abs(E)= 2
разность abs(Ed)-abs(E)= (-p1**2 + 2*p1*p2 - p2**2)/(p1**2 + p2**2) <0, всегда
Ответ: нет
```

Пример 17. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1000 – 35P, а функция предложения – уравнением Qs = 5P + 600, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 3 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

Решение:

1) Найдем равновесную цену (Pe), приравнивая количество спроса и предложения Qd = Qs, на этом основании приравниваем правые части уравнений: 1000 – 35P = 5P + 600, 400 = 40P, Pe = 10 у. е. Найдем равновесное количество (Qde) образовательных услуг, подставив рыночную цену в любое уравнение: Qd = 1000 – 35P, Qd = 1000 – 35*10, получим Qde = 650.

2) Если государство устанавливает фиксированную цену на услуги в размере 3 у. е. за час, т. е. цена ниже равновесной, то спрос превысит предложение и на рынке возникнет дефицит. Найдем количество услуг, которое будет предложено и куплено по установленной цене: Qs(3) = 5 · 3 + 600, Qs = 615, и Qd (3) = 1000 – 35 · 3, Qd = 895. Таким образом, будет продано на 35 образовательных услуг меньше, чем при равновесной цене и объем продаж составит 615 ед. При этом дефицит составит 895 – 615 = 280 образовательных услуг.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import*
p=Symbol("p") # цена, доход
t=Symbol("t")
p0=10 #  равновесная цена
Dp = 1000-35*p # спрос
Sp =5*p+600 # предложение
p0=solve(Dp-Sp,p)
print('равновесная цена p0 =',p0[0])
D0=Dp.subs({p:10})
print('равновесный спрос D(p0) =',D0)
S0=Sp.subs({p:10})
print('равновесное предложение S(p0) = ', S0)
S3=Sp.subs({p:3})
print('предложение по цене 3, S(3) = ', S3)
D3=Dp.subs({p:3})
print('спрос по цене 3, S(3) = ',D3)
print ('Ответ: дефицит составит', D3-S3)
```

```
равновесная цена p0 = 10
равновесный спрос D(p0) = 650
равновесное предложение S(p0) =  650
предложение по цене 3, S(3) =  615
спрос по цене 3, S(3) =  895
Ответ: дефицит составит 280
```

Пример18. Функция спроса на товар X имеет вид:
QDX = 100 – 2PX – PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 15 ден. ед. и PY = 20 ден. ед.

Решение:

Подставляя значения PX и PY находим, что QDx = 50 ден. ед. Коэффициент прямой эластичности спроса по цене найдем по формуле: EPX = dQDX / dPX ·PX / QDX = –2 · 15 / 50 = –0,6. Спрос по цене неэластичен, т.к. значение коэффициента < 1. Товар X является товаром первой необходимости. 2) Коэффициент перекрестной эластичности спроса по цене найдем по формуле: EPY = dQDx / dPY ·PY / QDX = –1 · 20 / 50 = –0,4. Так как коэффициент перекрестной эластичности спроса по цене отрицательный, то товары X и Y являются взаимодополняемыми товарами (комплементарными).

Решение на Python.
Задаем библиотеки, символы (заметим, что символьные переменные можно задавать одной строкой как мы это делали ранее и каждый отдельной строкой, как это показано ниже).
Используем производную и присваивание для нахождения коэффициента эластичности. Ответ выводим автоматически, с помощью if…: else:

```
import numpy as np
from sympy import*
px=Symbol("px")
py=Symbol("py")
Qdx = 100-2*px-py
Ey=diff(Qdx,py)/Qdx*py
print('Ey=',Ey)
E=Ey.subs({px:15,py:20})
if E>0:
    print('оба товара являются взаимозаменяемыми (субститутами) E=',E, '>0')

else:
    print('товары X и Y являются взаимодополняемыми товарами (комплементарными) E=',E, '<0')
```

```
Ey= -py/(-2*px - py + 100)
товары X и Y являются взаимодополняемыми товарами (комплементарными) E= -2/5 <0
```

Задачи для самостоятельного решения.

2.1.1. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=3500-300P и Qs=1000+100P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.2. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=2500-200P и Qs=1100+110P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.3. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=1500-100P и Qs=500+50P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.4. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=2000-100P и Qs=700+70P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.5. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=1000-100P и Qs=300+30P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.6. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=5000-400P и Qs=2000+200P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.7. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=200-20P и Qs=100+10P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.8. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=250-20P и Qs=100+10P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.9. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=500-40P и Qs=300+10P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.1.10. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=900-70P и Qs=70+3P.

Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.

2.2.1. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса qd = 40 – P. Рыночное предложение задано функцией QS = 100P – 500. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.2. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса qd = 10 – P. Рыночное предложение задано функцией QS = 25P – 125. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.3. На рынке товара Т присутствует 50 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса qd = 20 – P. Рыночное предложение задано функцией QS = 50P – 250. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.4. На рынке товара Т присутствует 15 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 20 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 50P – 250$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.5. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 4 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 10P – 50$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.6. На рынке товара Т присутствует 75 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 40 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 100P – 500$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.7. На рынке товара Т присутствует 5 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 20 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 50P – 250$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.8. На рынке товара Т присутствует 250 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 200 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 500P – 2500$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.9. На рынке товара L присутствует 30 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 25 – P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 55P – 255$. Определите, сколько единиц товара L будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.2.10. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса $qd = 100 – 5P$. Рыночное предложение задано функцией $QS = 50P – 500$. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

2.3.1. Функция предложения фирмы-производителя сельскохозяйственных машин линейна. Известно, что повышение рыночной цены на трактор с 100 до 160 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 120 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 трактора?

2.3.2. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 200 до 280 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 10 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 220 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 автомобиля?

2.3.3. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 200 до 260 тысяч евро увеличивает величину предложения с 6 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 220 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 3 автомобиля?

2.3.4. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 200 до 300 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 10 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 240 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 автомобиля?

2.3.5. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 220 до 260 тысяч евро увеличивает величину предложения с 6 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 240 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 2 автомобиля?

2.3.6. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 240 до 260 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 6 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 240 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 2 автомобиля?

2.3.7. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 230 до 290 тысяч евро увеличивает величину предложения с 3 единиц до 6 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 250 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 3 автомобиля?

2.3.8. Функция предложения фирмы-производителя спортивных автомобилей линейна. Известно, что повышение рыночной цены на спорткар с 300 до 360 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 320 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 автомобиля?

2.3.9. Функция предложения фирмы-производителя сельскохозяйственных машин линейна. Известно, что повышение рыночной цены на трактор с 200 до 260 тысяч евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 8 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 240 тысяч евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 2 трактора?

2.3.10. Функция предложения фирмы-производителя швейных машин линейна. Известно, что повышение рыночной цены на оборудование с 200 до 240 евро увеличивает величину предложения с 5 единиц до 7 единиц. Определите величину излишка товаров, образующегося на рынке при цене 210 евро, если известно, что по такой цене потребители готовы купить 4 швейные машины?

2.4.1. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 56 - \frac{1}{5}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 5$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{1}{5}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.2. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 55 - \frac{1}{5}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 4$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{5}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.3. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 43 - \frac{1}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 9$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{3}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.4. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 32 - \frac{1}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 6$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{1}{3}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.5. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 75 - \frac{4}{5}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 3$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{4}{5}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.6. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 64 - \frac{1}{2}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 8$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{1}{4}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.7. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 51 - \frac{1}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 2$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{4}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.8. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 84 - \frac{4}{5}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 10$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{3}{5}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.9. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 26 - \frac{2}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 5$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{3}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. Насколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.4.10. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 38 - \frac{4}{5}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 7$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{4}{5}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

2.5.1. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 51{,}3 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 3; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.2. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 52{,}3 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 4; 1\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.3. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 51{,}6 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 5; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.4. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 42{,}3 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 3; 1\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.5. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 44{,}5 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 4; 1\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.6. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 26{,}3 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 1; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.7. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 38{,}3 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 3; 1\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.8. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 46{,}6 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 6; 1\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.9. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 58{,}2 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 8; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.5.10. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 74,4 - p$. Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 7; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

2.6.1. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 54 - \frac{2}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 42 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -5 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 30 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.2. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 48 - \frac{2}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 23 - \frac{1}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -6 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 20 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.3. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 32 - \frac{1}{5}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 26 - \frac{2}{5}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -2 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 25 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.4. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией

$Q=45-\frac{1}{2}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=15-\frac{2}{4}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-5+P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 15 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.5. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q=69-\frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=32-\frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-8+P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 10 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.6. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q=74-\frac{1}{4}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=57-\frac{2}{4}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-10+P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 30 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.7. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q=68-\frac{2}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=41-\frac{1}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-2+P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 12 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.8. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q=58-\frac{4}{8}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=42-\frac{1}{4}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-4+P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 30 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.9. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 63 - \frac{2}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 26 - \frac{1}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -3 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 15 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.6.10. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 47 - \frac{5}{10}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 25 - \frac{1}{5}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -10 + P$.

Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 25 единиц. Чему равна ставка налога t?

2.7.1. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 55 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 55 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -15 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.2. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 60 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 60 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -20 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.3. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 58 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 58 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -18 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.4. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией

$Q = 65 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 65 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -15 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.5. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 70 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 70 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -20 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.6. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 75 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 75 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -25 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.7. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 80 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 80 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -16 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.8. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 85 - \frac{2}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 85 - \frac{3}{4}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -24 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.9. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 100 - \frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 100 - \frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -50 + P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.7.10. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией

$Q=110-\frac{1}{3}P$, а спрос новичков задается функцией $Q=110-\frac{2}{3}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q=-55+P$.

Найдите величину потребительского излишка в равновесии.

2.8.1. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2009}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.2. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2010}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.3. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2015}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.4. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2050}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.5. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2080}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.6. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2100}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.7. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{2500}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.8 Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{3000}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.9 Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{3500}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.8.10. Может ли дуговая эластичность функции спроса $Q=\frac{3200}{P^2}$ быть по модулю больше точечной? Если да, то приведите соответствующий ценовой интервал, если нет, то докажите.

2.9.1. Функция спроса D и предложения S от цены p на мировом рынке нефти имеют вид: $D(p)=25-0{,}8p$, $S(p)=18+1{,}4p$. Найти эластичность спроса в точке равновесной цены.

2.10.1. Функции спроса D и предложения S в зависимости от цены p имеют вид:

$$D=20-4p+2\frac{dp}{dt},\qquad S=20-2p+4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=4$.

2.11.1. Функции спроса D и предложения S в зависимости от цены p имеют вид:

$$D=24-2p+3\frac{dp}{dt},\qquad S=16-p+4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p=7$.

Найти $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)$. Построить график зависимости равновесной цены от времени.

2.12.1. Функции спроса D и предложения S, выражающие зависимость от цены p и ее производных, имеют вид:

$$D(t)=3p''-p'-2p+18,\qquad S=4p''+p'+3p+3.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени.

2.13.1. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D=10$ единиц, цена p составляла 90 денежных единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D)=\frac{D-100}{D}$ $(0<D<100)$.

2.14.1. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D=2$ единицы, цена p составляла 4 денежных единицы, а эластичность спроса постоянна: $E_p(D)=-\frac{1}{2}$.

2.15.1 Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1050 – 45P, а функция предложения – уравнением Qs = 15P + 700, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 4 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.2. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1070 – 50P, а функция предложения – уравнением Qs = 15P + 650, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 5 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.3. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1100 – 55P, а функция предложения – уравнением Qs = 8P + 640, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 2 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.4. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1150 – 60P, а функция предложения – уравнением Qs = 5P + 750, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 3 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.5. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1200 – 65P, а функция предложения – уравнением Qs = 20P + 400, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 5 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.6. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 800 – 25P, а функция предложения – уравнением Qs = 7P + 500, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 6 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.7. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 900 – 25P, а функция предложения – уравнением Qs = 10P + 550, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 5 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.8. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1300 – 70P, а функция предложения – уравнением Qs = 15P + 680, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 3 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.9. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1400 – 60P, а функция предложения – уравнением Qs = 25P + 300, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 7 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.15.10. Функция спроса на рынке образовательных услуг представлена уравнением Qd = 1500 – 100P, а функция предложения – уравнением Qs = 30P + 700, где P – рыночная цена за час, а Qd и Qs – объемы спроса и предложения (в часах). Государство ввело фиксированную цену на услугу в размере 8 у. е. за час. Определите последствия данного шага для потребителей и производителей.

2.16.1. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 100 – 2PX – PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 15 ден. ед. и PY = 20 ден. ед.

2.16.2. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 10 – 2PX + 0,5PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 3 ден. ед. и PY = 10 ден. ед.

2.16.3. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 8 – PX +0,2PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 4 ден. ед. и PY = 5 ден. ед.

2.16.4. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 50– 3PX – 1PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 8 ден. ед. и PY = 15 ден. ед.

2.16.5. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 10 –PX – 2PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 2ден. ед. и PY = 2 ден. ед.

2.16.6. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 50 – PX – PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 7 ден. ед. и PY = 10 ден. ед.

2.16.7. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 40 – PX – 2PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 4 ден. ед. и PY = 5 ден. ед.

2.16.8. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 80 – 5PX +0,1PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 10 ден. ед. и PY = 30 ден. ед.

2.16.9. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 100 – 4PX – PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 10 ден. ед. и PY = 15 ден. ед.

2.16.10. Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 10 – 6PX + PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 2 ден. ед. и PY = 20 ден. ед.

Контрольная работа

1. Спрос и предложение на товар описывается уравнениями: Qd=2500-200P и Qs=1000+100P. Вычислите равновесную цену и равновесный объем на рынке данного товара.
2. 10 Функция спроса на товар X имеет вид: QDX = 10 – 6PX + PY, где PX и PY – рыночные цены товаров X и Y. Определите, коэффициенты прямой (эластичности спроса по цене) и перекрестной эластичности спроса на товар X при PX = 2 ден. ед. и PY = 20 ден. ед.
3. Найти функцию спроса, если известно, что при спросе $D=10$ единиц, цена p составляла 90 денежных единиц, а эластичность спроса имеет вид: $E_p(D)=\frac{D-100}{D}$ $(0<D<100)$.

4. На рынке компьютерных игр есть две категории покупателей – геймеры и новички. Спрос геймеров задается функцией $Q = 47 - \frac{5}{10}P$, а спрос новичков задается функцией $Q = 25 - \frac{1}{5}P$. Предложение на рынке компьютерных игр имеет вид $Q = -10 + P$. Пусть государство вводит потоварный налог на производителей в размере t за единицу продукции. Известно, что равновесное количество сократилось на 25 единиц. Чему равна ставка налога t?

5. Спрос на некотором рынке задается функцией: $Q_d(p) = 26{,}3 - p$. . Предложение каждой фирмы: $Q_d(p) = \max\{p - 1; 0\}$, фирм на рынке n. Государство вводит потоварный налог на потребителей, максимизируя налоговые сборы. Как и на сколько процентов изменится оптимальная налоговая ставка, если количество фирм увеличится вдвое?

6. На рынке товара Т присутствует 25 потребителей, каждый из которых характеризуется функцией индивидуального спроса qd = 40 – P. Рыночное предложение задано функцией QS = 100P – 500. Определите, сколько единиц товара Т будет приобретать каждый потребитель в равновесии.

7. Спрос на рога носорогов описывается функцией $Q_d = 51 - \frac{1}{3}P$, а их предложение – функцией $Q_s = \sqrt{P} - 2$. Племя, охраняющее носорогов, решило ввести квоту на их отлов в размере $\frac{2}{4}$ от первоначального равновесного количества, сложившегося на рынке. На сколько и в каком направлении изменится выручка продавцов?

Раздел 3. АНАЛИЗ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Теоретический материал

Рассмотрим функцию полезности. Обычно предполагается, что функция полезности возрастает по каждой переменной и является выпуклой вверх функцией.

Одной из важнейших функций полезности является CES-функция (Constant Elasticity of Substitution). Для двумерного случая эта функция имеет следующий вид:

$$U(x,y)=\left(\alpha x^{\frac{1}{\rho}}+\beta y^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho}.$$

При разных значениях параметра ρ можно получить частные случаи:

a) если ρ = 1, то функция является линейной: $U(x,y)=\alpha x+\beta y$;

b) если ρ → − ∞, то получается функция Леонтьева: $U(x,y)=\max\{\alpha x,\beta y\}$;

c) если ρ → 0 и $\alpha+\beta=1$, то получается функция Кобба-Дугласа $U(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$.

Производственная функция выражает связь между затратами ресурсов и выпуском продукции. Так, если для производства требуется n различного вида ресурсов, то общий вид производственной функции является функцией n переменных:

$$Q=Q(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

где Q – объем произведенной продукции, x_i – затраты i-го ресурса.

Важную роль для решения теоретических и прикладных задач играют производственные функции, в которых в качестве независимых переменных выступают объем основного капитала K и затраты труда L. Примером такой функции может служить мультипликативная производственная функция:

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где A, α, β – положительные константы.

Если α + β = 1, то получаем функцию Кобба-Дугласа.

Приведем еще несколько примеров производственных функций:

a) линейная: $Q=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$, где $a_i>0$ для всех $i=1,\ldots,n$;

b) функция типа «затраты-выпуск»: $Q=\min\limits_{i=1,\ldots,n}\left\{\frac{x_i}{c_i}\right\}$, где $c_i>0$ для всех $i=1,\ldots,n$.

Линии уровня функции полезности называются кривыми безразличия. Кривые безразличия состоят из наборов благ, обладающих одинаковой полезностью для потребителя.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите уравнение кривой безразличия функции полезности

$U(x,y)=54x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}$, которые содержат набор благ (27; 64). Найдите количество второго блага в наборе $(36;y_0)$, если известно, что он принадлежит этой кривой безразличия.

Ответ: 36.

Решение.

Так как $U(27,64)=54\cdot 27^{\frac{1}{3}}64^{\frac{1}{6}}=54\cdot 3\cdot 2=324$, то искомое уравнение кривой безразличия имеет следующий вид:

$54x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}=324.$

Выражая у через х, получим

$y=\frac{6^6}{x^2}=\frac{46656}{x^2}.$

Найдем y_0: $y_0=\frac{46656}{36^2}=36.$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
x, y=symbols('x y')
U=54*x**(1/3)*y**(1/6)
U1=U.subs({x:27,y:64})
print(U1.n(4))
Y=solve(U-U1,y)
print(Y[0])
print(solve(U.subs({x:36})-U1,y)[0].n(3))
```

```
324.0
46656.0/x**2
36.0
```

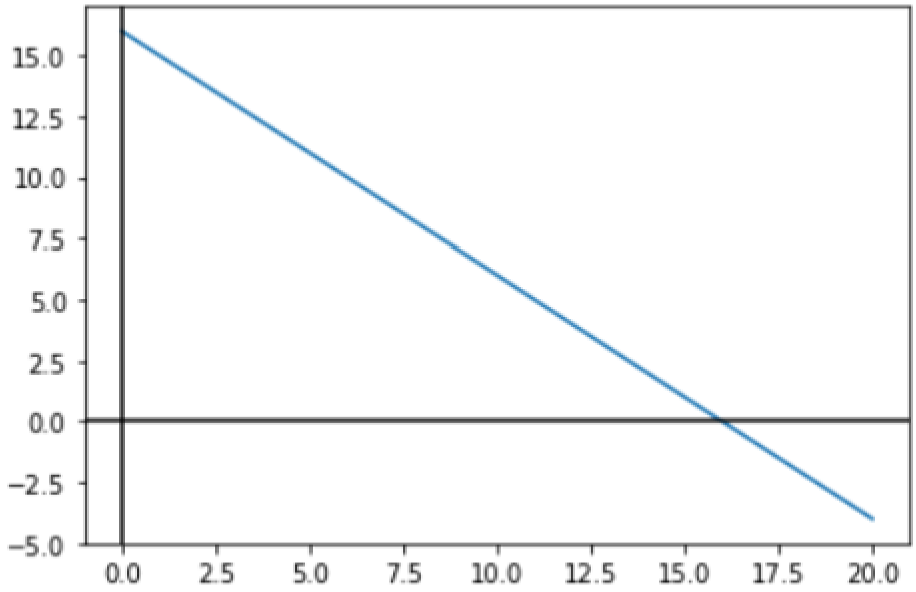
Пример 2. Артем следующей весной заканчивает бакалавриат университета, поэтому у него появится время на то, чтобы совмещать учебу с работой. Он планирует устроиться на работу в банк, где он ожидает, что ему предложат зарплату 400 рублей в час. Однако Артем может ходить на пары, получая в виде стипендии 600 рублей в час. Сложность

заключается в том, что из 24-х часов, которыми Артем обладает в сутки, он вынужден тратить 6 часов на сон и ровно 2 часа на написание дипломной работы. Определите, сколько времени Артем будет тратить на работу при таких условиях.
Ответ: 0 часов
Решение:
Составляем функцию полезности: $U = 4t_1 + 6t_2$, где t_1 и t_2 – число часов, расходуемых на работу и учебу в сутки, соответственно.
Составляем ограничение на время: $t_1 + t_2 = 24 - 6 - 2 = 16$.
Изображаем графически в осях (t_1, t_2) бюджетное ограничение (из точки (0, 16) в точку (16, 0) и линии уровня функции полезности (менее пологие, чем ограничение). Показав это, можно видеть, что оптимум достигается в точке (0, 16), функция полезности в этом случае достигает значения $4 \cdot 0 + 16 \cdot 6 = 96$. Получается, что Артем будет тратить 0 часов на работу.
Либо можно рассуждать таким образом. На ограничении по времени 1 единица работы равна 1 единице учебы, но полезность от 1 единицы работы равна 4, а от единицы учебы 6, поэтому Артем будет выбирать полностью посвятить время учебе.
Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *

import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,20,100)
y1=16-x1
plt.plot(x1,y1)
ax = plt.gca()
# plot X - axis
ax.axhline(y=0, color='k')
# plot Y - axis
ax.axvline(x=0, color='k')
plt.show
```

```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```

```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```




```
import sympy
import numpy as np
from sympy import *
t1, t2 =symbols('t1 t2')
U=4*t1+6*t2
t=16-t2
t11=0
t12=16
U1=U.subs({t1:0,t2:16})
U2=U.subs({t1:16,t2:0})
if U1>U2:
    print('Ответ: функция полезности U =  ',U1,', t = ',t11)
else:
    print('Ответ: функция полезности U =  ', U2,', t = ',t11)
```

```
Ответ: функция полезности U =   96 , t =  0
```

Пример 3. У девочки есть 500 рублей, которые она может потратить на печенье «Советское детство» и зефир в шоколаде. Стоимость сладостей – 100 руб/кг и 200 руб/кг, соответственно. Когда девочка пришла в магазин, то обнаружила, что идет акция на зефир. При покупке более 1-го кг действует скидка 20% на весь купленный зефир, при покупке более 2-х кг – скидка 30% и при покупке более 3-х кг скидка 50%. При этом скидки не суммируются. Пусть девочка предпочитает потреблять зефир и печенье в пропорции 1:1. Сколько зефира будет куплено, если можно купить нецелое число кг и девочка хочет потребить как можно больше комплектов зефира с печеньем?

Ответ: 25/12 кг зефира

Решение:

Построим 4 бюджетных ограничения при разных скидках. Получаем следующие случаи.

Пусть мы покупаем от 3 до 5 кг зефира. Тогда максимальное кол-во печенья определяется уравнением $З = 5 - П$, то есть, пользуясь скидкой 50% на зефир, мы можем потребить от 0 до 2 кг печенья.

Если мы хотим купить больше 2 кг печенья, то пользуемся скидкой 30% на зефир и получаем уравнение $З = \frac{25}{7} - \frac{5}{7}П$, по которому можно купить от 2 до 11/5 кг печенья. 11/5 кг печенья определяется тем, что скидка в 30% действует от 2 до 3 кг зефира. Аналогично действуем на остальных участках бюджетного ограничения:

$З = \frac{25}{8} - \frac{5}{8}П$, если действует скидка 20%, то есть от 11/5 до 17/5 кг купленного печенья.

$З = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}П$, если нет скидки на зефир, то есть от 17/5 до 5 кг купленного печенья.

Найдем кол-во зефира, которое будет куплено. Так как пропорция 1:1, то покупаемое кол-во лежит на пересечении участка бюджетного ограничения $З = \frac{25}{7} - \frac{5}{7}П$ и прямой $З = П$. Оно равно 25/12 кг и лежит от 2 до 11/5 кг печенья.

Решение на Python.

Построим четыре бюджетных множества.

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
S=solve([0.5*200*y+100*x<=500,y>=3],y)
print(S)
s=5.0 - 1.0*x
print(solve([s>3,s<5,x>0],x))
```

```
(3 <= y) & (-oo < y) & (y < oo) & (y <= 5.0 - 1.0*x)
(0 < x) & (x < 2.0)
```

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
S=solve([0.7*200*y+100*x<=500,y>=3],y)
print(S)
s=25/7 - 5*x/7
print(solve([s>2,s<3,x>0],x))
```

```
(3 <= y) & (-oo < y) & (y < oo) & (y <= 25/7 - 5*x/7)
(0.8 < x) & (x < 2.2)
```

```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
S=solve([0.8*200*y+100*x<=500,y>=1,y<2],y)
print(S)
s=3.125 - 0.625*x
print(solve([s>1,s<2,x>0],x))
```

```
(1 <= y) & (-oo < y) & (y < 2) & (y <= 3.125 - 0.625*x)
(1.8 < x) & (x < 3.4)
```

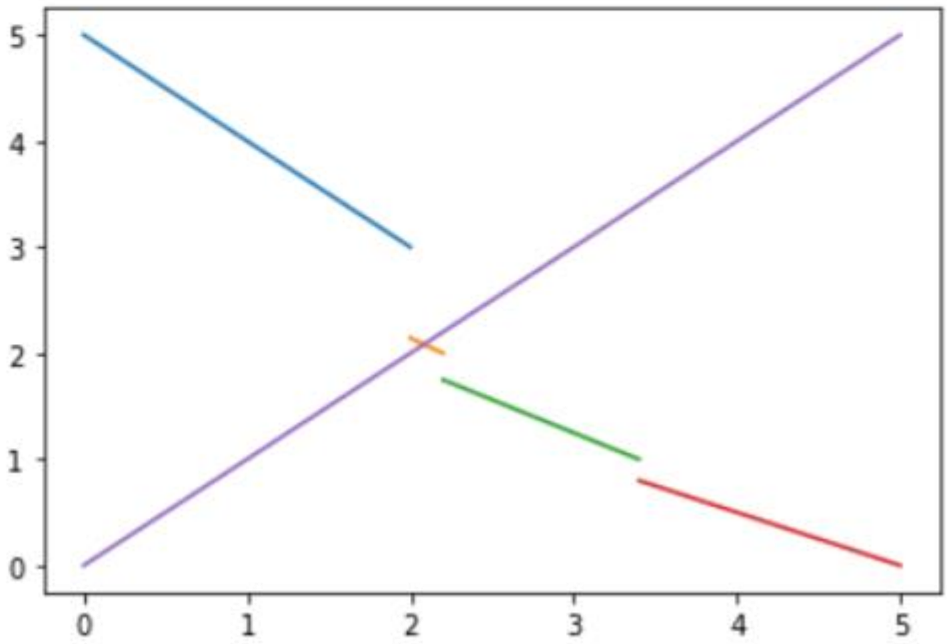
```
import numpy as np
from sympy import *
y, x =symbols('y x')
S=solve([200*y+100*x<=500,y>0,y<1],y)
print(S)
s=5/2 - x/2
print(solve([s>0,s<1,x>0],x))
```

```
(-oo < y) & (0 < y) & (y < 1) & (y <= 5/2 - x/2)
(3.0 < x) & (x < 5.0)
```

И график пересечения этих множеств с прямой y=x.

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,2,50)
x2=np.linspace(2,11/5,50)
x3=np.linspace(11/5,17/5,50)
x4=np.linspace(17/5,5,50)
x5=np.linspace(0,5,50)
y1=5-x1
y2=25/7-5/7*x2
y3=25/8-5/8*x3
y4=5/2-1/2*x4
y5=x5
plt.plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4,x5,y5)
plt.show
```

```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```



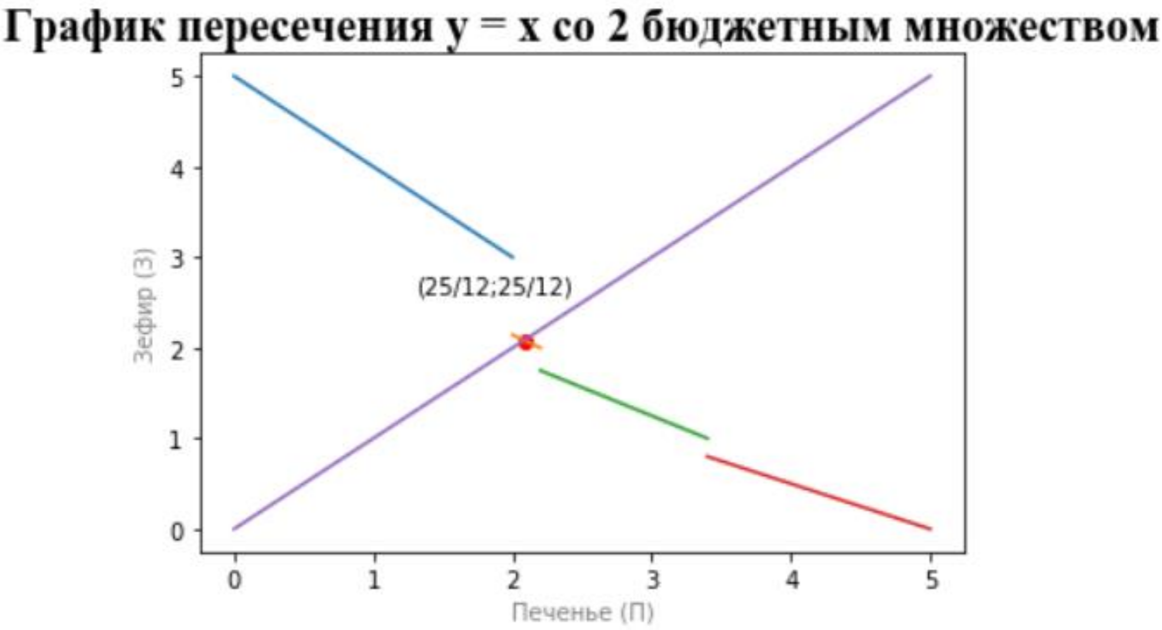
Видим, что пересечение происходит во втором случае. Найдем эту точку пересечения

```
import sympy
import numpy as np
from sympy import *
x, y =symbols('x y')
solve([x-y,y-25/7+5/7*x],[x,y])
```

```
{x: 2.08333333333333, y: 2.08333333333333}
```

Программа для графика с дополнительными элементами

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
plt.title('График пересечения y = x со 2 бюджетным множеством', fontsize=20, fontname='Times New Roman')
plt.xlabel('Печенье (П)', color='gray')
plt.ylabel('Зефир (З)',color='gray')
plt.text(1.3,2.6,'(25/12;25/12)')
plt.plot([25/12],[25/12],'ro')
x1=np.linspace(0,2,50)
x2=np.linspace(2,11/5,50)
x3=np.linspace(11/5,17/5,50)
x4=np.linspace(17/5,5,50)
x5=np.linspace(0,5,50)
y1=5-x1
y2=25/7-5/7*x2
y3=25/8-5/8*x3
y4=5/2-1/2*x4
y5=x5
plt.plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4,x5,y5)
plt.show
```



Пример 4. Пусть дана функция полезности TU=130q-2,5q2

Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

Ответ: точка насыщения, при которой совокупная полезность является максимальной равна 26 ед.

Решение:

Функция совокупной полезности достигает своего максимума при условии MU=0:

$$MU = \frac{\partial TU}{\partial Q} = 130 - 5q$$

Приравняв функцию предельной полезности равной нулю, получаем:

130 –5q=0

q=26

Решение на Python.

```
import numpy as np
import math
from sympy import*
q=Symbol("q")
TU=130*q-2.5*q**2
print('общая полезность TU= ', TU)
MU=diff(130*q-2.5*q**2,q)
print('предельная полезность MU ', MU,'=0')
print('Ответ: точка насыщения, равна',solve(MU,q)[0].n(2) ,'ед.')
```

```
общая полезность TU=  -2.5*q**2 + 130*q
предельная полезность MU  130 - 5.0*q =0
Ответ: точка насыщения, равна 26. ед.
```

Пример 5. Пусть функция полезности задана уравнением
TU=18q + 7q2 – (1/3) q3
Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.
Ответ: 7 ед. – это степень потребления, при которой начинается уменьшение MU
Решение:
Очевидно, что MU начинает уменьшаться в точке, в которой функция предельной полезности имеет максимальное значение:
$MU = \frac{\partial TU}{\partial Q}$ =18+14q-q2
Приравняв $MU = \frac{\partial TU}{\partial Q}$, к нулю и решая это уравнение относительно q, получим q=7.
Решение на Python.

```python
import numpy as np
import math
from sympy import*
q=Symbol("q")
TU=18*q+7*q**2-1/3*q**3
MU=diff(TU,q)
O=diff(MU,q)
print(O)
q1=solve(O,q)
print('Ответ:',q1[0].n(2))
```

```
14 - 2.0*q
Ответ: 7.0
```

Пример 6. Предельная полезность масла для индивида отображается функцией $MU_M = 40 - 5Q_M$, а предельная полезность хлеба: $MU_X = 20 - 3Q_X$. Известны цены благ и доход индивида: $P_M = 5$; $P_X = 1$; I= 20. Какое количество каждого из благ должен купить индивид для максимизации общей полезности?

Решение:
Потребитель получит максимум полезности, если так распределит свой бюджет $I = P_AQ_A + P_BQ_B$, что $\frac{MUa}{Pa} = \frac{MUb}{Pb}$. В условиях задачи получаем следующую систему из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & 20 = 5Qm + Qx; \\ & \frac{40 - 5Qm}{5} = \frac{20 - 3Qx}{1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Qm = 3;\ \ Qx = 5.$$

Решение на Python.
Пример 7. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$; при имеющимся у него бюджете он купил 21 ед. блага A по цене PA = 4, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага B.
1. Определите его бюджет.
2. Сколько ед. блага B купит данный потребитель при $P_B = 7$?
Решение:

1) Система из двух уравнений: M = P_AQ_A + P_BQ_B и $\frac{MUa}{Pa} = \frac{MUb}{Pb}$ в условиях задачи принимает вид:

I = 4 · 21 + P_b Q_b;

$$\frac{2Qb}{21} = \frac{4}{P_B} \Rightarrow M = 126$$

2) 42/7 = 6.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
pb=Symbol("pb")
qb=Symbol("qb")
M=Symbol("M")
pa=Symbol("pa")
qa=Symbol("qa")
px=Symbol("px")
py=Symbol("py")
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")
U=(qa**0.5)*(qb**0.25)
MUa=diff((qa**0.5)*(qb**0.25),qa)
print(MUa)
MUb=diff((qa**0.5)*(qb**0.25),qb)
print(MUb)
print('Ответ: a)',solve([x-21*4-y,2*y/21-4],[x,y]),'x-бюджет, y=Pb*Qb')
print('b)',42/7,'ед. блага В купит данный потребитель при Pb = 7')
```

```
0.5*qa**(-0.5)*qb**0.25
0.25*qa**0.5*qb**(-0.75)
Ответ: a) {x: 126, y: 42} x-бюджет, y=Pb*Qb
b) 6.0 ед. блага В купит данный потребитель при Pb = 7
```

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
QM=Symbol("QM")
QX=Symbol("QX")
MUM=40-5*QM
MUX=20-3*QX
PM=5
PX=1
I=20
I=PM*QM+PX*QX
print('I = ',I)
A=np.array([[5,1],[1,-3]]) # решим сстему I = PAQA + PBQB, что MUA/PA = MUB/PB
B=np.array([20,-12])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, ['Ответ: QM = ','QX = ']):#выведем решение
    print (x,t)
```

```
I =  5*QM + QX
Ответ: QM =  3.0
QX =  5.0
```

Пример 8. Сергей имеет 6 ед. блага A и 8 ед. блага B. Его функция полезности: $U=(X-2)^{0,5}(Y-4)^{0,25}$. За какое минимальное количество блага A Сергей согласится отдать 5 ед. блага B?

Решение:

За такое количество, которое сохранит достигнутый уровень благосостояния, то есть:

U0 = U1 → (6 - 2)0,5 (8 - 4)0,25 = (QA1 - 2)0,5 (5 - 4)0,25 → QA1 = 10

Следовательно, Сергей согласится отдать 5 ед. блага B за 4 ед. блага A.

Решение на Python.

```
import math
from sympy import*
Qa=symbols('Qa')
Qb=symbols('Qb')
U=(Qa-2)**0.5*(Qb-4)**0.25
Uo=U.subs({Qa:6,Qb:8})
print(Uo)
U1=U.subs({Qa:Qa,Qb:5})
print(U1)
A=solve(Uo-U1,Qa)
print(A[0].n(3))
```

```
2.82842712474619
(Qa - 2)**0.5
10.0
```

Пример 9. При ценах $P_A = 5$; $P_B = 4$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 333 до 375 ден. ед?

Решение:

Ассортимент потребляемых благ определяется точкой пересечения бюджетной линии с линией «доход–потребление» (точкой касания бюджетной линии с кривой безразличия).

Поэтому нужно два раза (при каждой величине бюджета) решить систему из уравнений названных линий.

$$\left.\begin{aligned} 333 &= 4X + 5Y \\ Y &= 5 + 2X \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{X} = 22;\ \text{Y} = 49.$$

$$\left.\begin{aligned} 375 &= 4X + 5Y \\ Y &= 5 + 2X \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{X} = 25;\ \text{Y} = 55.$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")
A=np.array([[5,4],[1,-2]]) # решим систему
B=np.array([333,5])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, ['В первом случае Qa = ','Qb = ']):#выведем решение
    print (x,t)

x1=Symbol("x1")
y1=Symbol("y1")
A=np.array([[5,4],[1,-2]]) # решим систему
B=np.array([375,5])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, ['Во втором  случае Qa = ','Qb = ']):#выведем решение
    print (x1,t1)
print('Борис увеличит потребление каждого блага на',55-49,',',25-22,'ед., соответственно')
```

```
В первом случае Qa =  49.0
Qb =  22.000000000000004
x1 t1
x1 t1
Борис увеличит потребление каждого блага на 6 , 3 ед., соответственно
```

Пример 10. Индивид имеет функцию полезности $U(X, Y) = X^{0,75} \cdot Y^{0,25}$ $I = 100$, $P_x = 4$, $P_y = 2$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа. Решение:

Выражение Лагранжа:

$L = x^{0,75} \cdot y^{0,25} + \lambda\,(100 - 4 \cdot x - 2 \cdot y)$

Дифференцируем выражение Лагранжа и приравниваем к нулю, полученные производные:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx}=\frac{3}{4}\cdot x^{-0,25}\cdot y^{0,25}-4\lambda=0 \\ \frac{dL}{dy}=\frac{1}{4}\cdot x^{0,75}\cdot y^{-0,75}-2\lambda=0 \\ \frac{dL}{d\lambda}=100-4x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{0,25}=4\lambda \ (*) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}\right)^{0,75}=2\lambda \ (**) \\ 100 = 4x + 2y \ (***) \end{cases}$$

Решение системы уравнений.

Уравнение (*) делим на уравнение (**) и получаем:

$$\frac{3Y}{X}=2 \Rightarrow X=\frac{3Y}{2}$$

Полученное значение X подставляем в уравнение (***), тогда:

$$100=4\cdot\frac{3Y}{2}+2YY=12,5;\ X=18,75.$$

Выведение функций спроса на благо.

При степенной функции полезности функция спроса на благо для потребителя может быть получена на основе выражения Лагранжа:

$$L=x^{0,75}\cdot y^{0,25}+\lambda\left(100-P_x\cdot x-P_y\cdot y\right)$$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dX}=0 \\ \frac{dL}{dY}=0 \\ \frac{dL}{d\lambda}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,75x^{-0,25}y^{0,25}-P_x\lambda=0 \\ 0,25x^{0,75}y^{-0,75}-P_y\lambda=0 \\ I-P_x\cdot x-P_y\cdot y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0,75x^{-0,25}\cdot y^{0,25}=P_x\lambda \\ 0,75x^{-0,25}\cdot y^{0,25}=P_x\lambda \\ 100=P_x\cdot x+P_y\cdot y \end{cases}$$

$$\frac{0,75x^{-0,25}\cdot y^{0,25}}{0,25x^{0,75}\cdot y^{-0,75}}=\frac{P_x}{P_y}\Rightarrow\ \frac{0,75}{0,25}\frac{y}{x}=\frac{P_x}{P_y}\Rightarrow\ \ y=\frac{0,25\cdot P_x\cdot x}{0,75\cdot P_y}\Rightarrow$$

$$100=p_x\cdot x+p_y\cdot\frac{0,25\cdot p_x\cdot x}{0,75\cdot p_y}=p_x\cdot x+\frac{0,25}{0,75}p_x\cdot x$$

$$=p_x\cdot x\left(1+\frac{0,25}{0,75}\right)\Rightarrow X=\frac{100}{P_x\left(1+\frac{0.25}{0.75}\right)}\Rightarrow$$

$$X_D=\frac{0.75}{0.75+0.25}\cdot\frac{100}{P_x}$$

функция спроса на благо X, тогда функция спроса на благо Y будет иметь вид:

$$Y_D=\frac{0.25}{0.75+0.25}\cdot\frac{100}{P_y}$$

Решение на Python.

```
from sympy import *
x,y,w,t=symbols(' x y w t' )
U=x**0.75*y**0.25
print('Функция полезности U(x,y)=',U)
q=100-4*x-5*y
print('Ограничения:',q,'=0')
f=x**0.75*y**0.25+w*(100-4*x-5*y)
print('Вспомогательная функция Лагранжа :\n ',f)
print('Находим x и y, решив систему уравнений')
fx=f.diff(x)
print('df/dx =',fx,'=0')
fy=f.diff(y)
print('df/dy =',fy,'=0')
fw=f.diff(w)
print('df/dw =',fw,'=0')
print('Введем переменную t=x/y, тогда система примет вид')
print('-4*w + 0.75*t**(-0.25)=0, ')
print('-2*w + 0.25*t**(0.75)=0')
print(solve([-4*w + 0.75*t**(-0.25),-2*w + 0.25*t**(0.75)],[w,t]))
print(solve([-4*x-2*y+100,x-1.5*y],[x,y]))
print('0.75*t**(-0.25)-Px*z=0,0.25*t**(0.75)-Py*z=0,I-Px*x-Py*y=0')
```

```
Функция полезности U(x,y)= x**0.75*y**0.25
Ограничения: -4*x - 5*y + 100 =0
Вспомогательная функция Лагранжа :
  w*(-4*x - 5*y + 100) + x**0.75*y**0.25
Находим x и y, решив систему уравнений
df/dx = -4*w + 0.75*x**(-0.25)*y**0.25 =0
df/dy = -5*w + 0.25*x**0.75*y**(-0.75) =0
df/dw = -4*x - 5*y + 100 =0
Введем переменную t=x/y, тогда система примет вид
-4*w + 0.75*t**(-0.25)=0,
-2*w + 0.25*t**(0.75)=0
[(0.169425375676846, 1.50000000000000)]
{x: 18.7500000000000, y: 12.5000000000000}
0.75*t**(-0.25)-Px*z=0,0.25*t**(0.75)-Py*z=0,I-Px*x-Py*y=0
```

Пример 11. Функция полезности $TU = 5Q^3 + 2Q^2 - 10Q$. Определите функцию предельной полезности.
Решение:
Предельная полезность – это полезность каждой дополнительной единицы потребляемого блага:

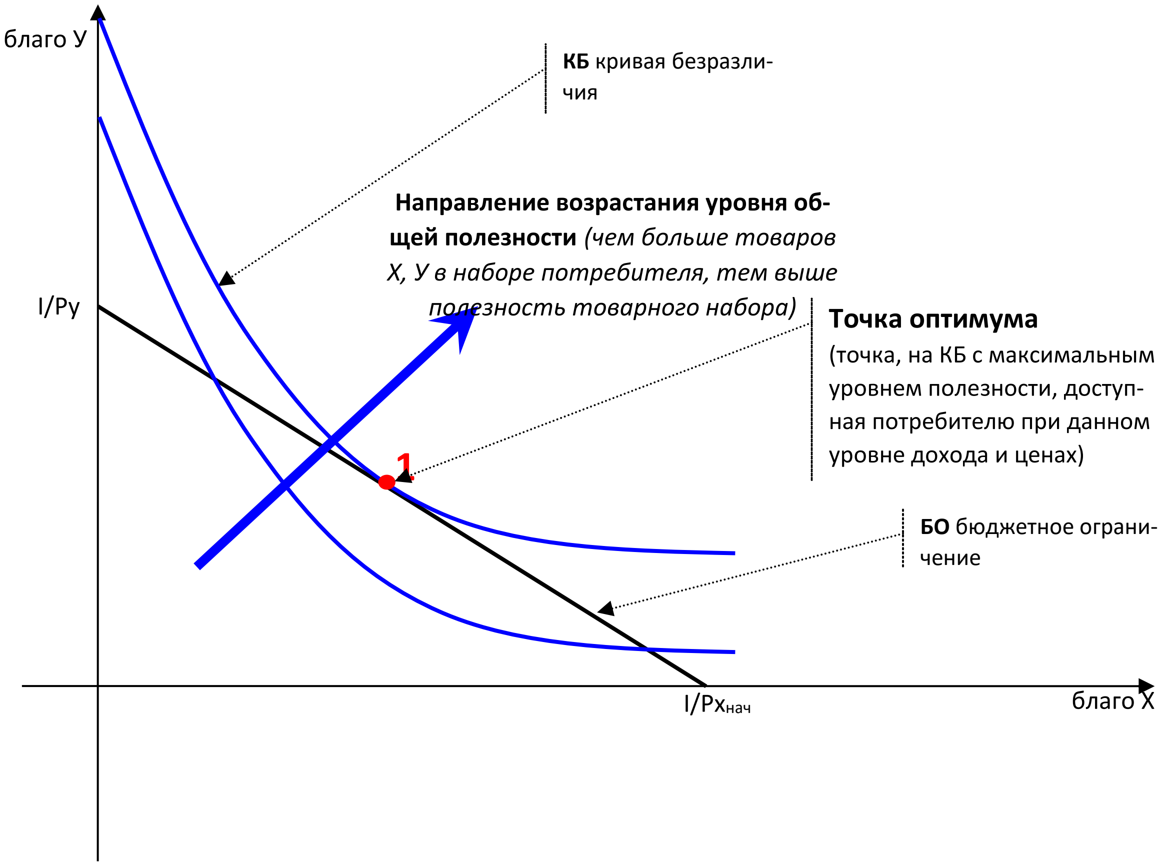
$$MU = \frac{\partial TU}{\partial Q},$$

где TU – общая полезность;
Q – количество потребляемого блага.
Тогда
$MU = 15Q^2 + 4Q$.
Ответ: $MU = 15Q^2 + 4Q$.
Решение в Pyhton.

```
from sympy import *
Q = symbols('Q')
TU=5*Q**3+2*Q**2-100
MU=diff(TU,Q)
print(MU)
```

```
15*Q**2 + 4*Q
```

Пример 12. Функция полезности потребителя задана уравнением U=X0,5 + У. Общий доход, которым располагает потребитель, равен 1 000 у.е. Цена товара X: Px=5 у.е.; цена товара У: Py=20 у.е. Если цена товара X вырастет до Px2=10 у.е., рассчитайте эффект замены, эффект дохода и общий эффект (по Хиксу). Охарактеризуйте данный товар (нормальный, инфериорный, товар Гиффена).
Решение:
Предпочтения потребителя описываются квазилинейной функцией полезности. (Функция вида $U = Af(x) + By$). Для нахождения оптимальной точки можно воспользоваться вторым законом Госсена, однако при решении необходимо помнить, что при квазилинейной функции полезности возможно и угловое решение (когда потребитель потребляет только один товар (либо X, либо У)).



Нахождение первоначальной точки оптимума.

Решим систему из двух уравнений: 1) мы знаем, что в точке оптимума наклон кривой безразличия совпадает с наклоном бюджетного ограничения; 2) на покупку оптимального набора потребитель тратит весь свой доход.

$$\begin{cases} \dfrac{MUx}{MUy} = \dfrac{Px}{Py} \\ I = Px * x + Py * y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0,5x^{-0,5}}{1} = \dfrac{5}{20} \\ 1000 = 5x + 20y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{нач} = 4 \\ y_{нач} = 49 \end{cases} \Rightarrow U_{нач}\left(x = 4;\ y = 49\right) = 4^{0,5} + 49 = 51 \text{ ютиль}$$

Таким образом, первоначально потребитель потреблял 4 ед. товара Х и 49 ед. товара У; при этом он достигал уровня полезности Uнач =51 ютиль.

(Если при решении системы одно из значений получается отрицательным, или система несовместна, необходимо рассчитать полезность в крайних точках; в этом случае оптимальной будет такой набор (либо только Х, либо только У) который приносит наибольшую полезность).

Нахождение конечной точки оптимума.

Аналогично можно рассчитать объемы товаров Х и У после изменения цены на товар Х, то есть конечную оптимальную точку.

$$\begin{cases} \dfrac{\text{MUx}}{\text{MUy}} = \dfrac{\text{Px}_{\text{кон}}}{\text{Py}} \\ I = P\text{x}_{\text{кон}} * x + Py * y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0,5\text{x}^{-0,5}}{1} = \dfrac{10}{20} \\ 1000 = 10x + 20y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{x}_{\text{нач}} = 1 \\ \text{y}_{\text{нач}} = 49,5 \end{cases}$$

Следовательно, после роста цены товара Х, потребитель снизил объем потребления этого товара на 3 единицы. То есть, общий эффект от увеличения цены товара Х равен -3 ед. (ΔХ=Хк – Хн =1 - 4).

Расчет вспомогательной точки.

Для расчета вспомогательной (промежуточной точки) необходимо решить систему из двух уравнений:

1) $\text{U1} = 51 = \text{x}^{0,5}_{\text{промежуточное}} + \text{y}_{\text{промежуточное}}$, которое означает, что при построении вспомогательной точки потребитель остается на первоначальном уровне полезности.

2) $\dfrac{\text{MUx}}{\text{MUy}} = \dfrac{\text{Px}_{\text{кон}}}{\text{Py}}$ соответствует условию оптимума, то есть условию касания построенного нами вспомогательного бюджетного ограничения (БО3), параллельного новому бюджетному ограничению (БО2), первоначальной кривой безразличия (КБ1). То есть угол наклона нового бюджетного ограничения (он равен соотношению новых цен Px2/Py) в точке оптимума должен быть равен углу наклона кривой безразличия (угол наклона кривой безразличия в точке равен отношению предельных полезностей MUx/MUy).

Итак, решая систему, находим координаты промежуточной точки.

$$\begin{cases} U1 = \text{x}^{0,5}_{\text{пр}} + \text{y}_{\text{пр}} \\ \dfrac{\text{MUx}}{\text{MUy}} = \dfrac{\text{Px}_{\text{кон}}}{\text{Py}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 51 = \text{x}^{0,5}_{\text{пр}} + \text{y}_{\text{пр}} \\ \dfrac{0,5\text{x}^{-0,5}_{\text{пр}}}{1} = \dfrac{10}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{x}_{\text{пр}} = 1 \\ \text{y}_{\text{пр}} = 50 \end{cases}.$$

В данной задаче: Эффект ЗАМЕНЫ: при росте цены товара Х, объем потребления товара Х (при сохранении потребителем первоначального уровня полезности) снизился на 3 ед. (ΔХзамены=Хпромежуточное – Хначальное =1 - 4).

В данной задаче: Эффект ДОХОДА: при росте цены товара Х, что эквивалентно снижению реального дохода потребителя, объем потребления товара Х не изменился (ΔХдохода=Хконечное – Хпромежуточное =1-1=0).

Проверка: Общий Эффект = Эффект замены + Эффект дохода; то есть общее изменение объема потребления товара потребителем при изменении цены данного товара складывается из изменения объема за счет эффекта замены и изменения объема за счет эффекта дохода. Таким образом: -3+0 = -3.

Выводы: Закон спроса (обратная зависимость между ценой товара и объемом потребления) не нарушен (в данном случае, цена товара X повысилась, что в итоге привело к снижению объема потребления данного товара на 3 единицы (то есть обратная зависимость)).

Решение в Pyhton.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
I=Symbol("I")
pa=Symbol("pa")
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")
U=x**0.5+y
M=1000-5*x-20*y
MUx=diff(x**0.5+y,x)
MUy=diff(x**0.5+y,y)
print('MUx=',MUx,', MUy=',MUy)
# колличества X и У найдем из системы уравнений
print(solve([1000-5*x-20*y,diff(U,x)-5/20],[x,y]))
U1=U.subs({x:4,Qb:45})
print('Uнач=',U1)
print('первоначально потребитель потреблял 4 ед. товара X')
print('и 49 ед. товара У;')
print('при этом он достигал уровня полезности Uнач=51 ютиль.')
print('найдем вспомогательную точку решив систему уравнений, получим x,y')
print(solve([51-U,diff(U,x)-10/20],[x,y]))
print('x2-x1=1-4=',1-4,'Эффект ЗАМЕНЫ: объем потребления снизился на 3 единицы')
print('y2-y1=1-1=',1-1,'Эффект ДОХОДА: объем потребления не изменился')
```

```
MUx= 0.5*x**(-0.5) , MUy= 1
[(4.00000000000000, 49.0000000000000)]
Uнач= y + 2.0
первоначально потребитель потреблял 4 ед. товара X
и 49 ед. товара У;
при этом он достигал уровня полезности Uнач=51 ютиль.
найдем вспомогательную точку решив систему уравнений, получим x,y
[(1.00000000000000, 50.0000000000000)]
x2-x1=1-4= -3 Эффект ЗАМЕНЫ: объем потребления снизился на 3 единицы
y2-y1=1-1= 0 Эффект ДОХОДА: объем потребления не изменился
```

Задачи для самостоятельного решения.

3.1.1. Пусть дана функция полезности TU=130q-2,2q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.2. Пусть дана функция полезности TU=110q-2q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.3. Пусть дана функция полезности TU=130q-2q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.4. Пусть дана функция полезности TU=110q-2,5q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.5. Пусть дана функция полезности TU=100q-3,5q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.6. Пусть дана функция полезности TU=115q-3q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.7. Пусть дана функция полезности TU=135q-1,5q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.8. Пусть дана функция полезности TU=140q-4q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.9. Пусть дана функция полезности TU=150q-5q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.1.10. Пусть дана функция полезности TU=145q-2,5q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

3.2.1. Пусть функция полезности задана уравнением TU=18q + 2q2 – (1/3)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.2. Пусть функция полезности задана уравнением TU=17q + 8q2 – (1/3)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.3. Пусть функция полезности задана уравнением TU=19q + 6q2 – (1/2)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.4. Пусть функция полезности задана уравнением TU=20q + 6q2 – (1/3)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.5. Пусть функция полезности задана уравнением TU=21q + 9q2 – (1/4)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.6. Пусть функция полезности задана уравнением TU=14q + 4q2 – (1/2)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.7. Пусть функция полезности задана уравнением TU=21q + 6q2 – (1/5)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.8. Пусть функция полезности задана уравнением TU=22q + 5q2 – (1/5)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.9. Пусть функция полезности задана уравнением TU=12q + 3q2 – (1/2)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.2.10. Пусть функция полезности задана уравнением TU=25q + 5q2 – (1/5)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

3.3.1. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 18 ед. блага А по цене $P_A = 4$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 7$?

3.3.2. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 22 ед. блага А по цене $P_A = 5$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 8$?

3.3.3. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 23 ед. блага А по цене $P_A = 6$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 9$?

3.3.4. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 24 ед. блага А по цене $P_A = 7$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 10$?

3.3.5. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 25 ед. блага А по цене $P_A = 8$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 11$?

3.3.6. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 26 ед. блага А по цене $P_A = 9$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B =12$?

3.3.7. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 27 ед. блага А по цене $P_A = 10$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 13$?

3.3.8. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$; при имеющимся у него бюджете он купил 28 ед. блага А по цене $P_A = 10$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 13$?

3.3.9. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 29 ед. блага А по цене $P_A = 11$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 14$?

3.3.10. Функция полезности потребителя $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$ при имеющимся у него бюджете он купил 30 ед. блага А по цене $P_A = 12$, а оставшиеся деньги затратил на покупку блага В.

1. Определите его бюджет.

2. Сколько ед. блага В купит данный потребитель при $P_B = 15$?

3.4.1. При ценах $P_A = 6$; $P_B = 8$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 330 до 380 ден. ед?

3.4.2. При ценах РА = 3; РВ = 5 линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 5Q_B + 10$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 333 до 385 ден. ед?

3.4.3. При ценах $P_A = 10$; $P_B = 2$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 300 до 360 ден. ед?

3.4.4. При ценах $P_A = 2$; $P_B = 8$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 3Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 320 до 370 ден. ед?

3.4.5. При ценах $P_A = 5$; $P_B = 4$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 300 до 400 ден. ед?

3.4.6. При ценах $P_A = 15$; $P_B = 5$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 5Q_B + 15$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 250 до 290 ден. ед?

3.4.7. При ценах $P_A = 3$; $P_B = 7$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 3Q_B + 21$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 333 до 375 ден. ед?

3.4.8. При ценах $P_A = 20$; $P_B = 5$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 400 до 445 ден. ед?

3.4.9. При ценах $P_A = 10$; $P_B = 8$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = Q_B + 15$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 340 до 360 ден. ед?

3.4.10. При ценах $P_A = 2$; $P_B = 4$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 333 до 375 ден. ед?

3.5.1. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75} * Y^{0,25}$ $I = 100$,

$P_x = 6$, $P_y = 4$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.2. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75} * Y^{0,25}$ $I = 100$,

$P_x = 8$, $P_y = 6$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.3. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75} * Y^{0,25}$ $I = 100$,

$P_x = 8$, $P_y = 10$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.4. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75} * Y^{0,25}$ $I = 100$,

$P_x = 6$, $P_y = 2$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.5. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75} * Y^{0,25}$ $I = 100$,

$P_x = 8$, $P_y = 2$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.6. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75}*Y^{0,25}$ $I=100$,

$P_x=10$, $P_y=5$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.7. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75}*Y^{0,25}$ $I=100$,

$P_x=15$, $P_y=5$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.8. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,75}*Y^{0,25}$ $I=100$,

$P_x=16$, $P_y=8$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.9. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,25}*Y^{0,75}$ $I=100$,

$P_x=4$, $P_y=8$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.5.10. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,25}*Y^{0,75}$ $I=100$,

$P_x=20$, $P_y=4$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

3.6.1. Функция полезности TU = Q^3+Q^2-4Q. Определите функцию предельной полезности.

3.6.2. Функция полезности TU = Q^3-5Q^2+8Q. Определите функцию предельной полезности.

3.6.3. Функция полезности TU = 8^3+12Q^2+6Q. Определите функцию предельной полезности.

3.6.4. Функция полезности TU = $8Q^3-36Q^2+54Q$. Определите функцию предельной полезности.

3.6.5. Функция полезности TU = $-Q^3-9Q^2-27Q$. Определите функцию предельной полезности.

3.6.6. Функция полезности TU = Q^3+4Q^2-3Q. Определите функцию предельной полезности.

3.6.7. Функция полезности TU = $-Q^3+2Q^2-16Q$. Определите функцию предельной полезности.

3.6.8. Функция полезности TU = $-3Q^3 - 9Q^2 - Q$. Определите функцию предельной полезности.

3.69. Функция полезности TU = $2Q^3 - 7Q^2 + 4Q$. Определите функцию предельной полезности.

3.6.10. Функция полезности TU = $Q^3 - 21Q^2 + 111Q$. Определите функцию предельной полезности.

Контрольная работа

1. Пусть дана функция полезности TU=130q-2,2q2. Определить точку насыщения, при которой совокупная полезность (TU) является максимальной.

2. Функция полезности TU = $8^3 + 12Q^2 + 6Q$. Определите функцию предельной полезности.

3. Индивид имеет функцию полезности U(X,Y) = $X^{0,25} * Y^{0,75}$ $I = 100$, $P_x = 4$, $P_y = 8$. Найти оптимум индивида и вывести функции его спроса на блага X и Y через функцию Лагранжа.

4. При ценах $P_A = 5$; $P_B = 4$ линия «доход – потребление» Бориса имеет вид: $Q_A = 2Q_B + 5$. На сколько единиц Борис увеличит потребление каждого блага при увеличении его бюджета с 300 до 400 ден. ед?

5. Пусть функция полезности задана уравнением TU=18q + 2q2 – (1/3)q3 Найти объем потребления (q), при котором начинает действовать закон убывающей предельной полезности, т.е. предельная полезность (MU) начинает уменьшаться.

Раздел 4. ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЯ

Теоретический материал

Закон убывающей эффективности производства утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например, капитальных затрат K, прирост производства начиная с некоторого значения K_0 является убывающей функцией. Точка K_0 характеризуется тем, что график функции V(K), описывающей зависимость объема продукции V от K меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх.

Это означает, что точка K_0 является точкой перегиба графика функции.

Производные функций, описывающих экономические процессы и явления, называются предельными величинами. Так, можно говорить о предельных издержках, предельном спросе и предельном предложении, предельной производительности и др.

Пусть $TC(Q)$ - функция общих издержек, тогда
$MTC(Q) = TC'(Q)$ - предельные издержки.

Предельные издержки показывают на сколько изменятся общие издержки при увеличении объема выпускаемой продукции на малую единицу.

Средние издержки $ATC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q}$ показывают величину издержек, приходящихся в среднем на единицу произведенной продукции.

Рассмотрим однофакторную производственную функцию $Q(L)$, описывающую зависимость объема выпускаемой продукции Q от величины труда L.

Производная $MP(L) = Q'(L)$ называется предельной производительностью труда и показывает, на сколько увеличится объем производства при увеличении труда на малую единицу.

Наряду с предельной производительностью труда рассматривают среднюю производительность труда $AP(L) = \dfrac{Q(L)}{L}$, которая показывает объем производства, приходящийся в среднем на единицу труда.

Теперь рассмотрим однофакторную производственную функцию $Q(K)$, описывающую зависимость объема выпускаемой продукции Q от величины капитала K. Аналогично предыдущему случаю вводятся предельная производительность капитала или предельная капиталоотдача.

$MP(K) = Q'(K)$ и средняя производительность капитала или средняя капиталоотдача. $AP(L) = \dfrac{Q(L)}{L}$. Выпуск продукции за определенное время при заданном законе мгновенной мощности производства

Под мощностью производства $M(t)$ обычно понимают максимально возможный выпуск продукции за определенный период времени длительностью t. Предполагается, что $M(0) = 0$.

Выпуск продукции за период времени $[t_1, t_2]$ может быть определен следующим образом:

$M_{[t_1, t_2]} = M(t_2) - M(t_1)$.

Средней мощностью производства за период $[t_1, t_2]$ называется величина

$$AM_{[t_1, t_2]} = \frac{M_{[t_1, t_2]}}{t_2 - t_1} = \frac{M(t_2) - M(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенной мощностью производства в момент времени t называется величина

$$m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, мгновенная мощность является производной функции мощности производства:

$m(t) = M'(t)$.

Следовательно, зная функцию мгновенной мощности, можно определить мощность производства за период $[t_1, t_2]$:

$$M_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} m(t)dt.$$

Среднем значением на отрезке $[a;b]$ непрерывной функции $f(x)$ называется следующая величина:

$$\overline{f}_{[a;b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Заметим, что средняя мощность производства, рассматриваемая в п 4.1 является средним значением мгновенной мощности производства.

Пусть $MP(L)$ – предельная производительность труда, тогда средняя производительность труда $AP(L)$ при объеме трудовых ресурсов L_0 может быть найдена следующим образом:

$$AP(L_0) = \frac{\int_0^{L_0} MP(L)}{L_0}.$$

Пусть $MP(K)$ – предельная капиталоотдача, тогда средняя капиталоотдача $AP(K)$ при объеме капитала K_0 может быть найдена следующим образом:

$$AP(K_0) = \frac{\int\limits_0^{K_0} MP(K)}{K_0}.$$

Пусть некоторая продукция реализуется по фиксированной цене P. $Q(t)$ – количество продукции, реализованной на данный момент времени t. Тогда на этот момент времени получится доход, равный $P \cdot Q(t)$. Допустим, что часть полученного дохода расходуется на инвестиции $I(t)$ в производство реализуемой продукции $I(t) = m \cdot P \cdot Q(t)$, где m – норма инвестиции, являющаяся постоянным числом, принадлежащим интервалу $(0;1)$ (так как инвестиции не могут превысить доход). Если рынок до конца не насыщается (вся выпущенная продукция реализуется полностью), то в результате расширения производства часть полученного прироста дохода снова будет вложена в инвестиции, что приведет к росту скорости (акселерации) выпуска продукции. Скорость, при этом, будет пропорциональна увеличению инвестиций $Q'(t) = l \cdot m \cdot P \cdot Q(t)$, где $\frac{1}{l}$ – норма акселерации (постоянное число). Последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить коэффициенты эластичности производственной функции Кобба-Дугласа $z = 4,5x^{0,33}y^{0,66}$.

Решение.

```
''' Частные производные: '''
z = 4.5*x**(0.33) * y**(0.66)
z_x = diff(z, x)
z_y = diff(z, y)

''' Коэффициенты эластичности '''
E_x = (x/z)*z_x
E_y = (y/z)*z_y
print('E_x: %.2f E_y: %.2f' % (E_x, E_y))
```

```
E_x: 0.33 E_y: 0.66
```

Ответ: 0,33; 0,66

Пример 2. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln\left(5 + K^2\right)$. Найти интервал изменения K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.
Найдем точку перегиба функции $V(K)$. Достаточный признак точки перегиба: вторая производная функции в этой точке обращается в ноль, а третья производная отлична от нуля.

```
from sympy import *
K,V0 = symbols('K V0')
V = V0*log(5+K**2)
''' Вторая производная '''
Vprim2 = diff(V,K,2)
''' Третья производная '''
Vprim3 = diff(V,K,3)
''' Корни второй производной '''
s = solve(Vprim2,K)
s
```

```
[-sqrt(5), sqrt(5)]
```

Подходит положительный корень $K_0 = s[1] = \sqrt{5}$.
Значение третьей производной в этой точке:

```
Vprim3.subs(K,s[1])
```

$$-\frac{\sqrt{5}V_0}{25}$$

Третья производная отлична от нуля. Причем ее отрицательный знак означает, что вторая производная в точке K_0 убывает, то есть меняет знак с «+» на «–». А это, в свою очередь, означает, что слева от точки K_0 функция $V(K)$ выпукла вниз, справа – выпукла вверх.
Ответ: Увеличение капитальных затрат неэффективно при значениях $K > \sqrt{5}$.

Пример 3. Найти предельные и средние издержки, если функция издержек $TC(Q) = 0,2Q^2 + 3Q + 9$.

```python
import numpy as np
from sympy import *
Q=symbols('Q')
TC=0.2*Q**2+3*Q+9
MTC=diff(TC)
ATC=MTC/Q
print(MTC,',',ATC)
```

```
0.4*Q + 3 , (0.4*Q + 3)/Q
```

Ответ: 0,4Q+3; (0,4Q+3)/Q

Пример 4. Найти предельную и среднюю производительности труда для производственной функции $Q(L)=\sqrt[3]{L}$.

```python
import numpy as np
from sympy import *
L=symbols('L')
Q=L**(1/3)
MPL=diff(Q,L)
APL=MPL/Q
print(MPL.n(2))
print(APL.n(2))
```

```
0.33*L**(-0.67)
0.33*L**(-1.0)
```

Ответ: $0.33\ L^{-0.67}$; $0.33\ L^{-1}$.

Пример 5. Известна предельная мощность производства $m(t)=\dfrac{10}{(t+2)\ln^2(t+2)}$.

Найдите

a) функцию мощности производства;
b) выпуск продукции и среднюю мощность производства за первые 10 периодов времени;
c) выпуск продукции и среднюю мощность производства за период времени [10; 20];
d) выпуск продукции за все время: за период $[0;+\infty)$.

Решение.

a) $M(t)=\dfrac{10}{\ln(2)}-\dfrac{10}{\ln(t+2)}$

b) $M(10)=10.403$

c) $\text{M}[10,20]=1.0403$

d) $\text{M}[0,\infty)=14.43$

```
import numpy as np
from sympy import *
t,x=symbols('t x')
m=10*((x+2)*(log(x+2))**2)**(-1)
M=integrate(m,(x,0,t))
print(M)
M10=M.subs({t:10}).n(5)
print(M10)
M1020=integrate(m,(x,10,20)).n(4)
print(M1020)
print((M10)/10)
AM1020=(M1020)/(20-10)
print(AM1020)
M0oo=integrate(m,(x,0,oo)).n(4)
print(M0oo)
```

```
10/log(2) - 10/log(t + 2)
10.403
0.7891
1.0403
0.07891
14.43
```

Пример 6. Известна предельная производительность труда $MP(L)=\dfrac{400}{(L+e)\ln(L+e)}$.

Найдите

a) производственную функцию и объем выпуска при $L_0=10000$;

b) функцию средней производительности труда и среднюю производительность при $L_0=10000$.

Решение.

a) $Q(L)=\int\limits_0^L MP(x)dx=\int\limits_0^L \dfrac{400}{(x+e)\ln(x+e)}dx=\int\limits_0^L \dfrac{400}{\ln(x+e)}d\ln(x+e)=$

$=400\ln\left(\ln(x+e)\right)\Big|_0^L=400\left(\ln(\ln(L+e))-\ln(\ln e)\right)=400\ln(\ln(L+e))$.

$Q(10000)=400\ln(\ln(10000+e))\approx 888{,}14$.

b) $AP(L)=\dfrac{\int\limits_0^L MP(x)}{L}=\dfrac{Q(L)}{L}=\dfrac{400\ln(\ln(L+e))}{L}$.

$AP(10000)=\dfrac{400\ln(\ln(10000+e))}{10000}\approx 0,0888$.

```
import numpy as np
from sympy import *
L,x=symbols('L x')
MP=400/((x+exp(1))*log(x+exp(1)))
Q=integrate((MP),(x,0,L))
print(Q)
print(Q.subs({L:10000}).n(5))
APl=Q/L
print(APl.subs({L:10000}).n(3))
```

```
400*log(log(L + E))
888.14
0.0888
```

Пример 7. Известна предельная производительность труда $MP(K)=\dfrac{30000}{K^{0,7}}$.

Найдите

a) производственную функцию и объем выпуска при $K_0=20000$;

b) функцию средней капиталоотдача и среднюю капиталоотдачу при $K_0=20000$.

Решение.

a) $Q(K)=\int\limits_0^K MP(x)dx=\int\limits_0^K \dfrac{30000}{K^{0,7}}dx=30000\dfrac{K^{0,3}}{0,3}\Bigg|_0^L=10000K^{0,3}$.

$Q(20000)=10000\cdot 20000^{0,3}\approx 195123,24$.

b) $AP(K)=\dfrac{\int\limits_0^K MP(x)}{K}=\dfrac{Q(K)}{K}=\dfrac{10000K^{0,3}}{K}=\dfrac{10000}{K^{0,7}}$.

$AP(20000)=\dfrac{10000\cdot 20000^{0,3}}{20000}\approx 9,76$.

```
import numpy as np
from sympy import *
K,x=symbols('K x')
MP=3000/x**(0.7)
Q=integrate((MP),(x,0,K))
print(Q)
print(Q.subs({K:20000}).n(5))
APl=Q/K
print(APl.subs({K:20000}).n(3))
```

```
10000.0*K**0.3
1.9512e+5
9.76
```

Пример 8. Затраты на производство продукции объема x задаются функцией $C(x)=x^2+5x+4$. Производитель реализует продукцию по цене 25 д.е. Найти максимальную прибыль П(x) и соответствующий объем продукции x.

Р е ш е н и е. Прибыль равна разности между выручкой U и затратами С П(x) = U(x) – C(x). Реализовав продукцию объема x по цене 25 д.е., предприниматель имеет выручку $U(x)=25x$. Значит, прибыли вычисляется по формуле:

$$П=U-C=25x-\left(x^2+5x+4\right)=-x^2+20x-4$$

.

По смыслу задачи объем продукции x может принимать любое положительное значение, т.е. $x\epsilon\left(0;\ +\infty\right)$.

Найдем максимум функции прибыли П(x):

$П\left(x\right)=-x^2+20x-4$ при $x\epsilon\left(0;\ +\infty\right)$.

Вычислим производную функцию прибыли, приравняем нулю и найдем, тем самым, критические точки функции прибыли на промежутке $\left(0;\ +\infty\right)$:

$П'\left(x\right)=-2x+20$, $\quad -2x+20=0$, $\quad x=10$.

Нетрудно видеть, что при переходе через точку $x=10$ производная $П'(x)$ меняет свой знак с «+» на «–», значит $x=10$ – точка максимума функции П(x). Находим:

$$П_{max}=П\left(10\right)=-10^2+20\cdot 10-4=96$$

Ответ: максимальная прибыль равна 96 д.е., достигается при объеме производства 10 у.е.

Решение в Pyhton

```
import numpy as np
from sympy import *
x=symbols(' x')
C=x**2+5*x+4
p=25
U=p*x
P=U-C
print(P)
Pm=diff(P,x)
print(Pm)
Pmm=diff(Pm,x)
print(Pmm)
xk=solve(Pm,x)
print(xk[0])
if Pmm.subs({x:xk})<0:
    print('Ответ: максималльная прибыль равна ',P.subs({x:xk[0]}),', достигается при объеме производства равном',xk[0])
else:
    print('Ответ: задача не имеет решения ')
```

```
-x**2 + 20*x - 4
20 - 2*x
-2
10
Ответ: максималльная прибыль равна  96 , достигается при объеме производства равном 10
```

Пример 9. Найдите функцию дохода $R(x)$, если предельный доход при реализации единиц продукции определяется по формуле $MR = 6x^6 - 230$

Решение.

$$R(x) = \int (6x^6 - 230)dx = \frac{6x^7}{7} - 230x$$

Решение в Pyhton.

```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(6*x**6-230,x)
print(y)
```

```
6*x**7/7 - 230*x
```

Ответ $R(x) = \frac{5x^7}{7} - 230x$.

Пример 10. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией:

$F(t)=\frac{3}{3t+1}+4$, где t – время в часах

Решение. Если непрерывная функция $F(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой:

$$V(t)=\int_{t_1}^{t_2}F(t)\,dt$$

В условиях задачи вычисляем:

$$V(t)=\int_2^3(\frac{3}{3t+1}+4)\,dt=(\ln(9+1)+12)-(\ln(6+1)+8)=\ln\frac{10}{7}+4.$$

Решение в Pyhton

```
import numpy as np
from sympy import *
t=symbols('t')
F=3/(3*t+1)+4
V=integrate(F,(t,2,3))
print(V)
```

```
-log(7) + log(10) + 4
```

Ответ: $\ln\frac{10}{7}+4.$

Пример 11. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $TC(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $MC=e^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 21.

Решение.

Вычисляем:

$$TC(q)=\int MC(q)=\int e^{7,8q}dq=[d(7,8q)=7,8dq]=\frac{10}{78}\int e^{7,8q}d(7,8q)=\frac{5}{39}e^{7,8q}+C.$$

По условию $TC(0)=21$. Следовательно, $\frac{5}{39}e^{0}+C=21$, откуда находим: $C=\frac{814}{39}$. Таким образом, получаем: $TC(q)=\frac{5}{39}e^{7,8q}+\frac{814}{39}$.

Решение в Pyhton.

```
import numpy as np
from sympy import *
q,C=symbols('q C')
MC=exp(7.8*q)
TC=integrate(MC,q)
print(TC.n(3))
C=solve(TC.subs({q:0})-21-C,C)
print('Ответ: ',TC.n(3),' ',C[0].n(3))
```

```
0.128*exp(7.8*q)
Ответ:  0.128*exp(7.8*q)   -20.9
```

О т в е т: $TC(q) = \frac{5}{39}e^{7,8q} + \frac{814}{39}$.

Пример 12. Найти функцию издержек $\mathrm{TC}(q)$, если предельные издержки заданы функцией $\mathrm{MC} = 18q^5 + 20q^4 + 16q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 790.

Решение.

Вычисляем:

$$\mathrm{TC}(q) = \int \mathrm{MC}(q)\,dq = \int\left(18q^5 + 20q^4 + 16q^3\right)dq = \frac{18q^6}{6} + \frac{20q^5}{5} + \frac{16q^4}{4} + C$$

По условию $\mathrm{TC}(0) = 790$. Следовательно,

$$\frac{18\cdot 0^6}{6} + \frac{20\cdot 0^5}{5} + \frac{16\cdot 0^4}{4} + C = 790$$

откуда находим

C= 790

Решение в Pyhton

```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(18*x**5+20*x**4+17*x**3,x)
print(y)
```

```
3*x**6 + 4*x**5 + 17*x**4/4
```

Ответ: $3q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 790$.

Пример 13. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции TC(q), если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $MC = e^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 21.

Решение.

Вычисляем:

$$TC(q) = \int MC(q)dq = \int e^{7,8q}dq = \frac{10}{78}\int e^{7,8q}d(7,8q) = \frac{5}{39}e^{7,8q} + C \quad .$$

По условию $TC(0) = 21e^{7,8q}$. Следовательно, $\frac{5}{39}\cdot e^{0} + C = 21$, откуда находим: $C = \frac{814}{39}$. Таким образом, получаем: $TC(q) = \frac{5}{39}e^{7,8q} + \frac{814}{39}$.

Решение в Pyhton

```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(exp(7.8*x),x)
print(y)
```

```
0.128205128205128*exp(7.8*x)
```

Ответ: $.\frac{5}{39}\ e^{7,8q} + \frac{814}{39}$

Пример 14. Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t) = 8 + 3\sin(\frac{\pi}{4}(t+7))$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергии за сутки.

Решение.

Обозначим суммарный расход электроэнергии за сутки V. Тогда вычисляем:

$$V = \int_0^{24}(8 + 3\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))dt = 8\int_0^{24}dt + 3\int_0^{24}\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))dt = \left[d(\frac{\pi}{4}(t+7)) = \frac{\pi}{4}dt\right] =$$

$$= 8t\Big|_0^{24} + 3\cdot\frac{4}{\pi}\int_0^{24}\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))d(\frac{\pi}{4}(t+7)) = 192 - \frac{12}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{4}(t+7))\Big|_0^{24} =$$

$$= 192 - \frac{12}{\pi}(\cos(\frac{31\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})) = 192 - \frac{12}{\pi}(\cos(-\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})) = 192.$$

Решение в Pyhton

```
import numpy as np
from sympy import *
t=symbols('t')
v=8+3*sin((t+7)*pi/4)
V=integrate(v,(t,0,24))
print(V)
```

192

Ответ: 192.

Пример 15. Количество потребляемой предприятием электроэнергии меняется в течение суток в зависимости от времени t со скоростью $v(t)=8+\sin\left(\frac{\pi}{4}(t+7)\right)$, где время t измеряется в часах. Найти суммарный расход электроэнергии за сутки.

Решение.

Обозначим суммарный расход электроэнергии за сутки *V*. Тогда вычисляем:

$$V=\int_0^{24}(8+4\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))dt=8\int_0^{24}dt+4\int_0^{24}\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))dt=\left[d(\frac{\pi}{4}(t+7))=\frac{\pi}{4}dt\right]=$$

$$=8t\Big|_0^{24}+4\cdot\frac{4}{\pi}\int_0^{24}\sin(\frac{\pi}{4}(t+7)))d(\frac{\pi}{4}(t+7))=192-\frac{16}{\pi}(\cos(\frac{\pi}{4}(t+7))\Big|_0^{24}=$$

$$=192-\frac{16}{\pi}(\cos(\frac{31\pi}{4})-\cos(\frac{\pi}{4}))=192-\frac{16}{\pi}(\cos(-\frac{\pi}{4})-\cos(\frac{\pi}{4}))=192.$$

Решение в Pyhton.

```
from sympy import *
import math as m
x=symbols('x')
y=integrate(8+4*sin(pi/4*(x+7)),(x,0,24))
print(y)
```

192

Ответ: 192.

Пример 16. Найти объем продукции, произведений за 6 лет, если функция Кобба – Дугласа имеет вид: $F(t)=(1+t)e^{2t}$.

Решение.

Объем $V(t)$ произведенной продукции вычисляется по формуле:

$$V(t)=\int_0^6 (1+t)e^{2t}\,dt.$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получаем:

$$V(t)=\int_0^6 (1+t)e^{2t}\,dt=(6+1)\frac{1}{2}e^{2*6}-(0+1)\frac{1}{2}e^{2*0}-\frac{1}{2}\int_0^6 e^{2t}dt=$$

$$=\frac{7}{2}e^{12}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(e^{12}-1\right)=\frac{13}{4}\left(e^{12}-\frac{3}{2}\right)\approx 528952{,}8.$$

Решение в Pyhton.

```
import numpy as np
from sympy import *
t=symbols('t')
F=(1+t)*exp(2*t)
V=integrate(F,(t,0,6))
print(V)
print(V.n(7))
```

```
-1/4 + 13*exp(12)/4
528952.8
```

Ответ: 528952,8.

Пример 17. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=4Q+3$, а издержки второй $TC=2Q^2+6Q+5$. Предприниматель Сергей купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

Ответ: 13

Решение:

Издержки второй фирмы всегда строго больше издержек первой фирмы. Наш предприниматель будет действовать как монополист с двумя заводами и, следовательно, решит производить только в первой фирме. Величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы равна

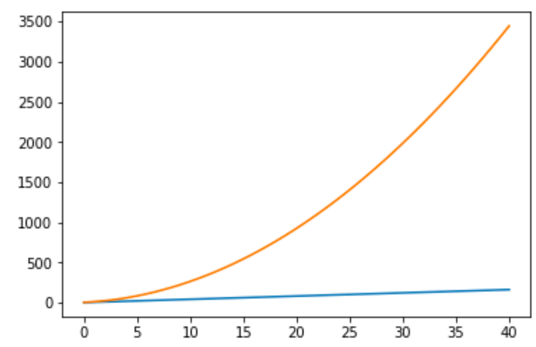
$$TC(1) = 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 5 = 13$$

Решение в Pyhton.

Изобразим графически издержки 1 и 2 фирм. Видим, что издержки второй фирмы, красная линия, выше (то есть превышают) издержки первой, синяя. Значит Сергей будет производить товар только на первой фирме.

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,40,50)
x2=np.linspace(0,40,50)

y1=3+4*x1
y2=2*x2**2+6*x2+5

plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x2,y2)

plt.show
```

```
<function matplotlib.pyplot.show>
```



Тогда

```
from sympy import *
Q = symbols('Q')
TC1=4*Q+3
TC2=2*Q**2+6*Q+5
TC=TC2.subs({Q:1})
print('TC=',TC)
```

```
TC= 13
```

Пример 18. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции Q выражается формулой $C = 20Q - 0,01Q^3$. Найти средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 12$ ден. ед.

Решение.

Средние издержки вычисляются по формуле $\bar{C} = \frac{C}{Q}$, предельные – по формуле $MC = C'(Q)$.

```
from sympy import *
Q = symbols('Q')
c = 20*Q - 0.01*Q**3
c_mean = (c/Q).subs(Q,12)
c_prim = diff(c,Q).subs(Q,12)
print(S(c_mean).n(4), S(c_prim).n(4))
```

```
18.56 15.68
```

Ответ: $\bar{C} = 18,56$ ден. ед.; $MC = 15,68$ ден. ед.

Пример 19. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства Q выражается формулой $C(Q) = 80 - 0,38Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции Q = 20 ден. ед.

```
Q = symbols('Q')
c = 80 - 0.38*Q
Dprim = diff(c,Q)
E = (Q*Dprim/c).subs(Q,20)
S(E).n(3)
```

-0.105

Эластичность себестоимости $C = -0,105$. Это означает, что при данном объеме выпуска продукции увеличение объема на 1% приведет к снижению себестоимости продукции на 0,105%.

Ответ: $E(C) = -0,105$.

Пример 20. TC – функция совокупных издержек производителя, где TC измеряется в сотнях долларов в месяц; Q – выработка в сотнях рубашек в месяц. Напишите уравнения FC, VC, AFC, AVC, AC, MC?
Решение:

1) Совокупные затраты (TC) – это сумма постоянных и переменных издержек, причем постоянные затраты (FC) не зависят от объема выпуска продукции. Поэтому FC = 10, уравнение VC имеет следующий вид:

$VC = 26Q - 5Q^2 + 0,5Q^3$.

2) Средние издержки – это затраты на единицу продукции. Сред-

ние постоянные издержки определяем по формуле: AFC = FC / Q, средние переменные издержки: AVC = VC / Q, средние общие издержки: AC = TC / Q. Поэтому AVC = 26 – 5Q + $0{,}5Q^2$ и AC = 10 / Q + 26 – 5Q + $0{,}5Q^2$.

3) Предельные издержки (MC) – это издержки, связанные с производством еще одной дополнительной единицы продукции. Их находим по формуле MC = dTC / dQ. Поэтому MC = 26 – 10Q + $1{,}5Q^2$.
Решение в Pyhton.

```
import numpy as np
from sympy import *
Q=Symbol("Q")
TC=10+26*Q-5*Q**2+0.5*Q**3
FC=10
VC=TC-FC
print('VC=TC-FC=',VC)
AFC=FC/Q
print('AFC=FC/Q=',AFC)
AVC=VC/Q
print('AVC=VC/Q=',AVC)
AC=TC/Q
print('AC=TC/Q=',AC)
MC=diff(TC,Q)
print('MC=diff(TC,Q)=',MC)
```

```
VC=TC-FC= 0.5*Q**3 - 5*Q**2 + 26*Q
AFC=FC/Q= 10/Q
AVC=VC/Q= (0.5*Q**3 - 5*Q**2 + 26*Q)/Q
AC=TC/Q= (0.5*Q**3 - 5*Q**2 + 26*Q + 10)/Q
MC=diff(TC,Q)= 1.5*Q**2 - 10*Q + 26
```

Пример 21. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 13 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 75%, а второго – на 140%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза.
Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?
Решение:
Обозначим через хприбыль первого отделения и через у прибыль второго отделения в минувшем году. Тогда условие задачи можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 1{,}75x + 2{,}4y = 26 \end{cases}$$

Решая систему из двух уравнений с двумя переменными, получи, что:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$$

Следовательно,

1) прибыль в минувшем году у первого отделения 8 млн. р., у второго – 5 млн. р.,

2) прибыль в этом году у первого отделения $1,75 \cdot 8 = 14$ млн. р., у второго – 12 млн. р.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")
A=np.array([[1,1],[1.75,2.4]]) # решим систему
B=np.array([13,26])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, ['Прибыль первого отделения в минувшем году = ','Прибыль второго отделенияв м
    print (x,t)


print('Прибыль первого отделения в этом году = ',1.75*8,'Прибыль второго отделения в этом году =
```

```
Прибыль первого отделения в минувшем году =  8.0
Прибыль второго отделенияв минувшем году =  5.0
Прибыль первого отделения в этом году =  14.0 Прибыль второго отделения в этом году =  12.0
```

```
о отделения в минувшем году = ','Прибыль второго отделенияв минувшем году = ']):#выведем решение


этом году = ',1.75*8,'Прибыль второго отделения в этом году = ',2.4*5)
```

Решение на Python.

```
import numpy as np
from numpy import linalg as ln
x=Symbol("x")
y=Symbol("y")
A=np.array([[1,1],[1.75,2.4]]) # решим систему
B=np.array([13,26])
X=np.linalg.solve(A,B)
for t, x in zip(X, ['прибыль первого отделения в минувшем году = ','2 отд.']):
    print(x,t)

print('Прибыль в этом году у первого',1.75*8,'млн. р., у второго',2.4*5,'млн. р.'
```

```
прибыль первого отделения в минувшем году =  8.000000000000002
2 отд. 4.999999999999999
Прибыль в этом году у первого 14.0 млн. р., у второго 12.0 млн. р.
```

Задачи для самостоятельного решения.

4.1.1. Определить коэффициенты эластичности производственной функции Кобба-Дугласа $z = 4,5x^{0,40}\ y^{0,60}$.

4.2.1. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 40Q - 0,1Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 8$ ед.

4.3.1. Для производственной функции $z = 4x^3 - xy^2 + 5y$ определить коэффициенты эластичности $E_x(z)$ и $E_y(z)$ ресурсов x и y, если x = 1, y = 2.

4.4.1. Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства Q выражается формулой

$$C(Q) = 65 - 0,3Q.$$

Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции Q = 20 ден. ед.

4.5.1. Функция спроса описывается формулой

$$D(P) = 8 \cdot 3^{-0,2P^3}.$$

Найти, при каких значениях цены P спрос будет эластичным.

4.6.1. Пусть Q – количество единиц реализованного товара, $C(Q)$ и $R(Q)$ – соответственно затраты на производство и доход от реализации товара. Определить, при каком значении Q достигается максимум прибыли, если

$$C(Q) = Q^3 - 35Q^2 + 130Q + 2000; \quad R(Q) = 95Q - 0,4Q^2.$$

Чему равно максимальное значение прибыли?

4.7.1. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln\left(4 + K^3\right)$. Найти интервал изменения K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

4.8.1. Найти функцию издержек $TC(q)$, если предельные издержки заданы функцией $MC = 18 \cdot q^5 + 20 \cdot q^4 + 16 \cdot q^3$, а начальные фиксированные затраты равны 350.

4.9.1. Найти общую себестоимость выпуска q единиц продукции $TC(q)$, если предельная себестоимость производства q единиц продукции задана функцией $MC = e^{7,8q}$, а начальные фиксированные затраты равны 18.

4.10.1. Найти объем продукции, произведений за 5 лет, если функция Кобба – Дугласа имеет вид: $F(t) = (1 + t)e^{3t}$.

4.11.1 Количество продукции $Q(t)$, реализуемое в момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q'(t)=0{,}1\cdot Q(t)$. Через какой промежуток времени t объем реализованной продукции увеличится на 70% по сравнению с величиной $Q(0)$?

4.12.1. Количество продукции $Q(t)$, реализованной в момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q'(t)=k\cdot Q(t)$. В начальный момент времени $t=0$ и в момент $t=1$ было реализовано соответственно 20 и 25 единиц продукции. Какое количество продукции будет реализовано в момент времени $t=2$?

4.13.1.В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=5Q+3$, а издержки второй

$TC=2Q^2+6Q+10$.

Предприниматель Иван купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.2. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=3Q+7$, а издержки второй $TC=Q^2+5Q+2$. Предприниматель Михаил купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.3. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=2Q+6$, а издержки второй $TC=6Q^2+Q-1$. Предприниматель Петр купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.4. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=Q+10$, а издержки второй $TC=2Q^2-9Q+4$. Предприниматель Игорь купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.5. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC=2Q+1$, а издержки второй $TC=5Q^2-3Q-2$. Предприниматель Максим купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.6. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC = 2Q + 5$, а издержки второй $TC = 2Q^2 + 6Q + 5$. Предприниматель Иван купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.7. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC = Q + 4$, а издержки второй $TC = 2Q^2 - 7Q + 3$. Предприниматель Александр купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.8. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC = 6Q + 1$, а издержки второй $TC = 3Q^2 + 8Q - 3$. Предприниматель Алексей купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.9. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC = 2Q + 2$, а издержки второй $TC = 3Q^2 + 2Q - 5$. Предприниматель Семен купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.13.10. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением $TC = 3Q + 3$, а издержки второй $TC = 5Q^2 + 7Q + 2$. Предприниматель Николай купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы?

4.14.1. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 18 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 72%, а второго – на 145%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.2. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 10 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 60%, а второго – на 130%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.3. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 11 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70%, а второго – на 150%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.4. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 10 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 55%, а второго – на 125%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.5. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 9 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 50%, а второго – на 120%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.6. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 15 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 80%, а второго – на 145%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.7. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 14 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 73%, а второго – на 128%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.8. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70%, а второго – на 130%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.9. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 8 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 45%, а второго – на 115%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

4.14.10. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 60%, а второго – на 145%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

Контрольная работа

1. В городе есть две фирмы, которые производят финики. Издержки первой описываются уравнением TC = 4*Q + 3, а издержки второй TC = 2*Q^ 2 + 6*Q + 5. Предприниматель Сергей купил обе фирмы. Чему равна величина общих издержек от производства одной единицы продукции у новой фирмы

2. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн. р. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70%, а второго – на 130%. В результате суммарная прибыль фирмы должна вырасти в два раза. Какова величина прибыли каждого из отделений 1) в минувшем году? 2) в текущем году?

3. Количество продукции $Q(t)$, реализованной в момент времени t, удовлетворяет дифференциальному уравнению $Q'(t) = k \cdot Q(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ и в момент $t = 1$ было реализовано соответственно 20 и 25 единиц продукции. Какое количество продукции будет реализовано в момент времени $t = 2$?

4. Известно, что постоянные затраты фирмы равны 50 ден. ед., функция предельных затрат имеет вид: $MC = 6 + 1{,}6Q - 1{,}2Q^2$. Определите: 1) общие затраты фирмы при выпуске 3 ед. продукции; 2) уравнения функций для VC, ATC, AFC, AVC;

5. Фирма с функцией общих затрат $TC = 8 + 4Q + 2Q^2$ может продать любое количество своей продукции по цене $P = 24$. 1. Определите выпуск фирмы: а) минимизирующий средние затраты; б) максимизирующий прибыль. 2. Рассчитайте максимальную величину: а) прибыли; б) излишка производителя.

Раздел 5. ПОВЕДЕНИЕ ФИРМЫ НА РЫНКЕ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Теоретический материал

Рассмотрим задачу максимизации прибыли одно продуктовой фирмы в условиях совершенной конкуренции. В этом случае цена товара остается неизменной. Пусть эта цена равна p и задана функция общих издержек $TC(Q)$ Тогда рассматриваемая задача имеет следующий вид:

$$\Pi(Q) = pQ - TC(Q) \to \max, \;\; Q \geq 0.$$

Необходимым условием максимума прибыли является равенство нулю ее производной. Таким образом, при оптимальном объеме выпускаемой продукции Q* выполняется равенство $\Pi'(Q^*) = p - TC'(Q^*) = 0$, откуда

$$MC(Q^*) = TC'(Q^*) = p.$$

Видим, что максимальная прибыль в условиях конкуренции достигается, если предельные издержки равны цене выпускаемой продукции.

Заметим, что типичная функция прибыли является выпуклой вверх функцией. Поэтому $\Pi''(Q) < 0$ и, следовательно, критическая точка является точкой локального максимума.

Примеры решения задач.

Пример 1. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC(q) = q^3 - 8q^2 + 30q + 10$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

Ответ: 21

Решение:

Фирме безразлично, производить продукцию или нет, если прибыль покрывает переменные издержки.

$$PR(q) = \frac{2}{3}pq - q^3 + 8q^2 - 30q - 10 \geq -FC = -10$$

$$p \geq \frac{3}{2}\left(q^2 - 8q + 30\right) \to \min \Rightarrow q = 4,\ p = 21$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
Q=Symbol("Q")
p=Symbol("p")
TC=Q**3-8*Q**2+30*Q+10 # общие издержки
VC=Q**3-8*Q**2+30*Q    # переменные издержки
AVC=VC/Q               #
P=p*Q                  # прибыль
print(2/3*P-VC)
print(solve(2/3*P-VC,p))
p1=1.5*Q**2 - 12.0*Q + 45.0 # парабола, ветви вниз, мин. в вершине
pp= diff(p1,Q)
print(pp)
m=solve(pp,Q)
print(m[0].n(1))
pm=p1.subs({Q:4})
print('искомая цена',round(pm))
```

```
-Q**3 + 8*Q**2 + 0.666666666666667*Q*p - 30*Q
[1.5*Q**2 - 12.0*Q + 45.0]
3.0*Q - 12.0
4.
искомая цена 21
```

Пример 2. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 200 эскимосов, функция спроса каждого из которых $q^d = 5 - p$. Издержки одной фирмы имеют вид: $TC = 0{,}1 \cdot q^2 + q + 15$. На рынке установилась цена $p^* = 3$. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

Ответ: 40 фирм

Решение:

Пусть на рынке действует n фирм.

Суммарный спрос: $Q_d = 200 \cdot (5 - p) = 1000 - 200p$

Предложение одной фирмы на рынке: $MC = 0,2q + 1 = p$

Тогда суммарное предложение: $Q_s = n \cdot (5p - 5)$

Приравниваем спрос и предложение, подставив равновесную цену, равную 3, и получаем, что $n = 40$.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p=Symbol("p")
q=Symbol("q")
n=Symbol("n")
TC=0.1*q**2+q+15 # Общие издержки
Qd=200*(5-p) # Сумарный спрос
MC=diff(TC,q)  # Предельные издержки

print('Предложение одной фирмы на рынке',solve(MC-p,q))
Qs=n*(5.0*p - 5.0)
S=Qs.subs({p:3})
D=Qd.subs({p:3})
print('Сумарное предложение',n*(5.0*p - 5.0))
print('Ответ: число фирм n=',round(solve(S-D,n)[0].n(1)))
```

```
Предложение одной фирмы на рынке [5.0*p - 5.0]
Сумарное предложение n*(5.0*p - 5.0)
Ответ: число фирм n= 40
```

Пример 3. В совершенно конкурентной отрасли работают 40 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0,1q^2 + 2$. Государство вводит потоварный налог в размере 1,6 денежных единиц за единицу продукции. При этом 20% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией: $Q_d = 794 - 150p$.

Ответ: 358,4 денежные единицы

Решение:

Заметим, что фирмы распределяются так: 8, которые не платят налог, и 32, которые платят. Тогда рассмотрим фирму, освобожденную от налогов:

$$TC = 0,1q^2 + 2$$

$$MC = 0,2q = p$$

$$q_1 = 5p$$

Теперь рассмотрим фирму, которая платит налог:

$$TC = 0,1q^2 + 1,6q + 2$$

$$MC = 0,2q + 1,6$$

$$q_2 = 5p - 8$$

Тогда предложение в отрасли можно записать так:

$$Q_s = 8q_1 + 32q_2 = 8(5p) + 32(5p - 8) = 200p - 256$$

Приравняем спрос и предложение и найдем равновесные параметры:

$794 - 150p = 200p - 256$

$1050 = 350p$

$p = 3$

Тогда количество товара, который облагается налогом,

$$Q_t = 32q_2 = 32(5p - 8) = 32(5 \cdot 3 - 8) = 32 \cdot 7 = 224$$

Поступления в государственный бюджет от налога:

$$T = t \cdot Q_t = 224 \cdot 1,6 = 358,4$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p,q=symbols('p q')
Qd=794-150*p
print('число фирм, освобожденных от налога =', 0.2*40)
print('число фирм, не освобожденных от налога =', 40-0.2*40)
#рассмотрим фирму, освобождённую от налогов:
TC=0.1*q**2+2 # Общие издержки
MC=diff(TC,q)  # Предельные издержки
print('Предложение фирмы на рынке MC=',solve(MC-p,p))
q1=solve(MC-p,q)
print('MC=p, q1=',solve(MC-p,q))
# рассмотрим фирму, которая платит налог
TCn=0.1*q**2+2+1.6*q
MCn=diff(TCn,q)
q2=solve(MCn-p,q)
print('Предложение  фирмы на рынке MC=',solve(MCn-p,p))
print('MCn=p, q2=',solve(MCn-p,q))
Qs=8*5*p+32*(5*p-8)
print('предложение в отрасли Qs=8q1+32q2=',solve(8*5*p+32*(5*p-8),p))
print('Qd=Qs, p0=',solve(Qd-Qs,p))
q11=5*3
q22=5*3-8
print('количество товара, который облагается налогом Qt=',32*q22)
print('Поступления в государственный бюджет от налога T=',round((1.6*32*q22),2))
```

```
число фирм, освобожденных от налога = 8.0
число фирм, не освобожденных от налога = 32.0
Предложение фирмы на рынке MC= [0.2*q]
MC=p, q1= [5.0*p]
Предложение  фирмы на рынке MC= [0.2*q + 1.6]
MCn=p, q2= [5.0*p - 8.0]
предложение в отрасли Qs=8q1+32q2= [32/25]
Qd=Qs, p0= [3]
количество товара, который облагается налогом Qt= 224
Поступления в государственный бюджет от налога T= 358.4
```

Пример 4. В условиях совершенной конкуренции рыночная цена товара А равна 5 у.е. за единицу. Определите общий доход, полученный фирмой от продажи 30 единиц товара А и от продажи 50 единиц данного товара. Чему равен предельный доход фирмы от продажи 30-й и 50-й единиц товара А?

Ответ:

TR 30 = 150 у.е.; TR 50 = 250 у.е.

MR 30 = TR 30 - TR 29 = 150-145 = 5 у.е.

В условиях совершенной конкуренции P= MR, поэтому P= MR 30 = MR 50 = 5 у.е.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p, q =symbols('p q')
p=5
TR=p*q
TR30=TR.subs({q:30})
TR50=TR.subs({q:50})
TR29=TR.subs({q:29})
TR49=TR.subs({q:49})
MR30=TR30-TR29
MR50=TR50-TR49
print('Ответ:P= MR =',MR30,'= MR50 =',MR50)
```

```
Ответ:P= MR = 5 = MR50 = 5
```

Пример 5. На совершенно конкурентном рынке функция предложения была задана уравнением Qs = -60 + 2P, а функция рыночного спроса имеет вид Qd = 630 – P. Прибыль каждой из 100 действующих на этом рынке фирм была равна 80 рублей. Поскольку производство выпускаемого фирмами товара сопровождается положительным внешним эффектом, государством было принято решение о введении потоварной субсидии в размере 30 рублей за каждую проданную единицу товара. Одновременно с этим был установлен лицензионный сбор. Это позволяло вернуть часть затрат на выплату субсидий, а чтобы не нарушать стимулов к производству товара, размер лицензионного сбора был установлен так, чтобы фирмы были безубыточны и получали нулевую прибыль.

Считая, что количество фирм после вмешательства государства не изменилось, определите:

Равновесную цену и равновесное количество, а также объем выпуска каждой фирмы до государственного вмешательства;

Цену производителя и равновесное количество после государственного вмешательства;

Чистые расходы государства на осуществление мер государственного регулирования.

Решение:

Определим равновесную цену и равновесное количество до вмешательства государства

$$Q_d = Q_s \rightarrow 630 - P = -60 + 2P$$

$$P = 230,\ Q_d = Q_s = 400 \rightarrow q = 4$$

Прибыль фирмы: $\Pi_i = Pq - TC_i$.

$TC_i = FC + \int MC\, dq$

Найдем функцию предельных затрат фирмы MCi исходя из того, что кривая краткосрочного предложения совершено конкурентной фирмы является восходящей частью кривой предельных затрат, лежащей выше кривой средних переменных затрат.

$Q_s = -60 + 2P \rightarrow q = -0,6 + 0,02P$, где q - выпуск одной фирмы

$$P_i = 30 + 50q \text{ или } MC_i\, 30 + 50q$$

$$TC_i = FC + \int MC\, dq = FC + 30q + 25q^2$$

$$\Pi_i = 230*4 - 25*16 - 30*4 - FC = 400 - FC = 80$$

$$FC = 420$$

Введение государством субсидии привело к увеличению предложения. Новое уравнение рыночной кривой предложения

$$Q_s = -60 + 2(P + 30)$$

$$Q_D = 600 - P$$

$$600 - P = -2P$$

$$P_{нов} = 210$$

$$Q_{рын\ нов} = 420$$

отсюда $q_{i\ нов} = 4,2$

Учитывая, что $P_{D\ нов}$ - это цена производителя без учета субсидии рассчитаем прибыль фирмы после государственного вмешательства

$$P_{S\ нов} = P_{D\ нов} + 30 = 240$$

$$П_{i\ нов} = 24 \cdot 4,2 - 25 \cdot 4,2^2 - 40 \cdot 4,2 - 320 - лицензия = 0$$

Таким образом, плата за лицензию составила 121.

Расходы государства 30*420 – 100*121 = 500.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p, q, x=symbols('p q x')
p=symbols('p')
Qd=630-p
Qs=2*(p+30)-60
print(' 2. после гос. вмешательства')
print('равновесная цена p1 = ',solve(Qs-Qd,p)[0])
p0=solve(Qs-Qd,p)
print('равновесный объем Q1 =',(Qs.subs({p:(210)})))
q0=(Qs.subs({p:(210)}))/100
print('на 1 предприятие q1 = ',q0)
qs=Qs*0.01
p1=solve(q-qs,p)
ps=210+30
print(ps)
print('MC = ',p1[0])
VC=integrate(50.0*q + 30.0,q).subs({q:4.2})
print('VC = ',round(VC))
print ('прибыль новая = p1q1-VC1-FC- лицензия(x)')
print('x = ',solve(240*4.2-VC.subs({q:4.2})-320-x,x)[0].n(3))
print('3. расходы государства равны 30*420-100*121=',30*420-100*121)
```

```
 2. после гос. вмешательства
равновесная цена p1 =  210
равновесный объем Q1 = 420
на 1 предприятие q1 =  21/5
240
MC =  50.0*q
VC =  567
прибыль новая = p1q1-VC1-FC- лицензия(x)
x =  121.
3. расходы государства равны 30*420-100*121= 500
```

Пример 6. Фирма работает на рынке совершенной конкуренции, общие издержки фирмы TC = 75 + 17Q – 4Q2 + Q3. Цена на рынке установилась на уровне 20 долл. При каком объеме выпуска фирма максимизирует прибыль или минимизирует убытки?

Решение:

Правилом максимизации прибыли для фирмы ценополучателя является P = MR = MC. На рынке совершенной конкуренции P = MR, поэтому MR =20долл. Найдем MC как первую производную от функции TC, то есть MC = 17 – 8Q + 3Q2. Тогда решаем полученное уравнение 20 = 17 – 8Q + 3Q2, таким образом, Q = 3 шт. Соответственно, валовой (общий) доход и валовые (общие) издержки будут равны: TR = P · Q = 60 долл. TC = 117 долл. Размер прибыли составляет TR – TC = –57 долл. Так как у фирмы валовые издержки превышают валовой доход, значит она несет убытки равные 57 долл. Эти убытки будут минимальными, так как они меньше постоянных издержек. Это случай минимизации убытков фирмой в условиях совершенной конкуренции.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p=Symbol("p")
q=Symbol("q")
TC=75+17*q-4*q**2+q**3
MR=20
MC=diff(TC,q)
print(MC)
print(solve(3*q**2 - 8*q + 17-20,q))
TR3=20*3
print(TR)
TC3=TC.subs({q:3})
print(TC3)
print(TR3-TC3)
```

```
3*q**2 - 8*q + 17
[-1/3, 3]
60
117
-57
```

Задачи для самостоятельного решения

5.1.1. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= q^3 – 16 q^2 +90q +20$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.2. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= q^3 – 4 q^2 + 15q +5$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.3. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= q^3 – 48 q^2 + 16q +8$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.4. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= q^3 – 98q^2 +42 q +20$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.5. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= q^3 – 36 q^2 + 12 q + 6$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.6. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= 125q^3 – 25q^2 + 5q +1$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.7. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= 256 q^3 – 64 q^2 + 8 q +4$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.8. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC=81 q^3 – 27 q^2 +9q +3$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.9. Общие издержки фирмы задаются функцией $TC= 1000 q^3 – 100 q^2 +10q +1$. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.1.10. Общие издержки фирмы задаются функцией TC= q^3 – 343 q^2 +90q +20. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

5.2.1. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 400 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 25 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: TC= 0,1 *q^2 + q + 30. На рынке установилась цена p* = 9. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.2. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 300 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 15 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: TC= 0,1 *q^2 + q + 30. На рынке установилась цена p* = 6. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.3. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 100 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 2,5 – p. Издержки одной фирмы имеют вид:

TC= 0,1 *q^2 + q + 7,5. На рынке установилась цена p* = 1,5. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.4. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 140 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 16 – p. Издержки одной фирмы имеют вид:

TC= 0,1 *q^2 + q + 10. На рынке установилась цена p* = 3. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.5. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 250 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 10 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: $TC = 0{,}1 \cdot q^2 + q + 15$. На рынке установилась цена p* = 1. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.6. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 300 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 11 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: $TC = 0{,}1 \cdot q^2 + q + 15$. На рынке установилась цена p* = 4. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.7. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 500 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 50 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: $TC = 0{,}1 \cdot q^2 + q + 15$. На рынке установилась цена p* = 10. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.8. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 250 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 25 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: $TC = 0{,}1 \cdot q^2 + q + 15$. На рынке установилась цена p* = 7. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.9. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 250 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 10 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: TC= 0,1 *q^2 + q + 9. На рынке установилась цена p* = 1. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.2.10. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 350 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 27 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: TC= 0,1 *q^2 + q + 16. На рынке установилась цена p* = 6. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

5.3.1. В совершенно конкурентной отрасли работают 32 одинаковых предприятия. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0{,}1q^2 + 2$. Государство вводит потоварный налог в размере 3,2 денежных единиц за единицу продукции. При этом 40% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией: Qd =794 – 150p

5.3.2. В совершенно конкурентной отрасли работают 48 одинаковых предприятия. Издержки каждое предприятие описываются следующей функцией: TC= 0,1q^4 +4. Государство вводит потоварный налог в размере 1,7 денежных единиц за единицу продукции. При этом 40% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

Qd =588 – 30p

5.3.3. В абсолютно конкурентной отрасли работают 58 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: TC= 0,1q^2 +4. Государство вводит потоварный налог в размере 1,7 денежных единиц за единицу продукции. При этом 23% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

Qd =1588 – 300p

5.3.4. В совершенно конкурентной отрасли работают 78 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: TC= 0,1q^2 +4. Государство вводит потоварный налог в размере 1,09 денежных единиц за единицу продукции. При этом 14% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 792 – 140p$

5.3.5. В совершенно конкурентной отрасли работают 18 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией:

$TC = 0{,}1q^2 + 1$. Государство вводит потоварный налог в размере 0,09 денежных единиц за единицу продукции. При этом 14% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 892 – 140p$

5.3.6. В совершенно конкурентной отрасли работают 14 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0{,}1q^2 + 5$. Государство вводит потоварный налог в размере 1,7 денежных единиц за единицу продукции. При этом 16% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 1055 – 150p$

5.3.7. В совершенно конкурентной отрасли работают 37 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0{,}1q^2 + 4$. Государство вводит потоварный налог в размере 1,09 денежных единиц за единицу продукции. При этом 14% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 792 – 140p$

5.3.8. В совершенно конкурентной отрасли работают 19 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0{,}1\, q^4 + 4$. Государство вводит потоварный налог в размере 1,09 денежных единиц за единицу продукции. При этом 14% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 678 – 123p$

5.3.9. В совершенно конкурентной отрасли работают 120 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: $TC = 0{,}1\, q\, 4 + 4$. Государство вводит потоварный налог в размере

1,19 денежных единиц за единицу продукции. При этом 23% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 2\,382 - 450p$

5.3.10. В совершенно конкурентной отрасли работают 46 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: ТС= 0,1 q3 +9. Государство вводит потоварный налог в размере 1,39 денежных единиц за единицу продукции. При этом 2.01% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 2909 - 133p$

Контрольная работа

1.Общие издержки фирмы задаются функцией TC (q) = q^3 - 8*q^2 + 30*q + 10. Фирма является совершенным конкурентом, а треть своей выручки фирма отдает государству в качестве налога. При какой цене фирме будет безразлично, производить продукцию или нет?

2. В совершенно конкурентной отрасли работают 37 одинаковых фирм. Издержки каждой фирмы описываются следующей функцией: ТС= 0,1q^2 +4. Государство вводит потоварный налог в размере 1,09 денежных единиц за единицу продукции. При этом 14% фирм имеют налоговые льготы и не должны платить налог. Найдите поступления в государственный бюджет от введения данной меры, если спрос в отрасли описывается функцией:

$Qd = 792 - 140p$

3. На берегу Северного Ледовитого океана любимое лакомство эскимосов – мороженое в шоколадном рожке – производится и продается некоторым (конечным) числом фирм на совершенно конкурентном рынке. Известно, что всего на берегу живут 250 эскимосов, функция спроса каждого из которых qd = 10 – p. Издержки одной фирмы имеют вид: ТС= 0,1 *q^2 + q + 9. На рынке установилась цена p* = 1. Сколько фирм продают мороженое на берегу океана?

4. Функция общих издержек фирмы имеет вид TC = 50Q + 2Q2. Сколько прибыли получит фирма, реализуя продукцию на совершенно конкурентном рынке по цене 240 руб?

5. Функция общих затрат совершенно конкурентной фирмы имеет вид: TC = $Q^3 - 16Q^2 + 100Q + 400$. Выведите уравнение прямой и обратной функций предложения данной фирмы в краткосрочном периоде.

Раздел 6. МОНОПОЛИЯ И РЫНОЧНАЯ ВЛАСТЬ

Теоретический материал

Решая задачу максимизации прибыли в условиях монополии производитель, изменяя объем выпуска, может оказывать влияние на цену продукции, как и, изменяя цену, может регулировать объем продаж. Так для сбыта большего объема выпускаемой продукции монополист имеет возможность снизить цену. Таким образом, в условиях монополии цена является функцией выпуска: $p = p(Q)$, которая является убывающей, то есть $p'(Q) < 0$.

Выпишем функцию прибыли:

$\Pi(Q) = p(Q)Y - TC(Y)$.

Если производство прибыльно, то максимум прибыль достигает при условии равенства предельного дохода и предельных издержек:

$\left(p(Q)Q\right)' = TC'(Q)$,

откуда получаем

$MC(Q) = TC'(Q) = p(Q) + p'(Q)Q$.

Учитывая, что $p'(Q) < 0$, получаем, что максимальная прибыль в условиях монополии достигается при уровне предельных издержек меньших цены выпускаемой продукции.

Примеры решения задач.

Пример 1. Известны функция цены $p(Q) = 14 - 2Q$ и функция издержек $TC(Q) = 0,2Q^2 + 3Q + 9$. Найдите оптимальный объем производства, величину максимальной прибыли и соответствующую цену товара.

Решение.

Выпишем функцию прибыли:

$$\Pi(Q) = p(Q)Q - TC(Q) = -2,2Q^2 + 11Q - 9.$$

Оптимальный объем производства определяется из необходимого условия экстремума ($\Pi'(Q) = 0$):

$$\Pi'(Q) = -4,4Q + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^* = \frac{11}{4,4} = 2,5.$$

При этом максимальная прибыль будет равна

$$\Pi_{\max} = \Pi(Q^*) = -2,2 \cdot 2,5^2 + 11 \cdot 2,5 - 9 = 4,75,$$

а соответствующая цена товара

$$p^* = p(Q^*) = 14 - 2 \cdot 2,5 = 9.$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
Q=symbols('Q')
P=14-2*Q
TC=0.2*Q**2+3*Q+9
G=P*Q-TC
Q0=solve(diff(G,Q),Q)
G0=G.subs({Q:Q0[0]})
P0=P.subs({Q:Q0[0]})
print(Q0[0].n(3), G0.n(3), P0.n(3))
print( G0.n(3))
print( P0.n(3))
```

```
2.50 4.75 9.00
4.75
9.00
```

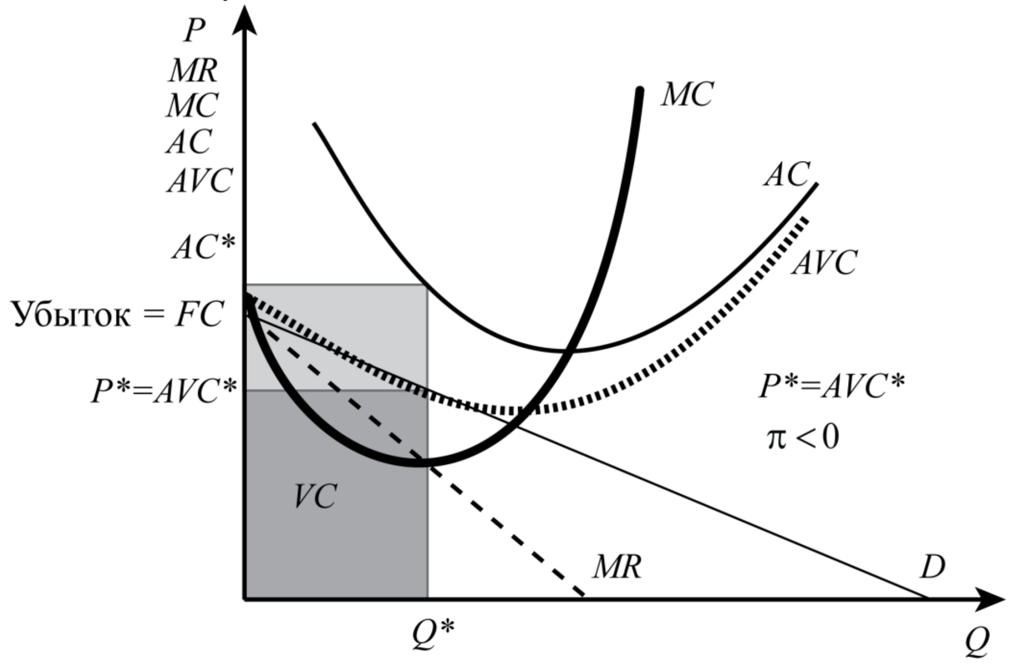
Пример 2. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 150 - 3Q$, в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при $Q = 12$.

Пусть государство, считая производство монополиста очень важным для страны, вводит потоварную субсидию монополисту в размере 375 ден. ед. на одну единицу продукции. Найдите новое оптимальное количество.

Решение:

Найдем равновесие, если $Q = 10$, $P = 120$.

Восстановим функцию переменных издержек VC. Не важно, уходить с рынка или нет, значит прибыль $= -FC$. Если в оптимуме прибыль $= -FC$, то ситуация выглядит так:



В этом случае должны выполняться условия:

спрос касается AVC при $Q = 10$;

$AVC = P$ при $Q = 10$.

Пункты 1 и 2 верны, так как в точке оптимума прибыль:

$$\pi = P \cdot Q^* - AVC \cdot Q^* - FC = Q^*\left(P - AVC\right) - FC$$

$MC = MR$ при $Q = 10$, так как это точка оптимума.

Введем функцию $AVC = aQ^2 + bQ + c$. Подставим всю известную информацию:

$$AVC'_Q = P'_Q \quad \Rightarrow \quad 2aQ + b = -3 \quad \Rightarrow \quad 20a + b = -3 \qquad b = -3 - 20a$$

$$aQ^2 + bQ + c = 120 \ \Rightarrow \ 100a + 10b + c = 120 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c = 120 - 100a - 10 \cdot \left(-3 - 20a\right) = 150 + 100a$$

$$Q_в = -\frac{b}{2a} = 12 \qquad b = -24a = -3 - 20a \qquad a = \frac{3}{4} \qquad b = -18$$

$$c = 150 + 100a = 225$$

$$VC = 0{,}75Q^3 - 18Q^2 + 225Q$$

Если введена субсидия в размере 375 единиц, то новая функция

$$VC = 0{,}75Q^3 - 18Q^2 + 225Q - 375Q$$

Тогда

$$MC = \frac{9}{4}Q^2 - 36Q - 150 = 150 - 6Q = MR$$

Новое $Q^* = 20$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
q, p,x, y, z=symbols('q p x y z')
P=150-3*q
q0=10
S=375
AVC=x*q**2+y*q+z
P0=P.subs({q:q0})
print('P0 = ',P0,', q0 = ',q0)
print(AVC.subs({q:q0}))
print(P0-AVC.subs({q:q0}))
MC=diff(AVC,q)
print(MC)
MR=diff(P,q)
print(MR)
print(solve([(MC-MR).subs({q:q0}),P0-AVC.subs({q:q0}),-y/(x*2)-12],[x,y,z]))
VC=AVC.subs({x:3/4, y:-18, z:225})*q-375*q
print(VC)
MC1=diff(VC,q)
print(MC1)
MR1=diff(P*q,q)
Q=solve(MC1-MR1,q)
print('Ответ:', Q[1].n(2))
```

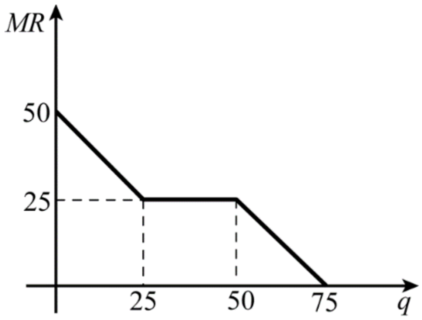
```
P0 =  120 , q0 =  10
100*x + 10*y + z
-100*x - 10*y - z + 120
2*q*x + y
-3
{x: 3/4, y: -18, z: 225}
q*(0.75*q**2 - 18*q + 225) - 375*q
0.75*q**2 + q*(1.5*q - 18) - 18*q - 150
Ответ: 20.
```

Пример 3. Спрос на продукцию фирмы-монополиста внутри страны задается функцией $Q_d = 100 - 2P$, а ее издержки $TC(q) = \frac{Q^2}{8}$. У монополиста также есть возможность реализовать продукцию на внешнем рынке по цене 25. Однако в силу квоты экспортируемое количество не может превышать 25. Жители внутри страны не имеют доступа к внешнему рынку.

Сколько единиц продукции будет реализовано на внутреннем рынке и по какой цене?

Государство вводит потоварный налог на монополиста (t единиц с каждой произведенной продукции). При какой ставке достигается максимум налоговых поступлений, чему он равен?

Решение:



а) $MR = \begin{cases} 50-q, & q \le 25 \\ 25, & 25 < q \le 50 \\ 75-q, & 50 < q \le 75 \end{cases}$

$MC = 0,25q$

Следовательно, пересечение с MR на участке $50 \le q \le 75$. MR не возрастает, MC строго возрастает и линейна. Следовательно, точка пересечения – точка максимума прибыли.

$75 - q = 0,25q \Rightarrow q^* = 60$

$q_{\text{внешн.}} = 25, \quad q_{\text{внутр.}} = 35$

$p_{\text{внутр.}} = 32,5$

б) Введение потоварного налога для монополиста эквивалентно изменению $MC: MC_1 = 0,25q + t$

Необходимо рассмотреть 3 случая. Во всех случаях MR не возрастает, MC строго возрастает и линейна. Следовательно, точка пересечения – точка максимума прибыли.

1 случай: $50 \le q \le 75$

$$75 - q = 0,25q + t \Rightarrow q = 60 - 0,8t \Rightarrow t \le 12,5$$

$$Tx(t) = 60t - 0,8t^2, \quad t \le 12,5$$

2 случай: $25 \le q \le 50$

$$0,25q + t = 25 \Rightarrow q = 100 - 4t \Rightarrow 12,5 \le t \le \frac{75}{4}$$

$$Tx(t) = 100t - 4t^2, \quad 12,5 \le t \le \frac{75}{4}$$

3 случай: $q \le 25$

$$0,25q + t = 50 - q \;\Rightarrow\; q = 40 - 0,8t \;\Rightarrow\; \frac{75}{4} \le t \le 50$$

$$Tx(t) = 40t - 0,8t^2, \quad \frac{75}{4} \le t \le 50$$

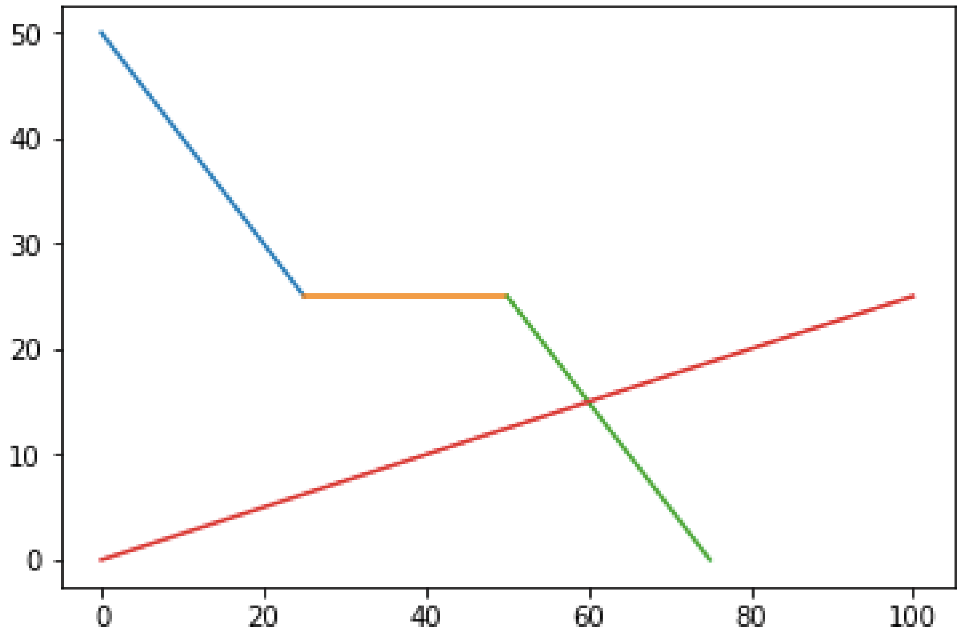
$$Tx_{max} = Tx(t = 12,5) = 625$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,25,50)
x2=np.linspace(25,50,50)
x3=np.linspace(50,75,50)
x4=np.linspace(0,100,50)
y1=50-x1
y2=25+0*x2
y3=75-x3
y4=0.25*x4
plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x2,y2)
plt.plot(x3,y3)
plt.plot(x4,y4)
```

```
plt.show

q=solve(0.25*q-75+q,q)
print('Ответ: ',q[0].n(2))
```

```
q/4
Ответ:  60.
```




```
import numpy as np
from sympy import *
q,q1, p,x, y, t=symbols('q q1 p x y t')
TC=q**2/8
MC=diff(TC,q)
Q=100-2*p
q=solve(MC-75+q,q)
qu=25
qi=q[0].n(2)-qu
P5=50-qi*0.5
print('1) q =  ',q[0].n(2),'q внутр = ',qi,'p внутр = ',P5)
T=t*q1
#[50;75]
print('2) 1. t =  ',solve(75-q1-0.25*q1-t,t)[0])
print(' t1 =  ',solve(75-q1-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:50}),T1)
t1=solve(75-q1-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:50})
Q1=solve(75-q1-0.25*q1-t,q1)[0]
#[25;50]
print('2. t =  ',solve(25-0.25*q1-t,t)[0])
print(' t2 =  ',solve(25-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:25}),T2)
t2=solve(25-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:25})
Q2=solve(25-0.25*q1-t,q1)[0]
#[0;25]
print('3. t =  ',solve(50-q1-0.25*q1-t,t)[0],T3)
t3=solve(50-q1-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:0})
print(' t3 =  ',solve(50-q1-0.25*q1-t,t)[0].subs({q1:0}))
Q3=solve(50-q1-0.25*q1-t,q1)[0]
T1=(Q1*t).subs({t:t1})
T2=(Q2*t).subs({t:t2})
T3=(Q3*t).subs({t:t1})
```

```
if T1>T2:
    print('Ответ: 1) q =  ',q[0].n(2),'q внутр = ',qi,', p внутр = ',P5, '2) максимальный налог',T1.n(3),'при ставке t = ',t1) if T1>T3 else print('Ответ: 1) q =  ',q[0].n(2), '2) максимальный налог',T3.n(3),'при ставке t = ',t3)
else:
    print('Ответ: 1) q =  ',q[0].n(2), '2) максимальный налог',T2.n(3),'при ставке t = ',t2) if T2>T3 else print('Ответ:1) q =  ',q[0].n(2), '2) максимальный налог',T3.n(3),'при ставке t = ',t3)
```

```
if T1>T2:
    print(T1.n(3)) if T1>T3 else print(T3.n(3))
else:
    print(T2.n(3)) if T2>T3 else print(T3.n(3))
```

```
625.
```

```
1) q =   60. q внутр =  35. p внутр =  32.5000000000000
2) 1. t =   75.0 - 1.25*q1
 t1 =   12.5000000000000 625.000000000000
2. t =   25.0 - 0.25*q1
 t2 =   18.7500000000000 468.750000000000
3. t =   50.0 - 1.25*q1 375.000000000000
 t3 =   50.0000000000000
Ответ: 1) q =   60. q внутр =  35. , p внутр =  32.5000000000000 2) максимальный налог 625. при ставке t =  12.5000000000000
```

Пример 4. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

Решение:

$$P = a - bQ$$

$$Q(TR_{max}) = \frac{a}{2b}$$

$$P(TR_{max}) = \frac{a}{2}$$

$$TR_{max} = \frac{a^2}{4b}$$

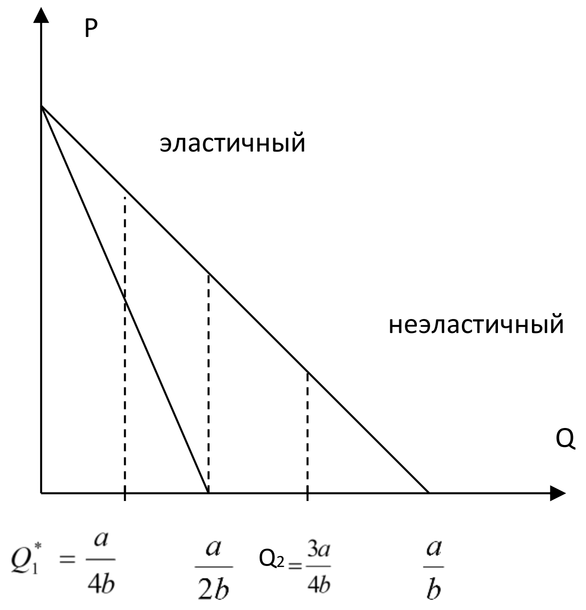
$$TR(Q') = \frac{3a^2}{16b} \qquad Q' \cdot (a - bQ') = \frac{3a^2}{16b}$$

$$Q' \cdot a - b \cdot Q'^2 - \frac{3a^2}{16b} = 0$$

Получаем два корня

$$Q'_1 = \frac{a}{4b}, \quad Q'_2 = \frac{3a}{4b}$$

Корень $Q'_2 = \frac{3a}{4b}$ соответствует неэластичному участку линейной функции спроса, монополист же всегда выбирает эластичный участок линейной функции спроса. Эластичному участку линейной функции спроса соответствует $Q'_1 = \frac{a}{4b}$



Найдем цену, соответствующую оптимальному объему выпуска монополии $Q'_1 = \frac{a}{4b}$, она равна $P'_1 = \frac{3a}{4}$ коэффициент эластичности в этой точке $E = -3$.

Решение на Python.

```python
import sympy
import numpy as np
from sympy import *
p, q, a, b, Q=symbols('p q a b Q')
P=a-b*q
print(P)
Q=solve(P-p,q)
print(Q[0])
print(diff((a - p)/b,p))
d=diff(p*(a - p)/b,p)
print(sympy.simplify(d))
k=solve(d,p)
print(k[0])
r=((a - p)/b).subs({p:(a/2)})
print(r)
TR=a/2*a/(2*b)
print(TR)
TR1=3/4*TR
print(TR1)
q1=solve(TR1-q*P,q)[0]
q2=solve(TR1-q*P,q)[1]
p1=P.subs({p:0.25*a/b})
p2=P.subs({p:(0.75*a/b)})
E=diff((a - p)/b,p)*P/q
E1=E.subs({p:p1,q:q1})
print(E1.n(3))
E2=E.subs({p:p2,q:q2})
print(E2.n(3))
if abs(E1)>1:
    print('Ответ: обьем выпуска q1 эластичен, E1 =  ',E1.n(3),', цена p =  ',p1.subs({q:q1}))
else:
    print('Ответ: обьем выпуска q1 не эластичен ')
if abs(E2)>1:
    print(' E2 =  ',E2.n(3),' цена p =  ',p2.subs({q:q2}))
else:
    print(' обьем выпуска q2 не эластичен ')
```

```
a - b*q
(a - p)/b
-1/b
(a - 2*p)/b
a/2
a/(2*b)
a**2/(4*b)
0.1875*a**2/b
-3.00
-0.333
Ответ: обьем выпуска q1 эластичен, E1 =   -3.00 , цена p =   0.75*a
 обьем выпуска q2 не эластичен
```

Пример 5. Найдите функции предельных (маржинальных) и средних затрат, выручки и предельной выручки, а также максимум прибыли монополиста, если известно, что спрос на его продукцию описывается функцией Q = 165 – 0,5P и функция общих затрат имеет вид TC = 5500 + 30Q + Q2.

Решение:

1) Определяем объем выпуска продукции монополии по условию максимизации прибыли MR = MC. Находим MR. Так как Q = 165 – 0,5P, то P = 330 – 2Q. Отсюда вычислим MR = dTR / dQ, где TR = 330Q – 2Q2, тогда MR = 330 – 4Q.

2) Находим MC по формуле: MC = dTC / dQ = 30 + 2Q. Приравниваем MR = MC, 330 – 4Q = 30 + 2Q. В результате имеем Q = 50, P = 230. Выручка составит TR = P·Q = 11 500, а затраты TC = 5 500 + 1500 + 2500 = 9 500. Прибыль составит (TR –TC) = 11 500 – 9 500 = 2 000.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p, q=symbols('p q')
Q=165-0.5*p
P=solve(Q-q,p)
print('P = ',P[0])
TR=(330-2*q)*q
MR=diff(TR,q)
print('MR = ',MR)
TC=5500+30*q+q**2
MC=diff(TC,q)
print('MC = ',MC)
Q=solve(MR-MC,q)
print('Q = ',Q[0])
print('P = ',(330-2*q).subs({q:50}))
# TR=P*Q выручка
print('TR = ',50*230)
# Затраты TC
print('TC = ',TC.subs({q:50}))
# прибыль TR-TC
print('Ответ: TR-TC = ',50*230-TC.subs({q:50}))
```

```
P =  330.0 - 2.0*q
MR =  330 - 4*q
MC =  2*q + 30
Q =  50
P =  230
TR =  11500
TC =  9500
Ответ: TR-TC =  2000
```

Задачи для самостоятельного решения

6.1.1. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 150 - 3*Q$, в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при $Q = 12$

6.1.2. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 200 - 3*Q$, в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при $Q = 12$

6.1.3.Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 300 - 3*Q$, в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при $Q = 12$

6.1.4. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 350 - 3*Q$, в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при $Q = 12$

6.1.5. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 3*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.6. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 4*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.7. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 5.*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.8. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 6*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.9. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 7*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.10. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 10 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.11.Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 15 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.12. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 0 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.13. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 30 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.14. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 40 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации.

Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.15. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 50 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.16. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 60 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.17. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 70 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.18. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 80 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.19. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 90 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.20. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 12

6.1.21. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 24

6.1.22. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 36

6.1.23. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации.

Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 50

6.1.24. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 67

6.1.25. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 63

6.1.26. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 70

6.1.27. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 82

6.1.28. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 92

6.1.29. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией P = 400 - 8*Q , в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 100

6.2.1. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 30 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.2. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 40 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.3. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 50 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.4. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 50 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.5. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 60 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет.

Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.6. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 70 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.7. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 80 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.8. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 60 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.9. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 90 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 120 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.10. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 0,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 120 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.11. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина.

Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 1s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 120 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.12. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 1,5 s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 120 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.13. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 120 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.14. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.15. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.16. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.17. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.18. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.19. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.20. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 105 у.е.

6.2.21. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 112 у.е.

6.2.22.На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет.

Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 115 у.е.

6.2.23. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 125 у.е.

6.2.24. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 135 у.е.

6.2.25. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s*Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 145 у.е.

6.2.26. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 165 у.е.

6.2.27. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 155 у.е.

6.2.28. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина.

Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 175 у.е.

6.2.29. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает 2,5s* Q литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 185 у.е.

6.2.30. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает $2{,}5s \cdot Q$ литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 195 у.е.

6.3.1. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =40 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)? 6.3.2. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =50 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)? 6.3.3. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =60 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.4. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =70 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.5. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =80 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)? 6.3.6. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =90 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.7. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =100 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации.

При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.8. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =110 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.9. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =120 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.10. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =130 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.11. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =140 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.12. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =150 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.13. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =160 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации.

При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.14. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =170 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.15. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =180 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.16. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =190 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.17. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 6q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.18. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 7q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.19. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 8q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации.

При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.20. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 9q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.21. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 10q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.22. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 11q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.23. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)=12q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.24. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 13q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.25. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.26. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 20. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.27. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 30. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.28. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 40. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.29. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 50. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,5)?

6.3.30. Спрос на продукцию монополиста задается функцией P(d) =200 - q , а издержки TC(q)= 14q + 10. Известно, что доля t от выручки выплачивается фирмой государству в качестве налога. Фирма максимизирует прибыль, отсутствует возможность ценовой дискриминации. При какой ставке t в оптимуме монополиста эластичность спроса по цене будет равна (–1,7)?

6.4.1. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.2. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/5 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.3. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/6 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.4. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/7 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.5. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/8 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.6. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/9 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.7. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/1от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.8. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/11 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.9. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/12 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.10. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 3/13 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.11. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 4/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.12. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 5/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.13. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 6/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.14. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 7/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.15. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 8/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.16. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 9/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.17. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 10/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.18. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 11/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.19. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 12/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.20. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/4 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.21. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/14 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.22. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/15 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.23. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/16 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.24. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/17 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.25. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/18 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.26. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/19 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.27. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/20 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.28. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/21 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

6.4.29. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/22 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума? 6.4.30. Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/41 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

Контрольная работа

1.Спрос на продукцию монополиста линеен. Известно, что при оптимальном для монополиста объеме выпуска выручка составляет 13/20 от максимально возможной. Какова эластичность спроса по цене товара в точке оптимума?

2. На рынке автозаправок действует компания-монополист, заправка которой расположена на расстоянии s от поставщика бензина. Поставщик продает бензин компании-монополисту по цене 100 у.е. за литр. Известно, что для того, чтобы доставить Q литров на расстояние s, компания-монополист затрачивает $2{,}5s \cdot Q$ литров бензина на заправку бензовоза. Других издержек компания-монополист не несет. Спрос на бензин на заправке не зависит от ее расположения и составляет $Q^{(d)} = 180 - P^{(d)}$. Государство облагает налогом компанию за каждый закупленный у поставщика литр бензина (независимо от того, продают ли его на заправке или используют для транспортировки) по ставке, которая максимизирует поступления в бюджет. Определите, на каком расстоянии от поставщика компания расположила заправку, если известно, что цена бензина на ней составила 165 у.е.

3. Монополист Н. Е. Везучий оказался в затруднительном положении: в краткосрочном периоде в оптимуме оказалось, что выручка покрывает только переменные издержки. Спрос на рынке описывается функцией $P = 400 - 8Q$, в оптимуме монополист продает 100 единиц продукции, отсутствует возможность ценовой дискриминации. Найдите вид функции переменных издержек, если известно, что функция средних переменных издержек AVC описывается параболой, минимум которой достигается при Q = 50.

4. Функция общих затрат монополиста имеет вид: $TC = 4700 + + 42Q + Q^2$. Найдите максимальную прибыль монополиста, если известно, что спрос на его продукцию описывается функцией $Qd = 180 – 0,5P$.

5. При линейной функции спроса монополия получает максимум прибыли, продавая 12 ед. продукции по цене 40 ден. ед. Функция общих затрат монополии: $TC = 50 + 10Q + 0,5Q^2$. Насколько возрастут суммарные излишки производителей и потребителей, если при тех же затратах продукция будет продаваться в условиях совершенной конкуренции?

Раздел 7. РЫНКИ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

Теоретический материал

К факторным рынкам относят: рынок труда, рынок земли и рынок капитала.

На рынке труда продается и покупается не сам труд, который неотделим от человека как такового, а услуги труда.

Труд представлен интеллектуальной и физической деятельностью, направленной на изготовление благ и оказание услуг.

Труд является главным фактором функционирования производства, а заработная плата - важнейший вид рыночных цен. В узком смысле слова под заработной платой понимается ставка заработной платы, т.е. цена, выплачиваемая за использование единицы труда в течение определенного времени - часа, дня и т.д.

Различают номинальную и реальную заработную плату.

Под номинальной заработной платой понимается сумма денег, которую получает работник наемного труда за свой дневной, недельный, месячный труд. Реальная заработная плата - эта та масса жизненных благ и услуг, которые можно приобрести за полученные деньги.

Уровень реальной зарплаты складывается под влиянием спроса и предложения. Субъектами спроса на рынке труда выступают бизнес и государство, а субъектами предложения - домашние хозяйства.

Величина предельного продукта труда зависит от качества рабочей силы, от уровня общей и специальной профессиональной подготовки, от уровня кооперации труда, и т.д. Спрос на труд предъявляется до того момента, когда выручка от использования предельного (последнего) работника сравняется с издержками по его использованию или, другими слова, когда заработная плата предельного рабочего будет равна получаемой от его использования фирмой выручке.

Кривая спроса на труд со стороны руководителя фирмы есть кривая предельной производительности труда MRP_L по его цене W (Рис.2).

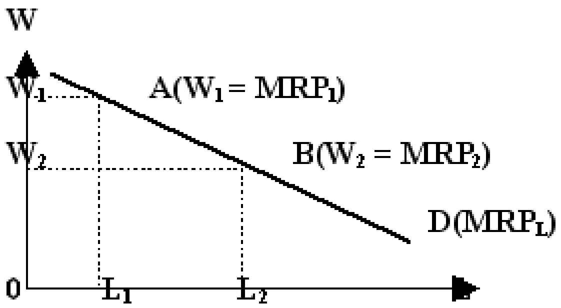


Рисунок 2 - Кривая спроса на труд

Кривая спроса имеет отрицательный наклон, так как отражает закон убывающей предельной производительности труда. Его смысл заключается в том, что фирма, нанимая больше рабочих, получает от них убывающую отдачу, поэтому оплачивает труд по более низким ставкам.

Предложение труда на уровне народного хозяйства определяется, прежде всего, численностью населения, долей в нем трудоспособных, половозрастным составом, средним числом отработанных часов, приходящихся на одного работника и т.д.

Индивидуальное предложение труда зависит от многих факторов: от престижности профессии, от удаленности места работы от дома, от уровня профессиональной организованности в той или иной отрасли, от социальных условий труда в фирме и т.д. Но все же главным стимулом является уровень заработной платы.

Для рынка труда кривая предложения будет иметь положительный наклон: с ростом заработной платы предложение труда будет возрастать (Рис. 3).

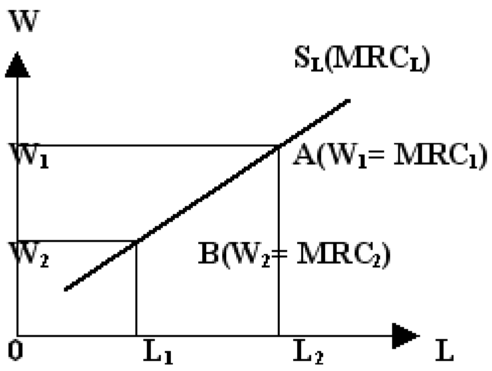


Рисунок 3. Кривая предложения на труд

В экономическом смысле кривая предложения труда S_L - кривая предельных издержек труда MRC_L (Рис.3).

Объединяя два графика - кривую спроса и кривую предложения труда получим точку равновесия между спросом и предложением на труд (Рис.4).

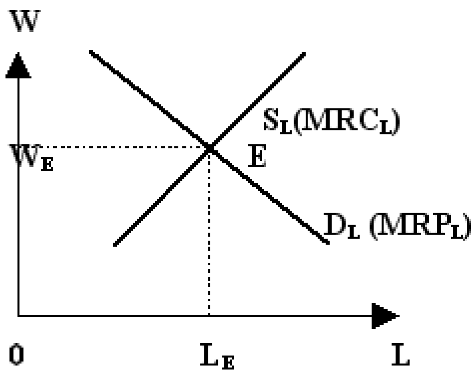


Рисунок 4. Равновесное состояние рынка труда

Точке Е на графике равновесного состояния рынка труда соответствует определенный уровень реальной заработной платы и заданное этим уровнем предложение труда. В точке Е спрос на труд равен предложению труда, т.е. рынок труда находится в равновесном состоянии

Наряду с трудом следующим фактором производства относится земля. Данная плата за фактор производства «земля» называется земельной рентой. Земельная рента представлена двумя основными видами: дифференциальной рентой и абсолютной рентой.

Равновесие на рынке земли устанавливается в результате взаимодействия спроса на нее и предложения.

Капитал – это третий фактор производства, представляющий собой средства производства, которые созданы людьми для того, чтобы с их помощью производить другие товары и услуги. К ним относятся инструменты, оборудование, здания, сооружения и т.п.

Капитальная цена данного фактора производства – это цена, по которой осуществляется его купля-продажа.

Соизмерение текущих расходов с потоками будущих доходов на рынке капитала производится посредством дисконтирования. Дисконтированная стоимость выражает стоимость будущих потоков платежей в значении текущих потоков платежей. Модель дисконтированной стоимости позволяет определить какой объем финансовых вложений намерен сделать инвестор для получения определенного денежного потока через заданный срок.

$P=Pn/(1+r)n$, где

Pn — это будущая стоимость,

P — дисконтированная или приведенная стоимость

r- процентная ставка

$\frac{1}{(1+r)^n}$ - коэффициент дисконтирования.

Примеры решения задач

Пример 1. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 100 – 20W$; $LS = –60 + 80W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

Решение:

1) Приравнивая уравнения $100 – 20W = –60 + 80W$ получаем равновесный уровень зарплаты $We = 1,6$ ден. ед. / час при среднегодовой занятости равной $Le = 68$ тыс. чел.

2) В результате введения минимальной оплаты труда в размере 2 ден. ед. / час, объем спроса сократится до $LD = 100 – 20 \cdot 2 = 60$ тыс. чел., а предложение труда возрастет до $LS = –60 + 80 \cdot 2 = 100$ тыс. чел. Уровень вынужденной безработицы составит 40 тыс. чел.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
W=symbols('W')
LD=100-20*W
LS=-60+80*W
We=solve(LS-LD,W)
print('равновесный уровень з.п. = ',We[0])
LD2=LD.subs({W:2})
LS2=LS.subs({W:2})
print('LD = ',LD2,', LS = ',LS2)
print('Ответ: уровень вынужденной безработицы LS-LD = ',LS2-LD2)
```

```
равновесный уровень з.п. =  8/5
LD =  60 , LS =  100
Ответ: уровень вынужденной безработицы LS-LD =  40
```

Пример 2. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 5R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

Решение:

Подставим Q в функцию спроса на землю и определим арендную плату: 40 = 500 – 5R; 5R = 460; R =92. 2) Цена земли рассчитывается по формуле: Рземли = R / i, где R – величина годовой арендной платы, i – ставка процента. Следовательно, Рземли = 92 / 0,04 = 2300.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
R=symbols('R')
QD=500-5*R
print('R = ',solve(40-QD,R)[0])
print('Ответ: цена земли R/i = ', 92/0.04)
```

```
R =  92
Ответ: цена земли R/i =  2300.0
```

Пример 3. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 000 долл., во втором году – 1 200 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

Решение:

Дисконтирование – это приведение будущих денежных потоков к текущему периоду с учетом изменения стоимости денег с течением времени. Текущая дисконтированная стоимость (PDV) всего проекта складывается из суммы дисконтированных стоимостей доходов каждого года и определяется по формуле: PDV проекта = TR1 / (1+i)1 + TR2 / (1+i)2 + TR3 / (1+i)3, где TR – совокупный доход определенного года, i – ставка процента. Таким образом: PDV = 1000 / (1 + 0,1) 1 + 1200 / (1 + 0,1) 2 = 909,09 + 991,7 = 1900,8.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
TR1=1000
TR2=1200
i=0.1
print('Ответ: PDV = ',round(TR1/(1+i)+TR2/((1+i)**2),1))
```

```
Ответ: PDV =  1900.8
```

Пример 4. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+x+9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+x+9)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

Решение:

Составим функцию прибыли: $\Sigma(p,x)=px-\left(0,5x^2+x+9\right)$ найдем ее максимум. Для этого вычислим производную функции прибыли

$$\Sigma'(p,x)=p-x-1$$

И нули производной: $p-x-1=0$.

Функция принимает свое наибольшее значение при $x=p-1$. Найдём прибыль:

$$\Sigma(p,p-1)=p\left(p-1\right)-\left(0,5\left(p-1\right)^2+\left(p-1\right)+9\right)=0,5p^2-p-8,5$$

По условию строительство завода должно окупиться не более, чем за 5 лет. То есть за 5 лет прибыль должна быть не меньше 115 млн рублей. $5(0,5p^2-p-8,5)\ge 115$; $0,5p^2-p-8,5\ge 23 \ \to p=9$.

Ответ: 9000 руб.
Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
x, p=symbols('x p')
Z=0.5*x**2+x+9
P=x*p-Z
print('производная от прибыли',diff(P,x))
print('ноль производной',solve(diff(P,x),x)[0])
print('прибыль',P.subs({x:(p-1)}))
print('наименьшая цена',solve(5*P.subs({x:(p-1)})-115,p)[1].n(1),'т.р.')
```

```
производная от прибыли p - 1.0*x - 1
ноль производной p - 1.0
прибыль p*(p - 1) - p - 0.5*(p - 1)**2 - 8
наименьшая цена 9. т.р.
```

Пример 5. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi_1 = 135 руб., \pi_2 = 202,5 руб., \pi_3 = 100 руб.$ и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 12,5\%$.

Решение:

Так как представленный поток доходов будет получен в будущих периодах, а капитальная цена бензопилы определяется в текущем периоде, то для ее расчета используем формулу дисконтирования:

$$P_{\text{кап}} = PV = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$P_{\text{кап}} = PV = \frac{135}{(1+12,5)} + \frac{202,5}{(1+12,5)^2} + \frac{100}{(1+12,5)^3} + \frac{82,25}{(1+12,5)^4}$$

$$= 408 \text{ ден. ед.}$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
C1=135
C2=202.5
C3=100
i=0.125
k=1+i
L=82.25
print('Ответ: PV = ',C1/k+C2/k**2+C3/k**3+L/k**3)
```

```
Ответ: PV =  408.0
```

Задачи для самостоятельного решения

7.1.1. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: LD = 200 – 20W; LS = –60 + 80W, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.2. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: LD = 300 – 20W; LS = –60 + 100W, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.3. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: LD = 400 – 20W; LS = –60 + 120W, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.4. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: LD = 500 – 20W; LS = –60 + 140W, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.5. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 600 – 20W$; $LS = –60 + 150W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.6. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 700 – 20W$; $LS = –60 + 160W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.7. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 800 – 20W$; $LS = –60 + 170W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.8. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 900 – 20W$; $LS = –60 + 180W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.9. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 1\text{-}00 – 20W$; $LS = –60 + 190W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.1.10. Спрос на труд и его предложение выражены уравнениями: $LD = 1100 – 20W$; $LS = –120 + 380W$, где W – месячная оплата или ставка заработной платы (ден. ед. / ч); LD и LS – объемы спроса и предложения (тыс. чел. / г.). Определите: 1) Равновесный уровень зарплаты и занятости. 2) Уровень вынужденной безработицы, если минимальная зарплата установлена на уровне 2 ден. ед. / час.

7.2.1. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 10R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.2. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 20R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.3. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 30R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.4. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 40R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.5. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 50R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.6. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 60R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.7. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 70R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.8. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 90R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.9. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 100R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.2.10. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 120R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Определите цену земли (в рублях), если Q = 40 га, а ставка банковского процента i составляет 4 % годовых.

7.3.1 Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 000 долл., во втором году – 1 400 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.2. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 000 долл., во втором году – 1 500 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.3. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 000 долл., во втором году – 1 600 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.4 Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 000 долл., во втором году – 1 800 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.5 Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 1 020 долл., во втором году – 1 900 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.6 Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 2 000 долл., во втором году – 1 800 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.7 Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 3 000 долл., во втором году – 2 400 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.8. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 6 000 долл., во втором году – 1 500 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.9. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 7 000 долл., во втором году – 5 400 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.3.10. Рассмотрите данные о возможном получении дохода от инвестиций по годам: в первом году – 9 000 долл., во втором году – 6 400 долл. Определите дисконтированную сумму дохода (в долл.) при ставке банковского процента, равной 10 %.

7.4.1. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+18 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

7.4.2. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+20). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

7.4.3. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+30 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+30). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

7.4.4. Строительство нового завода стоит 120 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

7.4.5. Строительство нового завода стоит 135 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет

7.4.6. Строительство нового завода стоит 150 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет

7.4.7. Строительство нового завода стоит 180 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет

7.4.8. Строительство нового завода стоит 190 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет

7.4.9. Строительство нового завода стоит 120 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене р тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более чем за 7 лет

7.4.10. Строительство нового завода стоит 120 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене р тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более чем за 10 лет

7.4.11. Строительство нового завода стоит 120 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене р тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более чем за 18 лет

7.4.12. Строительство нового завода стоит 120 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны 0,5 x^2+x+20 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене р тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5 x^2+x+9). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более чем за 666 лет 7.5.1. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\boldsymbol{\pi}1 = 145$ руб, $\boldsymbol{\pi}2 = 202{,}5$ руб., $\boldsymbol{\pi}3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $\boldsymbol{i} = 12{,}5\%$

7.5.2. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы

$\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 13,5\%$

7.5.3. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 14,5\%$

7.5.4. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 15,5\%$

7.5.5. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 16,5\%$

7.5.6. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 19,5\%$

7.5.7. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 20,5\%$

7.5.8. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы $\pi 1 = 135$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 100$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 82,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 21,5\%$

7.5.9. Определите капитальную цену бензопилы, которая в течение трех лет обеспечивает чистые годовые доходы

$\pi 1 = 150$ руб, $\pi 2 = 202,5$ руб., $\pi 3 = 200$ руб и к концу 3-го года имеет ликвидационную ценность 83,25 руб., если годовая ссудная ставка процента $i = 22,5\%$

Контрольная работа

1. На рынке труда функция спроса описывается уравнением DL = 102 – 2w, а функция предложения труда – уравнением SL = 6 + w. Чему равны равновесное число занятых работников (тыс. человек) и равновесная ставка оплаты труда?

2. Фирма находится в условиях совершенной конкуренции на рынке данного товара и труда. Ее производственная функция имеет вид

$Q = 120 \times L - 2 \times L^2$

в интервале использования труда от 12 до 30 единиц. Ставка заработной платы равна 60 ден. ед., а цена товара 8 ден. ед. Определить оптимальный для фирмы выпуск продукции.

3. На рынке хлебобулочных изделий спрос на труд описывается уравнением вида Ld = 300 – 3W, а предложение труда – уравнением вида Ls = 5W – 20. Определите в условиях равновесия на данном рынке уровень заработной платы и количество принятых на работу.

4. Спрос на землю описывается уравнением QD = 500 – 5R, где Q – площадь земельных угодий, R – арендная плата. Какова цена участка земли, если Q = 40 га, а ставка банковского процента r составляет 4 % годовых?

5. Производственное оборудование стоит 10 млн руб. Его использование предпалагает ежегодно в течение четырех лет получать доход в размере 1,5 млн руб. По истечении четвертого года оборудование будет продано за 4,5 млн руб. Ставка банковского процента составляет 8,4 % годовых. Чему равна чистая дисконтированная стоимость? Сделайте вывод о целесообразности инвестиционного решения.

Раздел 8. ОБЩЕЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ЭКОНОМИКА БЛАГОСОСТОЯНИЯ

Теоретический материал

Теория общественного выбора основана на предположении о том, что индивидуум в процессе своей деятельности руководствуется необходимостью получения от нее максимального результата.

Центральное место в теории общественного выбора занимает проблема общественных благ. Теория исходит из того, что государство как активный участник экономической жизни не является эффективным. Постоянно наблюдаются проблемные точки его функционирования, названные провалами государства. Одной из причин создания государства сторонники теории общественного выбора называют необходимость эффективного распределения и перераспределения общественных благ.

Центральное место в этой теории занимает процесс принятия решений, которые должны отражать интересы большинства населения.

Теория общественно выбора исходит из возможности выявления индивидуальных потребностей и их интеграции.

Исходя из теории общественного выбора производство, распределение и потребление общественных благ должно быть основано на:

1) охвате максимально широкого круга предпочтений конечного получателя общественных благ;
2) независимости от прочих несущественных факторов;
3) единогласии;
4) отсутствии диктатуры.

Эффективность производства это такая ситуация, в которой при данных производственных ресурсах и существующем уровне знаний нельзя произвести больший объем одного блага, не жертвуя при этом возможностью производства некоторого объема другого блага.

Эффективность в производстве – состояние экономики, при котором невозможно увеличить производство одного товара, не сокращая при этом производства другого.

Линия (кривая) производственных возможностей показывает возможности общества по производству различных наборов благ при эффективном использовании имеющихся ограниченных ресурсов. Производство является эффективным, если достигается одна из точек на кривой производственных возможностей.

Под эффективным обменом благ понимается такое их распределение между потребителями, при котором невозможно распределить блага таким образом, чтобы благосостояние одного или нескольких потребителей улучшилось без ухудшения благосостояния другого или других.

Внешние эффекты (экстерналии) – это воздействие экономических субъектов, участвующих в данной сделке, на третьих лиц, не принимающих участия в сделке; побочные воздействия, которые могут оказывать потребление или производство какого-то блага на потребление или производство другого блага.

Различают положительные и отрицательные внешние эффекты.

Отрицательные внешние эффекты (негативные экстерналии) – это негативное воздействие участвующих в сделке экономических субъектов на третьих лиц. Уменьшение полезности или выпуска считают внешними затратами данного вида деятельности.

Выделяют следующие виды отрицательных внешних издержек.

Совокупные внешние издержки (TEC) это совокупный ущерб, наносимый третьим лицам. Они изменяются в зависимости от объема выпуска в отрасли. С увеличением производства совокупные внешние издержки увеличиваются.

Предельные внешние издержки (MEC) это дополнительные издержки, связанные с производством каждой дополнительной единицы продукции, которые не оплачиваются производителями, а перекладываются на третьих лиц.

Предельные индивидуальные издержки (MPC) это стоимость услуг тех ресурсов, которые фирмы покупают или которыми владеют.

Предельные общественные издержки (MSC) это сумма предельных внешних издержек и предельных индивидуальных издержек.

Предельная общественная полезность (MSB) дополнительная полезность, извлекаемая при производстве еще одной единицы продукции.

При существовании отрицательного внешнего эффекта общее условие достижения эффективности может быть выражено следующим образом:

MPC + MEC = MSC = MSB.

Положительные внешние эффекты – это воздействия, которые увеличивают полезность стороннего потребителя или выпуска фирмы. Прирост полезности или выпуска считают внешними выгодами данного вида деятельности.

Выделяют следующие виды положительных внешних эффектов.

Предельная индивидуальная полезность (MPB) товара – предельная полезность, получаемая лицом, купившим дополнительную единицу товара. Чтобы извлечь связанную с данным объемом товара предельную общественную полезность, необходимо к предельной индивидуальной полезности прибавить предельную полезность, извлекаемую третьими лицами.

Предельная внешняя полезность (MEB) товара это предельный выигрыш, извлекаемый третьими лицами, не являющимися ни продавцами, ни покупателями данного товара.

Совокупная внешняя полезность (TEB) равна произведению полезности единицы товара на количество потребленных единиц.

Решение проблемы внешних эффектов состоит в достижении равенства предельных общественных издержек и предельной общественной полезности:

MSC = MSB.

Существует некоторый однозначно определяемый оптимальный объем общественного блага, обеспечивающий наибольшую эффективность использования ресурсов.

Оптимальный объем общественного блага может быть определен следующим образом:

MSB (Qs) = MC (Qs),

где MSB (Q,s) – предельная общественная выгода от потребления данного общественного блага в количестве: Qs; MC(Qs) – предельные издержки производства и обеспечения потребителей данными общественным благом в количестве Qs.

Примеры решения задач

Пример 1. Первый индивид произвел 200 ед. блага A, а второй — 240 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,25},\ U_2 = Q_{A2}^{0,25} Q_{B2}^{0,75}$$

Индивиды договорились о распределении блага А: $Q_{A1} = 120$; $Q_{A2} = 80$
Сколько блага В должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?
При какой цене блага A рынок обеспечивает оптимальное, по Парето, распределение, если $P_B = 1$?
Решение:
Условие оптимального, по Парето, распределения $MRS'_{A,B} = MRS''_{A,B}$:

$$\frac{0,5Q_{B1}}{0,25Q_{A1}} = \frac{0,25Q_{B2}}{0,75Q_{A2}} = \frac{0,25(240 - Q_{B1})}{0,75(200 - Q_{A1})} \to Q_{B1} = \frac{240Q_{A1}}{1200 - 5Q_{A1}} = 48$$

Условие равновесия потребителя:

$$\frac{0,5Q_{B1}}{0,25Q_{A1}} = \frac{0,5 \times 48}{0,25 \times 120} = \frac{P_A}{1} \to P_A = 0,8$$

Бюджет 1-го индивида: $0,8 - 120 + 48 = 144$; бюджет 2-го: $0,8 - 80 + 192 = 256$
.

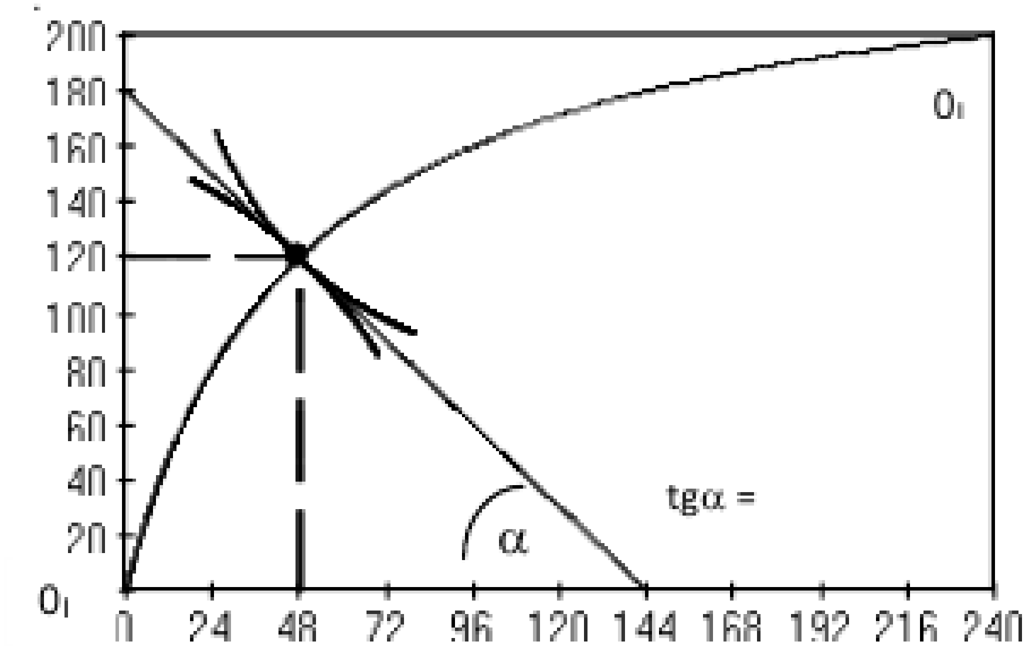


Рисунок 5. Парето-оптимальность в обмене

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
Qa1=Symbol("Qa1")
Qb1=Symbol("Qb1")
Qa2=Symbol("Qa2")
Qb2=Symbol("Qb2")
U1=Qa1**0.5*Qb1**0.25
U2=Qa2**0.25*Qb2**0.75
MRS1=0.5*Qb1/(0.25*120)
MRS2=0.25*(240-Qb1)/(0.75*80)


qb1=solve(MRS1-MRS2,Qb1)

print(qb1)
Pa=0.5*48/0.25/120
print(Pa)
print(0.8*120+48)
print(0.8*80+192)
```

```
[48.0000000000000]
0.8
144.0
256.0
```

Пример 2. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 800 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}$. Определите оптимальные объемы производства каждого блага.
Рассмотрим два способа решения.
Первый способ:

$$MRS_{B,A} = \frac{MU_B}{MU_A} = \frac{2Q_A}{Q_B}$$

$$MRPRT_{BA} = \left(Q_A = 800 - Q_B^2\right)' = [-2Q_B] = 2Q_B$$

$$MRS_{BA} = MRPT_{BA}$$

$$Q_A = 400$$

$$Q_B = 20$$

Второй способ:
Производственные возможности выступают в роли бюджетного ограничения при максимизации функции полезности:

$$\Phi = \boldsymbol{Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}} - \lambda\left(\boldsymbol{Q_A} - 800 + \boldsymbol{Q_B^2}\right) \to \boldsymbol{max}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{Q_A}} = \dfrac{0,25\boldsymbol{Q_B^{0,5}}}{\boldsymbol{Q_A^{0,75}}} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{Q_B}} = \dfrac{0,5\boldsymbol{Q_A^{0,75}}}{\boldsymbol{Q_B^{0,5}}} - 2\lambda \boldsymbol{Q_B} = 0 \end{cases} \to \boldsymbol{Q_A} = 400;\ \boldsymbol{Q_B} = 20$$

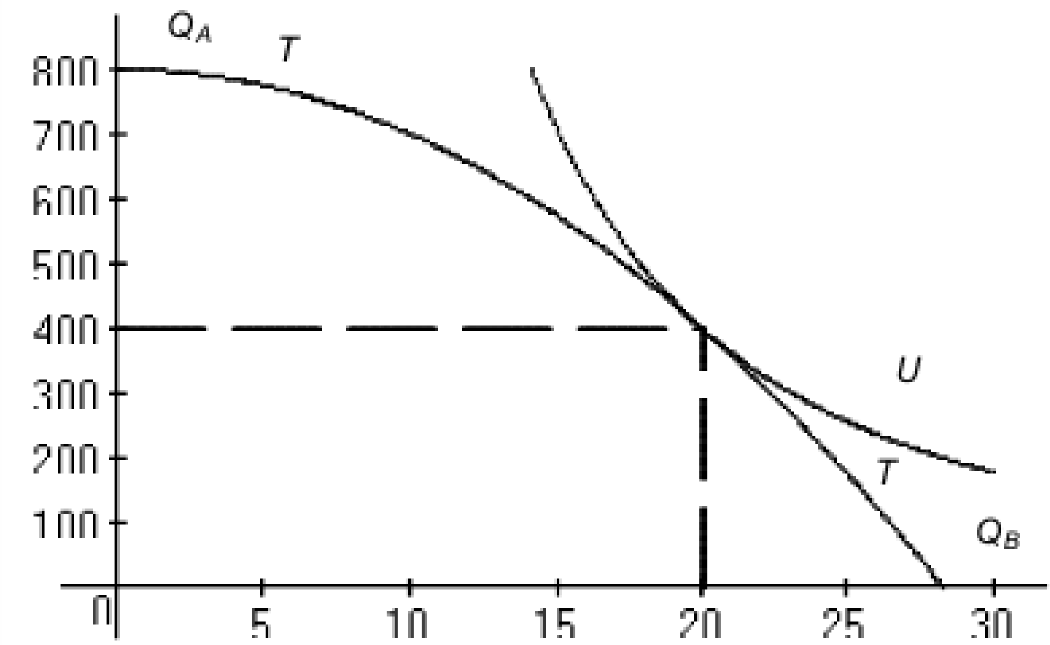


Рисунок 6. Отимум в производстве и обмене

Решение на Python.

```
#2
import numpy as np
from sympy import *
Qa=Symbol("Qa")
Qb=Symbol("Qb")
QB=Symbol("QB")
U=Qa**0.25*Qb**0.5
Mb=diff(Qa**0.25*Qb**0.5,Qb)
Ma=diff(Qa**0.25*Qb**0.5,Qa)
print(Ma)
print(Mb)
MRS=Mb/Ma
print(MRS)
MRPT=diff(Qa-(800-Qb**2),Qb)
print(MRPT)
s=solve(MRS-MRPT,[Qa,Qb])
print(s)
qb=solve(2*(800-Qb**2)/Qb-2*Qb,Qb)
Q=solve(Qb**2-(800-Qb**2),Qb)
print('положительное из Qb=',Q)
Qa1=20**2
print('Qa =',Qa1)
```

```
0.25*Qa**(-0.75)*Qb**0.5
0.5*Qa**0.25*Qb**(-0.5)
2.0*Qa**1.0*Qb**(-1.0)
2*Qb
[{Qa: Qb**2}]
положительное из Qb= [-20, 20]
Qa = 400
```

Пример 3. Опрос показал, что готовность жильцов трех домов платить за озеленение их двора выражается следующими функциями $P_1 = 80 - Q$; $P_2 = 60 - Q$; $P_3 = 40 - Q$, где P_i — максимальная сумма денег, которую согласны заплатить жильцы i-го дома за очередное дерево. Общие затраты на озеленение определяются по формуле $TC = 10 + 2Q + 0{,}5Q^2$. Определите Парето-оптимальное число деревьев во дворе дома.

Решение:
Оптимальное количество деревьев определяется точкой пересечения линий предельных затрат $\boldsymbol{MC} = 2 + \boldsymbol{Q}$ и предельной общественной полезности. Последняя образуется в результате вертикального сложения графиков цен спроса жителей трех домов:

$$\boldsymbol{P} = \begin{cases} 180 - 3Q, 0 < Q \le 40 \\ 140 - 2Q, 40 < Q \le 60 \\ 80 - Q, 60 < Q \le 80 \end{cases}$$

Координаты точки пересечения определяются из равенства: $2 + \boldsymbol{Q} = 140 - 2\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{Q} = 46.$ Приравнивание к другим участкам кривой общественной полезности дает решение, не совпадающее с соответствующими интервалами выпуска:

$$2 + \boldsymbol{Q} = 180 - 3\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{Q} = 44,5;\ 2 + \boldsymbol{Q} = 80 - \boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{Q} = 39$$

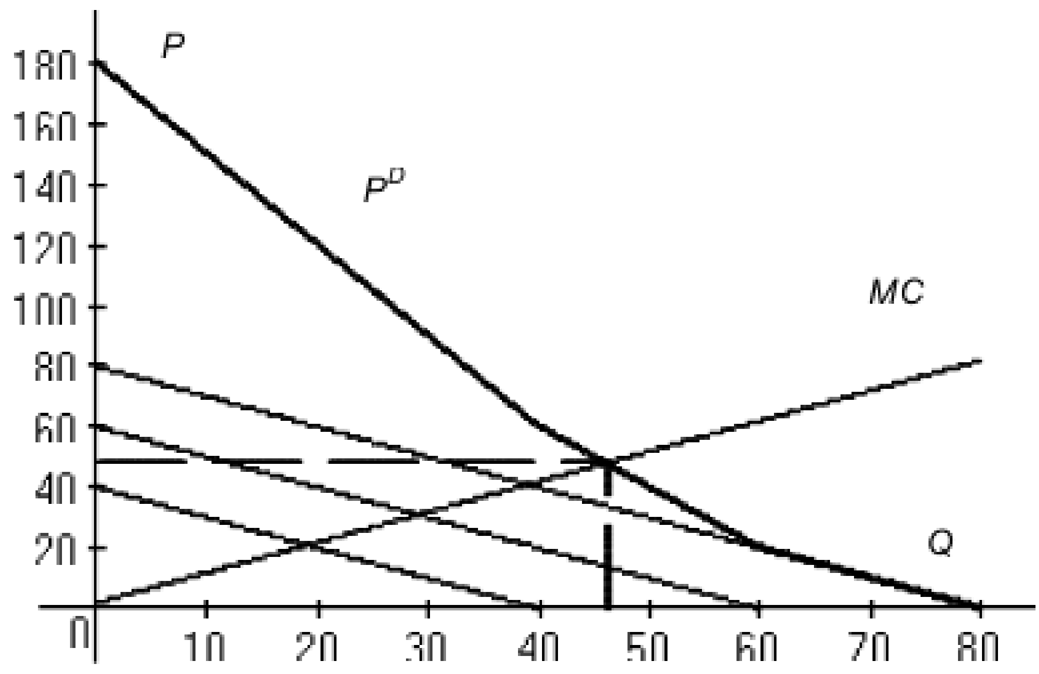
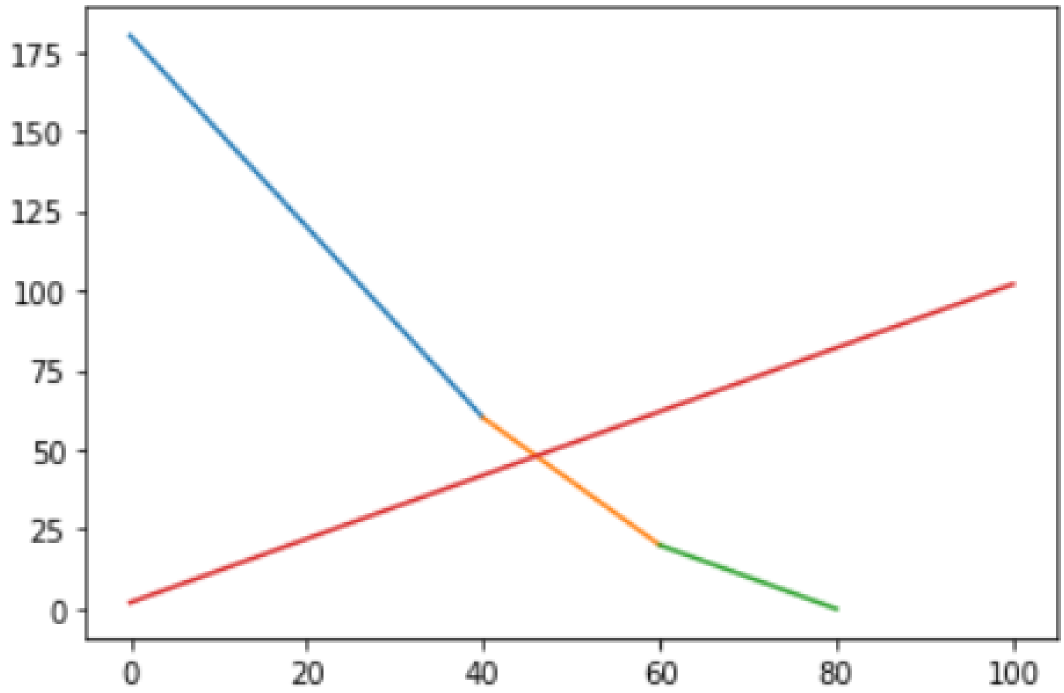


Рисунок 7. Оптимальный объем выпуска общественного блага

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
x1=np.linspace(0,40,50)
x2=np.linspace(40,60,50)
x3=np.linspace(60,80,50)
x4=np.linspace(0,100,50)
y1=180-3*x1
y2=140-2*x2
y3=80-x3
y4=x4+2
plt.plot(x1,y1)
plt.plot(x2,y2)
plt.plot(x3,y3)
plt.plot(x4,y4)
plt.show
q=symbols('q')
MC=2+q
P=140-2*q
print('Ответ: q = ',solve(MC-P,q)[0])
```

```
Ответ: q =  46
```



Пример 4. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $\boldsymbol{P} = 60 - 0,4\boldsymbol{N}$, где P — размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид:

$$\boldsymbol{MU} = 80 - 0,4\boldsymbol{N}.$$

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$$\boldsymbol{TC} = 20\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^2.$$

а) Определить величину внешнего эффекта.

б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.

в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

Решение:

а) Величина внешнего эффекта $(80 - 0,4\boldsymbol{N}) - (60 - 0,4\boldsymbol{N}) = 20$.

б) Из равенства $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{MC}$ число студентов будет

$$60 - 0,4\boldsymbol{N} = 20 + 2\boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N} = 16$$

Из равенства $\boldsymbol{MU} = \boldsymbol{MC}$ следует, что

$$80 - 0,4\boldsymbol{N} = 20 + 2\boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N} = 25$$

$$(60 - 0,4 \cdot 25) = 50$$

$$(20 + 2 \cdot 25) = 70$$

Следовательно, величина дотации будет 20 ден. ед.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
import math
p=Symbol("p")
N=Symbol("N")
p=60-0.4*N
MU=80-0.4*N
TC=20*N+N**2
MC=diff(TC,N)
print(MC)
R=MU-p
R
print('а) Величина внешнего эффекта =', MU-p)
N1=solve(p-MC,N)
N1
print('из равенства p=MC число студентов будет =',N1[0].n(2),'-1')
# MU=MC
N2=solve(MC-MU,N)
print('N = ',N2[0].n(2),',',p.subs({N:25}),',',MU.subs({N:25}))
print('Ответ: величина дотации будет = 70 -50 = ', (MU-p).subs({N:25}))
```

```
2*N + 20
а) Величина внешнего эффекта = 20
из равенства p=MC число студентов будет = 17. -1
N =  25. , 50.0000000000000 , 70.0000000000000
Ответ: величина дотации будет = 70 -50 =  20
```

Пример 5. Спрос на напитки в жестяных банках в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^D = 200 - 2P$. Общие затраты всех фирм на выпуск напитков соответствуют функции $TC_n = 2Q + 0,25Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных напитков выражается функцией $TC_m = 0,2Q^2$. Насколько выпуск напитков превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

Решение:

$$Q^D = 200 - 2P$$
$$P = 100 - 0,5Q$$

$$TC_n = 2Q + 0,25Q^2$$
$$MC = TC' = 2 + 0,5Q$$
$$MC = P$$
$$2 + 0,5Q = 100 - 0,5Q$$
$$Q_n = 98$$

$$TC = TC_n + TC_m = 2Q + 0,25Q^2 + 0,2Q^2 = 2Q + 0,45Q^2$$
$$MC = TC' = 2 + 0,9Q$$
$$MC = P$$
$$2 + 0,9Q = 100 - 0,5Q$$
$$1,4Q_{\Sigma} = 98$$
$$Q_{\Sigma} = 70$$

�$Q = Q_{\Sigma} = -Q_n = 98 - 70 = 28$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
p=Symbol("p")
q=Symbol("q")
Q=200-2*p
p=solve(Q-q,p)
print(p[0])
TCn=2*q+0.25*q**2
TCm=0.2*q**2
MCn=diff(TCn,q)
print(MCn)
F=solve(-q/2 + 100-(0.5*q + 2),q)
TC=TCn+TCm
print(F[0].n(2))
MC=diff(TC,q)
print(MC)
f=solve(0.9*q + 2-(-q/2 + 100),q)
print(f[0].n(2))
print('Ответ: ',98-70)
```

```
100 - q/2
0.5*q + 2
98.
0.9*q + 2
70.
Ответ:   28
```

Пример 6. На двух взаимосвязанных рынках спрос и предложение отображаются следующими функциями:

$Q_A^D = 36 - 3P_A + 2P_B$; $Q_A^S = -10 + 2P_A - P_B$;

$Q_B^D = 40 - 2P_B + P_A$; $Q_B^S = -5 + P_B - 0,5P_A$.

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

Решение:

Уравнение линии цен частичного равновесия на рынке блага A:

$$36 - 3P_A + 2P_B = -10 + 2P_A - P_B.$$

Уравнение линии цен частичного равновесия на рынке блага B:

$$40 - 2P_B + P_A = -5 + P_B - 0,5P_A.$$

Общее равновесие достигается при:

$$\Delta P_A = 26$$

$$\Delta P_B = 28$$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
a=Symbol("a")
b=Symbol("b")
Da=36-3*a+2*b
Sa=-10+2*a-b
Db=40-2*b+a
Sb=-5+b-0.5*a
print(solve([Da-Sa,Db-Sb],[a,b]))
```

```
{a: 26.0000000000000, b: 28.0000000000000}
```

Пример 7. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$Q_A^D = 100 - 4P_A$; $Q_A^S = -20 + 2P_A$;

$Q_B^D = 80 - 3P_B$; $Q_B^S = -10 + 3P_B$.

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$Q_A^D = 100 - 4P_A + 3P_B$; $Q_A^S = -20 + 2P_A - P_B$;

$Q_B^D = 80 - 3P_B + 2P_A$; $Q_B^S = -10 + 3P_B - 2P_A$.

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара A?

б) Как изменились цены товаров?

Решение:

А) $100 - 4\boldsymbol{P_A} = -20 + 2\boldsymbol{P_A}$

$80 - 3\boldsymbol{P_B} = -10 + 3\boldsymbol{P_B}$

$\boldsymbol{P_A} = 20 \qquad \boldsymbol{Q_A} = 20$

$\boldsymbol{P_B} = 15 \qquad \boldsymbol{Q_B} = 35$

$80 - 3\boldsymbol{P_B} + 2\boldsymbol{P_A} = -10 + 3\boldsymbol{P_B} - 2\boldsymbol{P_A}$

$\boldsymbol{P_A} = 54$

$\boldsymbol{P_B} = 51$

$\boldsymbol{Q_A} = 37$

$\Delta\boldsymbol{Q_A} = 17$

Б) $\Delta\boldsymbol{P_A} = 34$

$\Delta\boldsymbol{P_B} = 36$

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
a=Symbol("a")
b=Symbol("b")
Da=100-4*a
Sa=-20+2*a
Db=80-3*b
Sb=-10+3*b
Da1=100-4*a+3*b
Sa1=-20+2*a-b
Db1=80-3*b+2*a
Sb1=-10+3*b-2*a
a0=solve(Da-Sa,a)
Sa10=Sa1.subs({a:a0})
print('Pa=',a0,'Qa=',Sa10)
b0=solve(Db-Sb,b)
Sb0=Sb.subs({b:15})
print('Pb=',b0,'Qb=', Sb0)
Da1=100-4*a+3*b
Sa1=-20+2*a-b
Db1=80-3*b+2*a
Sb1=-10+3*b-2*a
print(solve([80-3*b+2*a-(-10+3*b-2*a),100-4*a+3*b-(-20+2*a-b)],[a,b]))
print(Sa1)
print('Ответ: delta(QA) = ',37-20)
print('delta(PA) = ',54-20)
print('delta(PB) = ',51-15)
```

```
Pa= [20] Qa= 2*a - b - 20
Pb= [15] Qb= 35
{a: 54, b: 51}
2*a - b - 20
Ответ: delta(QA) =  17
delta(PA) =  34
delta(PB) =  36
```

Задачи для самостоятельного решения

8.1.1. Первый индивид произвел 200 ед. блага A, а второй — 240 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,25}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,25} Q_{B2}^{0,75}$$

Индивиды договорились о распределении блага А : QA1 = 120; QA2 = 80

Сколько блага Bдолжен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага Aрынок обеспечивает оптимальное, по Парето, распределение, если $P_B = 1$?

8.1.2. Первый индивид произвел 110 ед. блага A, а второй — 100 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,25} Q_{B1}^{0,5}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,5} Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага А : QA1 = 65; QA2 = 40

Сколько блага Bдолжен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага А рынок обеспечивает оптимальное, по Парето, распределение, если $P_B = 1$?

8.1.3. Первый индивид произвел 300 ед. блага A, а второй — 220 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,5}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,5} Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага А : QA1 = 160; QA2 = 100

Сколько блага Bдолжен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага А рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если $P_B = 1$?

8.1.4. Второй индивид произвел 240 ед. блага B, а первый — 100 ед. блага A. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,75} Q_{B1}^{0,25}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,3} Q_{B2}^{0,7}$$

Индивиды договорились о распределении блага A : QA1 = 100; QA2 = 70

Сколько блага A должен получить 2-й индивид для достижения оптимального, по Паре-то, распределения благ?

При какой цене блага B рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PA = 0.8?

8.1.5. Первый индивид произвел 200 ед. блага A, а второй — 180 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,75} Q_{B1}^{0,25}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,5} Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага A : QA1 = 100; QA2 = 90

Сколько блага Bдолжен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага A рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 0.8?

8.1.6. Первый индивид произвел 1000 ед. блага A, а второй — 780 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,25} Q_{B1}^{0,5}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,5} Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага A : QA1 = 500; QA2 = 390

Сколько блага Bдолжен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага A рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 0.8?

8.1.7. Первый индивид произвел 1200 ед. блага A, а второй — 1800 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,5}Q_{B1}^{0,25}$$
$$U_2 = Q_{A2}^{0,25}Q_{B2}^{0,75}$$

Индивиды договорились о распределении блага А: QA1 = 600; QA2 = 900

Сколько блага B должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага А рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 1?

8.1.8. Первый индивид произвел 380 ед. блага A, а второй — 180 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,5}Q_{B1}^{0,5}$$
$$U_2 = Q_{A2}^{0,25}Q_{B2}^{0,75}$$

Индивиды договорились о распределении блага А : QA1 = 150; QA2 = 130

Сколько блага B должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага А рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 1?

8.1.9. Первый индивид произвел 250 ед. блага A, а второй — 190 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,75}Q_{B1}^{0,25}$$
$$U_2 = Q_{A2}^{0,5}Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага А : QA1 = 120; QA2 = 100

Сколько блага B должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага А рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 0.8?

8.1.10. Первый индивид произвел 340 ед. блага A, а второй — 240 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,75}Q_{B1}^{0,25}$$
$$U_2 = Q_{A2}^{0,5}Q_{B2}^{0,25}$$

Индивиды договорились о распределении блага A : QA1 = 180; QA2 = 110

Сколько блага B должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага A рынок обеспечивает оптимальное, по Паре-то, распределение, если PB = 1?

8.1.11. Первый индивид произвел 370 ед. блага A, а второй — 200 ед. блага B. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности:

$$U_1 = Q_{A1}^{0,25} Q_{B1}^{0,75}$$

$$U_2 = Q_{A2}^{0,5} Q_{B2}^{0,5}$$

Индивиды договорились о распределении блага A : QA1 = 160; QA2 = 125

Сколько блага B должен получить 1-й индивид для достижения оптимального, по Парето, распределения благ?

При какой цене блага A рынок обеспечивает оптимальное, по Парето, распределение, если PB = 1?

8.2.1. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 800 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.2. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 100 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,75}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.3. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 1200 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,75} Q_B^{0,25}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.4. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 600 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,5}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.5. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 1200 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.6. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 460 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,75} Q_B^{0,25}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.7. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 750 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.8. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 1500 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,2} Q_B^{0,8}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.9. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 900 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,8} Q_B^{0,2}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.10. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 200 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,5} Q_B^{0,25}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.2.11. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = 590 - Q_B^2$, а функция общественной полезности: $U = Q_A^{0,15} Q_B^{0,85}$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

8.3.1. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 60 - 0.4N$, где P — размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: MU = 80 – 0,4N

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$TC = 20N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.

б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.

в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.2. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией P = 160 – 0,4N, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: MU = 180 – 0,4N

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$TC = 60N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.3. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 100 – 0,6N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 150 – 0,6N$

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$TC = 80N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.4. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 300 – 0,3N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 200 – 0,3N$

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$TC = 190N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.5. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 660 – 0,9N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 400 – 0,9N$

Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:

$TC = 300N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.
8.3.6. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 799 - 0{,}75N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 390 - 0{,}75N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 450N + N^2$
а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.
8.3.7. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 1670 - 0{,}49N$, где P — размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 790 - 0{,}49N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 560N + N^2$
а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.
8.3.8. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 248 - 0{,}4N$, где P — размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 139 - 0{,}4N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 89N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.9. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 194 - 0{,}36N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 210 - 0{,}36N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 79N + N^2$
а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.10. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 266 - 0{,}9N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 200 - 0{,}9N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 90N + N^2$
а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.3.11. Готовность платить за обучение в вузе описывается функцией $P = 761 - 0{,}79N$, где P— размер оплаты (млн ден. ед.), а N — число готовых платить (млн чел.). Предельная внешняя выгода от образования, выраженная в деньгах, имеет вид: $MU = 305 - 0{,}79N$
Общие затраты образовательного учреждения по подготовке специалистов:
$TC = 2150N + N^2$

а) Определить величину внешнего эффекта.
б) Рассчитать число студентов, соответствующее максимуму полезности молодежи и максимуму общественной полезности.
в) Рассчитать величину платы за обучение и дотации, соответствующие максимальной общественной полезности от обучения в вузе.

8.4.1.Спрос на напитки в жестяных банках в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^D = 200 - 2P$ Общие затраты всех фирм на выпуск напитков соответствуют функции $TC_n = 2Q + 0.25Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных напитков выражается функцией $TC_m = 0.2Q^2$. Насколько выпуск напитков превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.2.Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $\boldsymbol{Q}^d = 1200 - 12\boldsymbol{P}$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $\boldsymbol{TC_n} = 5\boldsymbol{Q} + 0,15\boldsymbol{Q}^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $\boldsymbol{T}\mathrm{C}_{\boldsymbol{m}} = 0,3\boldsymbol{Q}^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет? 8.4.3. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $\boldsymbol{Q}^d = 2100 - 10\boldsymbol{P}$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $\boldsymbol{TC_n} = 3\boldsymbol{Q} + 0,35\boldsymbol{Q}^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $\boldsymbol{T}\mathrm{C}_{\boldsymbol{m}} = 0,4\boldsymbol{Q}^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.4. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $\boldsymbol{Q}^d = 1100 - 10\boldsymbol{P}$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $\boldsymbol{TC_n} = 4\boldsymbol{Q} + 0,05\boldsymbol{Q}^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $\boldsymbol{T}\mathrm{C}_{\boldsymbol{m}} = 0,9\boldsymbol{Q}^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.5. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 3000 - 11P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 8Q + 0,95Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.6. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 4400 - 7P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 10Q + 0,85Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 3Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.7. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 6400 - 7P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 7Q + 0,85Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 3Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.8. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 6400 - 7P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 7Q + 0,85Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 3Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.9. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 1300 - 4P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 22Q + 1,5Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 9Q^2$.

Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.10. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 1320 - 2P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 21Q + 1{,}5Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 9Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.4.11. Спрос на закуски в полиэтиленовых пакетах в условиях совершенной конкуренции отображается функцией $Q^d = 1420 - 2P$ Общие затраты всех фирм на выпуск закусок соответствуют функции $TC_n = 21Q + 1{,}5Q^2$, а зависимость затрат на уборку городского мусора от количества купленных закусок выражается функцией $TC_m = 4Q^2$. Насколько выпуск закусок превышает общественный оптимум, когда расходы на уборку мусора финансирует муниципалитет?

8.5.1. На двух взаимосвязанных рынках спрос и предложение отображаются следующими функциями:

$$Q_A^D = 36 - 3P_A + 2P_B$$
$$Q_B^D = 40 - 2P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -10 + 2P_A - P_B$$
$$Q_B^S = -5 + P_B - 0{,}5P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.2. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 35 - 2P_A + 3P_B$$
$$Q_B^D = 32 - P_B + 2P_A$$
$$Q_A^S = -11 + P_A + 2P_B$$
$$Q_B^S = -7 + P_B - 0{,}7P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.3. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 36 - 3P_A + P_B$$
$$Q_B^D = 38 - P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -8 + P_A + 2P_B$$
$$Q_B^S = -10 + P_B - 0,4P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.4. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 30 - P_A + 5P_B$$
$$Q_B^D = 32 - 11P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -8 + P_A + 12P_B$$
$$Q_B^S = -10 + P_B - 1,4P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.5. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 24 - P_A + 2P_B$$
$$Q_B^D = 32 - 8P_B + 2P_A$$
$$Q_A^S = -13 + P_A + 10P_B$$
$$Q_B^S = -11 + P_B - 1,4P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие? 8.5.6. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 20 - P_A + 2P_B$$
$$Q_B^D = 34 - 9P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -13 + 2P_A + P_B$$
$$Q_B^S = -14 + P_B - 1,4P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие? 8.5.7. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 19 - P_A + 2P_B$$
$$Q_B^D = 43 - 4P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -13 + 2P_A + 2P_B$$
$$Q_B^S = -14 + P_B - 1,9P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.8. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 19 - P_A + 2P_B$$
$$Q_B^D = 45 - 12P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -13 + 2P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^S = -9 + P_B - 1,9P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.9. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 14 - 2P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^D = 44 - 7P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -10 + 2,1P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^S = -12 + P_B - 1,9P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.5.10. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 10 - 2P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^D = 44,1 - 7P_B + P_A$$
$$Q_A^S = -10,2 + 2,1P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^S = -12,3 + P_B - 1,9P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие? 8.5.11. На двух связанных рынках предложение и спрос отображаются функциями:

$$Q_A^D = 10,1 - 2P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^D = 44,5 - 7P_B + P_A$$

$$Q_A^S = -10,5 + 2,1P_A + 1,2P_B$$
$$Q_B^S = -12,6 + P_B - 1,9P_A$$

При каких ценах на обоих рынках одновременно устанавливается равновесие?

8.6.1. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 100 - 4P_A$$
$$Q^D{}_B = 80 - 3P_B$$
$$Q^S{}_A = -20 + 2P_A$$
$$Q^S{}_B = -10 + 3P_B$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 100 - 4P_A + 3P_B$$
$$Q^D{}_B = 80 - 3P_B + 2P_A$$
$$Q^S{}_A = -20 + 2P_A - P_B$$
$$Q^S{}_B = -10 + 3P_B - 2P_A$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара A?

б) Как изменились цены товаров?

7.1. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 100 - 5P_A$$
$$Q^D{}_B = 81 - 4P_B$$
$$Q^S{}_A = -25 + 3P_A$$
$$Q^D{}_A = -12 - 2P_B$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 100 - 5P_A - 2P_B$$
$$Q^D{}_B = 81 - 4P_B + 3P_A$$
$$Q^S{}_A = -25 + 3P_A - P_B$$
$$Q^D{}_A = -12 - 2P_B - 2.5P_A$$

Определить:
а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?
б) Как изменились цены товаров?
8.6.2. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{A}} = 120 - 6\boldsymbol{P_A}$$

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{B}} = 85 - 8\boldsymbol{P_B}$$

$$\boldsymbol{Q^S}_{\boldsymbol{A}} = -15 + \boldsymbol{P_A}$$

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{A}} = -10 - \boldsymbol{P_B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{A}} = 120 - 6\boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{B}} = 85 - 8\boldsymbol{P_B} + \boldsymbol{P_A}$$

$$\boldsymbol{Q^S}_{\boldsymbol{A}} = -15 + \boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$

$$\boldsymbol{Q^D}_{\boldsymbol{A}} = -10 - \boldsymbol{P_B} - 3\boldsymbol{P_A}$$

Определить:
а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?
б) Как изменились цены товаров? 8.6.3. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 130 - 7P_A$$

$$Q^D{}_B = 90 - 10P_B$$

$$Q^S{}_A = -5 + 2P_A$$

$$Q^D{}_A = -13 - 2P_B$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 130 - 7\mathrm{P_A} - 2\mathrm{P_B}$$

$$\mathrm{Q^D{}_B} = 90 - 10\mathrm{P_B} + 2\mathrm{P_A}$$

$$\mathrm{Q^S{}_A} = -5 + 2\mathrm{P_A} - \mathrm{P_B}$$

$$\mathrm{Q^D{}_A} = -13 - 2\mathrm{P_B} - 3.5\mathrm{P_A}$$

Определить:
а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?
б) Как изменились цены товаров? 8.6.4. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^{D}{}_{A} = 150 - 10P_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{B} = 190 - 10\boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{S}{}_{A} = -3 + 2\boldsymbol{P}_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = -15 - \boldsymbol{P}_{B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = 150 - 10\boldsymbol{P}_{A} - \boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{B} = 190 - 10\boldsymbol{P}_{B} + 2\boldsymbol{P}_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{S}{}_{A} = -3 + 2\boldsymbol{P}_{A} - \boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = -15 - \boldsymbol{P}_{B} - 5\boldsymbol{P}_{A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.5. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = 120 - 3\boldsymbol{P}_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{B} = 187 - 11\boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{S}{}_{A} = -4 + 2\boldsymbol{P}_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = -13 - 3\boldsymbol{P}_{B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = 120 - 3\boldsymbol{P}_{A} - 3\boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{B} = 187 - 11\boldsymbol{P}_{B} + 2\boldsymbol{P}_{A}$$
$$\boldsymbol{Q}^{S}{}_{A} = -4 + 2\boldsymbol{P}_{A} - \boldsymbol{P}_{B}$$
$$\boldsymbol{Q}^{D}{}_{A} = -13 - 3\boldsymbol{P}_{B} + 1.5\boldsymbol{P}_{A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.6. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 123 - 10\boldsymbol{P_A}$$

$$Q^D{}_B = 181 - 10\boldsymbol{P_B}$$

$$Q^S{}_A = -1 + \boldsymbol{P_A}$$

$$Q^D{}_A = -16 - \boldsymbol{P_B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 123 - 10\boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$

$$Q^D{}_B = 181 - 10\boldsymbol{P_B} + \boldsymbol{P_A}$$

$$Q^S{}_A = -1 + \boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$

$$Q^D{}_A = -16 - \boldsymbol{P_B} - 5\boldsymbol{P_A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.7. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 133 - 10\boldsymbol{P_A}$$

$$Q^D{}_B = 181 - 11\boldsymbol{P_B}$$

$$Q^S{}_A = -1 + \boldsymbol{P_A}$$

$$Q^D{}_A = -16 - 3\boldsymbol{P_B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 133 - 10\boldsymbol{P_A} - 3\boldsymbol{P_B}$$

$$Q^D{}_B = 181 - 11\boldsymbol{P_B} + \boldsymbol{P_A}$$

$$Q^S{}_A = -1 + \boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$

$$Q^D{}_A = -16 - 3\boldsymbol{P_B} - 5\boldsymbol{P_A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.8. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 133 - 17\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^D{}_B = 176 - 11\boldsymbol{P_B}$$
$$Q^S{}_A = -1 + 2\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^D{}_A = -16 - 5\boldsymbol{P_B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 133 - 17\boldsymbol{P_A} - 5\boldsymbol{P_B}$$
$$Q^D{}_B = 176 - 11\boldsymbol{P_B} + 2\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^S{}_A = -1 + 2\boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$
$$Q^D{}_A = -16 - 5\boldsymbol{P_B} - 8.5\boldsymbol{P_A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.9. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 103 - 10\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^D{}_B = 180 - 3\boldsymbol{P_B}$$
$$Q^S{}_A = -1 + 5\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^D{}_A = -10 - 6\boldsymbol{P_B}$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 103 - 10\boldsymbol{P_A} - 6\boldsymbol{P_B}$$
$$Q^D{}_B = 180 - 3\boldsymbol{P_B} + 5\boldsymbol{P_A}$$
$$Q^S{}_A = -1 + 5\boldsymbol{P_A} - \boldsymbol{P_B}$$
$$Q^D{}_A = -10 - 6\boldsymbol{P_B} - 5\boldsymbol{P_A}$$

Определить:

а) На сколько единиц изменился объем продаж товара В?

б) Как изменились цены товаров?

8.6.10. При существовании двух изолированных рынков спрос на них отображался соответственно:

$$Q^D{}_A = 100 - 15P_A$$
$$Q^D{}_B = 185 - 5P_B$$
$$Q^S{}_A = -5 + 5P_A$$
$$Q^D{}_A = -10 - 2P_B$$

Когда оба товара стали продаваться в одном и том же месте, то функции спроса и предложения приобрели следующий вид:

$$Q^D{}_A = 100 - 15P_A - 2P_B$$
$$Q^D{}_B = 185 - 5P_B + 5P_A$$
$$Q^S{}_A = -5 + 5P_A - P_B$$
$$Q^D{}_A = -10 - 2P_B - 7.5P_A$$

Определить:
а) На сколько единиц изменился объем продаж товара B?
б) Как изменились цены товаров?

Контрольная работа

1. Кривая производственных возможностей общества описывается уравнением: X2 + Y2 = 12500. Функция полезности общества представлена в виде: U = 4X + 2Y. Определите оптимальный объем производства товаров.
2. В хозяйстве, располагающем 24 единицами производственного фактора F продукция Q_1 производится по технологии $Q_1 = 4\sqrt{F}$, а продукция Q_2 - по технологии Q_2 = 2F + 3. Вывести уравнение кривой производственных возможностей.
3. Общество состоит из двух индивидуумов: A, B. Функции индивидуального спроса на некоторое общественное благо имеют вид: Q_A = 100 – P, Q_B = 70 – P. Предельные затраты на производство общественного блага постоянны (не зависят от объема производства) и равны 80 ден. ед. на каждую единицу. Определить Парето-оптимальный объем производства общественного блага.
4. Общество состоит из трех индивидуумов: A, B и C. Функции индивидуального спроса на некоторое общественное благо имеют вид:
Q_A = 60 – P,
Q_B = 40 – P,
Q_C = 20 – P.

Предельные затраты на производство общественного блага постоянны (не зависят от объема производства) и равны 120 ден. ед. на каждую единицу. Определить Парето-оптимальный объем производства общественного блага.

5. Кривая производственных возможностей описывается уравнением $Q_A = \sqrt{450 - Q_B^2}$, а функция общественной полезности U = $Q_A Q_B$. Определить оптимальный объем производства товара А.

Раздел 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЛОГОВЫХ ПОСТУПЛЕНИЙ В БЮДЖЕТ. КРИВАЯ ЛЭФФЕРА

Теоретический материал

Рассмотрим ситуацию, когда с единицы произведенной продукции фирма платит акциз в размере t.

В этом случае его чистая прибыль фирмы (прибыль за вычетом акциза) будет определяться по формуле

$\tilde{\Pi}(Q) = \Pi(Q) - tQ = p(Q)Q - TC(Q) - tQ.$

Максимальная прибыль в данном случае достигается, если

$MC(Q) = TC'(Q) = p(Q) + p'(Q)Q - t$.

То есть введение акциза снижает уровень предельных издержек, при которых достигается максимальная прибыль. Так как при оптимальном объеме выпускаемой продукции типичная функция издержек является выпуклой вниз ($TC''(Q) > 0$), предельные издержки возрастают и, следовательно, введение акциза в общем случае ведет к снижению выпуска.

Пусть $Q^*(t)$ - зависимость оптимального выпуска от ставки акциза. В этом случае налоговая выручка от взимания акциза будет зависеть от t и вычисляться следующим образом:

$T(t) = t \cdot Q^*(t)$.

График функции $T(t)$ называется кривой Лэффера.

С ростом ставок акциза оптимальный объем и чистая прибыль снижаются. При некоторой ставке t_0, которую будем называть барьерной ставкой акциза прибыль станет равна 0, фирма свернет производство и налоговая выручка будет равна 0, как и в случае $t = 0$. При небольших акцизах прибыльное производство будет функционировать, и величина налоговой выручки будет положительной. Итак, функция $T(t)$ обладает следующими свойствами:

$T(0) = T(t_0) = 0.$

$T(t) > 0$ при $t \in (0; t_0)$.

Данные свойства дают основания говорить о том, что существует такая ставка акциза $t^* \in (0; t_0)$, при которой налоговая выручка будет максимальна, поскольку функция $T(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Роля. Ставка t^* называется оптимальной ставкой акциза. Типичный вид кривой Лэффера показан на рисунке 7.

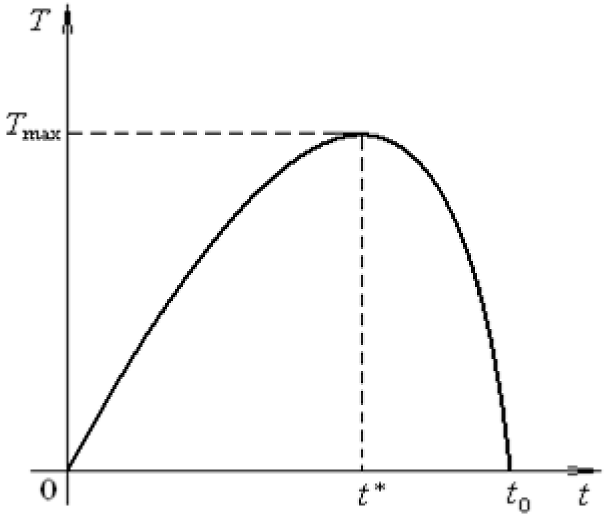


Рисунок 7 – Кривая Лэффера

Если правительство стремится максимизировать налоговую выручку, то оно должно установить ставку акциза в размере t^*. Таким образом возникает следующая задача на нахождение оптимальной ставки акциза при

заданной функции издержек:

$$\begin{cases} T = tQ \to \max, \\ \tilde{\Pi}(Q) = p(Q)Y - TC(Q) - tQ \to \max, \\ \tilde{\Pi}(Q) \geq 0. \end{cases}$$

Примеры решения задач

Известны функция цены $p(Q)=14-2Q$ и функция издержек $TC(Q)=0,2Q^2+3Q+2$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

Решение.

Выпишем функцию чистой прибыли:

$\tilde{\Pi}(Q)=p(Q)Q-TC(Q)-tQ=-2,2Q^2+(11-t)Q-2.$

Из необходимого условия локального экстремума получаем зависимость оптимального объема производства от ставки акциза:

$$\tilde{\Pi}'(Q)=-4,4Q+(11-t)=0 \quad \Rightarrow \quad Q(t)=\frac{11-t}{4,4}.$$

Составим функцию налоговой выручки:

$$T(t)=tQ(t)=\frac{11t-t^2}{4,4}.$$

Полученная квадратичная функция имеет точку максимума

$t^*=5,5$,

которая и является искомой оптимальной ставкой акциза.

Подставляя полученное значение оптимальной ставки акциза в функцию налоговой выручки получим максимальное значение этой функции:

$$T_{\max}=T(5,5)=\frac{11\cdot 5,5-5,5^2}{4,4}=6,875.$$

При этом оптимальный объем производства будет равен:

$$Q^*=Q(5,5)=\frac{11-5,5}{4,4}=1,25,$$

а максимальная прибыль:

$\tilde{\Pi}_{\max}=\tilde{\Pi}(1,25)=-2,2\cdot 1,25^2+(11-5,5)\cdot 1,25-2=1,4375.$

Наконец, найдем барьерную ставку акциза. Для этого подставим $Q(t)=\dfrac{11-t}{4,4}$ в функцию чистой прибыли и приравняем полученной выражение к нулю:

$$\tilde{\Pi}(Q) = -2,2\left(\frac{11-t}{4,4}\right)^2 + (11-t)\frac{11-t}{4,4} - 2 = 2,2\left(\frac{11-t}{4,4}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{11-t}{4,4}\right)^2 = \frac{2}{2,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{11-t}{4,4} = \pm\sqrt{\frac{2}{2,2}} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} t_1 &= 6,80 \\ t_2 &= 15,20 \end{aligned}\right.$$

Заметим, что при $t_2 = 15,20$ оптимальный объем производства будет отрицательным, следовательно, $t_0 = 6,80$.

Решение на Python.

```
import numpy as np
from sympy import *
Q, t=symbols('Q t')
P=14-2*Q
TC=0.2*Q**2+3*Q+2
G=P*Q-TC-Q*t
Q0=solve(diff(G,Q),Q)[0]
print(Q0.n(4))
T=t*Q0
t0=solve(diff(T,t),t)
print(t0[0].n(4))
T0=T.subs({t:t0[0]})
print(T0.n(4))
Q1=Q0.subs({t:t0[0]})
print(Q1.n(4))
P1=P.subs({Q:Q1})
G1=G.subs({P:P1,Q:Q1,t:t0[0]})
print(G1.n(4))
h=solve(G.subs({Q:Q0}),t)
h1=h[0]
h2=h[1]
if Q0.subs({t:h1})<0:
    print('Ответ:  ',h2.n(4))
else:
    print('Ответ: ',h1.n(4))
```

```
2.5 - 0.2273*t
5.500
6.875
1.250
1.438
Ответ:  6.805
```

Задачи для самостоятельного решения

9.1.1. Известны функция цены $p(Q)=13-2Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+2$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.2. Известны функция цены $p(Q)=13-3Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+3$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.3. Известны функция цены $p(Q)=13-4Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+4$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.4. Известны функция цены $p(Q)=13-5Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+5$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.5. Известны функция цены $p(Q)=3-2Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+6Q+2$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.6. Известны функция цены $p(Q)=13-7Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+7$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.7. Известны функция цены $p(Q)=13-8Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+8$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.8. Известны функция цены $p(Q)=13-9Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+9$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.9. Известны функция цены $p(Q)=13-10Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.2Q+3Q+10$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

9.1.10. Известны функция цены $p(Q)=15-9Q$ и функция издержек $TC(Q)=0.8Q+3Q+11$. Найдите оптимальный ставку акциза и максимальную налоговую выручку. Чему при этом будет равна чистая прибыль и оптимальный объем производства? Найдите барьерную ставку акциза.

Контрольная работа

1. Функции спроса и предложения на рынке некоторого нормального блага заданы соответственно: $PD(Q) = 50 – 0{,}5Q$, $PD(Q) = Q + 20$. Органы государственной власти и управления вводят для продавцов акцизный (потоварный) налог в размере 7 руб. ($t = 7$) за каждую единицу реализуемого блага. Рассчитать изменение общего объема продаж (выручки) в стоимостном выражении после введения налога.

2. Функции спроса и предложения на рынке некоторого нормального блага заданы соответственно: $PD(Q) = 40 – 0{,}2Q$, $PD(Q) = Q + 15$. Органы государственной власти и управления вводят для продавцов акцизный (потоварный) налог в размере 4 руб. ($t = 4$) за каждую единицу реализуемого блага. Определить какова сумма собранного акцизного налога (Т).

3. Функции спроса и предложения на рынке некоторого нормального блага заданы соответственно: $PD(Q) = 60 – 0{,}5Q$, $PD(Q) = Q + 30$. Органы государственной власти и управления вводят для продавцов

акцизный (потоварный) налог в размере 5 руб. (t = 5) за каждую единицу реализуемого блага. Определить какая сумма акцизного налога отнесена на продавцов.

4. Функции спроса и предложения на рынке некоторого нормального блага заданы соответственно: $PD(Q) = 60 - 0{,}5Q$, $PD(Q) = Q + 30$. Органы государственной власти и управления вводят для продавцов акцизный (потоварный) налог в размере 5 руб. (t = 5) за каждую единицу реализуемого блага. Определить какая сумма акцизного налога отнесена на покупателей.

5. Функции спроса и предложения на рынке некоторого нормального блага заданы соответственно: $PD(Q) = 55 - 0{,}3Q$, $PS(Q) = Q + 10$. Органы государственной власти и управления вводят для продавцов акцизный (потоварный) налог в размере 7 руб. (t = 7) за каждую единицу реализуемого блага. Рассчитать изменение общего объема продаж (выручки) в стоимостном выражении после введения налога. Определить размер избыточного налогового бремени (невосполнимых социальных потерь) от введения акцизного налога.

Раздел 10. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Задачи на суммарные расходы и стоимости (алгебра матриц, системы линейных уравнений)

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Здесь x1, x2, …, xn – неизвестные величины, aij (i = 1,2, …, m; j =1, 2, …, n) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), b1, b2, …, bm –числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел x1, x2, …, xn, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.
Система, имеющая решение, называется совместной.
Если система имеет только одно решение, то она называется определенной. Система, имеющая более чем одно решение, называется неопределенной (совместной и неопределенной).
Если система не имеет решений, то она называется несовместной.
Система, у которой все свободные члены равны нулю (b1 = b2 =…= bn = 0), называется однородной. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.
Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных (m=n), то система называется квадратной.
Две системы, множества решений которых совпадают, называются эквивалентными или равносильными (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).
Две несовместные системы считаются эквивалентными.
Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

Примеры решения задач

Пример 1. Предприятие выпускает ежесуточно пять видов продукции. Показатели процесса производства приведены в таблице:

Вид изделия	Число изделий	Расход сырья, (кг/изд.)	Норма времени из-готовления (ч/изд.)	Цена изделия, ден.ед/изд.
1	30	5	7	45
2	60	3	10	20
3	40	7	8	50
4	80	2	15	25
5	50	4	8	30

Требуется определить:
суммарный ежесуточный расход сырья R;
общие затраты рабочего времени T;
суммарная стоимость выпускаемой продукции P.
Решение:
Решение на Python:
Чтобы получить данные производственного цикла (числа выпускаемых изделий, расхода сырья, затрат времени, цен) по всем пяти предприятиям нужно данные таблицы записать в виде векторов:
q – вектор числа изделий;
r – вектор расхода сырья;
t – вектор затрат времени;
p – вектор цен.

```
''' Формируем векторы
    (матрицы-столбцы) '''
q = Matrix([30,60,40,80,50])
r = Matrix([5,3,7,2,4])
t = Matrix([7,10,8,15,8])
p = Matrix([45,20,50,25,30])
```

Чтобы получить ежесуточный расход сырья, нужно по каждому виду изделия умножить число изделий на расход сырья, и затем полученные произведения сложить. Такая операция (сумма произведений координат) реализуется скалярным произведением векторов $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}$. Аналогично вычисляются и другие требуемые величины: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}$.
В библиотеке sympy для вычисления скалярного произведения вектора a на вектор b нужно матрицу-строку a умножить на матрицу-столбец b.

```
''' Транспонируем q для
    получения матрицы-строки '''
R = q.T*r
R
```

$\begin{bmatrix} 970 \end{bmatrix}$

```
T = q.T*t
T
```

$\begin{bmatrix} 2730 \end{bmatrix}$

```
P = q.T*p
P
```

$\begin{bmatrix} 8050 \end{bmatrix}$

Ответ: R = 570 кг; T = 2730 ч; P = 8050 ден.ед.

Пример 2. Затраты на рекламу в месяц не должны превышать 10 000 денежных единиц (д.е). Минута радиорекламы стоит 5 д.е., а телерекламы 90 д.е. Фирма намерена использовать радиорекламу в три раза чаще чем телерекламу. Практика показывает, что 1 минута телерекламы обеспечивает объем продаж в 30 раз больший чем 1 минута радиорекламы. Задача определить такое распределение средств между двумя упомянутыми видами рекламы при котором объем продаж фирмы будет максимальным.
Сначала выберем переменные, а именно месячный объем в минутах на телерекламу — x1, а на радиорекламу — x2. Теперь не трудно составить следующую задачу линейного программирования: $z = 30x_1 + x_2$ – увеличение продаж от рекламы, максимизируемая целевая функция, при условиях $\begin{cases} 90x_1 + 5x_2 \le 10000, \\ x_2 = 3x_1, \quad x_2 \ge 0, \quad x_1 \ge 0. \end{cases}$

Решение на Python.

```
import scipy
from scipy.optimize import linprog
c = [-30,-1]
b_ub = [10000]
A_ub = [[90,5]]
A_eq = [[3,-1]]
b_eq = [0]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq,b_eq))
```

```
     con: array([-3.33443495e-10])
     fun: -3142.857142329627
 message: 'Optimization terminated successfully.
     nit: 5
   slack: array([1.67906546e-06])
  status: 0
 success: True
       x: array([ 95.23809522, 285.71428567])
```

Список c = [-30,-1] содержит коэффициенты функции цели с обратным знаком, поскольку linprog () ищет минимум. Матрица A_ub содержит коэффициенты при переменных для условий в виде неравенств. Для нашей задачи это $90x_1 + 5x_2 \le 10000$. Значения в правой части неравнства-

1000, помещается в список b_ub. Матрица A_eq содержит коэффициенты при переменных для условий в виде равенств. Для нашей задачи $x_2 - 3x_1 = 0$, причем ноль в правой части, помещается в список b_eq.
Результаты решения задачи оптимизации с использованием scipy. optimize.
Fun: -3142.8571428571431
message: 'Optimization terminated successfully.'
nit: 2
slack: array([0.])
status: 0
success: True
x: array ([95.23809524, 285.71428571]
Время: 0.03020191192626953
Пример 3. В таблице приведены данные о производительности 5 предприятий, которые выпускают 4 вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также продолжительность работы всех предприятий и цена каждого вида сырья.

Вид изделия	Производительность предприятий, изд./день					Затраты сырья, ед.веса/изд		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	3	5	4	4	6	4	3	2
2	4	2	3	5	2	2	1	5
3	2	3	5	2	4	6	4	4
4	7	4	2	8	3	3	5	2
	Число рабочих дней					Цена сырья		
	120	200	150	170	220	60	80	50

Требуется определить:
1) производительность каждого предприятия по каждому виду изделия;
2) потребность каждого предприятия по каждому типу сырья;
3) сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска указанного вида и числа изделий.
Решение:
Решение на Python:
Составим матрицы, характеризующие производство:

матрица Q производительности предприятий по каждому виду изделия;
матрица-строка N для числа рабочих дней по каждому предприятию;
матрица затрат сырья B на единицу изделия (для каждого предприятия затраты по условию одинаковые). В матрице B строки должны соответствовать типам сырья, а столбцы – видам изделий;
матрица-строка цен сырья p.

```
Q = Matrix([[3,5,4,4,6],
            [4,2,3,5,2],
            [2,3,5,2,4],
            [7,4,2,8,3]])
''' Формируется вектор-столбец. После
    транспонирования получаем вектор-строку'''
N = Matrix([120,200,150,170,220]).T
B = Matrix([[4,2,6,3],
            [3,1,4,5],
            [2,5,4,2]])
p = Matrix([60,80,50]).T
```

Каждый столбец матрицы Q соответствует дневной производительности. Годовая производительность j-го предприятия по каждому виду продукции получается умножением элементов j-го столбца матрицы Q на элементы j-й столбца матрицы N.

```
Qy = zeros(4,5)
for j in range(0,5):
    for i in range(0,4):
        Qy[i,j] = Q[i,j]*N[j]
Qy
```

$$\begin{bmatrix} 360 & 1000 & 600 & 680 & 1320 \\ 480 & 400 & 450 & 850 & 440 \\ 240 & 600 & 750 & 340 & 880 \\ 840 & 800 & 300 & 1360 & 660 \end{bmatrix}$$

Найдем дневной расход по видам сырья для каждого предприятия. Для этого нужно матрицу B (затраты сырья на единицу изделия) умножить на матрицу Q (производительность предприятий по каждому виду изделия). Обозначим полученную матрицу BQ.

```
BQ = B*Q
BQ
```

$$\begin{bmatrix} 53 & 54 & 58 & 62 & 61 \\ 56 & 49 & 45 & 65 & 51 \\ 48 & 40 & 47 & 57 & 44 \end{bmatrix}$$

Строки матрицы BQ соответствуют номеру сырья, столбцы – номеру предприятия.
Если умножить каждый элемент j-го столбца матрицы BQ на соответствующий элемент j-го столбца матрицы N, получим годовую потребность каждого предприятия в каждом виде сырья (матрица BQy).

```
BQy = zeros(3,5)
for j in range(0,5):
    for i in range(0,3):
        BQy[i,j] = BQ[i,j]*N[j]
BQy
```

$$\begin{bmatrix} 6360 & 10800 & 8700 & 10540 & 13420 \\ 6720 & 9800 & 6750 & 11050 & 11220 \\ 5760 & 8000 & 7050 & 9690 & 9680 \end{bmatrix}$$

Стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия (вектор P) получается умножением вектора p (цены сырья) на матрицу BQy (потребность в сырье).

```
P = p*BQy
P
```

$$\begin{bmatrix} 1207200 & 1832000 & 1414500 & 2000900 & 2186800 \end{bmatrix}$$

Ответ: Годовая производительность предприятий по видам изделий – матрица Qy (предприятия – по столбцам); годовая потребность предприятий по видам сырья – матрица BQy; годовая сумма кредитования – вектор P.

Прямые и двойственные задачи оптимизационного моделирования

Прямой (общей) называется задача, которая состоит в определении максимального значения линейной целевой функции $F(\mathbf{x})$ от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, ..., k),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = k+1, ..., m),$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, ..., l;\ l \le n),$$

x_j - произвольные $(j = l+1, ..., n)$,

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и $k \le m$.
Иными словами, общая задача заключается в определении n переменных величин $x_j \ (j = 1, 2, ..., n)$, удовлетворяющих k неравенствам и (m-k) уравнениям, при которых функция $F(\mathbf{x})$ достигает максимального значения. (При этом l переменных могут принимать только неотрицательные значения, а $(n-l)$ - произвольные значения)
Стандартной (или симметричной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции цели при выполнении условий , где $k = m$ и $l = n$, т.е. задача, в которой все переменные неотрицательны, и ограничения заданы только неравенствами вида “$\le$”. В рассмотренном выше примере задача записана в симметричной форме.
Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции цели при выполнении условий, где $k = 0$ и $l = n$, т.е. задача, в которой все переменные неотрицательны, и ограничения заданы только уравнениями.
Любую из указанных выше трех форм записи ЗЛП можно преобразовать в другую, а требование максимизации целевой функции можно заменить требованием минимизации новой целевой функции, $F' = -F(\mathbf{x})$.
Опуская здесь свойства ЗЛП, анализ ее возможных решений, остановимся на наиболее наглядном, геометрическом методе решения ЗЛП.
Геометрический метод решения ЗЛП удобен для задачи, содержащий две переменные величины x_1, x_2. В этом случае целевая функция имеет вид:
$F(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2$.)
Решение задачи геометрическим методом состоит из следующих этапов:
В прямоугольной системе координат с осями x_1 и x_2 строят многоугольную область допустимых решений Ω, соответствующую ограничениям задачи. Если эта область–пустое множество, т.е. система ограничений несовместна, то ЗЛП решения не имеет.
Строят вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ градиента целевой функции (2.12). Этот вектор показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции.

В произвольной точке (x_1^0, x_2^0) допустимой области решений Ω проводят прямую линию $c_1x_1 + c_2x_2 = const, \quad const = F(x_1^0, x_2^0)$, перпендикулярную к вектору градиента. Такие линии называются линиями уровня целевой функции. При решении задачи на максимум линию уровня перемещают параллельно самой себе в направлении вектора $\mathbf{c}$ (при решении задачи на минимум - в противоположном направлении) до тех пор, пока она не займет так называемое разрешающее положение. В разрешающем положении линия уровня либо касается многоугольной области Ω в ее крайней точке (x_1^*, x_2^*), либо совпадает с одним из ребер этого многоугольника. В первом случае задача имеет единственный оптимальный план, компоненты которого определяются координатами крайней точки (x_1^*, x_2^*). Во втором случае задача имеет бесконечно много оптимальных планов. Именно, координаты любой точки ребра, через которое проходит линия уровня в разрешающем положении, определяют оптимальный план задачи. Если линия уровня, сколько бы ее не перемещали, не может занять разрешающего положения, то целевая функция не ограничена.

Находят оптимальный план $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ и вычисляют экстремальное значение целевой функции $F^* = F(\mathbf{x}^*)$. Чтобы найти координаты крайней точки (x_1^*, x_2^*) достаточно решить систему, состоящую из уравнений двух граничных прямых, пересекающихся в этой точке.

Сформулируем определение двойственной задачи к задаче, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, ..., m),$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$$\Phi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j \qquad (j = \overline{1,n}),$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1,m}),$$

называется двойственной по отношению к задаче нахождения максимума, а переменные $y_i \ (i=\overline{1,m})$–двойственными оценками.
Задачи образуют пары задач, называемые парами взаимно двойственных задач линейного программирования.
Правила, по которым составляется двойственная задача:
если в прямой задаче требуется найти максимум целевой функции, то в двойственной задаче –минимум, и наоборот;
коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи;
свободные члены b_i системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи;
матрицы коэффициентов ограничений прямой и двойственной задачи являются транспонированными друг к другу;
если прямая задача решается на максимум, и ее система ограничений состоит из неравенств типа “≤”,то двойственная задача решается на минимум, и ее система ограничений состоит из неравенств типа “≥”;
число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной–числу переменных прямой;
все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Примеры решения задач

Пример 1. Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			
	А	Б	В	Запасы сырья
I II III I V	3 20 10 0	6 15 15 3	4 20 20 5	2000 1500 7400 1500
Цена изделия	6	10	9	10

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.
Решение на Python.

```
# -ЗЛП
import scipy
from scipy.optimize import linprog # загрузка библиотеки ЛП
c = [-6,-10,-9,0,0,0,0] # список коэффициентов функции цели
b_ub = [2000,3000,1480,1500] # список объёмов ресурсов
A_ub = [[3,6,4,1,0,0,0], # матрица удельных значений ресурсов
               [4,3,4,0,1,0,0],
              [2,3,4,0,0,1,0],
              [0,3,2,0,0,0,1]]
d=linprog(c, A_ub, b_ub) # поиск решения
for key,val in d.items():
         print(key,val) # вывод решения
         if key=='x':
                  q=[sum(i) for i in A_ub*val]#использованные ресурсы
                  print('A_ub*x',q)
                  q1= scipy.array(b_ub)-scipy.array(q) #остатки ресурсов
                  print('b_ub-A_ub*x', q1)
```

```
x [5.19999978e+02 2.65422318e-06 1.09999974e+02 1.44245654e-05
 2.39999998e+02 2.34709601e-05 6.39999975e+02]
A_ub*x [1999.9998617143472, 2759.9998154375803, 1479.999884865596, 859.9999
317925837]
b_ub-A_ub*x [1.38285653e-04 2.40000185e+02 1.15134404e-04 6.40000068e+02]
fun -4109.999663662871
slack [1.38285653e-04 2.40000185e+02 1.15134404e-04 6.40000068e+02]
con []
status 0
message Optimization terminated successfully.
nit 6
success True
```

```
# двойственная задача
import scipy
from scipy.optimize import linprog
A_ub = [[3,6,4,1,0,0,0],
               [4,3,4,0,1,0,0],
              [2,3,4,0,0,1,0],
              [0,3,2,0,0,0,1]]
b_ub=[-6,-10,-9,0,0,0,0]
c = [2000,3000,1480,1500]
A_ub_T =-scipy.transpose(A_ub)
d=linprog(c, A_ub_T, b_ub)
for key,val in d.items():
        print(key,val)
```

```
x [1.50000000e+00 3.10652945e-13 7.50000000e-01 1.38582151e-12]
fun 4110.000000036918
slack [4.48965309e-11 1.25000000e+00 1.05899289e-10 1.50000000e+00
 3.10652945e-13 7.50000000e-01 1.38582151e-12]
con []
status 0
message Optimization terminated successfully.
nit 7
success True
```

Транспортные задачи оптимизационного моделирования

Математическая модель транспортной задачи формулируется следующим образом. В m пунктах отправления A_1, $A_2, \ldots,$ A_m сосредоточен однородный груз в количествах соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1, \ldots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, \ldots, b_n$ единиц. Стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления $(i = \overline{1,m})$ в j-ый пункт назначения $(j = \overline{1,n})$ равна c_{ij}. Требуется составить такой план перевозок, который бы полностью удовлетворял спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки были бы минимальны.
Если через x_{ij} обозначить количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения, то математическая постановка задачи будет состоять в определении минимального значения функции:

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$, при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=\overline{1,n}),\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$x_{ij}\ge 0 \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Условия означают, что в каждый пункт назначения будет полностью доставлено необходимое количество груза, и что из каждого пункта отправления будет вывезен весь имеющийся груз, при этом исключаются обратные перевозки.

План $\mathbf{x}^*=(x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, при котором функция цели принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записывают в виде распределительной таблицы (таблица). При этом саму таблицу иногда называют табличной или матричной моделью транспортной задачи.

Таблица

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	…….	B_j	…….	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	……	c_{1j} x_{1j}	……..	c_{1n} x_{1n}	a_1
……..	…….	…….	……..	……..	……	…….
A_i	c_{i1} x_{i1}	…….	c_{ij} x_{ij}	……..	c_{in} x_{in}	a_i
…….	……..	…..	…….	…….	…..	…….
A_m	c_{m1} x_{m1}	…..	c_{mj} x_{mj}	……..	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…….	b_j	……..	b_n	

Транспортная задача называется закрытой, если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\ .$$

Если же это условие не выполняется, то транспортная задача называется открытой.
Для того, чтобы транспортная задача имела допустимые планы, необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения. Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью ее необходимо преобразовать в закрытую.
Если запасы груза у поставщиков превышают суммарные потребности у потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$ -ый пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$.
Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(n+1)$ ый пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0 \quad (j = \overline{1,n})$.
В результате таких преобразований открытая модель транспортной задачи превращается в закрытую. Оптимальный план исходной задачи определяют из оптимального решения закрытой модели транспортной задачи.
Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно nm, а число уравнений в системах (6.2)-(6.3) равно $n+m$. Так как параметры a_i и b_j удовлетворяют условию (6.5), то число линейно независимых уравнений равно $n+m-1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $n+m-1$ отличных от нуля неизвестных.
Решение транспортной задачи можно проводить симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы.
Отметим, что решение транспортной задачи складывается из следующих этапов:
 определяют начальный опорный план задачи;
 найденный опорный план по определенным критериям проверяют
на оптимальность;

если найденный опорный план оптимален, решение задачи заканчивается, а если нет, то переходят к новому опорному плану, который доставляет целевой функции меньшее значение, чем предыдущий план, и возвращаются к этапу 2. Таким образом, в результате конечного числа последовательных итераций, оптимизирующих решение, получают оптимальный план.

Построение начального опорного плана

Начальный план транспортной задачи можно находить методом северо-западного угла, методом минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля.

Рассмотрим метод минимального элемента. Построение начального опорного плана и его последующее преобразование будем проводить непосредственно в распределительной таблице. В соответствии с методом минимального элемента просматривают тарифы таблицы и в первую очередь заполняют клетку с минимальным значением тарифа c_{ij} . При этом в клетку записывают максимально возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключают строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом. Процесс распределения заканчивают, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а спрос потребителей полностью удовлетворен. В результате получают опорный план, который содержит $m+n-1$ загруженных клеток. В процессе заполнения таблицы могут быть одновременно исключены строка и столбец. Так бывает, когда полностью исчерпывается запас груза и полностью удовлетворяется спрос (вырожденная задача). В этом случае в свободные клетки надо записать число 0–"нуль-загрузка", условно считая такую клетку занятой. Однако число 0 записывают в те свободные клетки, которые не образуют циклов (см. ниже) с ранее занятыми клетками.

Примеры решения задач

Рассмотрим решения транспортной задачи на Python. Такой формат позволит существенно сэкономить время и силы.

Пример 1. Дана таблица запасов и спроса. Составить оптимальный план перевозок

Спрос / Запасы	Магазины заказчики			Запасы на складе (ед. прод
	“Анна”	“Вада”	“Ева”	
“Таганка”	7	3	6	74
“ВВЦ”	4	8	2	40
“Щелково”	1	5	9	36
Объем заказа (ед. прод)	20	45	30	

Решение на Python:
Это задача закрытого типа. Решим ее с помощью уже рассмотренных

```
from scipy.optimize import linprog
import time

c = [7, 3, 6,4,8,2,1,5,9]
A_ub = [[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
               [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
               [0,0,0,0,0,0,1,1,1]]
b_ub = [74,40,36]
A_eq = [[1,0,0,1,0,0,1,0,0],
               [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
               [0,0,1,0,0,1,0,0,1]]
b_eq = [20,45,30]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([8.03399303e-08, 1.98486909e-07, 1.27598700e-07])
     fun: 214.99999944270834
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 5
   slack: array([29.00000022, 10.00000009, 16.0000001 ])
  status: 0
 success: True
       x: array([1.17814759e-08, 4.49999998e+01, 8.01637322e-09, 4.06707740e-08,
       9.61431590e-09, 2.99999999e+01, 1.99999999e+01, 3.01544961e-08,
       5.79416775e-09])
```

Ответ: 215.

Пример 2. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе. Тарифы на перевозку единицы продукции, объемы запасов продукции на складах, а также объемы заказанной продукции представлены в таблице.

Магазин / Склад	Магазины заказчики					Запасы на складе (ед. прод)
	“Анна”	“Вада”	“Ева”	“Алла”	“Мех”	
“Таганка”	1	3	4	5	2	20
“ВВЦ”	2	1	1	4	5	15
“Щелково”	2	3	3	2	1	40
“Коньково”	3	1	4	2	3	15
Объем заказа (ед. прод)	15	10	25	5	35	90

Решение на Python.

Другой способ решения с применением алгебры матриц.

Складываем запасы поставщиков, они равны 90. И объемы потребителей тоже складываем и получаем 90. То есть это транспортная задача закрытого типа. Вводим данные в программу и получаем ответ.

```
from scipy.optimize import linprog
c = [1,3,4,5,2,2,1,1,4,5,2,3,3,2,1,3,1,4,2,3]
A_ub = [[1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
        [0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
        [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0],
        [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1]]
b_ub = [20,15,40,15]
A_eq = [[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0],
               [0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0],
               [0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0],
        [0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0],
        [0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]]
b_eq = [15,10,25,5,35]
b_eq = [15,10,25,5,35]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([3.13901793e-10, 1.71194614e-10, 5.99225558e-10, 2.85371726e-11,
       8.84583073e-10])
     fun: 119.99999999932504
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 6
   slack: array([4.31100489e-10, 2.77813328e-10, 9.97196992e-10, 2.91324298e-10])
  status: 0
 success: True
       x: array([1.50000000e+01, 1.98602958e-10, 2.03474086e+00, 7.71801606e-11,
       2.96525914e+00, 2.95102611e-11, 6.11605748e-11, 1.50000000e+01,
       3.73063736e-11, 3.26279314e-11, 6.31953007e-11, 6.41109602e-11,
       7.96525913e+00, 1.74132276e-10, 3.20347409e+01, 1.11951842e-10,
       1.00000000e+01, 2.35630970e-10, 5.00000000e+00, 1.73317373e-10])
```

Ответ: 120.

Пример 3. Транспортная задача открытого типа.
Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе. Тарифы на перевозку единицы продукции, объемы запасов продукции на складах, а также объемы заказанной продукции представлены в таблице.

Магазин / Склад	Магазины заказчики				Запасы на складе (ед. прод)
	"Анна"	"Вада"	"Ева"	"Алла"	
"Таганка"	4	5	3	6	300
"ВВЦ"	7	2	1	5	250
"Щелково"	6	1	4	2	200
Объем заказа (ед. прод)	220	150	250	180	

Решение на Python. Это задача открытого типа. Так как запасы поставщиков не равны запросам потребителей. Дополним таблицу еще одним поставщиком с нулевыми стоимостями перевозок.

Магазин / Склад	Магазины заказчики				Запасы на складе (ед. прод)
	"Анна"	"Вада"	"Ева"	"Алла"	
"Таганка"	4	5	3	6	300
"ВВЦ"	7	2	1	5	250
"Щелково"	6	1	4	2	200
"Нулевой"	0	0	0	0	50
Объем заказа (ед. прод)	220	150	250	180	800

Занесем данные в программу и получим ответ.

```
from scipy.optimize import linprog
import time

c = [4,5,3,6,7,2,1,5,6,1,4,2,0,0,0,0]
A_ub = [[1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
               [0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0],
               [0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1]]
b_ub = [300,250,200,50]
A_eq = [[1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0],
               [0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0],
               [0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0],[0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1]]
b_eq = [220,150,250,180]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([3.51641827e-06, 2.37683716e-06, 4.00480758e-06, 2.86522831e-06])
     fun: 1779.9999773209056
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 6
   slack: array([4.81106287e-06, 3.99914313e-06, 3.18737176e-06, 7.65713551e-07])
  status: 0
 success: True
       x: array([2.19999995e+02, 7.52162204e-07, 7.99999990e+01, 3.80045037e-08,
       4.32966453e-08, 7.99999989e+01, 1.69999997e+02, 3.60107318e-07,
       9.00659982e-08, 6.99999959e+01, 3.66066254e-08, 1.30000001e+02,
       9.49417324e-07, 2.14158552e-06, 2.15449035e-07, 4.99999959e+01])
```

Ответ: 1780.

Пример 4. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе.

Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	“Все для дома”	“Здоровый сон”	“Фея”	“Ночное царство”	“Мех”	Запасы на складе (ед. прод)
“Вороново”	1	3	4	5	2	20
“Фили”	2	1	1	4	5	15
“Беляево”	1	3	3	2	1	40
“Выхино”	3	1	4	2	3	15
Объем заказа (ед. прод)	15	10	25	5	9	

Решение на Python:
Это задача открытого типа, добавим еще одного потребителя

Магазин / Склад	“Все для дома”	“Здоровый сон”	“Фея”	“Ночное царство”	“Мех”	“Нулевой”	Запасы на складе (ед. прод)
“Вороново”	1	3	4	5	2	0	20
“Фили”	2	1	1	4	5	0	15
“Беляево”	1	3	3	2	1	0	40
“Выхино”	3	1	4	2	3	0	15
Объем заказа (ед. прод)	15	10	25	5	9	26	90

Тогда решение будет выглядеть так:

```
from scipy.optimize import linprog
c = [1,3,4,5,2,0,2,1,1,4,5,0,1,3,3,2,1,0,3,1,4,2,3,0]
A_ub = [[1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
                   [0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
                   [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0],
        [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1]]
b_ub = [20,15,40,15]
A_eq = [[1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],
                   [0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0],
                   [0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0],
        [0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0],
        [0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0],
        [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1]]
b_eq = [15,10,25,5,9,26]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

В транспортной задаче могут присутствовать дополнительные условия. Причины этих условий могут быть различными, например, ограниченная грузоподъемность транспорта, не учитываемые задержки при оформлении груза на таможне, приоритеты и паритеты для поставщиков и потребителей. Поэтому мы будем указывать только субъектов и характер ограничения. Для дальнейшего использования пронумеруем следующие дополнительные условия к закрытой транспортной задаче.

1. Установка заданного объема поставки товара от определенного поставщика определенному заказчику. Для этого вводиться новая переменная с соответствующим ограничением.
2. Изменение объема поставки товара для определенного заказчика. Для этого меняются условия на столбец таблицы объемов доставок товаров
3. Установка верхней границы объема поставок товара для поставщика. Для этого меняются условия на строку таблицы объемов доставок товаров.
4. Паритет на поставки второго и третьего поставщиков. Для этого приравниваются объемы поставок нескольких поставок их поставщиков, что обычно делается для улучшения бизнес климата.
Пример 5.
Дана таблица запасов и спроса. Составить оптимальный план перевозок

Спрос / Запасы	Магазины заказчики			Запасы на складе (ед. прод
	“Анна”	“Вада”	“Ева”	
“Таганка”	7	3	6	74
“ВВЦ”	4	8	2	40
“Щелково”	1	5	9	36
Объем заказа (ед. прод)	20	45	30	

И дополнительные условия:
А) первый поставщик должен поставить второму заказчику ровно 30 единиц товара
Б) для второго заказчика объем заказа уменьшился с 45 единиц товара до 30.
В) для объемов доставки товаров второго поставщика было ограничение сверху 40, а возникла необходимость доставки ровно 40 единиц товара.
Г) объемы доставок товаров второго и третьего поставщика транспортных услуг соответственно ограничены сверху <=40 и <=36.
Решение на Python.

А) первый поставщик должен поставить второму заказчику ровно 30 единиц товара

```
from scipy.optimize import linprog
c = [7, 3,6,4,8,2,1,5,9]
b_ub = [74,40,36]
A_ub = [[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
               [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
               [0,0,0,0,0,0,1,1,1]]
b_eq = [20,45,30,30]
A_eq = [[1,0,0,1,0,0,1,0,0],
               [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
               [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
               [0,1,0,0,0,0,0,0,0]]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([6.63476563e-08, 5.07364604e-08, 1.05375687e-07, 0.00000000e+00])
     fun: 244.9999997627353
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 6
   slack: array([43.99999998, 10.00000011,  1.00000014])
  status: 0
 success: True
       x: array([1.50426431e-08, 3.00000000e+01, 6.28903014e-09, 1.31460538e-08,
       8.38513544e-09, 2.99999999e+01, 1.99999999e+01, 1.49999999e+01,
       1.62158702e-08])
```

Ответ: 245.

Б) для второго заказчика объем заказа уменьшился с 45 единиц товара до 30. Строку условий mass5 = (x[1] +x[4] + x[7] == 45) следует заменить на mass5 = (x[1] +x[4] + x[7] == 30).

```
from scipy.optimize import linprog
c = [7, 3,6,4,8,2,1,5,9]
b_ub = [74,40,36]
A_ub = [[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
               [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
               [0,0,0,0,0,0,1,1,1]]
b_eq = [20,30,30]
A_eq = [[1,0,0,1,0,0,1,0,0],
               [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
               [0,0,1,0,0,1,0,0,1]]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([3.65537851e-07, 5.80560105e-07, 5.80560126e-07])
     fun: 169.99999868174984
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 5
   slack: array([44.00000069, 10.00000044, 16.0000004 ])
  status: 0
 success: True
       x: array([5.65760116e-08, 2.99999992e+01, 6.40297822e-08, 1.82463304e-07,
       5.22152909e-08, 2.99999993e+01, 1.99999994e+01, 1.76139063e-07,
       2.76812228e-08])
```

Ответ: 170.

В) для объемов доставки товаров второго поставщика было ограничение сверху 40, а возникла необходимость доставки ровно 40 единиц товара.

Переменную условий mass2 = (x[3] + x[4] +x[5] <= 40) заменим на mass2 = (x[3] + x[4] +x[5] == 40).

```
from scipy.optimize import linprog
c = [7, 3,6,4,8,2,1,5,9]
b_ub = [74,36]
A_ub = [[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
              [0,0,0,0,0,0,1,1,1]]
b_eq = [20,45,30,40]
A_eq = [[1,0,0,1,0,0,1,0,0],
              [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
              [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
              [0,0,0,1,1,1,0,0,0]]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([1.14200382e-08, 2.82142594e-08, 1.81377047e-08, 2.48553533e-08])
     fun: 244.9999998557701
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 5
   slack: array([29.00000003, 26.        ])
  status: 0
 success: True
       x: array([3.24417677e-10, 4.50000000e+01, 4.14609315e-11, 9.99999999e+00,
       1.26816319e-09, 3.00000000e+01, 1.00000000e+01, 4.57861470e-11,
       3.39664223e-10])
```

Ответ: 245.

Г) объемы доставок товаров второго и третьего поставщика транспортных услуг соответственно ограничены сверху <=40 и <=36. Заменим строки mass2 = (x[3] + x[4] +x[5] <= 40) и mass3 = (x[6] + x[7] + x[8] <= 36) на mass2 = (x[3] + x[4] +x[5] == 30) и mass3 = (x[6] + x[7] + x[8] == 30).

```python
from scipy.optimize import linprog
c = [7, 3,6,4,8,2,1,5,9]
b_ub = [74]
A_ub = [[1,1,1,0,0,0,0,0,0]]
b_eq = [20,45,30,30,30]
A_eq = [[1,0,0,1,0,0,1,0,0],
               [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
               [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
               [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
               [0,0,0,0,0,0,1,1,1]]
print(linprog(c, A_ub, b_ub, A_eq, b_eq))
```

```
     con: array([1.88010461e-08, 4.64496281e-08, 2.98604910e-08, 2.98604768e-08,
       2.98603950e-08])
     fun: 234.9999997820333
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 5
   slack: array([39.00000004])
  status: 0
 success: True
       x: array([1.51848855e-09, 3.50000000e+01, 7.89948683e-11, 8.55686363e-10,
       1.39723453e-10, 3.00000000e+01, 2.00000000e+01, 9.99999999e+00,
       9.16401563e-10])
```

Ответ: 235.

Задачи симплекс-метода оптимизационного моделирования

Пусть, например, в задаче оптимизационного моделирования на максимум система ограничений имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ b_i > 0, \quad x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Чтобы привести ее к каноническому виду, из левой части каждого неравенства системы (3.9) вычитают дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$. В результате получится система ограничений вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i,\ b_i > 0, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Эта система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные x_{n+i} входят в левую часть уравнений с коэффициентами, равными (-1).

Рассмотрим теперь каноническую задачу на максимум, в которой система ограничений не имеет предпочтительного вида.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i > 0, \quad x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Чтобы привести систему к предпочтительному виду, к левым частям уравнений добавляют искусственные переменные w_i. В целевую функцию переменные w_i вводят с коэффициентом M в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом $(-M)$ для задачи на максимум, где M – большое положительное число. В результате исходная задача примет предпочтительный вид:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} M w_i \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i, \quad b_i > 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}), \quad w_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Эта задача называется расширенной по отношению к исходной задаче. Ее начальный опорный план можно выбрать в виде:

$$\mathbf{x}_0 = (\underbrace{0,0,...,0}_{n}, b_1, ..., b_m).$$

Решение расширенной задачи может быть найдено симплексным методом. Если некоторые из уравнений исходной задача имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные. Справедливы теоремы.

Если в оптимальном плане

$$\bar{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, w_1^*, w_2^*, ... w_m^*)$$

расширенной задачи все искусственные переменные $w_i^* = 0$ $(i = \overline{1,m})$, то план $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ является оптимальным планом исходной задачи ЛП.

Если в оптимальном плане расширенной задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

Рассмотрим подробнее процесс решения расширенной задачи.

Для опорного плана $\mathbf{x}_0 = (0, 0, ..., 0, b_1, ..., b_m)$ расширенной задачи значения целевой функции и оценок равны

$$F_0 = \Delta_0 = -M \sum_{i=1}^{m} b_i, \quad \Delta_j = -M \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j.$$

Таким образом, F_0 и Δ_j состоят из двух независимых частей, одна из которых зависит от M, другая – нет.

После вычисления F_0 и Δ_j их значения, а также исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. При этом в $(m+2)$-ю строку

помещают коэффициенты при M из (4.9), а в $(m+1)$-ю – слагаемые, не содержащие M.
При переходе от одного опорного плана к другому в число базисных переменных вводят переменную, соответствующую наибольшему по абсолютной величине отрицательному числу $(m+2)$-ой строки. Искусственную переменную, исключенную из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование столбца коэффициентов при данной переменной излишне.
Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода.
Итерационный процесс в $(m+2)$-ой строке продолжают до тех пор, пока не будет выполнено одно из следующих условий:
все искусственные переменные исключены из базиса;
среди базисных переменных есть искусственные, но в $(m+2)$-ой строке отсутствуют отрицательные значения, кроме, быть может, значения в столбце $\mathbf{A_0}$.
В первом случае базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи и поиск ее оптимального плана продолжают по $(m+1)$-ой строке.
Во втором случае исходная задача не имеет решения, если значение, стоящее в $(m+2)$-ой строке столбца $\mathbf{A_0}$ отрицательно.
Таким образом, процесс нахождения решения канонической задачи ЛП методом искусственного базиса включает следующие основные этапы:
составляют расширенную задачу находят начальный опорный план расширенной задачи;
используя симплекс-метод, исключают искусственные переменные из числа базисных. В результате, либо получают опорный план исходной задачи (4.3), либо устанавливают ее неразрешимость;
4) используя найденный опорный план задачи, либо находят симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

Примеры решения задач

1. Решить задачу линейного программирования

$\max f(x),$

$f(x) = -x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \le 2$

$2x_1 + x_2 \ge 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

Решение на Python.

```
import scipy
from scipy.optimize import linprog # загрузка библиотеки ЛП
c = [1,-2,0,0] # список коэффициентов функции цели
b_ub = [2,-1] # список объёмов ресурсов
A_ub = [[1,1,1,0], # матрица удельных значений ресурсов
            [-2,-1,0,1]]
d=linprog(c, A_ub, b_ub) # поиск решения
for key,val in d.items():
        print(key,val) # вывод решения
        if key=='x':
                q=[sum(i) for i in A_ub*val]#использованные ресурсы
                print('A_ub*x',q)
                q1= scipy.array(b_ub)-scipy.array(q) #остатки ресурсов
                print('b_ub-A_ub*x', q1)
```

```
x [4.97598793e-11 2.00000000e+00 7.24411868e-11 5.00000000e-01]
A_ub*x [2.0000000002449068, -1.5000000001111122]
b_ub-A_ub*x [-2.44906762e-10  5.00000000e-01]
fun -4.0000000001956515
slack [-2.44906762e-10  5.00000000e-01]
con []
status 0
message Optimization terminated successfully.
nit 4
success True
```

Ответ: 4.

3. Решить задачу линейного программирования

$\max f(X) = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

Решение на Python.

```
import scipy
from scipy.optimize import linprog # загрузка библиотеки ЛП
c = [-5,-3,-4,1] # список коэффициентов функции цели
b_ub =[3,3] # список объёмов ресурсов
A_ub = [[1,3,2,2], # матрица удельных значений ресурсов
            [2,2,1,1]]
d=linprog(c, A_ub, b_ub) # поиск решения
for key,val in d.items():
        print(key,val) # вывод решения
```

```
x [1.00000000e+00 4.82069894e-09 1.00000001e+00 5.97349993e-10]
fun -9.000000054776313
slack [-3.30871597e-08 -2.19793499e-08]
con []
status 0
message Optimization terminated successfully.
nit 4
success True
```

Ответ: 9

```
     con: array([1.26777598e-07, 6.91514330e-08, 2.42029984e-07, 1.15252385e-08,
       5.76261847e-08, 2.53555211e-07])
     fun: 88.99999997383225
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 5
   slack: array([1.61000802e-07, 1.00061651e-07, 3.93805166e-07, 1.05798026e-07])
  status: 0
 success: True
       x: array([7.52889286e+00, 2.70561337e-09, 4.01457327e-08, 2.35761344e-08,
       5.74701030e-08, 1.24711069e+01, 1.17185169e-08, 1.91102694e-08,
       1.49999998e+01, 1.43518627e-08, 8.91164942e-09, 1.37269842e-08,
       7.47110698e+00, 7.92576199e-08, 9.99999977e+00, 3.31569704e+00,
       8.99999985e+00, 1.02131959e+01, 2.89911531e-08, 9.99999983e+00,
       1.15590217e-07, 1.68430291e+00, 2.94269733e-08, 3.31569698e+00])
```

Ответ: 89.

Задачи для самостоятельного решения

10.1.1. Предприятие производит продукцию трех видов, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ и использует сырье трех типов $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$. Нормы затрат сырья (по строкам) на единицу продукции каждого вида (по столбцам) заданы матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единицы сырья каждого типа S_1, S_2, S_3, задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 \end{pmatrix}$.

Каковы общие затраты предприятия на производство 250, 350 и 400 единиц продукции вида P_1, P_2, P_3 соответственно?

10.1.2. Для изготовления трех видов изделий A, B и C фабрика использует три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия, а также общее количество сырья приведено в таблице. Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 изделие			Общее количество сырья
	A	B	C	
1	2	1	1	45
2	1	1	2	40
3	1	0	1	15

10.1.3. Три бригады строителей работали на постройке трех домов. Площади домов и затраты времени на их постройку приведены ы в таблице. Найти производительность каждой бригады.

Дом	Время работы бригады, месяц			Площадь дома
	A	B	C	
1	2	3	1	100
2	1	5	4	190
3	4	1	3	180

10.1.4. Предприятие производит продукцию пяти видов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и использует сырье четырех типов S_1, S_2, S_3, S_4. Нормы затрат сырья (по строкам) на единицу продукции каждого вида (по столбцам) заданы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единицы сырья каждого типа S_i задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 27 & 32 \end{pmatrix}$.

Каковы общие затраты предприятия на производство 250, 200, 350, 100 и 300 единиц продукции вида P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 соответственно?

10.1.5. Найти расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые окупят затраты на эксплуатацию. Расценки на проведение работ приведены в таблице.

Виды работ	Нормативы по видам оборудования, ч			Полные затраты
	Механическое	Тепловое	Электрическое	
Техническое обслуживание	3	5	2	95
Текущие услуги	4	7	4	135
Капитальный ремонт	6	10	7	205

Ответ: число часов работы механического, теплового и электрического оборудования: 20 ч, 5ч, 5 ч.

10.1.6. Фирма продает изделия по ценам, которые характеризуются вектором $p=(10;21;15;17)$, а объемы продаж по регионам определяются вектором $q=(300;150;100;180)$. Найти прибыль фирмы, если издержки на реализацию составляют 1000 ден. ед.

10.1.7. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна A и строительного предприятия B. Чтобы уменьшить риск, акций A должно быть приобретено, по крайней мере, в два раза больше, чем акций B, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.

Дивиденды по акциям A составляют 8% в год, по акциям B – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

10.1.8. Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества A и не менее 12 единиц питательного вещества B. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

Корма Питат. вещества	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
A B	2 2	1 4
Цена 1 кг корма, т. руб.	0,2	0,3

10.1.9. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

10.1.10. На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

10.1.11. Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов A и B на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т		Максимально возможный запас, т
	Краска E	Краска I	
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

10.1.12. Финансовый консультант фирмы «АВС» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25000$) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси». Анализируются акции «Дикси – Е» и «Дикси – В». Цены на акции: «Дикси – Е» - 5$ за акцию; «Дикси – В» - 3$ за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.

По оценкам «АВС» прибыль от инвестиций в эти две акции в следующем году составит: «Дикси – Е» - 1,1$; «Дикси – В» - 0,9$.

Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

10.1.13. Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей X и Y. Фонд рабочего времени равен 4000 чел. - ч в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел./ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел./ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей X и 1750 деталей Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Еженедельно завод поставляет 600 дета-

лей типа X своему постоянному заказчику. По профсоюзному соглашению общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.
Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ден. ед., а от производства одной детали типа Y – 40 ден. ед.?

10.1.14. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S1 S2 и S3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S1	9	3	1
S2	8	1	2
S3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.
Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость.

10.1.15. При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед.
Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

10.1.16. Фирма производит два безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?
10.2.1. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	1 0 4	0 1 2	2 3 0	1 2 4	180 210 800
Цена изделия	9	6	4	7	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.

10.2.2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	2 1 2	1 2 4	3 4 1	2 8 1	200 160 170
Цена изделия	5	7	3	6	

Требуется:

Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.

10.2.3. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	Б	В	
I II III	4 3 1	2 1 2	1 2 3	180 210 244
Цена изделия	10	14	12	

Требуется:

Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план

10.2.4. Для изготовления трех видов продукции используют три вида ресурсов. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запас ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд Сырье Оборудование	1 1 1	4 1 1	3 2 2	200 80 140
Цена изделия	40	60	80	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план
10.2.5. На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на ед. продукции			Запасы сырья
	А	Б	В	
I II III	18 6 5	15 4 3	12 8 3	360 192 180
Цена изделия	9	10	16	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум

выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план

10.2.6. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три вида оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Общий фонд рабочего времени оборудования каждого вида, нормы расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип оборудо - вания	Нормы расхода ресурса на одно изделие				Фонд раб. времени, ч
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифоваль-ное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план
10.2.7. На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. продукции			Запасы сырья
	I вид	II вид	III вид	
I II III	1 3 1	2 0 4	1 2 0	430 460 420
Цена изделия	3	2	5	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план
10.2.8. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	2 1 3	1 5 0	0,5 3 6	4 0 1	2400 1200 3000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.

10.2.9. Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье 1	20	15	20	15000
Сырье 2	10	15	20	7400
Оборудование	0	3	5	1500
Цена изделия	6	10	9	

Требуется:
Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.
10.3.1. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин Склад	“Все для дома”	“Здоровый сон”	“Фея”	“Ночное царство”	“Мех”	Запасы на складе (ед. прод)
“Вороново”	1	3	4	5	2	20
“Фили”	2	1	1	4	5	15
“Беляево”	1	3	3	2	1	40
“Выхино”	3	1	4	2	3	15
Объем заказа (ед. прод)	15	10	25	5	9	

10.3.2. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	"Росс-тек"	"Шер"	"Ткани"	"Мода"	"Вита"	Запасы на складе (ед. прод)
Иваново	12	14	32	20	3	54
Москва	8	10	12	24	12	32
Новгород	6	8	12	24	8	85
Серпухов	10	18	4	8	9	162
Объем заказа (ед. прод.)	100	70	30	45	50	

10.3.3. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	ВДНХ	Юго—Западная	Фили	Арбатская	Сокольники	Запасы на складе (ед. прод)
Пролетарская	10	8	3	15	16	60
Митино	7	5	9	4	6	30
Строгино	2	0	14	5	20	40
Объем заказа (ед. прод)	10	20	40	30	65	

10.3.4. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:

Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	Тверь	Рязань	Тула	Чехов	Запасы на складе (ед. прод)
Москва	5	3	7	2	25
Санкт-Петербург	2	6	4	5	36
Саратов	3	7	1	9	40
Самара	6	4	8	3	50
Объем заказа (ед. прод)	20	45	15	25	

10.3.5. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	“Булочная”	“Хлеб”	“Сладости”	“Сдоба”	“Сладкоежка”	Запасы на складе (ед. прод)
“Крекер”	2,5	4	1	3	1,5	40
“Славянка”	3,5	2	3	1,6	4	55
“Сластена”	0	1	2,5	2	1	25
Объем заказа (ед. прод)	20	50	40	30	50	

10.3.6. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	“Диана”	ГУМ	ЦУМ	“Прага”	“Елена”	Запасы на складе (ед. прод)
“Перово”	2	3	1,5	2	1	50
“Волжская”	5	6	4	5	0	80
“Пражская”	3	2	2,5	3	3,5	50
“Беговая”	1	3,5	1	0	1,5	60
Объем заказа (ед. прод)	30	50	50	40	25	

10.3.7. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	Сокол	Рижская	ВДНХ	Киевская	Царицыно	Запасы на складе (ед. прод)
Пражская	3	7	3	4	0	50
Волжская	6	2	5	7	4	55
Курская	8	5	8	3	4	60
Савеловская	1	3	6	5	3	20
Объем заказа (ед. прод)	30	60	40	20	15	

10.3.8. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:

Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	Новгород	Москва	Самара	Саратов	Тверь	Запасы складов (ед. прод)
Нижний Новгород	4	0,5	2	1	3	35
Саратов	5	2	0,5	0	2	25
Самара	4	2	0	0,5	2	30
Санкт-Петербург	2	1	4	4,5	3	40
Объем заказа (ед. прод)	30	15	25	30	25	

10.3.9. Необходимо решить транспортную задачу: минимизировать расходы на доставку продукции заказчикам со складов фирмы, учитывая следующие затраты на доставку одной единицы продукции, объем заказа и количество продукции, хранящейся на каждом складе:
Таблица тарифов на перевозку продукции и объемов запасов на складе и заказов:

Магазин / Склад	"Колбасы"	"Мясо"	"Мясные деликатесы"	"Дина"	Запасы на складе (ед. прод)
Черкизово	1	0	0,5	2	45
Царицыно	3	2	4	1	50
Бородино	0	2,5	2	3	15
Вешняки	4	3	1,5	2	20
Объем заказа (ед. прод)	30	40	20	25	

10.4.1.

$$f(x) = 30x_1 + 60x_2 \to max \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 3x_1 + x_2 = 18, \end{cases} \quad x_{1,2} \ge 0$$

10.4.2.

$$f(x) = 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to max \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}, \quad x_{1,2,3} \ge 0$$

10.4.3.

$$f(x) = 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \to min \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \end{cases}, \quad x_{1,2,3} \ge 0$$

10.4.4.

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to max \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 \end{cases}, \quad x_{1,2,3} \ge 0$$

10.4.5.

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \to max \begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}, \quad x_{1,2} \ge 0$$

10.4.6.

$$f(x) = -6x_1 - 4x_2 + 4x_3 \to max \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge -1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \end{cases}, \quad x_{1,2,3} \ge 0$$

10.4.7.

$$f(x) = 10x_1 + 2x_2 \to max \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 \le 3 \end{cases}, \quad x_{1,2} \ge 0$$

10.4.8.

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to max \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -5x_1 + 8x_2 \ge 40 \end{cases}, \quad x_{1,2} \ge 0$$

Контрольная работа

1. Для изготовления двух видов стекольной продукции Зеркала и Бра2 используют три вида ресурсов S_1, S_2, S_3, запасы которых составляют 18,16 и 5 усл. ед. соответственно. Расход ресурсов на 1 ед. продукции приведен в таблице:

Виды ресурсов	Запасы ресурсов	Расходы ресурсов на 1 изд.	
		Зеркала	Бра
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
	Прибыль	2 руб.	3 руб.

Необходимо спланировать производственные план таким образом, чтобы доход от реализации продукции предприятия был максимальным?

2. Составить для ниже представленной задачи линейного программирования двойственную задачу и по решению исходной найти решение двойственной задачи.

$$Z(x) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to max, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 30, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

3. Четыре организации используют три вида сырья. Потребности в сырье каждой из организации соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье размещается на трех складах, а запасы соответственно равны 160, 140 и 170 ед. Тарифы перевозок заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор издания преследовал цель показать возможности реализации языка Python для решения типовых задач в рамках базовых экономических дисциплин.

При подготовке учебного пособия использовался компетентностный подход, который призван обеспечить формирование у студентов профессиональных знаний и навыков:

- уметь имплантировать элементы функционала Python для синтеза цифровых решений;
- применять элементы программирования для анализа данных;
- решать экономические задачи с помощью языка Python;
- оценивать экономическую целесообразность принимаемых решений.

Материал издания может быть использован студентами для углубления знаний при подготовке к расчетно-аналитическим работам, а также преподавателями и аспирантами.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седых И. Ю., Шевелев А. Ю., Криволапов С. Я. Математика : учеб. пособие. – М. : КНОРУС, 2019. – 720 с.

2. Криволапов С. Я., Хрипунова М. Б. Математика на Python : учебник. – М. : КНОРУС, 2021. – 456 с.

3. Высшая математика : учеб.и практикум для акад. бакалавриата / под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – М. : Юрайт, 2017. – 478 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс).

4. Балджы А. С, Хрипунова М. Б., Шмелева Л. А. Математическое моделирование в экономике и менеджменте на языке R. – М. : Научный Консультант, 2016. – 59 с.

5. Балджы А. С., Хрипунова М. Б., Александрова И. А. Математика на Python. Ч. I. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб.-метод. пособие / Финансовый ун-т при Правительстве РФ. – М. : Прометей, 2018 —76 с.

6. Степанян И. К., Жукова Г. С., Бойкова Г. В. Математика : учеб. Пособие / Финансовый ун-т, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. –М. : 2019. – 140 с.

7. Решение закрытой транспортной задачи с дополнительными условиями средствами Python. – URL: https://habr.com/ru/post/335104/

8. Бурганов Р. А. Экономическая теория : учебник / Р. А. Бурганов. – М. : ИНФРА-М, 2018. – 418 с.

9. Нуреев Р. М. Курс микроэкономики : учебник / Р. М. Нуреев. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Норма : ИНФРА-М, 2021. – 624 с.

10. Федотов В. А. Экономика / В. А. Федотов, О. В. Комарова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2021. – 196 с. – (Высшее образование: Специалитет).

11. Нуреев Р. М. Сборник задач по микроэкономике : К «Курсу микроэкономики» Р. М. Нуреева / под ред. Р. М. Нуреева. – М. : Норма : ИНФРА-М, 2020. – 432 с.

12. Киреев А. П. Микроэкономика для продвинутых: задачи и решения : учеб. пособие / А. П. Киреев, П. А. Киреев. – М. : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2018. – 160 с.

13. Розанова Н. М. Микроэкономика. Задачи и упражнения : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. М. Розанова. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 559 с. – (Серия «Практический курс»).

14. Кундышева Е. С. Математические методы и модели в экономике : учеб. для бакалавров / Е. С. Кундышева ; под науч. ред. проф. Б. А. Суслакова. – 2-е изд. – М. : Дашков и К°, 2020. – 286 с.

15. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учеб. пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Вузовский учебник : Инфра-М, 2019. – 389 с.

16. Гребенников П. И. Микроэкономика : учеб. и практикум для акад. бакалавриата / П. И. Гребенников, Л. С. Тарасевич, А. И. Леусский. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2019. – 547 с. – (Бакалавр. Академический курс).

17. Александров В. И. Микроэкономика : практикум / В. И. Александров, Н. И. Ведерникова, А. Н. Гаврилов. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2011. – 140 с.

Учебное электронное издание

ГУБЕРНАТОРОВ Алексей Михайлович

ЭКОНОМИКА НА PYTHON

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт экономики и туризма
кафедра бизнес-информатики и экономики
gubernatorov.alexey@yandex.ru