

Владимирский государственный университет

Т. В. ПРОХОРОВА

**ОСНОВЫ
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебно-практическое пособие

Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. В. ПРОХОРОВА

ОСНОВЫ
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание



Владимир 2023

ISBN 978-5-9984-1863-1
© Прохорова Т. В., 2023

УДК 512:514
ББК 22.14+22.151

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. Ю. Лексин

Кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
(Владимирский филиал)
С. В. Никифорова

Прохорова, Т. В.

Основы линейной алгебры и аналитической геометрия [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Т. В. Прохорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 216 с. – ISBN 978-5-9984-1863-1. – Электрон. дан. (3,88 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Предназначено для студентов вузов всех инженерно-технических и математических специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 8. Библиогр.: 10 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. Каноническое уравнение эллипса.....	7
2. Каноническое уравнение гиперболы.....	13
3. Каноническое уравнение параболы.....	19
4. Матрицы. Основные определения	22
5. Действия над матрицами.	26
6. Определители и их свойства	47
7. Правило Крамера	83
8. Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность	87
9. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца	94
10. Неравенство треугольника	96
11. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора. Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между векторами.....	97
12. Векторное произведение и его свойства	98
13. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя 3-го порядка	101
14. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений	102
15. Определитель произведения двух квадратных матриц	107
16. Обратная матрица и ее вычисление.....	108
17. Линейный оператор. Примеры линейных операторов	115
18. Сумма и произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изоморфизм кольца эндоморфизмов конечномерного линейного пространства с кольцом квадратных матриц	116

19. Матрица поворота плоскости. Зависимость матрицы оператора от выбора базиса. Определитель оператора	119
20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственных векторов	121
21. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса	122
22. Ранг матрицы и его вычисление. Метод окаймляющих миноров.....	125
23. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Алгоритм решения системы линейных уравнений.....	128
24. Прямая на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости	133
25. Угол между двумя прямыми на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости	147
26. Плоскость в трехмерном пространстве. Расстояние от точки до плоскости в трехмерном пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей в трехмерном пространстве. Взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве	148
27. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора	150
28. Спектральная теорема.....	152
29. Ортогональные операторы и матрицы	154
30. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду	156
31. Классификация кривых второго порядка на плоскости.....	158
32. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию	162
33. Линейные операторы, сохраняющие объем	165
34. Простейшие примеры алгебр Ли	167
35. Экспонента и логарифм квадратной матрицы	169

36. Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты симметрической матрицы.....	173
37. Аффинная группа	175
38. Движения (изометрии) евклидова пространства	177
39. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства	179
40. Аффинная классификация кривых второго порядка.....	182
41. Понятие о плоскости Лобачевского	184
42. Классификация поверхностей 2-го порядка в 3-мерном пространстве	186
43. Прямые на однополостном гиперboloиде	193
44. Прямые на гиперболическом параболоиде.....	194
45. Проективное пространство.....	195
46. Проективная классификация кривых второго порядка	199
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	214
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	215

ВВЕДЕНИЕ

Математика играет определяющую роль в развитии творческого потенциала студента и выработке научной методологии. Математика является универсальным языком всех естественных наук и основанных на них технических дисциплинах, изучаемых в высших учебных заведениях.

Пособие написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Материал пособия разделён на темы. В каждой теме приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию, и решены задачи. Наличие в пособии большого количества решённых задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов.

Автор стремился сделать изложение материала ясным и доступным. Основная цель пособия – помочь студенту, приступающему к изучению математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Пособие будет полезно также для преподавателей вузов.

1. Каноническое уравнение эллипса

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.1)$$

Фиксируем точки F_1 и F_2 (фокусы).

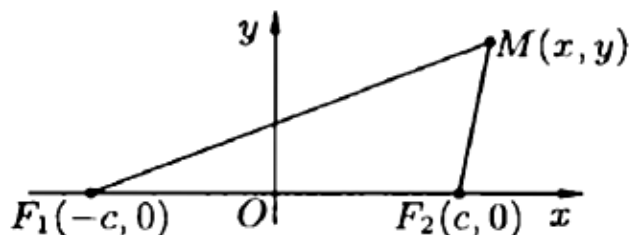


Рис. 1

Определение 1. Эллипсом с фокусами F_1 , F_2 называется множество таких точек (x, y) , что сумма расстояний от точки (x, y) до фокусов равна постоянному числу:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Возьмем $M(x, y)$, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c \geq 0$ (рис. 1).

Тогда

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{c^2},$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

Возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 - xc)^2 \\ a^2((x-c)^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2, \\ a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2 &= a^4 - a^2c^2. \end{aligned}$$

Сгруппируем в левой части первое и третье слагаемые и вынесем общий множитель за скобки

$$\begin{aligned} x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^4 - a^2c^2, \\ x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

В нашем случае $r_1 + r_2 = 2a > 2c$, поэтому $a > c$, и можно разделить последнее из уравнений на $a^2(a^2 - c^2)$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Положим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Определение 2. Получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.2)$$

Определение 3. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются **вершинами** эллипса (рис. 2).

Определение 4. Числа a и b называются **большой и малой полуосью** эллипса соответственно.

В частности, если $a = b = r$, то $c = 0$, $F_1 = F_2 = O(0,0)$, и эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = r^2$ с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом r .

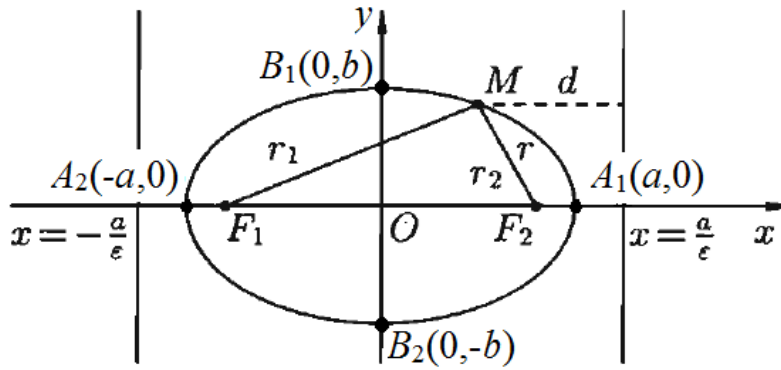


рис. 2

Определение 5. В качестве характеристики формы эллипса пользуются отношением $\frac{c}{a} = \varepsilon$, которое называется **эксцентриситетом** эллипса ($0 < \varepsilon < 1$).

Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплюснутым. В частности, если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Определение 6. **Фокальные радиусы** r_1 и r_2 точки $M(x, y)$ эллипса (расстояние от точки M до фокусов) вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x \text{ и } r_2 = a + \varepsilon x \quad (a \geq b) \quad (1.3)$$

или

$$r_1 = b - \varepsilon y \text{ и } r_2 = b + \varepsilon y \quad (b > a). \quad (1.4)$$

Определение 7. **Директрисами** эллипса называются прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad (a \geq b) \text{ или } x = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad (b > a). \quad (1.5)$$

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Взаимное расположение точки $M(x, y)$ и эллипса определяется условиями:

- 1) если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то точка M лежит на эллипсе;
- 2) если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$, то точка M лежит вне эллипса;
- 3) если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, то точка M лежит внутри эллипса.

Пример 1. Составить уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны 5 и 3.

Решение.

Пусть $a = 5$, $b = 3$. Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Пример 2. Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая полуось равна 7.

Решение.

Расстояние между фокусами $2c = 8 \Rightarrow c = 4$.

Большая полуось $a = 7$.

Зная c и a , можем найти b^2 по формуле

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{33} = 1,$$

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$

Пример 3. Составить уравнение эллипса, если большая полуось равна 20 и эксцентриситет $\varepsilon = 0,4$.

Решение.

Большая полуось $a = 20$, эксцентриситет $\varepsilon = 0,4$.

Воспользуемся формулой $\frac{c}{a} = \varepsilon$ и найдём c :

$$c = a\varepsilon = 20 \cdot 0,4 = 8.$$

Зная c и a , можем найти b^2 по формуле

$$b^2 = a^2 - c^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{336} = 1,$$
$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} = 1$.

Пример 4. Составить уравнение эллипса, если малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

Малая полуось $b = 3$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Для нахождения a воспользуемся формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 3^2}}{a},$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - 3^2}}{a}\right)^2,$$

$$\frac{2}{4} = \frac{a^2 - 9}{a^2},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a^2 - 9}{a^2},$$

$$a^2 = 2 \cdot (a^2 - 9),$$

$$a^2 = 2a^2 - 18,$$

$$a^2 = 18.$$

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Пример 5. Составить уравнение эллипса, если сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.

Решение.

По условию $a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b,$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4.$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (8 - b)^2 - 4^2,$$

$$b^2 = 64 - 16b + b^2 - 16,$$

$$16b = 48,$$

$$b = 3.$$

$$a = 8 - 3 = 5$$

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

2. Каноническое уравнение гиперболы

Определение 1. Гиперболой с фокусами F_1, F_2 называется множество таких точек (x, y) , что модуль разности расстояний от точки (x, y) до фокусов равна постоянному числу:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (2.1)$$

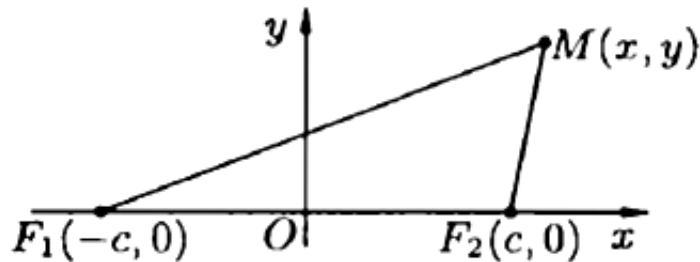


рис. 3

Фиксируем точки $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ – **фокусы**, где $c \geq 0$ (рис. 3). Тогда

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad r_1 - r_2 = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$\underline{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2 - 2xc + c^2 + y^2},$$

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$xc = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2,$$

$$\begin{aligned} \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= (xc - a^2)^2, \\ a^2((x-c)^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4, \\ a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4, \\ x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

В этом случае $c > a$, и можно разделить последнее из уравнений на $a^2(c^2 - a^2)$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Положим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Определение 2. Получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

Ось Ox проходит через фокусы, а ось Oy – через середину отрезка F_1F_2 .

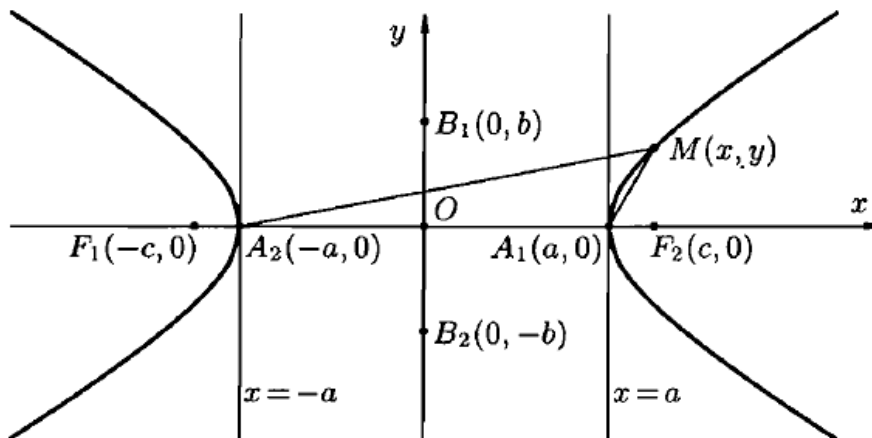


рис. 4

Оси Ox и Oy – оси симметрии гиперболы, точка $O(0,0)$ – центр симметрии гиперболы.

Определение 3. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются **вершинами** гиперболы (рис. 4).

Определение 4. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительной осью**, число a – **действительной полуосью** гиперболы.

Определение 5. Отрезок $B_1B_2 = 2b$ – мнимой осью, число b – мнимой полуосью гиперболы.

Определение 6. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется **основным прямоугольником** гиперболы.

Так как $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ или $|x| \geq a$, то точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (**правая ветвь** гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (**левая ветвь** гиперболы).

Определение 7. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем ε меньше, тем более вытянут её основной прямоугольник.

Определение 8. Кривая, определяемая уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

является гиперболой и называется **сопряжённой** к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У сопряжённой гиперболы b – действительная полуось, расположенная на оси Oy , a – мнимая полуось, расположенная на оси Ox , фокусы лежат на оси Oy и $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Сопряжённая гипербола изображена на рис. 5 пунктиром.

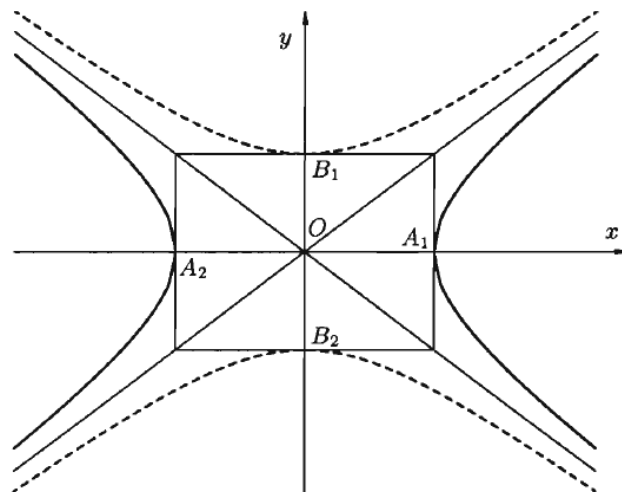


рис. 5

Определение 9. Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ и } r_2 = \varepsilon x - a, \quad (2.3)$$

для точек левой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \text{ и } r_2 = -(\varepsilon x - a). \quad (2.4)$$

Для сопряжённой гиперболы:

$$r_1 = |b - \varepsilon y|, \quad r_2 = |b + \varepsilon y|. \quad (2.5)$$

Определение 10. Директрисами гиперболы называются прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ($y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ для сопряжённой гиперболы).

Правая директриса расположена между точками O и A_1 , левая – между точками O и A_2 .

Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Определение 11. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Асимптоты проходят через вершины основного прямоугольника гиперболы (рис. 5).

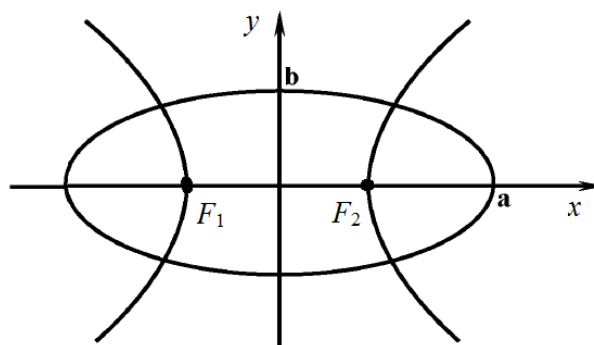
Асимптоты гипербол $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ совпадают.

В частности, гипербола называется **равносторонней**, если её полуоси равны, т.е. $a = b$. Её каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (2.6)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов, т.е. $y = \pm x$.

Пример 1. Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и имеющий фокусы в вершинах этого эллипса.



Решение.

Из уравнения эллипса следует, что вершинами эллипса являются точки $(\pm 13; 0)$ и $(0; \pm 12)$, поэтому $a = 13$, $b = 12$ и, следовательно,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25,$$

поэтому $c = 5$.

По условию задачи вершины гиперболы совпадают с фокусами эллипса, т.е. $a = c = 5$, а её фокусы – с вершинами эллипса, т.е. $c = a = 13$.

Для гиперболы

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144,$$

поэтому $b = 12$.

Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

Пример 2. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9; 8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x.$$

Решение.

Так как гипербола проходит через точку $M(9; 8)$, то её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{8^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1.$$

Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}x$, следова-

тельно, $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{\frac{8}{9}a^2} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{72}{a^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ a^2 = 9 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = 8 \\ a^2 = 9 \end{cases}.$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Пример 3. Угол между асимптотами гиперболы равен 60° . Вычислить эксцентриситет гиперболы.

Решение.

Уравнение асимптоты имеет вид $y = \pm \frac{b}{a}x$.

$$k = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ т.е. } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пусть $b = \sqrt{3}$, $a = 3$.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 9 + 3 = 12,$$

тогда $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Эксцентрисит гиперболы вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Каноническое уравнение параболы

Фиксируем прямую L (директрису) и точку F (фокус).

Определение 1. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

Определение 2. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром** параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Пусть r_1 – расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы, r_2 – расстояние от точки $M(x, y)$ до фокуса. По определению, уравнение параболы имеет вид $r_1 = r_2$.

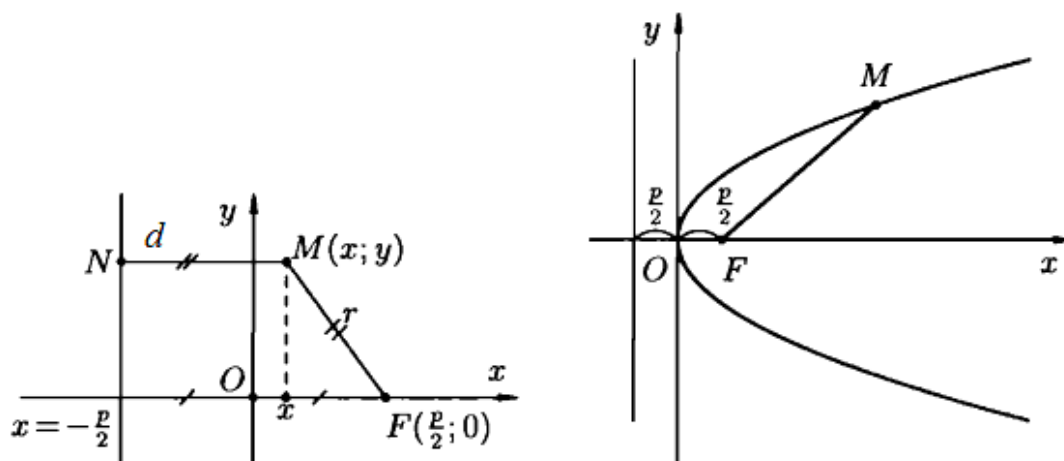


рис. 6

Возьмем в качестве директрисы вертикальную прямую, проходящую через точку $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, и возьмем фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ (рис. 6).

Тогда

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2, \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \\ x^2 + px + \frac{p^2}{4} &= x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2, \\ y^2 &= 2px \end{aligned} \tag{3.1}$$

– каноническое уравнение параболы.

Ось Ox – ось симметрии параболы.

Точка $O(0,0)$ – вершина параболы.

Определение 3. Отрезок $FM = r$ называется **фокальным радиусом точки M** (рис. 6), который вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, $r = d$, d – расстояние от точки M до директрисы (рис. 6).

Определение 4. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, ($p > 0$) определяют параболы (рис. 7).

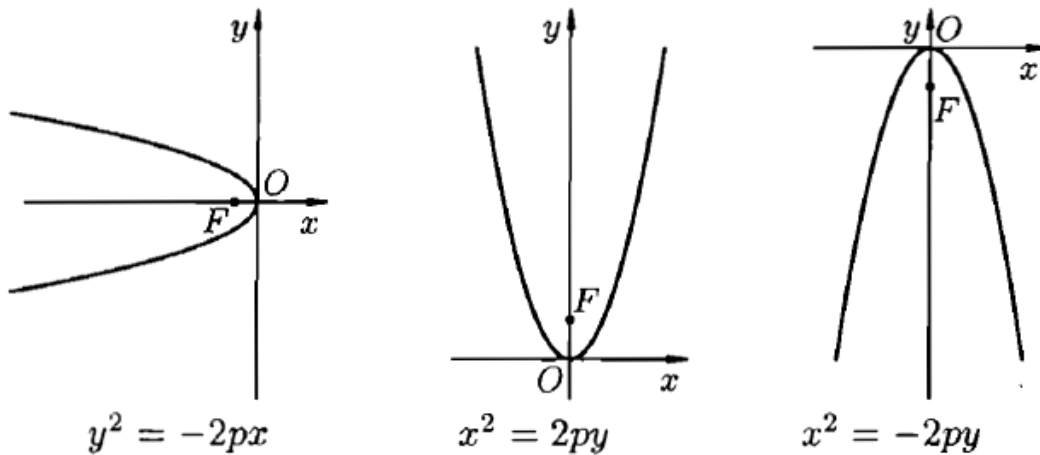


рис. 7

Пример 1. Составить уравнение параболы, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(4,-1)$ и симметричной относительно оси Ox .

Решение.

Искомое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Подставляем в него координаты точки M и получаем $(-1)^2 = 2p \cdot 4 \Rightarrow 2p = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}x$ – искомое уравнение параболы.

Ответ: $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Пример 2. Написать уравнение директрис параболы, проходящей через точки $O(0,0)$, $M(4,-1)$ и симметричной относительно оси Ox .

Решение.

Уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}, \text{ т.к. } p = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{16} \text{ – искомое уравнение директрисы.}$$

Ответ: $-\frac{1}{16}$.

Пример 3. Найти фокальный радиус вектор точки M (см. условия в примере 1).

Решение.

Фокальный радиус точки M вычисляем по формуле

$$r = x + \frac{p}{2} = 4 + \frac{1}{16} = \frac{65}{16}.$$

Ответ: $\frac{65}{16}$.

4. Матрицы. Основные определения.

Определение 1. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, которая содержит m строк одинаковой длины или n столбцов одинаковой длины.

Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} – множество вещественных (действительных) чисел.

Сокращённо матрицу обозначают $A_{m \times n} = (a_{ij})$, где

$m \times n$ – размер матрицы;

a_{ij} – элементы матрицы;

$i = 1, 2, 3, \dots, m$ – номер строки;

$j = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер столбца;

элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ образуют главную диагональ.

Определение 2. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} – множество вещественных (действительных) чисел.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n -го порядка.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

A – матрица 3-го порядка, B – матрица 2-го порядка.

Определение 3. Главной диагональю квадратной матрицы называется ее диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний. Вторая диагональ квадратной матрицы называется **побочной**.

Рассмотрим на примере квадратной матрицы 3-го порядка.

Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что любой элемент матрицы, принадлежащий главной диагонали, находится на пересечении строки и столбца с одинаковыми номерами, а значит элементы главной диагонали матрицы имеют одинаковые индексы.

Побочная диагональ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Диагональная матрица n -го порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Квадратная матрица называется **верхнетреугольной**, если все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны нулю, то есть если $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$, и называется

нижнетреугольной, если все ее элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю, то есть если $a_{ij} = 0$ при всех $i < j$.

Верхнетреугольная матрица n -го порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нижнетреугольная матрица n -го порядка имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 6. Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Т.е. к треугольным матрицам относятся все верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы.

Например,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная матрица,}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная матрица.}$$

Определение 7. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной** и обозначается E .

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8. Матрица, у которой каждый элемент равен нулю, называется **нулевой** и обозначается O .

Например,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы O и E в матричном исчислении играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение 9. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Они имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n).$$

Пример 1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Необходимо: а) выписать элементы, стоящие во второй строке;
б) выписать элементы, стоящие в третьем столбце;
в) определить размер матрицы;
г) выписать элементы, образующие главную диагональ матрицы.

Решение.

- а) 5, -2, 1, 2; б) 2, 1, 7; в) 3×4 (три строки, четыре столбца);
г) 1; -2; 7.

Пример 2. Привести пример вектора.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ – вектор-столбец, } B = (-3 \quad 2 \quad 5 \quad -9) \text{ – вектор-строка.}$$

5. Действия над матрицами.

Определение 1. Суммой матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

Например,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$
$$C_{2 \times 3} = A_{2 \times 3} + B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Разностью матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

Например,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$
$$C_{2 \times 3} = A_{2 \times 3} - B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 3 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 12 & 3 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-4) & -2+12 & 5+3 \\ 7+(-5) & -1+11 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix};$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 12 & 3 \\ -5 & 11 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-(-4) & -2-12 & 5-3 \\ 7-(-5) & -1-11 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 12 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix},$

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 12 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

Например,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad k = const.$$

$$B_{2 \times 3} = k \cdot A_{2 \times 3} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot k & a_{12} \cdot k & a_{13} \cdot k \\ a_{21} \cdot k & a_{22} \cdot k & a_{23} \cdot k \end{pmatrix}.$$

Другими словами, умножить матрицу на число — означает умножить каждый элемент заданной матрицы на это число.

Пример 2. Найти $B = k \cdot A$, если $k = -3$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение.

$$B = -3A = -3 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot (-3) & 2 \cdot (-3) & 5 \cdot (-3) \\ -9 \cdot (-3) & 3 \cdot (-3) & 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -6 & -15 \\ 27 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -15 \\ 27 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность сложения)
3. $A + O = A$
4. $A - A = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц)
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел)
8. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

A, B, C – матрицы, O – нулевая матрица, α, β – числа.

Определение 4. Произведением матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k} = (c_{ij})$, для которой каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы B :

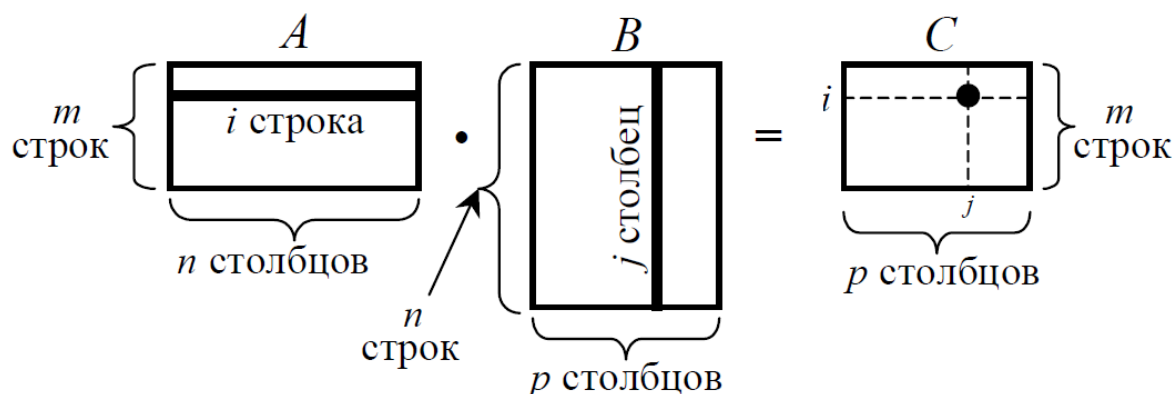
$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Например,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} C_{2 \times 2} = A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Правило вычисления элементов в произведении двух матриц можно схематически изобразить так:



Для вычисления элемента c_{ij} , находящегося на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы C , берутся i -я строка первого сомножителя и j -й столбец второго сомножителя. Составляется произведение двух элементов: первого элемента i -й строки первого сомножителя a_{i1} и верхнего элемента j -го столбца второго сомножителя b_{1j} . К этому произведению прибавляется произведение второго элемента i -й строки a_{i2} и второго сверху элемента j -го столбца b_{2j} . Затем к полученной сумме прибавляется аналогичное произведение третьих элементов i -й строки и j -го столбца и так далее, вплоть до произведения последнего элемента i -й строки a_{in} и нижнего элемента j -го столбца b_{nj} .

Так как, по определению произведения матриц, количество столбцов первого сомножителя равняется количеству строк второго сомножителя, то при такой процедуре не остается лишних элементов ни в i -й строке, ни в j -м столбце.

В результате мы получаем элемент c_{ij} матрицы C , задаваемый формулой (5.1). Аналогичным образом вычисляются все элементы этой матрицы.

Отметим, что матрица-произведение $C = A \cdot B$ имеет число строк такое же, как у первого сомножителя A , и число столбцов такое же, как у второго сомножителя B .

Замечание 2. Умножить матрицу A на матрицу B можно только тогда, когда количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B .

Определение 5. Матрицы A и B называются **перестановочными** или **коммутирующими**, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Говорят, что матрица A коммутирует с матрицей B .

Теорема. Равенство $A \cdot B = B \cdot A$ может иметь место только в случае, когда обе матрицы A и B квадратные одного порядка.

Доказательство.

Пусть даны матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{p \times q}$ и имеет место равенство $A \cdot B = B \cdot A$.

Для существования произведения $A \cdot B$ необходимо выполнение условия $n = p$.

Для существования $B \cdot A$ необходимо выполнение условия $q = m$.

Если эти условия соблюдены, то матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ имеют размерность $m \times q$ и $p \times n$ соответственно.

Матрицы равны возможно только тогда, когда они имеют одинаковое строение, поэтому из равенства $A \cdot B = B \cdot A$ следует, что $m = p$ и $q = n$.

В итоге получается, что

$$n = p, \quad q = m, \quad m = p, \quad q = n.$$

А это значит, что

$$m = n = p = q.$$

Так как матрицы A и B имеют размерность $m \times n$ и $p \times q$ соответственно, то на основании данной цепочки равенств делаем вывод, что матрицы A и B представляют собой квадратные матрицы одного и того же порядка.

Теорема доказана.

Замечание 3. Эта теорема устанавливает условие необходимое, но не достаточное для коммутирования матриц. *Не все квадратные матрицы одного и того же порядка коммутируют.*

Например,

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы одного и того же порядка 2×2 .

Найдём произведение AB :

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) & -1 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 - 8 & 8 + 14 \\ 1 - 12 & -8 + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Найдём произведение BA :

$$\begin{aligned}
 B \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 8 \cdot 3 \\ -4 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) & -4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 - 8 & -2 + 24 \\ -4 - 7 & -8 + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Получили, что $A \cdot B = B \cdot A$, т.е. матрица A коммутирует с матрицей B .

$$\text{б) } E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } F = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы одного и того же порядка 2×2 .

Найдём произведение EF :

$$\begin{aligned}
 E \cdot F &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-7) & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ -4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-7) & -4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -6 + 0 & 9 + 0 \\ 8 - 35 & -12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -27 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Найдём произведение FE :

$$\begin{aligned}
 F \cdot E &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) & -2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \\ -7 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) & -7 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -6 - 12 & 0 + 15 \\ -21 - 4 & 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 15 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -27 & -7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -18 & 15 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}.$$

Получили, что $E \cdot F \neq F \cdot E$, т.е. матрицы E и F не коммутируют.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$
4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$
6. $A \cdot O = O \cdot A = O$

A, B, C – матрицы,

E – единичная матрица,

O – нулевая матрица, α – число.

Пример 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти а) $A \cdot B$;

б) $B \cdot A$.

$$\begin{aligned} \text{а) } A \cdot B &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \\ 5 \cdot 4 + 7 \cdot (-6) & 5 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -22 & -7 \\ -22 & -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } B \cdot A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \\ -6 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 & -6 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ -4 & -32 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: а) } A \cdot B = \begin{pmatrix} -22 & -7 \\ -22 & -9 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ -4 & -32 \end{pmatrix}.$$

Замечание 4. Умножение матриц некоммутативно, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$, поэтому при перемножении матриц нельзя менять их местами.

Пример 4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = A \cdot B$.

Матрица A размера 3×4 , т.е. три строки и четыре столбца.

Матрица B размера 4×3 , т.е. четыре строки и три столбца.

$$A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} = C_{3 \times 2}$$

В результате произведения матриц A и B мы должны получить матрицу C , состоящую из трёх строк и двух столбцов:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

Начнём с элемента c_{11} . Чтобы получить элемент c_{11} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A и первого столбца матрицы B :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = -1 \cdot (-9) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 7 + 0 \cdot 12 = 0.$$

Найдём элемент c_{12} . Чтобы получить элемент c_{12} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A и второго столбца матрицы B :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 20 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 37.$$

Все элементы первой строки матрицы C найдены.

Найдём элемент c_{21} . Чтобы получить элемент c_{21} нужно найти сумму произведений элементов второй строки матрицы A и первого столбца матрицы B :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = 5 \cdot (-9) + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 12 = -23.$$

Найдём элемент c_{22} . Чтобы получить элемент c_{22} нужно найти сумму произведений элементов второй строки матрицы A и второго столбца матрицы B :

$$c_{22} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 20 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = 91.$$

Все элементы второй строки матрицы C найдены.

Найдём элемент c_{31} . Чтобы получить элемент c_{31} нужно найти сумму произведений элементов третьей строки матрицы A и первого столбца матрицы B :

$$c_{31} = -8 \cdot (-9) + 11 \cdot 6 + (-10) \cdot 7 + (-5) \cdot 12 = 8.$$

Найдём элемент c_{32} . Чтобы получить элемент c_{32} нужно найти сумму произведений элементов третьей строки матрицы A и первого столбца матрицы B :

$$c_{32} = -8 \cdot 3 + 11 \cdot 20 + (-10) \cdot 0 + (-5) \cdot (-4) = 216.$$

Все элементы третьей строки матрицы C найдены.

Тогда матрица C примет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 37 \\ -23 & 91 \\ 8 & 216 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 0 & 37 \\ -23 & 91 \\ 8 & 216 \end{pmatrix}.$

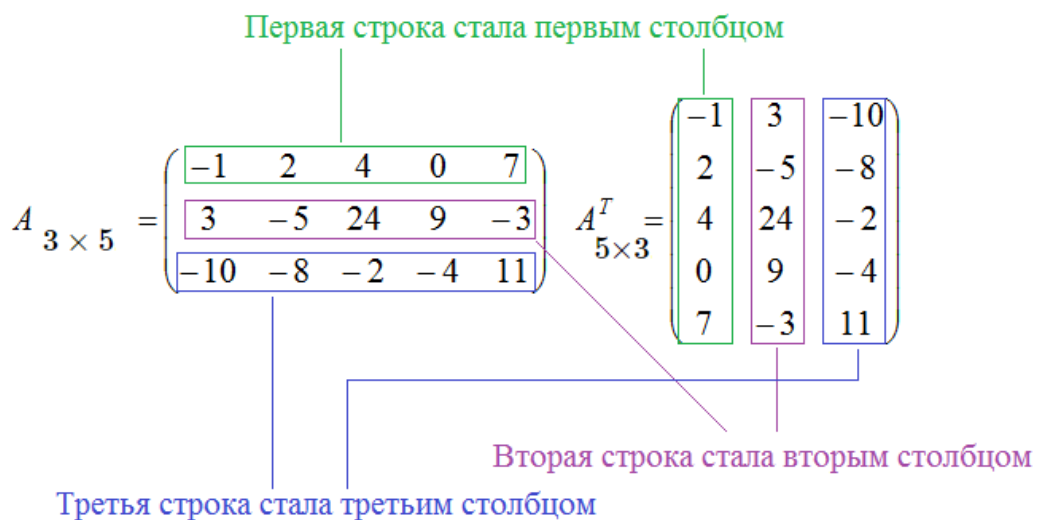
Определение 6. Транспонированной по отношению к матрице $A_{m \times n} = (a_{ij})$ называется матрица $A^T_{n \times m} = (a^T_{ij})$, для элементов $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
4. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

A, B – матрицы, α – число.

Пример 5.



Определение 7. (Возведение матрицы в степень.) Пусть k – целое неотрицательное число. Для любой квадратной матрицы $A_{n \times n}$ имеем: $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}$.

Для любой квадратной матрицы A произведение ее на саму себя существует и является квадратной матрицей того же порядка. Если полученное произведение умножить на матрицу A , то снова получится квадратная матрица того же порядка, что и исходная. Этот процесс можно повторять любое число раз. Результатом всегда будет квадратная матрица такого же порядка, что и исходная матрица A .

В силу ассоциативности операции умножения матриц, произведение $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (при любом числе сомножителей) не зависит от способа расстановки в нем скобок, поэтому при рассмотрении степеней квадратной матрицы скобки не пишут.

Замечание 5. $A^0 = E$, где E – единичная матрица.

Пример 6. Задана матрица

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A^2 ;

б) $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти B^3 .

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 15 & -3 + 6 \\ -5 + 10 & 15 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) $B^3 = B \cdot B \cdot B$

$$\begin{aligned} B^2 = B \cdot B &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 & -4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 + 0 & -4 + 3 \\ 0 + 0 & 0 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^3 &= B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 16 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 & 16 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot (-4) + 9 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 9 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 + 0 & 16 - 3 \\ 0 + 0 & 0 + 27 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -64 & 13 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} -64 & 13 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

Определение 8. Линейной комбинацией матриц A_1, A_2, \dots, A_k одного и того же размера называется выражение вида

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – произвольные числа, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$.

Определение 9. Пусть заданы квадратная матрица A и многочлен от переменной x

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – произвольные числа. Тогда выражение

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + a_2 A^{m-2} + \dots + a_{m-2} A^2 + a_{m-1} A + a_m E$$

называется **многочленом от матрицы A** .

Последнее выражение определено для любой квадратной матрицы A и представляет собой квадратную матрицу такого же порядка, что и порядок матрицы A . В этом многочлене от матрицы последнее слагаемое имеет вид $a_m E$ (а не просто a_m , как в многочлене от переменной x). Это обусловлено тем, что все остальные слагаемые являются матрицами, поэтому к ним нельзя прибавить число, а только другую матрицу того же порядка. Многочлен от матрицы называют также **матричным многочленом**.

Пример 7. Вычислить значение матричного многочлена

$$f(A) = A^3 - 2A^2 + 3A - 4E, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \\ A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + (-8) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) + (-8) \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Затем вычисляем матричный многочлен:

$$\begin{aligned}f(A) &= A^3 - 2A^2 + 3A - 4E = \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -8 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Единичная матрица E берётся второго порядка, т.к. матрица A второго порядка. При вычислении многочлена необходимо умножить матрицу на число и только после этого складывать и вычитать матрицы.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Вычислить значение матричного многочлена

$$A^2 - 2A \cdot E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-5) & -1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) & -2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -5 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) & -5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & -5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 6 - 20 & -3 + 0 + 8 & -4 + 3 + 4 \\ 2 + 0 - 5 & -6 + 0 + 2 & -8 + 0 + 1 \\ 5 - 4 - 5 & -15 + 0 + 2 & -20 + 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & -7 \\ -4 & -13 & -17 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ -5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & 2 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^2 - 2A \cdot E = \begin{pmatrix} -25 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & -7 \\ -4 & -13 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & 2 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -25+2 & 5-6 & 3-8 \\ -3+4 & -4-0 & -7-2 \\ -4+10 & -13-4 & -17-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & -9 \\ 6 & -17 & -19 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} -23 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & -9 \\ 6 & -17 & -19 \end{pmatrix}$$

Пример 9. Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -20 & 13 \\ 10 & 12 & 9 \\ 3 & -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $D = 2AB - 3C^T + 7E$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-9) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-9) + (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \\ -1 \cdot (-9) + 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9+0+0+2 & 1+0+2+10 & 0+0-3+0 \\ -27-4+0+0 & 3+2-10+0 & 0-8+15+0 \\ 9+8+0+6 & -1-4+6+30 & 0+16-9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 13 & -3 \\ -31 & -5 & 7 \\ 23 & 31 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2AB = 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 & 13 & -3 \\ -31 & -5 & 7 \\ 23 & 31 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \cdot 2 & 13 \cdot 2 & -3 \cdot 2 \\ -31 \cdot 2 & -5 \cdot 2 & 7 \cdot 2 \\ 23 \cdot 2 & 31 \cdot 2 & 7 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 26 & -6 \\ -62 & -10 & 14 \\ 46 & 62 & 14 \end{pmatrix},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ -20 & 12 & -15 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot C^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 10 & 3 \\ -20 & 12 & -15 \\ 13 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 3 & 10 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ -20 \cdot 3 & 12 \cdot 3 & -15 \cdot 3 \\ 13 \cdot 3 & 9 \cdot 3 & 8 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 30 & 9 \\ -60 & 36 & -45 \\ 39 & 27 & 24 \end{pmatrix},$$

$$7 \cdot E = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$D = 2AB - 3C^T + 7E =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 26 & -6 \\ -62 & -10 & 14 \\ 46 & 62 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 & 30 & 9 \\ -60 & 36 & -45 \\ 39 & 27 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 - (-15) + 7 & 26 - 30 + 0 & -6 - 9 + 0 \\ -62 - (-60) + 0 & -10 - 36 + 7 & 14 - (-45) + 0 \\ 46 - 39 + 0 & 62 - 27 + 0 & 14 - 24 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -15 \\ -2 & -39 & 59 \\ 7 & 35 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 8 & -4 & -15 \\ -2 & -39 & 59 \\ 7 & 35 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. Заданы $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$ и матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $f(A)$.

Решение.

$$f(A) = 2A^2 + 3A - 9E = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 5 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 3 & 0 \cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 & 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 9 & 1 \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -15 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \cdot 2 & -3 \cdot 2 \\ -15 \cdot 2 & 5 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & -6 \\ -30 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 - 9 - 9 & -6 + 3 - 0 \\ -30 + 15 - 0 & 10 + 0 - 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 10. Элементарными преобразованиями матриц являются:

1) перестановка местами двух строк или двух столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix};$$

2) умножение всех элементов матрицы на число, отличное от нуля

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0;$$

3) прибавление ко всем элементам строки или столбца матрицы соответствующих элементов другой строки или другого столбца, умноженных на одно и то же число.

Определение 11. Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначается $A \sim B$.

Определение 12. Матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю, называется **канонической**.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каноническую матрицу можно получить с помощью элементарных преобразований.

Пример 11. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Выполним элементарные преобразования.

Подробно распишем каждый шаг.

Для того чтобы на главной диагонали первая стояла единица, поменяем местами 1-й и 3-й столбцы, получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обнулим в первом столбце элементы, стоящие ниже главной диагонали. Когда мы обнуляем эти элементы, работаем только с первой строкой. Для этого

1) сложим 1-ю и 2-ю строки, результат запишем во 2-ю строку

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \\ + \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

2) умножим 1-ю строку на (-5) и прибавим к 3-й, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{array}{r} -5 \quad -15 \quad -10 \quad -10 \\ + \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -15 \quad -6 \quad -9 \end{array}$$

Получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Умножим 3-ю строку на $\frac{1}{3}$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обнулим в первой строке элементы, стоящие после главной диагонали. Для этого

1) умножим 1-й столбец на (-3) и прибавим ко 2-ому, результат запишем во 2-й столбец

$$\begin{array}{r} -3 \quad 3 \quad | \quad 0 \\ 0 \quad 5 \quad | \quad 5 ; \\ 0 \quad -5 \quad | \quad -5 \end{array}$$

2) умножим 1-й столбец на (-2) и прибавим к 3-ему, результат запишем в 3-й столбец

$$\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 ; \\ 0 & -2 & -2 \end{array}$$

3) умножим 1-й столбец на (-2) и прибавим к 4-ому, результат запишем в 4-й столбец

$$\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 . \\ 0 & -3 & -3 \end{array}$$

После этой серии элементарных преобразований получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Умножим 2-й столбец на $\frac{1}{5}$, 3-й – на $\frac{1}{2}$, 4-й – на $\frac{1}{3}$, получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сложим 2-ю и 3-ю строки, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обнулим элементы во второй строке, стоящие после главной диагонали. Для этого:

1) умножим 2-й столбец на (-1) и прибавим к 3-ему, результат запишем в 3-й столбец

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 ; \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2) умножим 2-й столбец на (-1) и прибавим к 4-ому, результат запишем в 4-й столбец

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Окончательно получим каноническую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение этого примера необходимо записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I \text{ стр.} + II \text{ стр.} \\ I \text{ стр.} \cdot (-5) + III \text{ стр.} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ III \text{ стр.} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

I ст. * (-3) + II ст.
I ст. * (-2) + III ст.
I ст. * (-2) + IV ст.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Определители и их свойства

Определение 1. Определителем 1-го порядка называется число $\det(a_{11}) = a_{11}$ (determinant = определитель).

Определение 2. Определителем 2-го порядка называется число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

где со знаком плюс берутся произведения элементов матрицы, обо-

значенных символом \oplus : $\begin{vmatrix} \oplus & \circ \\ \circ & \oplus \end{vmatrix}$,

со знаком минус берутся произведения элементов матрицы, обозна-

ченных символом \ominus : $\begin{vmatrix} \circ & \ominus \\ \ominus & \circ \end{vmatrix}$.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = -6 - 7 = -13.$$

Ответ: -13.

Определение 3. Определителем 3-го порядка называется число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

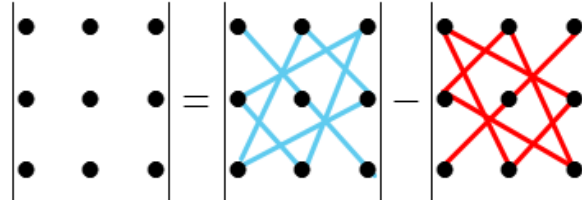
где со знаком плюс берутся произведения элементов матрицы, обо-
значенных символом \oplus :

$$\begin{vmatrix} \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \end{vmatrix},$$

со знаком минус берутся произведения элементов матрицы, обозна-
ченных символом \ominus :

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \ominus \\ \circ & \ominus & \circ \\ \ominus & \circ & \circ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \circ & \ominus & \circ \\ \ominus & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \ominus \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \ominus & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \ominus \\ \circ & \ominus & \circ \end{vmatrix}.$$

Это правило называют **правилом треугольника**. Для запоминания его удобно изобразить схематично:



Определитель представляет собой сумму шести слагаемых, три из которых берутся со знаком плюс и три — со знаком минус. Каждое слагаемое есть произведение трех элементов матрицы. Произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, и два произведения элементов, расположенных в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и с вершинами в противоположных углах, берутся со знаком плюс. Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Так составленная сумма из шести слагаемых (из которых три взяты с плюсом, а другие три — с минусом) и есть определитель квадратной матрицы третьего порядка.

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ по правилу

треугольника.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 \cdot 3 + (-8) \cdot (-1) \cdot 2 + (-5) \cdot 4 \cdot (-7) - \\ - (-5) \cdot 12 \cdot 2 - (-8) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-7) = \\ = 36 + 16 + 140 + 120 + 96 - 7 = 401.$$

Ответ: 401.

Удобно считать определитель третьего порядка, используя **правило Саррюса** (французский математик). Оно отличается от правила треугольника только наглядностью. Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс" (синие стрелки); а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус" (красные стрелки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ по правилу

Саррюса.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -8 \\ 4 & 12 \\ 2 & -7 \end{matrix} = 1 \cdot 12 \cdot 3 + (-8) \cdot (-1) \cdot 2 + (-5) \cdot 4 \cdot (-7) -$$

$$- (-5) \cdot 12 \cdot 2 - (-8) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-7) =$$

$$= 36 + 16 + 140 + 120 + 96 - 7 = 401.$$

Ответ: 401.

Определение 4. Определителем n -го порядка называется число

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
 & = (-1)^{i+1} a_{i1} \det \begin{pmatrix} *_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ *_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \\
 & + (-1)^{i+2} a_{i2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & *_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & *_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & *_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \dots + \\
 & + (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & *_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & *_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & *_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \dots +
 \end{aligned}$$

$$+(-1)^{i+n} a_{in} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & *_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & *_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & *_{nn} \end{pmatrix},$$

где вычеркнуты i -ая строка и последовательно вычеркиваются столбцы с номерами $1, 2, \dots, j, \dots, n$.

Мы будем обозначать определитель матрицы A через

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы, т.е. при замене строк на столбцы, и наоборот.

Доказательство (в случае $n = 2$).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. Кососимметричность: если в матрице поменять местами две строки или два столбца, то её определитель умножится на (-1) .

Доказательство (в случае $n = 2$).

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Линейность по строке (столбцу).

а) Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель раскладывается на сумму двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \\ & = a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) = [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] + [a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}] = \\ & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

б) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\lambda a_{22} - a_{12}\lambda a_{21} = \lambda[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] = \\ & = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Свойство 4. Если в квадратной матрице есть две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Обозначим определитель матрицы через d . Если поменять местами две одинаковые строки, то определитель матрицы умножится на (-1) ; с другой стороны, он не изменится, потому что матрица не изменилась. Значит, $(-1) \cdot d = d$, поэтому $2 \cdot d = 0$. Поскольку $d \in \mathbb{R}$, то мы получаем соотношение $d = 0$.

Определение 5. Минором элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij} .

Рассмотрим на примере определителя третьего порядка, заданного в общем виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{11} . Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \color{blue}{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и в первом столбце. Вычеркиваем первую строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{12} . Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и во втором столбце. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{13} . Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и в третьем столбце. Вычеркиваем первую строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{21} . Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \textcircled{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и в первом столбце. Вычеркиваем вторую строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{22} . Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \textcircled{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и во втором столбце. Вычеркиваем вторую строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{23} . Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \textcircled{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и в третьем столбце. Вычеркиваем вторую строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{31} . Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \textcircled{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и в первом столбце. Вычеркиваем третью строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{32} . Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \textcircled{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и во втором столбце. Вычеркиваем третью строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Найдём минор для элемента a_{33} . Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \textcircled{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и в третьем столбце. Вычеркиваем третью строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Найти все миноры.

Решение.

Найдём минор для элемента $a_{11} = 1$. Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и в первом столбце. Вычеркиваем первую строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = 45 - 48 = -3.$$

Найдём минор для элемента $a_{12} = 2$. Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \textcircled{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и во втором столбце. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = 36 - 42 = -6.$$

Найдём минор для элемента $a_{13} = 3$. Выделим этот элемент синим кружком.

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \textcircled{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix}$$

Он стоит в первой строке и в третьем столбце. Вычеркиваем первую строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = 32 - 35 = -3.$$

Найдём минор для элемента $a_{21} = 4$. Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и в первом столбце. Вычеркиваем вторую строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 = 18 - 24 = -6.$$

Найдём минор для элемента $a_{22} = 5$. Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и во втором столбце. Вычеркиваем вторую строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = 9 - 21 = -12.$$

Найдём минор для элемента $a_{23} = 6$. Выделим этот элемент зелёным кружком.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Он стоит во второй строке и в третьем столбце. Вычеркиваем вторую строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 8 - 14 = -6.$$

Найдём минор для элемента $a_{31} = 7$. Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ \underline{4} & 5 & 6 \\ \textcircled{7} & \underline{8} & \underline{9} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и в первом столбце. Вычеркиваем третью строку и первый столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3.$$

Найдём минор для элемента $a_{32} = 8$. Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} 1 & \underline{2} & 3 \\ 4 & \underline{5} & 6 \\ \underline{7} & \textcircled{8} & \underline{9} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и во втором столбце. Вычеркиваем третью строку и второй столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6.$$

Найдём минор для элемента $a_{33} = 9$. Выделим этот элемент красным кружком.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \underline{3} \\ 4 & 5 & \underline{6} \\ \underline{7} & \underline{8} & \textcircled{9} \end{vmatrix}$$

Он стоит в третьей строке и в третьем столбце. Вычеркиваем третью строку и третий столбец. Оставшиеся числа выписываем и получаем определитель 2-го порядка

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3.$$

Ответ: $M_{11} = -3, M_{12} = -6, M_{13} = -3,$
 $M_{21} = -6, M_{22} = -12, M_{23} = -6,$
 $M_{31} = -3, M_{32} = -6, M_{33} = -3.$

Определение 6. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где $i + j$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент. Обозначается A_{ij} .

Рассмотрим на примере определителя третьего порядка, заданного в общем виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{11} , необходимо минор M_{11} умножить на $(-1)^{1+1}$, где $(1 + 1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{12} , необходимо минор M_{12} умножить на $(-1)^{1+2}$, где $(1 + 2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{13} , необходимо минор M_{13} умножить на $(-1)^{1+3}$, где $(1 + 3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{21} , необходимо минор M_{21} умножить на $(-1)^{2+1}$, где $(2 + 1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{22} , необходимо минор M_{22} умножить на $(-1)^{2+2}$, где $(2+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} , необходимо минор M_{23} умножить на $(-1)^{2+3}$, где $(2+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{31} , необходимо минор M_{31} умножить на $(-1)^{3+1}$, где $(3+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{32} , необходимо минор M_{32} умножить на $(-1)^{3+2}$, где $(3+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента a_{33} , необходимо минор M_{33} умножить на $(-1)^{3+3}$, где $(3+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример 5. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$. Найти все алгеб-

раические дополнения.

Решение.

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{11} = 1$, необходимо минор M_{11} умножить на $(-1)^{1+1}$, где $(1+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - (-1) \cdot (-4) = 35 - 4 = 31$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{12} = -2$, необходимо минор M_{12} умножить на $(-1)^{1+2}$, где $(1+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 7 - (-1) \cdot 2) = -(21 + 2) = -23$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{13} = 0$, необходимо минор M_{13} умножить на $(-1)^{1+3}$, где $(1+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -12 - 10 = -22$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{21} = 3$, необходимо минор M_{21} умножить на $(-1)^{2+1}$, где $(2+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 7 - 0 \cdot (-4)) = -(-14 + 0) = 14$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{22} = 5$, необходимо минор M_{22} умножить на $(-1)^{2+2}$, где $(2+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 0 \cdot 2 = 7 - 0 = 7$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{23} = -1$, необходимо минор M_{23} умножить на $(-1)^{2+3}$, где $(2+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2) = -(-4 + 4) = 0$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{31} = 2$, необходимо минор M_{31} умножить на $(-1)^{3+1}$, где $(3+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 0 \cdot 5 = 2 - 0 = 2$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{32} = -4$, необходимо минор M_{32} умножить на $(-1)^{3+2}$, где $(3+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 3) = -(-1 - 0) = 1$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{33} = 7$, необходимо минор M_{33} умножить на $(-1)^{3+3}$, где $(3+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11.$$

$$\text{Ответ: } A_{11} = 31, A_{12} = -23, A_{13} = -22,$$

$$A_{21} = 14, A_{22} = 7, A_{23} = 0,$$

$$A_{31} = 2, A_{32} = 1, A_{33} = 11.$$

Свойство 5 (*Разложение определителя по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца*). Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или какого-либо столбца на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
& a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \\
& = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
& = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{12} \cdot (-(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31})) + \\
& + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = \\
& = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\
& + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
& = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\
& - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
& = \{ \text{используем определение 3} \} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Свойство 5 используют для вычисления определителей высоких порядков.

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$, разложив

его по элементам второго столбца.

Решение.

Для вычисления определителя воспользуемся свойством 5.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \\
& = (-8) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{12} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{12}}} + 12 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{22} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{22}}} + (-7) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{32} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{32}}} = \\
& = (-8) \cdot (-1)^3 \cdot (4 \cdot 3 - (-1) \cdot 2) + 12 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 3 - (-5) \cdot 2) + \\
& + (-7) \cdot (-1)^5 \cdot (1 \cdot (-1) - (-5) \cdot 4) =
\end{aligned}$$

$$= 8 \cdot (12 + 2) + 12 \cdot (3 + 10) + 7 \cdot (-1 + 20) = 8 \cdot 14 + 12 \cdot 13 + 7 \cdot 19 = 112 + 156 + 133 = 401.$$

Ответ: 401.

Пример 7. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix},$$
 разло-

жив его по элементам каждой строки и каждого столбца:

Решение.

Для вычисления определителя воспользуемся свойством 5.

1. Разложим определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{11}
} алгебраическое дополнение A_{11}

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{12}
} алгебраическое дополнение A_{12}

$$+ 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{13}
} алгебраическое дополнение A_{13}

$$+(-5) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{14} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{14}}} =$$

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned} &= -3 \cdot (-1)^2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 5) + \\ &+ 2 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) \cdot 6 - 0 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 6 - \\ &- 1 \cdot (-4) \cdot 5) + \\ &+ 4 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - \\ &- 3 \cdot (-4) \cdot 5) + \\ &+ (-5) \cdot (-1)^5 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) \cdot 0 - 1 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 0 - \\ &- 3 \cdot (-4) \cdot 6) = \\ &= -3 \cdot (45 + 0 + 0 - 0 + 18 - 25) - \\ &- 2 \cdot (15 + 2 + 0 - 0 + 6 + 20) + \\ &+ 4 \cdot (25 + 6 + 0 - 0 - 0 + 60) + \\ &+ 5 \cdot (30 - 18 + 0 + 10 - 0 + 72) = \\ &= -3 \cdot 38 - 2 \cdot 43 + 4 \cdot 91 + 5 \cdot 94 = \\ &= -114 - 86 + 364 + 470 = 634 \end{aligned}$$

Ответ: 634.

2. Разложим определитель по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{21} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{21}}} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{22} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{22}}} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{23} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{23}}} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{24} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{24}}} =$$

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 5 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 6 - 4 \cdot 5 \cdot 5) + \\ &+ 3 \cdot (-1)^4 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-4) \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \cdot (-2) - \\ &- (-3) \cdot (-1) \cdot 6 - 4 \cdot (-4) \cdot 5) + \\ &+ 1 \cdot (-1)^5 \cdot (-3 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-4) \cdot 0 - (-5) \cdot 5 \cdot (-2) - \\ &- (-3) \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-4) \cdot 5) + 0 = \\ &= -1 \cdot (30 + 0 - 150 - 0 + 12 - 100) + \\ &+ 3 \cdot (-45 + 8 + 120 - 30 - 18 + 80) - \\ &- 1 \cdot (-75 + 4 + 0 - 50 - 0 + 40) = \\ &= -1 \cdot (-208) + 3 \cdot 115 - 1 \cdot (-81) = 208 + 345 + 81 = 634 \end{aligned}$$

Ответ: 634.

3. Разложим определитель по элементам третьей строки

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} +$$

минор M_{31}
алгебраическое
дополнение A_{31}

$$+ 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} +$$

минор M_{32}
алгебраическое
дополнение A_{32}

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

минор M_{33}
алгебраическое
дополнение A_{33}

$$+ (-1) \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

минор M_{34}
алгебраическое
дополнение A_{34}

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$= -4 \cdot (-1)^4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + (-5) \cdot 3 \cdot 6 - (-5) \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 5) +$$

$$+ 5 \cdot (-1)^5 \cdot (-3 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 \cdot 6 - (-5) \cdot 1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 0 \cdot 6 -$$

$$\begin{aligned}
& -4 \cdot 1 \cdot 5) + \\
& + 3 \cdot (-1)^6 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 \cdot 0 - (-5) \cdot 3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 0 \cdot 0 - \\
& - 2 \cdot 1 \cdot 5) + \\
& + (-1) \cdot (-1)^7 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \cdot 0 - \\
& - 2 \cdot 1 \cdot 6) = \\
& = -4 \cdot (10 + 0 - 90 - 0 - 0 - 60) - \\
& - 5 \cdot (-15 + 0 - 30 - 10 + 0 - 20) + \\
& + 3 \cdot (-45 + 0 + 0 - 30 - 0 - 10) + \\
& + (-54 - 4 + 0 + 24 - 0 - 12) = \\
& = -4 \cdot (-140) - 5 \cdot (-75) + 3 \cdot (-85) - 46 = \\
& = 560 + 375 - 255 - 46 = 634
\end{aligned}$$

Ответ: 634.

4. Разложим определитель по элементам четвёртой строки

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{41}
} алгебраическое дополнение A_{41}

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{42}
} алгебраическое дополнение A_{42}

$$+ 6 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{43}
} алгебраическое дополнение A_{43}

$$+ 5 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{44} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{44}}} =$$

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot (-1)^5 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \cdot 3 - (-5) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)) + \\
& + 0 + \\
& + 6 \cdot (-1)^7 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-4) + (-5) \cdot 1 \cdot 5 - (-5) \cdot 3 \cdot (-4) - (-3) \cdot 0 \cdot 5 - \\
& - 2 \cdot 1 \cdot (-1)) + \\
& + 5 \cdot (-1)^8 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-3) \cdot 1 \cdot 5 - \\
& - 2 \cdot 1 \cdot 3) = \\
& = 2 \cdot (-2 + 0 - 45 + 25 - 0 + 12) - \\
& - 6 \cdot (9 + 0 - 25 - 60 - 0 + 2) + \\
& + 5 \cdot (-27 - 8 + 20 + 48 + 15 - 6) + \\
& = 2 \cdot (-10) - 6 \cdot (-74) + 5 \cdot 42 = -20 + 444 + 210 = 634
\end{aligned}$$

Ответ: 634.

5. Разложим определитель по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{11} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{11}}} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{21} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{21}}} +$$

$$\begin{aligned}
& + (-4) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{31} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{31}}} + \\
& + (-2) \cdot (-1)^{4+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{41} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{41}}} =
\end{aligned}$$

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned}
& = -3 \cdot (-1)^2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 5) + \\
& + 1 \cdot (-1)^3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 5 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 6 - \\
& - 4 \cdot 5 \cdot 5) + \\
& + (-4) \cdot (-1)^4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + (-5) \cdot 3 \cdot 6 - (-5) \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 5) + \\
& + (-2) \cdot (-1)^5 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \cdot 3 - (-5) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - \\
& - 4 \cdot 3 \cdot (-1)) = \\
& = -3 \cdot (45 + 0 + 0 - 0 + 18 - 25) - \\
& - 1 \cdot (30 + 0 - 150 - 0 + 12 - 100) - \\
& - 4 \cdot (10 + 0 - 90 - 0 - 0 - 60) + \\
& + 2 \cdot (-2 + 0 - 45 + 25 - 0 + 12) = \\
& = -3 \cdot 38 - 1 \cdot (-208) - 4 \cdot (-140) + 2 \cdot (-10) = -114 + 208 + 560 - 20 = 634
\end{aligned}$$

Ответ: 634.

6. Разложим определитель по элементам второго столбца

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{12} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{12}}} +
\end{aligned}$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{минор } M_{22}} +$$

алгебраическое дополнение A_{22}

$$+ 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{минор } M_{32}} +$$

алгебраическое
дополнение A_{32}

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{минор } M_{42}} =$$

алгебраическое
дополнение A_{42}

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot (-1)^3 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) \cdot 6 - 0 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 6 - \\ & - 1 \cdot (-4) \cdot 5) + \\ &+ 3 \cdot (-1)^4 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-4) \cdot 6 - (-5) \cdot 3 \cdot (-2) - \\ & - (-3) \cdot (-1) \cdot 6 - 4 \cdot (-4) \cdot 5) + \\ &+ 5 \cdot (-1)^5 \cdot (-3 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 \cdot 6 - (-5) \cdot 1 \cdot (-2) - (-3) \cdot 0 \cdot 6 - \\ & - 4 \cdot 1 \cdot 5) + \\ &+ 0 + \\ &= -2 \cdot (15 + 2 + 0 - 0 + 6 + 20) + \\ &+ 3 \cdot (-45 + 8 + 120 - 30 - 18 + 80) - \\ &- 5 \cdot (-15 + 0 - 30 - 10 - 0 - 20) = \\ &= -2 \cdot 43 + 3 \cdot 115 - 5 \cdot (-75) = \\ &= -86 + 345 + 375 = 634 \end{aligned}$$

Ответ: 634.

7. Разложим определитель по элементам третьего столбца

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{13}
} алгебраическое дополнение A_{13}

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{23}
} алгебраическое дополнение A_{23}

$$+ 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

} минор M_{33}
} алгебраическое дополнение A_{33}

$$+ 6 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

} минор M_{43}
} алгебраическое дополнение A_{43}

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$= 4 \cdot (-1)^4 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 3 \cdot (-4) \cdot 5) +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^7 \cdot (-3 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-4) \cdot 0 - (-5) \cdot 5 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-4) \cdot 5) +$$

$$\begin{aligned}
&+ 3 \cdot (-1)^6 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 \cdot 0 - (-5) \cdot 3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 0 \cdot 0 - \\
&- 2 \cdot 1 \cdot 5) + \\
&+ 6 \cdot (-1)^7 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-4) + (-5) \cdot 1 \cdot 5 - (-5) \cdot 3 \cdot (-4) - (-3) \cdot 0 \cdot 5 - \\
&- 2 \cdot 1 \cdot (-1)) = \\
&= 4 \cdot (25 + 6 + 0 - 0 - 0 + 60) - \\
&- 1 \cdot (-75 + 4 + 0 - 50 - 0 + 40) + \\
&+ 3 \cdot (-45 + 0 + 0 - 30 - 0 - 10) - \\
&- 6 \cdot (9 + 0 - 25 - 60 - 0 + 2) = \\
&= 4 \cdot 91 - 1 \cdot (-81) + 3 \cdot (-85) - 6 \cdot (-74) = \\
&= 364 + 81 - 255 + 444 = 634
\end{aligned}$$

Ответ: 634.

8. Разложим определитель по элементам четвёртого столбца

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} +$$

{ минор M_{14} }
{ алгебраическое дополнение A_{14} }

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} +$$

{ минор M_{24} }
{ алгебраическое дополнение A_{24} }

$$+ (-1) \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} +$$

{ минор M_{34} }
{ алгебраическое дополнение A_{34} }

$$+ 5 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{минор } M_{44} \\ \text{алгебраическое} \\ \text{дополнение } A_{44}}} =$$

= {определители третьего порядка вычислим по правилу треугольника} =

$$\begin{aligned} & -5 \cdot (-1)^5 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) \cdot 0 - 1 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) \cdot 6) + \\ & + 0 + \\ & + (-1) \cdot (-1)^7 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \cdot 0 + \\ & - 2 \cdot 1 \cdot 6) + \\ & + 5 \cdot (-1)^8 \cdot (-3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-3) \cdot 1 \cdot 5 - \\ & - 2 \cdot 1 \cdot 3) = \\ & = 5 \cdot (30 - 18 + 0 + 10 - 0 + 72) + \\ & + (-54 - 4 + 0 + 24 - 0 - 12) + \\ & + 5 \cdot (-27 - 8 + 20 + 48 + 15 - 6) = \\ & = 5 \cdot 94 - 46 + 5 \cdot 42 = \\ & = 470 - 46 + 210 = 634 \end{aligned}$$

Ответ: 634.

Свойство 6. Сумма произведений элементов какой-либо строки или какого-либо столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки или другого столбца равна нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = \\ & = a_{11} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \cdot (- (a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32})) + a_{12} \cdot (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) + \\
&+ a_{13} \cdot (- (a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31})) = \\
&= -a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{11} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{31} - \\
&- a_{13} \cdot a_{11} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{12} \cdot a_{31} = 0
\end{aligned}$$

Разберём ещё один способ вычисления определителей высоких порядков. Необходимо исходный определитель с помощью элементарных преобразований привести к треугольному виду, тогда он будет равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24}^* \\ 0 & 0 & a_{33}^* & a_{34}^* \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^* \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^* \cdot a_{33}^* \cdot a_{44}^* .$$

Пример 8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$, приведя его

к треугольному виду.

Решение.

Выполним элементарные преобразования.

Подробно распишем каждый шаг.

Обнулим в первом столбце элементы, стоящие ниже главной диагонали. Когда мы обнуляем эти элементы, работаем только с первой строкой. Для этого

1) умножим 1-ю строку на (-4) и прибавим к ней 2-ю строку, результат запишем во 2-ю строку

$$\begin{array}{r}
-4 \quad 32 \quad 20 \\
+ \quad 4 \quad 12 \quad -1 \\
\hline
0 \quad 44 \quad 19
\end{array}$$

2) умножим 1-ю строку на (-2) и прибавим к 3-й, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{array}{r}
-2 \quad 16 \quad 10 \\
+ \quad 2 \quad -7 \quad 3 \\
\hline
0 \quad 9 \quad 13
\end{array}$$

Получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 0 & 44 & 19 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix}.$$

Осталось обнулить элемент в третьей строке, стоящий ниже главной диагонали. Т.к. этот элемент стоит во втором столбце, то работаем со второй строкой. Для этого умножим 2-ю строку на $\left(-\frac{9}{44}\right)$ и прибавим к ней 3-ю строку, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{ccc} 0 & -9 & -\frac{19 \cdot 9}{44} \\ 0 & 9 & 13 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{401}{44} \end{array} \end{array}$$

$$-\frac{19 \cdot 9}{44} + 13 = \frac{-19 \cdot 9 + 13 \cdot 44}{44} = \frac{-171 + 572}{44} = \frac{401}{44}.$$

Получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 0 & 44 & 19 \\ 0 & 0 & \frac{401}{44} \end{vmatrix} = 1 \cdot 44 \cdot \frac{401}{44} = 401.$$

Решение этого примера можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} I \text{ стр.} \cdot (-4) + II \text{ стр.} = \\ I \text{ стр.} \cdot (-2) + III \text{ стр.} \end{array} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 0 & 44 & 19 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ II \text{ стр.} \cdot \left(-\frac{9}{44}\right) + III \text{ стр.} \end{array} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 0 & 44 & 19 \\ 0 & 0 & \frac{401}{44} \end{vmatrix} = 1 \cdot 44 \cdot \frac{401}{44} = 401. \end{aligned}$$

Ответ: 401.

Пример 9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, приведя

его к треугольному виду.

Решение.

Выполним элементарные преобразования.

Подробно распишем каждый шаг.

Поставим в определителе на первое место 1, для этого поменяем местами 1-ю и 2-ю строки. Необходимо вспомнить одно из свойств определителей согласно которому при перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет свой знак на противоположный. Получим

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обнулим в первом столбце элементы, стоящие ниже главной диагонали. Когда мы обнуляем эти элементы, работаем только с первой строкой. Для этого

1) умножим 1-ю строку на (-3) и сложим со 2-й строкой, результат запишем во 2-ю строку

$$\begin{array}{cccc} -3 & -6 & -9 & -12 \\ + & & & \\ -3 & 5 & 7 & 2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -10 \end{array}$$

2) умножим 1-ю строку на 2 и прибавим к 3-й, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 8 \\ + & & & \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 9 & 10 \end{array}$$

3) умножим 1-ю строку на (-1) и сложим с 4-й строкой, результат запишем в 4-ю строку

$$\begin{array}{rcccc}
 & -1 & -2 & -3 & -4 \\
 + & 1 & 3 & 5 & 4 \\
 \hline
 & 0 & 1 & 2 & 0
 \end{array}$$

В результате получим определитель

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далее будем обнулять элементы, стоящие ниже главной диагонали во втором столбце. Так как обнуляем элементы во втором столбце, работаем со второй строкой.

1) сложим 2-ю строку с 3-й, результат запишем в 3-ю строку

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & -1 & -2 & -10 \\
 + & 0 & 1 & 9 & 10 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 7 & 0
 \end{array}$$

2) сложим 2-ю строку с 4-й, результат запишем в 4-ю строку

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & -1 & -2 & -10 \\
 + & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 0 & -10
 \end{array}$$

В результате получим определитель

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Мы привели определитель к треугольному виду, а это значит, что он равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-10) = -70.$$

Решение этого примера можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} I \text{ стр.} \cdot (-3) + II \text{ стр.} \\ I \text{ стр.} \cdot 2 + III \text{ стр.} \\ I \text{ стр.} \cdot (-1) + IV \text{ стр.} \end{array} = \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} II \text{ стр.} + III \text{ стр.} \\ II \text{ стр.} + IV \text{ стр.} \end{array} = \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-10) = -70.$$

Ответ: -70 .

Пример 10. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Воспользуемся одним из свойств определителей и вынесем общий множитель равный двум из второго и четвёртого столбцов, равный пяти из пятого столбца. Получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обнулим элемент $a_{21} = 3$, стоящий во второй строке в первом столбце. Так как этот элемент стоит в первом столбце, работаем с первой строкой. Умножим первую строку на (-3) и сложим со второй строкой, результат запишем во вторую строку.

$$\begin{array}{r} -3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ + \\ 3 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Получим

$$20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца

$$20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 20 \cdot 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 20 \cdot 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$20 \cdot 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 20 \cdot 0 \cdot (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обнулим элемент $a_{21} = 2$, стоящий во второй строке в первом столбце. Так как этот элемент стоит в первом столбце, работаем с первой строкой. Сложим первую строку со второй, результат запишем во вторую строку.

$$\begin{array}{cccc}
 -2 & 3 & 0 & 0 \\
 + & & & \\
 2 & 3 & 2 & 0 \\
 \hline
 0 & 6 & 2 & 0
 \end{array}$$

Получим

$$20 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель, равный двум из второй строки. Получим

$$20 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 40 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца

$$40 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 40 \cdot (-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 40 \cdot 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 40 \cdot 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$40 \cdot 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -80 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

= {вычислим определитель по правилу Саррюса} =

$$= -80 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -80 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 3 -$$

$$- (0 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1)) =$$

$$= -80 \cdot (6 + 0 + 0 - 0 - 9 - 5) = -80 \cdot (-8) =$$

$$= 640.$$

Ответ: 640.

В этой главе мы рассмотрели различные способы вычисления определителей:

- 1) правило треугольника (для определителей третьего порядка);
- 2) правило Саррюса (для определителей третьего порядка);
- 3) разложение по строке или столбцу;
- 4) приведение определителя к треугольному виду.

Вычисляя один и тот же определитель разными способами, ответ должен совпадать.

7. Правило Крамера

Теорема (правило Крамера). Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$, где

$$\alpha_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$).

Имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

По условию,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из свойств определителей следует, что

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\Delta} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_0 = x_1 \Delta, \end{aligned}$$

поэтому $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема Крамера доказана.

В случае $n = 3$ имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Первый определитель получается из основного путём замены в нём первого столбца на столбец свободных коэффициентов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Второй определитель получается из основного путём замены в нём второго столбца на столбец свободных коэффициентов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Третий определитель получается из основного путём замены в нём третьего столбца на столбец свободных коэффициентов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример 1. Решить системы уравнений методом Крамера

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases};$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x - y + 2z = 16 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 9x - y + 4z = 30 \end{cases}.$$

Решение.

а) Составим определители и вычислим их

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - (-3) \cdot 1 = 55 + 3 = 58 \neq 0.$$

Следовательно, можно воспользоваться методом Крамера.

Составим первый определитель. Для этого в основном определителе заменим первый столбец на столбец свободных коэффициентов. Получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - (-3) \cdot 6 = 11 + 18 = 29.$$

Составим второй определитель. Для этого в основном определителе заменим второй столбец на столбец свободных коэффициентов. Получим

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 30 - 1 = 29.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

б) Составим определители и вычислим их

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - \\ - 2 \cdot 2 \cdot 9 - 5 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 40 - 6 + 9 - 36 - 5 + 12 = 14 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 30 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \cdot 30 + 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 30 - \\ - 16 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 128 + 30 - 6 - 120 - 16 + 12 = 28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 30 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 4 + 16 \cdot (-1) \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot 30 - \\ - 2 \cdot 3 \cdot 9 - 5 \cdot (-1) \cdot 30 - 16 \cdot 3 \cdot 4 = 60 - 144 + 180 - 54 + 150 - 192 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 16 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 30 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 30 + (-1) \cdot 3 \cdot 9 + 16 \cdot 3 \cdot (-1) - \\ - 16 \cdot 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3 \cdot 30 = 300 - 27 - 48 - 288 + 15 + 90 = 42.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

$$\text{Ответ: } (2, 0, 3).$$

8. Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность

Определение 1. Множество E называется векторным (линейным) пространством \Leftrightarrow на E определены операции сложения и умножения на числа из поля \mathbb{R} так, что выполнены следующие аксиомы:

- 1) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$,
- 2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,
- 3) $\exists \vec{0} \quad \forall \vec{x} \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$,
- 4) $\forall \vec{x} \quad \exists (-\vec{x}) \quad \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$,
- 5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$,
- 6) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$,
- 7) $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$,
- 8) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$.

Примеры.

- 1) $E = \mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения.
- 2) E – плоскость с отмеченной точкой 0 . В любую точку плоскости из точки 0 можно направить стрелку; сложение определяется по правилу параллелограмма: $\vec{x} + \vec{y}$ – это диагональ параллелограмма со сторонами \vec{x} и \vec{y} .

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0 .

$$n) E = \mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \};$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \quad \vec{0} = (0, 0, \dots, 0);$$

$$-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n); \quad \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Определение 2. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно независимы \Leftrightarrow соотношение $\lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$ возможно лишь в случае, когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Примеры.

- 1) $E = \mathbb{R}$, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$. Предположим, что $\lambda_1\vec{e}_1 = \vec{0}$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то $\exists \lambda_1^{-1}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-1}(\lambda_1 \vec{e}_1) &= \lambda_1^{-1} \vec{0} = \vec{0} \\ &\parallel \\ (\lambda_1^{-1} \lambda_1) \vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \end{aligned}$$

поэтому $\vec{e}_1 = \vec{0}$, что противоречит нашим предположениям. Значит, $\lambda_1 = 0$, и поэтому вектор \vec{e}_1 линейно независим.

2) E – плоскость с отмеченной точкой 0 , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 не лежат на одной прямой.

Докажем, что эти векторы линейно независимы. Пусть L_j – прямая, проходящая через точку 0 и конец вектора \vec{e}_j .

Предположим, что

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Тогда

$$L_1 \ni \lambda_1 \vec{e}_1 = -\lambda_2 \vec{e}_2 \in L_2,$$

поэтому

$$\lambda_1 \vec{e}_1 = -\lambda_2 \vec{e}_2 \in L_1 \cap L_2 = \vec{0}.$$

Значит, $\lambda_1 \vec{e}_1 = \vec{0}$.

Действуя как в предыдущем примере, мы получим соотношение $\lambda_1 = 0$.

С другой стороны,

$$-\lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 линейно независимы.

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0 , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы линейно независимы (доказывается аналогично).

Басня Крылова о линейно зависимых векторах. Имеем соотношение

$$\vec{L} + \vec{P} + \vec{Щ} = \vec{0},$$

в котором $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, поэтому векторы $\vec{L}, \vec{P}, \vec{Щ}$ линейно зависимы.

Определение 3. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ называется базисом пространства $E \Leftrightarrow$

- 1) векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно независимы;
- 2) $\forall \vec{x} \in E \exists x_i \in \mathbb{R} \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$.

Примеры.

1) $E = \mathbb{R}$, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$. Любой вектор на прямой E пропорционален вектору \vec{e}_1 с коэффициентом пропорциональности x_1 : $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1$. Поскольку \vec{e}_1 линейно независим, то он образует базис прямой E .

2) E – плоскость с отмеченной точкой 0 , \vec{e}_1, \vec{e}_2 не лежат на одной прямой.

Мы уже знаем, что эти векторы линейно независимы.

Для любого вектора \vec{x} рассмотрим проекции \vec{x} на оси \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Эти проекции равны соответственно $x_1 \vec{e}_1, x_2 \vec{e}_2$ причем вектор \vec{x} является диагональю в соответствующем параллелограмме, и поэтому $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$. Значит, \vec{e}_1, \vec{e}_2 образуют базис плоскости.

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0 , $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы образуют базис (доказывается аналогично).

n) $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ... $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Пусть $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$.

Тогда

$$\lambda_1 (1, 0, \dots, 0) + \lambda_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + \lambda_n (0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0),$$

т.е.

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Поэтому векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно независимы.

С другой стороны, любой вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 1) = \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \end{aligned}$$

поэтому $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – стандартный базис \mathbb{R}^n .

Теорема (без доказательства). В любом линейном пространстве E существует базис (быть может, бесконечный).

Определение 4. Пространство E называется конечномерным \Leftrightarrow в E существует конечный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Теорема (без доказательства). Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – базис E , то любой другой базис пространства E состоит из n элементов. Число n называется размерностью E и обозначается $\dim E$ (dimension = размерность).

Пример. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Определение 5. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис E . Тогда $\forall \vec{x} \in E$ $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. Набор чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) называется набором координат вектора \vec{x} относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Замечание. Координаты (x_1, x_2, \dots, x_n) определены единственным образом: если $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ – другой набор координат вектора \vec{x} относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, то

$$\begin{aligned} \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n &= x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + \dots + x'_n \vec{e}_n \Rightarrow \\ (x_1 - x'_1) \vec{e}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{e}_2 + \dots + (x_n - x'_n) \vec{e}_n &= \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}, \end{aligned}$$

поэтому из линейной независимости базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ следует, что $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = \dots = x_n - x'_n = 0$, т.е. $x_j = x'_j$.

Пример 1. Написать разложение вектора $\vec{x} = (13; 2; 7)$ по векторам $\vec{e}_1 = (5; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (2; -1; 3)$, $\vec{e}_3 = (1; 0; -1)$.

Решение.

Векторы $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лежат в одном базисе.

Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их одноимённых координат. Значит, мы можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения x_1 через x_2 , а из третьего уравнения выразим x_3 через x_2 . Подставим эти значения в первое уравнение.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ -x_3 = 7 - 3x_2 \end{cases}, \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ x_3 = -7 + 3x_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5 \cdot (2 + x_2) + 2x_2 + (-7 + 3x_2) = 13 \\ x_1 = 2 + x_2 \\ x_3 = -7 + 3x_2 \end{cases},$$

Решим первое уравнение

$$5 \cdot (2 + x_2) + 2x_2 + (-7 + 3x_2) = 13,$$

$$10 + 5x_2 + 2x_2 - 7 + 3x_2 = 13,$$

$$10x_2 + 3 = 13,$$

$$10x_2 = 10,$$

$$x_2 = 1.$$

Подставим это значение во второе и третье уравнение системы и найдём x_1 и x_3 .

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_3 = -7 + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -4 \end{cases}.$$

Тогда вектор \vec{x} будет разложен по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ следующим образом

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$.

Пример 2. Написать разложение вектора $\vec{x} = (10; 3; 3)$ по векторам $\vec{e}_1 = (2; 3; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; 7; 2)$, $\vec{e}_3 = (5; 4; 2)$.

Решение.

Векторы $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лежат в одном базисе.

Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их одноимённых координат. Значит, мы можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Для решения этой системы воспользуемся формулами Крамера.

Составим основной определитель

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - \\ &\quad - (5 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = \\ &= 28 + 12 + 30 - 35 - 16 - 18 = 1. \end{aligned}$$

Вычислим первый определитель, который получается заменой в основном определителе первого столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - \\ &\quad - (5 \cdot 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = \\ &= 140 + 36 + 30 - 105 - 80 - 18 = 3. \end{aligned}$$

Вычислим второй определитель, который получается заменой в основном определителе второго столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$-(5 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 2) =$$

$$= 12 + 40 + 45 - 15 - 24 - 60 = -2.$$

Вычислим третий определитель, который получается заменой в основном определителе третьего столбца на столбец свободных коэффициентов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, используя} \\ \text{правило Саррюса} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-(10 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3) =$$

$$= 42 + 9 + 60 - 70 - 12 - 27 = 2.$$

Теперь находим решение системы.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2.$$

Тогда вектор \vec{x} будет разложен по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ следующим образом

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

9. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца

Определение 1. Пусть E – линейное пространство над полем \mathbb{R} вещественных чисел. Скалярным произведением на пространстве E называется функция $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, которая каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ставит в соответствие вещественное число $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}$ так, что выполняются следующие аксиомы:

- 1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
- 2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
- 3) $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$;
- 4) $\forall \vec{x} \neq 0 \quad (\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Примеры.

1) $E = \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) = xy$ – обычное произведение чисел; аксиома 4 имеет вид $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$.

2) $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
 $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ – стандартное скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^n .

3) $E = C(a, b)$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Это пространство не имеет конечного базиса (т.е. является бесконечномерным). Для функций $f, g \in E$ пределим скалярное произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Определение 2. Число $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ называется нормой (длиной) вектора \vec{x} .

Теорема (неравенство Коши – Шварца). $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Доказательство.

По свойствам 1 – 4 скалярного произведения имеем:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=c} + 2t \underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=b} + t^2 \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=a} = at^2 + 2bt + c = p(t).$$

Если $\vec{y} = \vec{0}$, то

$$\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=0} \leq \|\vec{x}\| \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=0},$$

и неравенство Коши – Шварца в этом случае очевидно.

Если $\vec{y} \neq \vec{0}$, то по свойству 4 скалярного произведения $a = (\vec{y}, \vec{y}) > 0$. Поэтому график функции $p(t)$ – это парабола рожками вверх, причем мы уже доказали, что $\forall t \in \mathbb{R} \ p(t) \geq 0$. Это значит, что график функции $p(t)$ не опускается ниже оси t (иначе $p(t)$ будет принимать отрицательные значения на некотором отрезке). В итоге квадратичный многочлен $p(t)$ либо не имеет вещественных корней (и тогда его дискриминант $(2b)^2 - 4ac < 0$), либо $p(t)$ имеет совпадающие вещественные корни $t_1 = t_2$ и его дискриминант $(2b)^2 - 4ac = 0$ (и график $p(t)$ касается оси t в точке $t_1 = t_2$). В любом случае

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство $a = (\vec{y}, \vec{y})$, $b = (\vec{x}, \vec{y})$, $c = (\vec{x}, \vec{x})$, получим

$$4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0.$$

В итоге

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}), \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, |\vec{x}, \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, то по неравенству Коши – Шварца

$$\left| \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \in [-1, 1] \Rightarrow \exists (\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

– угол между векторами \vec{x} , \vec{y} .

10. Неравенство треугольника

Теорема (неравенство треугольника). $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\| &= \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} = \\ &= \sqrt{\underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=\|\vec{x}\|^2} + 2 \underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{\leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} + \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=\|\vec{y}\|^2}} \leq \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2} = \\ &= \sqrt{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2} = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

Тогда

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

неравенство Коши – Шварца имеет вид

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2},$$

угол между векторами вычисляется по формуле

$$\widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \arccos \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}.$$

**11. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора.
Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в
ортонормированном базисе, норма вектора и угол между
векторами**

Определение 1. Векторы \vec{x}, \vec{y} называются ортогональными $\Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Обозначение: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Теорема Пифагора. Если $\vec{x} \perp \vec{y}$, то $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Доказательство.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + \underbrace{2(\vec{x}, \vec{y})}_{=0} + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ называется ортонормированным

$$\Leftrightarrow (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{e}_i\| = 1; \\ \vec{e}_i \perp \vec{e}_j, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пример. Стандартный базис $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ пространства \mathbb{R}^n является ортонормированным относительно стандартного скалярного произведения $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$. Тогда $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, угол между векторами вычисляется по формуле $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) = \arccos \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}$.

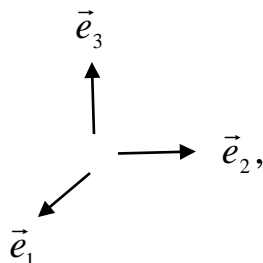
Доказательство.

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n, y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n) = \\ &= x_1 y_1 \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}_{=1} + x_1 y_2 \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{=0} + \dots + x_1 y_n \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_n)}_{=0} + \\ &+ x_2 y_1 \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_1)}_{=0} + x_2 y_2 \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}_{=1} + \dots + x_2 y_n \underbrace{(\vec{e}_2, \vec{e}_n)}_{=0} + \dots + \\ &+ x_n y_1 \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_1)}_{=0} + x_n y_2 \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_2)}_{=0} + \dots + x_n y_n \underbrace{(\vec{e}_n, \vec{e}_n)}_{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Остальные формулы получаются из этой формулы для скалярного произведения. *Теорема доказана.*

12. Векторное произведение и его свойства

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства E :



$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Вектор

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3$$

называется векторным произведением векторов \vec{x}, \vec{y} . Иногда его обозначают $\vec{x} \times \vec{y}$.

Теорема. 1) $[\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$;

2) $[\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}] + [\vec{y}, \vec{z}]$;

3) $[\lambda\vec{x}, \vec{y}] = \lambda[\vec{x}, \vec{y}]$;

4) $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{x}$, $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{y}$;

5) $\|[\vec{x}, \vec{y}]\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$;

б) правило правого винта.

Доказательство.

1) - 3) Из свойств определителей следует, что

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -[\vec{y}, \vec{x}],$$

$$[\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{x}, \vec{z}]$$

$$[\lambda\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda[\vec{x}, \vec{y}].$$

$$\begin{aligned} 4) ([\vec{x}, \vec{y}], \vec{x}) &= \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3, x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \right) = \\ &= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \{ \text{разложение нулевого (одинако-} \\ & \text{вые строки!) определителя } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ по первой строке} \} = 0, \text{ поэтому} \end{aligned}$$

$[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{x}$; аналогично $[\vec{x}, \vec{y}] \perp \vec{y}$.

5) Поскольку $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) \in [0, \pi]$, то $\sin(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}) \geq 0$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \sin^2(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}}),$$

т.е. что

$$\begin{aligned} \|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{y}})\right) = \\ &= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2}\right) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \|[\vec{x}, \vec{y}]\|^2 &= \left\| \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right\|^2 = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 = \\ &= x_2^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 + x_3^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 + x_3^2 y_1^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 = \\
= & x_1^2 (y_2^2 + y_3^2) + x_2^2 (y_1^2 + y_3^2) + x_3^2 (y_1^2 + y_2^2) - \\
& - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
= & x_1^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2 y_1^2 + x_2^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_2^2 y_2^2 + \\
& + x_3^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_3^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
= & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \\
& - x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2 - x_3^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_2 y_3 - 2x_1 x_3 y_1 y_3 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = \\
= & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = \\
= & \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}, \vec{y})^2.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что $h = \|\vec{y}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ – это высота параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} с основанием \vec{x} ; поэтому формула 4 показывает, что $\|[\vec{x}, \vec{y}]\|$ – это площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} .

б) Правило правого винта (без доказательства): $[\vec{x}, \vec{y}]$ направлено в ту сторону, в какую движется правый винт при минимальном повороте от направления вектора \vec{x} к направлению вектора \vec{y} .

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{x} = \{1, 2, -3\}$, $\vec{y} = \{0, -1, 2\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
[\vec{x}, \vec{y}] &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\
& = (4 - 3) \cdot \vec{e}_1 - (2 - 0) \cdot \vec{e}_2 + (-3 - 0) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Ответ: $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

13. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя 3-го порядка

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства E . Число $(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])$ называется смешанным произведением векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Теорема.

$$(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned} (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) &= \left(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right) = \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \{ \text{разложение определителя} \\ &\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \text{ по первой строке} \} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \text{ Теорема доказана.} \end{aligned}$$

Следствие (геометрический смысл определителя 3-го порядка). Абсолютная величина определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

равна $|(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])|$ и равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Доказательство. Мы считаем, что \vec{y}, \vec{z} лежат в основании параллелепипеда. Поэтому

$$\begin{aligned} |(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])| &= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}, \vec{z}\| \cdot \left| \cos(\vec{x}, \widehat{[\vec{y}, \vec{z}]}) \right| = \\ &= \underbrace{\|\vec{y}, \vec{z}\|}_{=\text{площадь основания}} \cdot \underbrace{\|\vec{x}\| \cdot \left| \cos(\vec{x}, \widehat{[\vec{y}, \vec{z}]}) \right|}_{=\text{высота}} = \{ \text{объем параллелепипеда} \}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

14. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений

Теорема. 1) {площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} } = $\|[\vec{x}, \vec{y}]\|$;

2) {площадь треугольника, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} } = $\frac{1}{2}\|[\vec{x}, \vec{y}]\|$;

3) {высота параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} с основанием \vec{x} } = {высота треугольника, построенного на векторах \vec{x}, \vec{y} с основанием \vec{x} } = $\frac{\|[\vec{x}, \vec{y}]\|}{\|\vec{x}\|}$;

4) {объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ } = {абсолютной величине определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

5) {объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y}, \vec{z}}$ } = $\frac{1}{6}$ {абсолютной величины определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

б) {высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ с основанием \vec{y}, \vec{z} } = {высота пирамиды, построенной на векторах

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y}, \vec{z}}$ } = {абсолютной величине} $\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\|[\vec{y}, \vec{z}]\|}$.

Все эти результаты получены выше.

Пример 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного $\vec{x} = \{6, 3, -2\}$, $\vec{y} = \{3, -2, 6\}$.

Решение.

Найдём векторное произведение векторов \vec{x} и \vec{y} :

$$\begin{aligned}
[\vec{x}, \vec{y}] &= \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\
&= (3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-2)) \cdot \vec{e}_1 - (6 \cdot 6 - (-2) \cdot 3) \cdot \vec{e}_2 + \\
&+ (6 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) \cdot \vec{e}_3 = \\
&= (18 - 4) \cdot \vec{e}_1 - (36 + 6) \cdot \vec{e}_2 + (-12 - 9) \cdot \vec{e}_3 = 14\vec{e}_1 - 42\vec{e}_2 - 21\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Теперь можно вычислить площадь параллелограмма.

$$\begin{aligned}
S = \|\llbracket \vec{x}, \vec{y} \rrbracket\| &= \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \\
&= \sqrt{196 + 1764 + 441} = \sqrt{2401} = 49(\text{ед.}^2).
\end{aligned}$$

Ответ: 49.

Пример 2. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-4, 2, 6)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-10, 5, 8)$.

Решение.

Найдём векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B - A = (2, -3, 0) - (-4, 2, 6) = \\
&= \{2 - (-4); -3 - 2; 0 - 6\} = \\
&= \{2 + 4; -5; -6\} = \{6, -5, -6\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= C - A = (-10, 5, 8) - (-4, 2, 6) = \\
&= \{-10 - (-4); 5 - 2; 8 - 6\} = \\
&= \{-10 + 4; 3; 2\} = \{-6, 3, 2\}.
\end{aligned}$$

Найдём векторное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} :

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\
&= (-5 \cdot 2 - (-6) \cdot 3) \cdot \vec{e}_1 - (6 \cdot 2 - (-6) \cdot (-6)) \cdot \vec{e}_2 + \\
&+ (6 \cdot 3 - (-5) \cdot (-6)) \cdot \vec{e}_3 = \\
&= (-10 + 18) \cdot \vec{e}_1 - (12 - 36) \cdot \vec{e}_2 + (18 - 30) \cdot \vec{e}_3 = 8\vec{e}_1 + 24\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} :

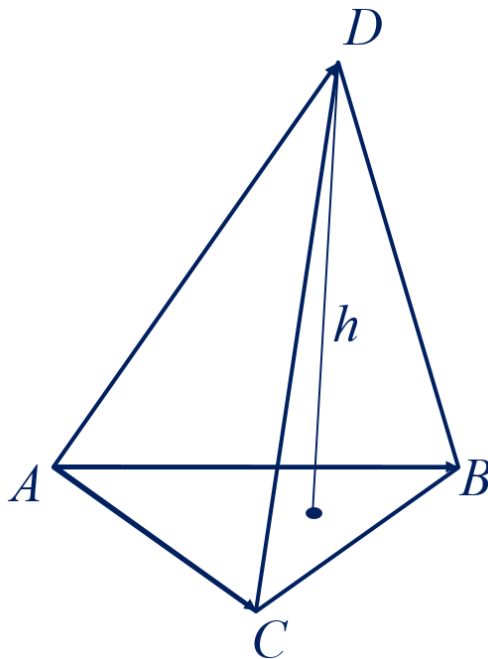
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар.}} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 24^2 + 12^2} = 14(e\partial.^2).$$

Ответ: 14.

Пример 3. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$, $D(-1,1,1)$ и её высоту, опущенную из вершины D на грань ABC .

Решение.

Построим пирамиду $ABCD$. Построим векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} и найдём их координаты.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (2,5,0) - (5,2,0) = \\ &= \{2 - 5; 5 - 2; 0 - 0\} = \\ &= \{-3; 3; 0\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A = (1,2,4) - (5,2,0) = \\ &= \{1 - 5; 2 - 2; 4 - 0\} = \\ &= \{-4; 0; 4\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= D - A = (-1,1,1) - (5,2,0) = \\ &= \{-1 - 5; 1 - 2; 1 - 0\} = \\ &= \{-6; -1; 1\}.\end{aligned}$$

Найдём смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} , для этого составим определитель третьего порядка из координат векторов. Пусть в первой строке стоят координаты вектора \overrightarrow{AB} , во второй строке – координаты вектора \overrightarrow{AC} , во третьей строке – координаты вектора \overrightarrow{AD} :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]) &= \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} = \\ &= -3 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot (-6) + 0 \cdot (-4) \cdot (-1) - \\ &- (0 \cdot 0 \cdot (-6) + (-3) \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) \cdot 1) = \\ &= 0 - 72 + 0 - (0 + 12 - 12) = -72.\end{aligned}$$

Вычислим объём пирамиды, используя формулу

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}])|.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{6} \cdot |-72| = 12(e\partial^3).$$

Найдём высоту пирамиды, используя формулу

$$h = \frac{3V}{S}.$$

Найдём площадь основания пирамиды. Основанием пирамиды является треугольник ABC . Площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{нар.} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{[AB, AC]}\|.$$

Найдём векторное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{[AB, AC]} &= \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, разложив} \\ \text{его по элементам третьей строки} \end{array} \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (3 \cdot 4 - 0 \cdot 0) \cdot \vec{e}_1 - (-3 \cdot 4 - 0 \cdot (-4)) \cdot \vec{e}_2 + \\ &+ (-3 \cdot 0 - 3 \cdot (-4)) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= (12 - 0) \cdot \vec{e}_1 - (-12 - 0) \cdot \vec{e}_2 + (0 + 12) \cdot \vec{e}_3 = 12\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 144 + 144} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 144} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}(\text{ед.}^2). \end{aligned}$$

А значит, высота, опущенная из вершины D на грань ABC будет иметь длину

$$h = \frac{3 \cdot 12}{6\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(\text{ед.длины}).$$

$$\text{Ответ: } V = 12(\text{ед.}^3),$$

$$h = 2\sqrt{3}(\text{ед.длины}).$$

15. Определитель произведения двух квадратных матриц

Теорема. Если $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \quad (14.1)$$

Доказательство (для $n = 2$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) =$$

$$= \underbrace{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}}_{\text{---}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \underbrace{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}}_{\text{---}} -$$

$$- \underbrace{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}}_{\text{---}} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - \underbrace{a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}}_{\text{---}} =$$

$$= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \det A \cdot \det B.$$

Теорема доказана.

16. Обратная матрица и ее вычисление

Определение 1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется обратимой $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, A^{-1} – обратная матрица к матрице A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (15.1)$$

Теорема. 1) Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

2) Если $\det(A) \neq 0$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & *_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & *_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & *_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (вычеркнуты i -я строка и j -й столбец).

Доказательство.

1) Если A обратима, то $\exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, поэтому $AA^{-1} = E$, $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ и, следовательно, $\det(A) \neq 0$.

2) Если $\det(A) \neq 0$, то в случае $n = 2$ рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ *_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ a_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} *_{11} & a_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & *_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = a_{11},$$

ПОЭТОМУ

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\det A} & \frac{-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}}{\det A} \\ \frac{a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}}{\det A} & \frac{-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} & \frac{0}{\det A} \\ \frac{0}{\det A} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & \frac{0}{\det A} \\ \frac{0}{\det A} & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{\det A} & \frac{a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21}}{\det A} & \frac{-a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}}{\det A} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} & \frac{0}{\det A} \\ \frac{0}{\det A} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому $B = A^{-1}$.

Теорема доказана.

Определение. $GL_n(\mathbb{R}) = [M_n(\mathbb{R})]^\times$ – группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами из поля \mathbb{R} (general linear group).

Следствие. $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ является морфизмом групп:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B,$$

$$\text{Im}(\det) = \mathbb{R}^\times,$$

$$\text{Ker}(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = SL_n \mathbb{R}$$

– специальная линейная группа (special linear group). Так как фактор по ядру изоморфен образу, то

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times.$$

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1) - (-2) \cdot 5 = -8 + 10 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists! A^{-1},$$

т.е. матрица A – обратимая.

($\exists!$ – существует и притом единственная)

Для нахождения обратной матрицы для матрицы второго порядка воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Если внимательно посмотреть на формулу, то можно заметить, что для вычисления обратной матрицы второго порядка не нужно вычислять алгебраические дополнения. Достаточно поменять местами элементы, стоящие на главной диагонали, а элементы, стоящие на побочной диагонали взять с противоположным знаком.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 & -1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 8 + 8 \cdot 5 & -5 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 + 10 & 2 - 2 \\ -45 + 45 & 10 - 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

$A^{-1} \cdot A = E$ означает, что мы правильно нашли обратную матрицу.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель матрицы

$$\begin{aligned} \det A = \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 \cdot 1 - \\ & - (3 \cdot 9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5) = \\ & = 54 + 28 + 45 - 27 - 40 - 63 = -3 \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

матрица A – обратимая.

Вычислим алгебраические дополнения.

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{11} = 2$, необходимо минор M_{11} умножить на $(-1)^{1+1}$, где $(1+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 27 - 20 = 7$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{12} = 7$, необходимо минор M_{12} умножить на $(-1)^{1+2}$, где $(1+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 3 - 4 \cdot 1) = -(9 - 4) = -5$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{13} = 3$, необходимо минор M_{13} умножить на $(-1)^{1+3}$, где $(1+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 9 \cdot 1 = 15 - 9 = 6$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{21} = 3$, необходимо минор M_{21} умножить на $(-1)^{2+1}$, где $(2+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 3 - 3 \cdot 5) = -(21 - 15) = -6$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{22} = 9$, необходимо минор M_{22} умножить на $(-1)^{2+2}$, где $(2+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{23} = 4$, необходимо минор M_{23} умножить на $(-1)^{2+3}$, где $(2+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 7 \cdot 1) = -(10 - 7) = -3$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{31} = 1$, необходимо минор M_{31} умножить на $(-1)^{3+1}$, где $(3+1)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = 28 - 27 = 1$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{32} = 5$, необходимо минор M_{32} умножить на $(-1)^{3+2}$, где $(3+2)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) = -(8 - 9) = 1$$

Чтобы найти алгебраическое дополнение для элемента $a_{33} = 3$, необходимо минор M_{33} умножить на $(-1)^{3+3}$, где $(3+3)$ сумма строки и столбца, содержащих данный элемент.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 7 \cdot 3 = 18 - 21 = -3$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 7 \cdot 7 - 6 \cdot 9 + 1 \cdot 5 & 7 \cdot 3 - 6 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -5 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 5 & -5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 & 6 \cdot 7 - 3 \cdot 9 - 3 \cdot 5 & 6 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 14 - 18 + 1 & 49 - 54 + 5 & 21 - 24 + 3 \\ -10 + 9 + 1 & -35 + 27 + 5 & -15 + 12 + 3 \\ 12 - 9 - 3 & 42 - 27 - 15 & 18 - 12 - 9 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица A^{-1} найдена верно.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Линейный оператор. Примеры линейных операторов

Определение. Пусть E, F – линейные пространства над полем \mathbb{R} . Функция $\mathcal{A}: E \rightarrow F$ называется линейным оператором $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Линейные операторы – это морфизмы линейных пространств.

Примеры.

1) $E = F$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \mu\mathcal{A}(\vec{x})$.

Очевидно, $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mu(\vec{x} + \vec{y}) = \mu\vec{x} + \mu\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \mu(\lambda\vec{x}) = \lambda\mu\vec{x} = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$. Этот оператор называется гомотетией с коэффициентом μ .

2) $E = F$ – плоскость с отмеченной точкой 0 , \mathcal{A} – поворот плоскости на угол φ вокруг отмеченной точки. Так как диагональ параллелограмма при повороте переходит в диагональ, то $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$. С другой стороны, очевидно, $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

3) $E = F$ – плоскость с отмеченной точкой 0 , \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный базис E , $\mathcal{A}(\vec{x})$ – проекция вектора \vec{x} на ось \vec{e}_1 . Легко видеть, что $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{e}_1)\vec{e}_1$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = (\vec{x}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{y}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}), \\ \mathcal{A}(\lambda\vec{x}) &= (\lambda\vec{x}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \lambda(\vec{x}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{A} называется проектором.

4) $E = F$ – трехмерное пространство со скалярным произведением.

Фиксируем вектор $\vec{e} \in E$ и рассмотрим $\mathcal{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{e}]$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= [\vec{x} + \vec{y}, \vec{e}] = [\vec{x}, \vec{e}] + [\vec{y}, \vec{e}] = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}), \\ \mathcal{A}(\lambda\vec{x}) &= [\lambda\vec{x}, \vec{e}] = \lambda[\vec{x}, \vec{e}] = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Поэтому \mathcal{A} – линейный оператор.

5) Пусть $E = \{ \vec{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \}$ – (бесконечномерное) пространство сходящихся числовых последовательностей, $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}),$$

$$\mathcal{A}(\lambda \vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ – линейный оператор.

б) Пусть $E = C^1(a, b)$ – пространство функций на интервале (a, b) с непрерывной производной, $E = C(a, b)$ – пространство непрерывных на интервале (a, b) функций, $\mathcal{A}(f) = f' = \frac{df}{dx}$. Ясно, что \mathcal{A} – линейный оператор, потому что $(f + g)' = f' + g'$ и $(\lambda f)' = \lambda'f + \lambda f' = \lambda f'$.

18. Сумма и произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изоморфизм кольца эндоморфизмов конечномерного линейного пространства с кольцом квадратных матриц

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}: E \rightarrow E$ – линейные операторы. Определим их сумму $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$ формулами

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x}),$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{y}) = \\ &= (\mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})) + (\mathcal{A}(\vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{y})) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{y}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda \vec{x}) &= \mathcal{A}(\lambda \vec{x}) + \mathcal{B}(\lambda \vec{x}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}) + \lambda \mathcal{B}(\vec{x}) = \\ &= \lambda(\mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x} + \vec{y})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{y})) = \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{y})) = (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}) + (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{y}); \end{aligned}$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\lambda \vec{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda \vec{x})) = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}$ – линейные операторы.

Определение 2. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис E , $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – линейный оператор. Тогда

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + \dots + a_{ij}\vec{e}_i + \dots + a_{nj}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}\vec{e}_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей оператора \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$; j -й столбец матрицы \mathcal{A} – это набор координат вектора $\mathcal{A}(\vec{e}_j)$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Определение 3. $\text{End } \mathbb{R}(E) = \{\mathcal{A} : E \rightarrow E\}$ – множество всех линейных операторов, действующих из E в E (endomorphism = эндоморфизм, т.е. морфизм из E в E).

Легко видеть, что $\text{End } \mathbb{R}(E)$ – ассоциативное кольцо, единицей которого является тождественный оператор $\text{id}_E : E \rightarrow E$, действующий по правилу $\text{id}_E(\vec{x}) = \vec{x}$ (identity morphism).

Изоморфизмом двух колец $R \xrightarrow{\sim} R'$ называется взаимно однозначное отображение $f : R \rightarrow R'$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$;
- 2) $f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2)$;
- 3) $f(1_R) = 1_{R'}$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис E . Тогда отображение $f : \text{End } \mathbb{R}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, определенное формулой

$$f(\mathcal{A}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$, является изоморфизмом колец.

Доказательство.

Очевидно, что оператор \mathcal{A} восстанавливается по матрице A единственным образом:

если

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j,$$

то

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i\right).$$

Поэтому f – взаимно однозначное отображение. При этом единица id_E кольца $\text{End } \mathbb{R}(E)$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая является единицей кольца $M_n(\mathbb{R})$.

Осталось проверить, что сумме операторов отвечает сумма матриц, а произведению операторов отвечает произведение матриц:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{e}_j) = \mathcal{A}(\vec{e}_j) + \mathcal{B}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \vec{e}_i;$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e}_j) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}_j)) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^n b_{kj} \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \mathcal{A}(\vec{e}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

19. Матрица поворота плоскости. Зависимость матрицы оператора от выбора базиса. Определитель оператора

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – поворот плоскости E вокруг точки O на угол φ , \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный базис плоскости. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Это следует из очевидных соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{e}_1) &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2) &= -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема (зависимость матрицы оператора от выбора базиса). Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – линейный оператор,

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, определенная из соотноше-

ния $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$. Если

$$A_f = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора \mathcal{A} в новом базисе $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$,

причем $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i$, где $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от

старого базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, то $A_f = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q$.

Доказательство.

Достаточно доказать равенство $Q \cdot A_f = A_e \cdot Q$.

Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \vec{f}_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} \left(\sum_{k=1}^n q_{ki} \vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q_{ki} b_{ij} \right) \vec{e}_k.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{f}_j) &= \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n q_{ij} \mathcal{A}(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n q_{ij} \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{e}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} q_{ij} \right) \vec{e}_k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(Q \cdot A_f)_{kj} = \sum_{i=1}^n q_{ki} b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ki} q_{ij} = (A_e \cdot Q)_{kj}.$$

Теорема доказана.

Следствие – определение. Число

$$\begin{aligned} \det A_f &= \det(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q) = \det Q^{-1} \cdot \det A_e \cdot \det Q = \\ &= \det Q^{-1} \cdot \det Q \cdot \det A_e = \det(Q^{-1} \cdot Q) \cdot \det A_e = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \det A_e = 1 \cdot \det A_e = \det A_e \end{aligned}$$

не зависит от выбора базиса и называется определителем $\det \mathcal{A}$ оператора \mathcal{A} .

Пример. Если \mathcal{A} – поворот плоскости на угол φ вокруг точки 0, то

$$\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

Определение. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором (eigenvector) линейного оператора $\mathcal{A}: E \rightarrow E \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \ \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Число λ называется собственным числом (eigenvalue) оператора \mathcal{A} , отвечающим собственному вектору \vec{x} .

Теорема. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ . Тогда λ является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а набор координат (x_1, x_2, \dots, x_n) собственного вектора является (ненулевым!) решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Доказательство (в случае $n = 2$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \neq \vec{0};$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x};$$

$$\mathcal{A}(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 \mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_2 \mathcal{A}(\vec{e}_2) =$$

$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = \lambda(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2).$$

Сравним коэффициенты при \vec{e}_i в обеих частях последнего равенства:

$$\begin{cases} \vec{e}_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1, \\ \vec{e}_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Осталось проверить, что $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

Предположим, напротив, что $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда по пра-

вилу Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}} = 0, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}} = 0,$$

поэтому $\vec{x} = \vec{0}$, что невозможно (по определению, собственный вектор всегда ненулевой).

Теорема доказана.

21. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса

Теорема. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ — другой базис. Тогда $A_f = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q$. С другой стороны, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} & \det \left(A_f - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \det \left(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = \det \left(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - Q^{-1} \cdot \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot Q \right) = \\ & = \det \left(Q^{-1} \cdot \left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot Q \right) = \\ & = \det Q^{-1} \cdot \det \left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \det Q = \end{aligned}$$

$$= \det \left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Теорема доказана.

Следствие. След $\text{Tr } \mathcal{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ не зависит от выбора базиса (trace=след).

Доказательство.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \dots + \det \mathcal{A} = 0$$

и не зависит от выбора базиса. Поэтому его коэффициенты (и, в частности, след $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$) не зависят от выбора базиса.

Следствие доказано.

Пример. В случае $n = 2$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\lambda^2 - \text{Tr } \mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0.$$

22. Ранг матрицы и его вычисление. Метод окаймляющих миноров

Определение 1. Пусть $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ – векторы линейного пространства E над полем \mathbb{R} . Рангом этой системы векторов называется размерность пространства

$$F = \mathbb{R}\vec{f}_1 + \dots + \mathbb{R}\vec{f}_n \subset E : \text{rank}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\} = \dim \mathbb{R}F,$$

где $\mathbb{R}\vec{f}_1 + \dots + \mathbb{R}\vec{f}_n$ – всевозможные линейные комбинации векторов $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$.

Пример.

$$\vec{L} + \vec{P} + \vec{Ц} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{L} - \vec{Ц} \Rightarrow F = \mathbb{R}\vec{L} + \mathbb{R}\vec{P} + \mathbb{R}\vec{Ц} = \mathbb{R}\vec{L} + \mathbb{R}\vec{Ц} \Rightarrow \dim \mathbb{R}F \leq 2 \Rightarrow \text{rank}\{\vec{L}, \vec{P}, \vec{Ц}\} = \dim \mathbb{R}F \leq 2.$$

Определение 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $\vec{f}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^n, \dots, \vec{f}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^n,$

$$F = \mathbb{R}\vec{f}_1 + \dots + \mathbb{R}\vec{f}_m.$$

Рангом матрицы A называется число $\dim \mathbb{R}F$.

Определение 3. Выберем k строк и k столбцов матрицы A . Пусть M = (определитель k -го порядка, элементы которого a_{ij} расположены в выбранных строках и столбцах). M называется минором k -го порядка.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Миноры 1-го порядка: 1, 2, ..., 12.

$$\text{Миноры 2-го порядка: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Миноры 3-го порядка: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Теорема. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров.

Комментарий. Предположим, что существует минор r -го порядка $M \neq 0$. Если все миноры порядка $> r$ равны нулю, то ранг A равен r .

Доказательство. Пусть $M \neq 0$ – минор порядка r , а все миноры порядка $> r$ равны нулю. Мы должны доказать, что $\text{rank} A = r$.

Можно считать, что M расположен в северо - западном углу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & M \neq 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы должны проверить, что все строки с номерами $> r$ выражаются через первые r строк.

Возьмем для простоты случай $r = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{где } M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку $M \neq 0$, то строки минора M не пропорциональны. Поэтому строки (a_{11}, a_{12}, a_{13}) и (a_{21}, a_{22}, a_{23}) тоже не пропорциональны (эти векторы не лежат на одной прямой в пространстве \mathbb{R}^3).

С другой стороны, объем параллелепипеда, построенного на строках матрицы A , равен нулю. Значит, этот параллелепипед плоский, и поэтому 3-я строка лежит в плоскости, натянутой на 1-ю и 2-ю строки. Поскольку 1-я и 2-я строки образуют базис плоскости, то 3-я строка является линейной комбинацией 1-й и 2-й строк.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. Если $M \neq 0$ и все окаймляющие миноры равны нулю, то $\text{rank}A = r$.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим любой минор второго порядка

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 6 = 14 - 18 = -4 \neq 0.$$

Найдём окаймляющие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$
$$= 1 \cdot 6 \cdot 10 + 2 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 8 -$$
$$- (3 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 1 \cdot 7 \cdot 8) = 60 + 84 + 120 -$$
$$- (108 + 100 + 56) = 264 - 264 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$
$$= 1 \cdot 6 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 8 -$$
$$- (4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 12 + 1 \cdot 8 \cdot 8) = 72 + 96 + 160 -$$
$$- (144 + 120 + 64) = 328 - 328 = 0,$$

$$\Rightarrow \text{rank}A = 2.$$

Ответ: $\text{rank}A = 2$.

23. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Алгоритм решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

(матрица \bar{A} называется **расширенной матрицей** системы уравнений).

Теорема Кронекера – Капелли. Система уравнений имеет хотя бы одно решение (совместна) $\Leftrightarrow \text{rank}A = \text{rank}\bar{A}$.

Доказательство.

1) Предположим, что система совместна, и пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – решение. Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A ,

поэтому размерность пространства, порожденного столбцами матрицы \bar{A} , равна размерности пространства, порожденного столбцами A , т.е. $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A}$.

Надо учесть, что ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров, а поэтому ранг, вычисленный по строкам, равен рангу, вычисленному по столбцам.

2) Пусть $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A}$. Присоединяя столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ к столбцам

матрицы A , мы получим ту же размерность пространства, порожден-

ного столбцами. Значит, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ выражается через

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

с какими-то коэффициентами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Поэтому $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – решение системы.

Теорема доказана.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}.$$

Решение.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим любой минор второго порядка

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \neq 0,$$

поэтому $\text{rank} A \geq 2$.

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$- (3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 4) = 4 - 4 - 3 -$$

$$- (6 - 1 - 8) = -3 + 3 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$- (4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 4) = 4 - 0 - 4 -$$

$$- (8 + 0 - 8) = 0,$$

поэтому $\text{rank} A = \text{rank} \bar{A} = 2$, и система совместна по теореме Кронекера – Капелли.

Так как $M \neq 0$, то 1-я и 2-я строки матрицы \bar{A} линейно независимы, а 3-я строка является линейной комбинацией этих строк. Поэтому система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Переменные, которые не попали в минор M , перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases}$$

и будем рассматривать как независимые переменные. Поскольку $M \neq 0$, то можно воспользоваться правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4-3x_3 & -2 \\ -x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(4-3x_3) \cdot 1 - (-2) \cdot (-x_3)}{1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1} = \frac{4-3x_3-2x_3}{1+2} = \frac{4-5x_3}{3},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-3x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (-x_3) - (4-3x_3) \cdot 1}{1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1} = \frac{-x_3 - 4 + 3x_3}{1+2} = \frac{2x_3 - 4}{3}.$$

Тогда система имеет решение

$$\left(\frac{4-5x_3}{3}, \frac{2x_3-4}{3}, x_3 \right),$$

где x_3 – независимая переменная. Если, например, $k = \mathbb{R}$, то решения нашей системы образуют прямую.

Ответ: $\left(\frac{4-5x_3}{3}, \frac{2x_3-4}{3}, x_3 \right).$

Пример 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2. \\ 4x_1 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $\text{rank}A \geq 2$.

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 -$$
$$- ((-1) \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot (-2)) =$$
$$= 2 - 4 + 0 - (4 + 0 - 6) = -2 + 2 = 0,$$

$\Rightarrow \text{rank}A = 2$.

Вычислим минор третьего порядка расширенной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{вычислим определитель, по} \\ \text{правилу треугольника} \end{array} \right\} =$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 0 -$$
$$- (1 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 4) =$$
$$= -4 + 8 + 0 - (-4 + 0 + 12) = 4 - 8 = -4 \neq 0,$$

поэтому $\text{rank}\bar{A} = 3$.

Итак, $\text{rank}A = 2$ и $\text{rank}\bar{A} = 3$.

Ранг основной матрицы отличен от ранга расширенной матрицы. По теореме Кронекера – Капелли система уравнений несовместна, т.е. не имеет решений.

Ответ: система уравнений несовместна.

24. Прямая на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости

1-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точку (x_0, y_0) и имеет направляющий вектор $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, где \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный базис плоскости. Тогда $(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{a}$, поэтому в координатной записи получаем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2. \end{cases}$$

2-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точки $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, и (x, y) – произвольная точка прямой L . Имеем:

$$\begin{aligned} (x, y) - (x_1, y_1) &= t[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)] \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет вид $Ax + By + C = 0$.

3-й способ задания прямой на плоскости: фиксируем нормаль \vec{n} к прямой L (по определению, $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{n} \perp \vec{a}$). Поскольку $(\vec{n}, \vec{a}) = 0$, то

$$(\vec{n}, t\vec{a}) = 0 \Rightarrow (\vec{n}, (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2) = 0,$$

где $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$, $n_1^2 + n_2^2 = 1$, в силу соотношения $\|\vec{n}\| = 1$. Наше уравнение принимает вид

$$(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2, (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2) = 0,$$

т.е. мы получаем нормальное уравнение прямой:

$$\begin{aligned} n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) &= 0, \\ n_1x + n_2y + (-n_1x_0 - n_2y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Сравним: прямая L задается уравнением $Ax + By + C = 0$ и нормальным уравнением. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & B & -C \\ n_1 & n_2 & n_1x_0 + n_2y_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку множество решений системы

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0 \end{cases}$$

– прямая L , то $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 1$ (если бы $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 2$, то по правилу Крамера множество решений состояло бы из одной точки). Поэтому $(n_1, n_2) = \lambda(A, B)$.

С другой стороны,

$$1 = \|\vec{n}\| = \sqrt{(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2} = |\lambda| \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2).$$

Теорема. Расстояние от точки (x_0, y_0) на плоскости до прямой

$$Ax + By + C = 0 \text{ равно } \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство.

Опустим перпендикуляр из точки (x_0, y_0) на прямую L . Обозначим точку пересечения перпендикуляра с прямой L через (x, y) . Имеем

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{n},$$

где $t = \pm\rho$.

Это соотношение принимает вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tn_1 \\ y = y_0 + tn_2, \end{cases}$$

причем $Ax + By + C = 0$, т.е. $A(x_0 + tn_1) + B(y_0 + tn_2) + C = 0$.

Можно считать, что $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} (A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2)$. В этом случае

$$n_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad n_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ поэтому}$$

$$Ax_0 + By_0 + C + t \cdot \left(\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + C + t\sqrt{A^2 + B^2} = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\rho = |t| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть даны две пересекающиеся прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Уравнения биссектрис, проведенных через точку пересечения, имеют вид

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки:

а) $M(2; -3)$ и $K(-4;5)$;

б) $A(-2; -4)$ и $B(-2;-1)$.

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставим в эту формулу координаты точек.

а) Пусть

$x_1 = 2$, $y_1 = -3$ – координаты точки M

$x_2 = -4$, $y_2 = 5$ – координаты точки K

$$\frac{y - (-3)}{5 - (-3)} = \frac{x - 2}{-4 - 2}$$

$$\frac{y + 3}{5 + 3} = \frac{x - 2}{-6}$$

$$\frac{y + 3}{8} = \frac{x - 2}{-6}$$

$$\frac{y + 3}{4} = \frac{x - 2}{-3}$$

$$-3 \cdot (y + 3) = 4 \cdot (x - 2)$$

$$-3y - 9 = 4x - 8$$

$$-3y - 9 - 4x + 8 = 0$$

$$-4x - 3y - 1 = 0$$

$$4x + 3y + 1 = 0$$

Ответ: $4x + 3y + 1 = 0$.

б) Пусть

$x_1 = -2$, $y_1 = -4$ – координаты точки A

$x_2 = -2$, $y_2 = -1$ – координаты точки B

$$\frac{y - (-4)}{-1 - (-4)} = \frac{x - (-2)}{-2 - (-2)}$$

$$\frac{y + 4}{-1 + 4} = \frac{x + 2}{-2 + 2}$$

$$\frac{y + 4}{3} = \frac{x + 2}{0}$$

Обратим внимание на то, что в знаменателе в правой части уравнения стоит 0. Это говорит лишь о том, что у нас получится прямая, параллельная оси Oy .

$$0 \cdot (y + 4) = 3 \cdot (x + 2)$$

$$0 = 3x + 6$$

$$3x = -6$$

$x = -2$ – прямая, параллельная оси Oy

Ответ: $x = -2$.

Пример 2. Составить уравнения прямой, проходящей:

а) через точку $K(3, -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (7; -2)$;

б) через точку $M(-2, 7)$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{3}{5}$.

Решение.

а) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

$A = 7$, $B = -2$ – координаты \vec{n}

$x_0 = 3, y_0 = -5$ – координаты точки K

$$7 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y + 5) = 0$$

$$7x - 21 - 2y - 10 = 0$$

$$7x - 2y - 31 = 0$$

б) воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку в данном направлении

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

$x_0 = -2, y_0 = 7$ – координаты точки M ,

$$k = -\frac{3}{5}.$$

$$y - 7 = -\frac{3}{5} \cdot (x - (-2))$$

$$5 \cdot (y - 7) = -3 \cdot (x + 2)$$

$$5y - 35 = -3x - 6$$

$$3x + 5y - 29 = 0$$

Ответ: а) $7x - 2y - 31 = 0$

б) $3x + 5y - 29 = 0$.

Пример 3. Определить острый угол между прямыми $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$.

Решение.

Воспользуемся формулой для вычисления острого угла между прямыми

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

По условию $k_1 = -3, k_2 = 2$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = |-1| = 1$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ или } 45^\circ$$

Ответ: 45° .

Пример 4. Показать, что прямые $4x - 6y + 7 = 0$ и $20x - 30y - 11 = 0$ параллельны.

Решение.

$$-6y = -4x - 7 \quad \text{и} \quad -30y = -20x + 11$$

$$y = \frac{-4}{-6}x + \frac{7}{6} \quad \text{и} \quad y = \frac{-20}{-30}x - \frac{11}{30}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \quad \text{и} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}$$

k_1

k_2

$k_1 = k_2 \Rightarrow$ прямые параллельны.

Пример 5. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Решение.

Выразим из каждого уравнения прямой y .

$$-5y = -3x - 7 \quad \text{и} \quad 6y = -10x + 3,$$

$$y = \frac{-3}{-5}x + \frac{7}{5} \quad \text{и} \quad y = \frac{-10}{6}x + \frac{3}{6},$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \quad \text{и} \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$$

k_1

k_2

$k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow$ прямые перпендикулярны.

Пример 6. Найти координаты точки пересечения прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$.

Решение.

Для того, чтобы найти точку пересечения прямых, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 12 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x = 2y - 1 \\ 2x + 5y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) \\ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) + 5y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) \\ 2 \cdot (2y - 1) + 15y - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) \\ 4y - 2 + 15y - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) \\ 19y - 38 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2y - 1) \\ 19y = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 2 - 1) = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

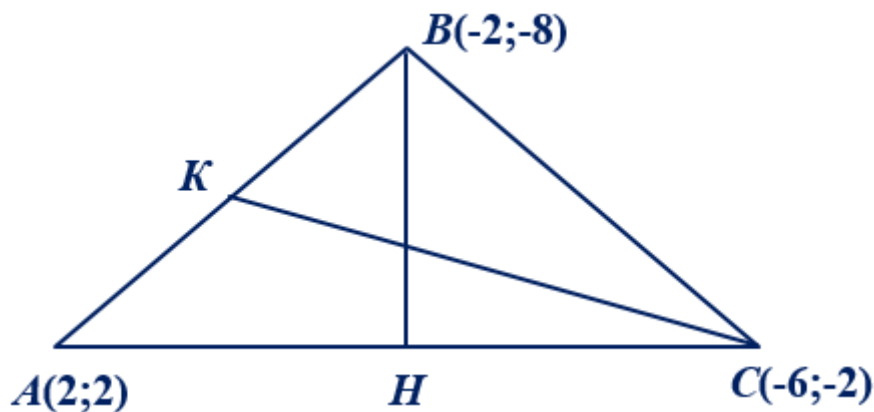
Ответ: (1; 2).

Пример 7. Даны вершины треугольника: $A(2;2)$, $B(-2;-8)$ и $C(-6;-2)$. Составить уравнения:

- медианы, проведённой из вершины C ;
- высоты, опущенной на сторону AC .

Решение.

Построим треугольник ABC .



а) проведём медиану из вершины C и обозначим её CK .

Для того, чтобы составить уравнение медианы CK , необходимо найти координаты точки K .

Т.к. CK – медиана, то она делит сторону AB пополам, т.е. точка K является серединой отрезка AB .

Найдём координаты точки K по формуле:

$$K = \frac{A+B}{2}.$$

Координаты точек A и B заданы, подставив их в формулу, получим

$$K = \frac{(2;2) + (-2;-8)}{2} = \frac{(2-2;2-8)}{2} = \frac{(0;-6)}{2} = (0;-3).$$

Уравнение прямой CK составим, как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, используя формулу

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть

$x_1 = -6, y_1 = -2$ – координаты точки C ,

$x_2 = 0, y_2 = -3$ – координаты точки K .

$$\frac{y - (-2)}{-3 - (-2)} = \frac{x - (-6)}{0 - (-6)}$$

$$\frac{y + 2}{-1} = \frac{x + 6}{6}$$

$$6y + 12 = -x - 6$$

$x + 6y + 18 = 0$ – уравнение медианы CK .

б) проведём высоту из вершины B на сторону AC , получим высоту BH .

Т.к. BH – высота, поэтому $BH \perp AC \Rightarrow k_{BH} = -\frac{1}{k_{AC}}$.

Найдём угловой коэффициент прямой AC по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$x_1 = 2, y_1 = 2$ – координаты точки A ,

$x_2 = -6, y_2 = -2$ – координаты точки C .

$$k_{AC} = \frac{-2 - 2}{-6 - 2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k_{BH} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Составим уравнение высоты BH , как уравнение прямой, проходящей через данную точку, с заданным угловым коэффициентом, используя формулу

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

$x_0 = -2, y_0 = -8$ – координаты точки B .

$$y - (-8) = -2 \cdot (x - (-2))$$

$$y + 8 = -2 \cdot (x + 2)$$

$$y + 8 = -2x - 4$$

$2x + y + 12 = 0$ – уравнение высоты BH .

Ответ: а) $x + 6y + 18 = 0$;

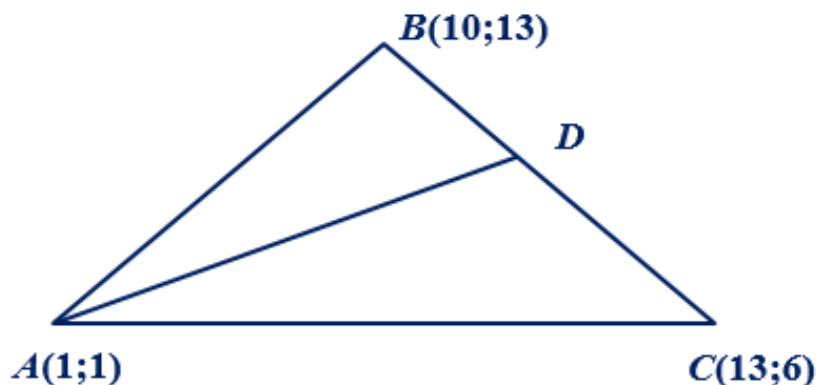
б) $2x + y + 12 = 0$.

Пример 8. Даны вершины треугольника: $A(1;1)$, $B(10;13)$ и $C(13;6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A .

Решение.

Построим треугольник ABC .

Проведём в нём биссектрису AD .



Основное свойство, которое приходит на ум относительно биссектрисы: биссектриса – это крыса, которое бежит по углам и делит угол пополам. Но, к сожалению, оно не может нам помочь при решении данной задачи.

Необходимо вспомнить ещё одно не менее важное свойство биссектрисы. А именно: в треугольнике биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Используя эту формулу, мы сможем найти в каком отношении точка D делит отрезок BC .

Нам известны координаты вершин треугольника, найдём длины сторон AB и AC . Вычислим координаты векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10;13) - (1;1) = (10-1;13-1) = (9;12),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (13;6) - (1;1) = (13-1;6-1) = (12;5).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{15}{13} = \lambda = \frac{BD}{DC}, \text{ т.е. точка } D \text{ делит отрезок } BC \text{ в отношении}$$

$$\lambda = \frac{15}{13}, \text{ считая от точки } B.$$

Найдём координаты точки D по формуле:

$$x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda}; \quad y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda}.$$

$$x_D = \frac{10 + \frac{15}{13} \cdot 13}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{10 + 15}{\frac{13 + 15}{13}} = \frac{25}{\frac{28}{13}} = \frac{25 \cdot 13}{28} = \frac{325}{28},$$

$$y_D = \frac{13 + \frac{15}{13} \cdot 6}{1 + \frac{15}{13}} = \frac{13 + \frac{90}{13}}{\frac{13 + 15}{13}} = \frac{\frac{13 \cdot 13 + 90}{13}}{\frac{28}{13}} = \frac{169 + 90}{28} = \frac{259}{28},$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{325}{28}; \frac{259}{28}\right).$$

Составим уравнение прямой AD , как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть

$x_1 = 1, y_1 = 1$ – координаты точки A ,

$x_2 = \frac{325}{28}, y_2 = \frac{259}{28}$ – координаты точки D .

$$\frac{y - 1}{\frac{259}{28} - 1} = \frac{x - 1}{\frac{325}{28} - 1}$$

$$\frac{y - 1}{259 - 28} = \frac{x - 1}{325 - 28}$$

$$\frac{y - 1}{231} = \frac{x - 1}{297}$$

$$297 \cdot (y - 1) = 231 \cdot (x - 1) \quad | :3$$

$$99 \cdot (y - 1) = 77 \cdot (x - 1) \quad | :11$$

$$9 \cdot (y - 1) = 7 \cdot (x - 1)$$

$$9y - 9 = 7x - 7$$

$$-7x + 9y - 9 + 7 = 0$$

$$-7x + 9y - 2 = 0$$

$7x - 9y + 2 = 0$ – уравнение биссектрисы AD .

Ответ: $7x - 9y + 2 = 0$.

Пример 9. Даны уравнения высот треугольника ABC :
 $x + y - 2 = 0, 9x - 3y - 4 = 0$ и координаты вершины $A(2;2)$.

Составить уравнения сторон треугольника.

Решение.

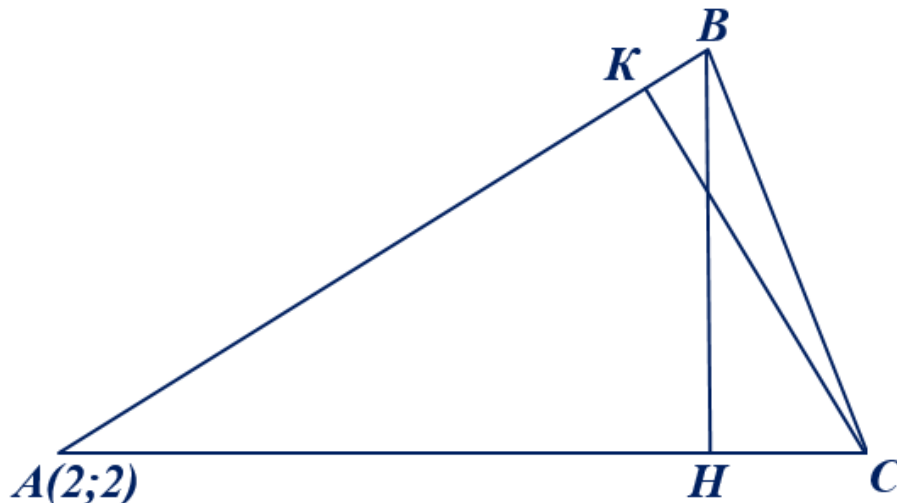
Необходимо выяснить: проходит ли хотя бы одна из высот через точку A ?

Для ответа на этот вопрос, подставим координаты точки A в уравнения высот:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 2 - 2 \neq 0 \\ 9 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 4 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{из точки } A \text{ не выходит ни}$$

одна из высот.

Построим треугольник и две его высоты, выходящие из вершин B и C .



Пусть

$x + y - 2 = 0$ – уравнение высоты BH ;

$9x - 3y - 4 = 0$ – уравнение высоты CK .

1) Составим уравнение стороны AB .

CK – высота $\Rightarrow CK \perp AB \Rightarrow k_{AB} = -\frac{1}{k_{CK}}$.

Найдём угловой коэффициент прямой CK , выразив y из уравнения $9x - 3y - 4 = 0$.

$$-3y = -9x + 4$$

$$y = \frac{-9x}{-3} + \frac{4}{-3}$$

$$y = 3x - \frac{4}{3} \Rightarrow k_{CK} = 3.$$

Значит, $k_{AB} = -\frac{1}{3}$.

Зная координаты точки A и угловой коэффициент прямой AB , составим её уравнение, используя формулу

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$$

где $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ – координаты точки A .

$$y - 2 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 2)$$

$$3 \cdot (y - 2) = -(x - 2)$$

$$3y - 6 = -x + 2$$

$$x + 3y - 6 - 2 = 0$$

$$x + 3y - 8 = 0 \text{ – уравнение стороны } AB.$$

2) Составим уравнение стороны AC .

$$BH \text{ – высота} \Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow k_{AC} = -\frac{1}{k_{BH}}.$$

Найдём угловой коэффициент прямой BH , выразив y из уравнения $x + y - 2 = 0$.

$$y = -x + 2 \Rightarrow k_{BH} = -1.$$

Значит, $k_{AC} = 1$.

Зная координаты точки A и угловой коэффициент прямой AC , составим её уравнение, используя формулу

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$$

где $x_0 = 2$, $y_0 = 2$ – координаты точки A .

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$y - 2 = x - 2$$

$$x - y = 0 \text{ – уравнение стороны } AC.$$

3) Составим уравнение стороны BC , как уравнение прямой, проходящей через две точки B и C по формуле:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Необходимо найти координаты точек B и C .

Найдём координаты точки B , как результат пересечения двух прямых AB и BH .

$$B = BH \cap AB \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = -y + 2 \\ -y + 2 + 3y - 8 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -y + 2 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = -y + 2 \\ 2y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = -y + 2 \\ y = 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 3).$$

Найдём координаты точки C , как результат пересечения двух прямых AC и CK .

$$.C = AC \cap CK \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ x = y \end{cases},$$

$$\begin{cases} 9y - 3y - 4 = 0 \\ x = y \end{cases}, \begin{cases} 6y = 4 \\ x = y \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{4}{6} \\ x = y \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Пусть

$x_1 = -1, y_1 = 3$ – координаты точки B ,

$x_2 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{2}{3}$ – координаты точки C .

$$\frac{y-3}{\frac{2}{3}-3} = \frac{x-(-1)}{\frac{2}{3}-(-1)}$$

$$\frac{y-3}{2-9} = \frac{x+1}{2+3}$$

$$\frac{y-3}{-7} = \frac{x+1}{5}$$

$$5 \cdot (y-3) = -7 \cdot (x+1)$$

$$5y - 15 = -7x - 7$$

$7x + 5y - 8 = 0$ – уравнение стороны BC .

Ответ: $x + 3y - 8 = 0$ – уравнение стороны AB ,

$x - y = 0$ – уравнение стороны AC ,

$7x + 5y - 8 = 0$ – уравнение стороны BC .

25. Угол между двумя прямыми на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть даны две прямые L_1, L_2 . По определению,

$$\begin{aligned} (\hat{L}_1, \hat{L}_2) &= (\hat{\vec{n}}_1, \hat{\vec{n}}_2) = \\ &= \arccos \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \arccos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \\ &= \arccos \left(\pm \frac{A_1 \vec{e}_1 + B_1 \vec{e}_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \pm \frac{A_2 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) = \\ &= \arccos \left(\pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right). \end{aligned}$$

Следствие. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Теорема. Рассмотрим две прямые

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad (L_1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad (L_2)$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Если $\text{rank} A \neq \text{rank} \bar{A}$, то прямые не пересекаются (параллельны).
- 2) Если $\text{rank} A = \text{rank} \bar{A} = 1$, то прямые совпадают.
- 3) Если $\text{rank} A = \text{rank} \bar{A} = 2$, то прямые пересекаются в одной точке.

26. Плоскость в трехмерном пространстве. Расстояние от точки до плоскости в трехмерном пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей в трехмерном пространстве. Взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве

Пусть даны три точки (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , не лежащие на одной прямой. Тогда они задают единственную плоскость π .

Очевидно, $(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ является линейной комбинацией векторов $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$$

Плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ имеет нормаль

$$\vec{n} = \pm \frac{A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам о прямых на плоскости:

Теорема. Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема. Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двугранный угол между этими плоскостями равен

$$\begin{aligned} (\pi_1, \pi_2) &= (\hat{\vec{n}}_1, \hat{\vec{n}}_2) = \\ &= \arccos \left(\pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right). \end{aligned}$$

Следствие (условие ортогональности двух плоскостей).
 $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Теорема (взаимное расположение 2-х плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

1) Если $\text{rank}A \neq \text{rank}\bar{A}$, то плоскости не пересекаются (параллельны и не совпадают).

2) Если $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 2$, то плоскости пересекаются по прямой.

3) Если $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 1$, то плоскости совпадают.

Теорема (взаимное расположение 3-х плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}.$$

1) Если $\text{rank}A \neq \text{rank}\bar{A}$, то либо две плоскости параллельны, а третья их пересекает, либо две плоскости пересекаются по прямой L , а третья параллельна этой прямой, либо все три плоскости параллельны, либо две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

2) Если $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 3$, то плоскости пересекаются в одной точке (в этом случае говорят, что плоскости находятся в общем положении).

3) Если $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 2$, то плоскости содержат одну общую прямую.

4) Если $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A} = 1$, то все три плоскости совпадают.

27. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора

Определение 1. Конечномерное линейное пространство E над полем \mathbb{R} вещественных чисел называется евклидовым \Leftrightarrow на E определено скалярное произведение.

Определение 2. Пусть E – евклидово пространство. Оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ называется самосопряженным $\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$
 $(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y}))$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E . Оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ самосопряжен \Leftrightarrow его матрица A_e симметрическая, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{Напомним, что } (\vec{e}_i, \vec{e}_j) &= \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \text{ поэтому} \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y})) &\Leftrightarrow (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \vec{e}_i) = (\vec{e}_j, \mathcal{A}(\vec{e}_i)) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ &\left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k, \vec{e}_i \right) \qquad \left(\vec{e}_j, \sum_{k=1}^n a_{ki} \vec{e}_k \right) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ &a_{ij} \qquad \qquad \qquad a_{ji}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема. Если оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ самосопряжен, то все комплексные корни характеристического уравнения являются вещественными.

Доказательство (для $n = 2$).

Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора \mathcal{A} в ортонормированном базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 . По предыдущей теореме имеем: $a_{ij} = a_{ji}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ \underbrace{a_{21}}_{=a_{12}} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0,$$

$$a_{11} \cdot a_{22} - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot a_{11} - \lambda \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Напомним, что

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}{4}} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}^2}{4}} = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

28. Спектральная теорема

Спектральная теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E . Тогда в E существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}: \mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$,

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$).

Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора \mathcal{A} в ортонормированном базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Тогда $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

поэтому $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, и матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

В частности, $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{11} \vec{e}_j$.

В этом случае можно в качестве ортонормированного базиса из собственных векторов взять $\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = \vec{e}_2$.

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Пусть \vec{x} – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_1 , \vec{y} – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_2 .

Рассмотрим

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}.$$

Очевидно,

$$\|\vec{f}_1\| = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1, \quad \|\vec{f}_2\| = \left\| \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| = 1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1) = \frac{\mathcal{A}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \frac{\lambda_1 \vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \lambda_1 \vec{f}_1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_2) = \frac{\mathcal{A}(\vec{y})}{\|\vec{y}\|} = \frac{\lambda_2 \vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \lambda_2 \vec{f}_2.$$

Остается проверить, что $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Очевидно,

$$\begin{array}{cc} (\mathcal{A}(\vec{f}_1), \vec{f}_2) & (\vec{f}_1, \mathcal{A}(\vec{f}_2)) \\ \parallel & \parallel \\ (\lambda_1 \vec{f}_1, \vec{f}_2) & (\vec{f}_1, \lambda_2 \vec{f}_2) \\ \parallel & \parallel \\ \lambda_1 (\vec{f}_1, \vec{f}_2) & \lambda_2 (\vec{f}_1, \vec{f}_2), \end{array}$$

поэтому $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, и, следовательно, $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Теорема доказана.

29. Ортогональные операторы и матрицы

Определение 1. Оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ в евклидовом пространстве E называется ортогональным $\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$.

Теорема 1. Если \mathcal{A} – ортогональный оператор, то он сохраняет скалярное произведение, нормы векторов и углы между ними.

Доказательство.

По определению, \mathcal{A} сохраняет скалярное произведение: $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$. Поэтому

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \sqrt{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{x}))} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \|\vec{x}\|,$$

$$(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \arccos \frac{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}))}{\|\mathcal{A}(\vec{x})\| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E . Оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ ортогональный \Leftrightarrow его матрица A ортогональная, т.е. ${}^t A = A^{-1}$, где ${}^t A$ – матрица, транспонированная к A .

Доказательство.

По определению матрицы A ,

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i, \sum_{l=1}^n a_{lk} \vec{e}_l \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{lk} (\vec{e}_i, \vec{e}_l) \\ & \parallel \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^n {}^t a_{ji} a_{ik},$$

где ${}^t a_{ji} = a_{ij}$ – элемент транспонированной матрицы ${}^t A$, расположенный в j -й строке и i -м столбце. Поэтому соотношение

$$\sum_{i=1}^n {}^t a_{ji} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$

эквивалентно соотношению

$${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, ${}^t A = A^{-1}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис,

$\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ – другой ортонормированный базис,

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица перехода.}$$

Тогда ${}^t Q = Q^{-1}$, т.е. Q – ортогональная матрица.

Доказательство.

Рассмотрим оператор \mathcal{A} с матрицей $A_e = Q$, т.е.

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i = \vec{f}_j.$$

Тогда

$$(\vec{f}_j, \vec{f}_k) = (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases} = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k).$$

Поэтому \mathcal{A} – ортогональный оператор, а его матрица $A_e = Q$ является ортогональной.

Теорема доказана.

Теорема 4. Если \mathcal{A} – ортогональный оператор, то $\det \mathcal{A} = \pm 1$.

Доказательство.

$\det \mathcal{A} = \det A$, где A – ортогональная матрица: ${}^t A = A^{-1}$. С другой стороны, по свойству определителей, $\det {}^t A = \det A$. Поэтому

$$1 = \det A^{-1} \cdot \det A = \det {}^t A \cdot \det A = \det A \cdot \det A = \det^2 A \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Ортогональный оператор \mathcal{A} с определителем $\det \mathcal{A} = 1$ называется поворотом.

30. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис,

$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. Функция $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется

квадратичной формой. Симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы.

Пример. Если $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, то

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(коэффициент (-4) при x_1x_2 разносится в матрице A как $a_{12} = -2 = a_{21}$).

Теорема. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Доказательство.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}: E \rightarrow E$, определенный формулой

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i.$$

Поскольку матрица A симметрическая, то оператор \mathcal{A} является самосопряженным.

Очевидно,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) &= \left(\mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j \right), \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}(\vec{e}_j), \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i, \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_k \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{=0, \text{ если } i \neq k; =1, \text{ если } i=k} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_i = f(\vec{x}). \end{aligned}$$

В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} : $\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$. В этом базисе вектор \vec{x} имеет новые координаты: $\vec{x} = y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = (\mathcal{A}(y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \\ &= (y_1 \mathcal{A}(\vec{f}_1) + \dots + y_n \mathcal{A}(\vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \\ &= (y_1 \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \lambda_n \vec{f}_n, y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

31. Классификация кривых второго порядка на плоскости

Задачи. Привести к каноническому виду:

1) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$;

3) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 3y + 2 = 0$.

На евклидовой плоскости с ортонормированным базисом \vec{e}_1, \vec{e}_2 рассмотрим кривую 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис \vec{f}_1, \vec{f}_2 , в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2,$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2,$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^2 q_{ij}\vec{e}_i,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \text{ – ортогональная матрица перехода от ба-}$$

зиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 к базису \vec{f}_1, \vec{f}_2 .

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2).$$

Сравнивая коэффициенты при \vec{e}_j в левой и правой частях, получим:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение кривой, получим уравнение

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) + \\ & \quad + b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = 0; \\ & \lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2}_{c_0} = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -c_0.$$

1) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $-c_0 > 0$, то положим

$$a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(эллипс).

2) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $-c_0 < 0$, то положим

$$a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1$$

(мнимый эллипс).

3) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $-c_0 = 0$, то положим

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке).

4) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $-c_0 > 0$, то положим

$$a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(гипербола).

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $-c_0 < 0$, то снова получим гиперболу.

5) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $-c_0 = 0$, то положим

$$a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{-1}{\lambda_2}.$$

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2 = 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + b_2 y_2 + b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + b_2 y_2 + b_0 - \underbrace{\lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 = -c_0.$$

Если $b_2 \neq 0$, то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 + \frac{c_0}{b_2} = t_2, \end{cases}$$

и уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 t_1^2 + b_2 t_2 = 0.$$

Предположим сначала, что $b_2 \neq 0$.

6) Если $\lambda_1 > 0$, $b_2 > 0$, то положим $a^2 = \frac{b_2}{\lambda_1}$. Уравнение кривой

принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} + t_2 = 0$$

(парабола); случай $b_2 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_2 на $-t_2$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_2 = 0$ (в этом случае уравнение кривой не содержит переменной t_2). Мы получаем следующие варианты:

7) $\frac{z_1^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных вещественных прямых);

8) $\frac{z_1^2}{a^2} = -1$ (пара параллельных мнимых прямых);

9) $z_1^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существуют 9 классов кривых 2-го порядка:

- 1) эллипс;
- 2) мнимый эллипс;
- 3) пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке;
- 4) гипербола;
- 5) пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых;
- 6) парабола;
- 7) пара параллельных вещественных прямых;
- 8) пара параллельных мнимых прямых;
- 9) пара совпадающих прямых.

32. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем \mathbb{R} вещественных чисел, $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ – другой базис этого же пространства,

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i,$$
$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$. Будем говорить, что эти базисы имеют одинаковую ориентацию, если $\det Q > 0$.

Если $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ – третий базис пространства E , ориентация которого совпадает с ориентацией $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, то $\vec{g}_j = \sum_{i=1}^n q'_{ij} \vec{f}_i$, $\det Q' > 0$. Проверим, что матрица Q'' перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ является произведением $Q'' = QQ'$: действительно,

$$\vec{g}_j = \sum_{k=1}^n q'_{kj} \vec{f}_k = \sum_{k=1}^n q'_{kj} \left(\sum_{i=1}^n q_{ik} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n q_{ik} q'_{kj} \right) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n q''_{ij} \vec{e}_i.$$

Поэтому из соотношения

$$\det Q'' = \det(QQ') = \det Q \det Q' > 0$$

следует, что базисы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ имеют одну и ту же ориентацию.

В итоге все базисы пространства E разбиваются на два класса: один класс состоит из базисов, ориентация которых совпадает с ориентацией базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$; другой класс состоит из базисов, ориентация которых противоположна ориентации базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Примеры.

1) $E = \mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения. Здесь строго положительные числа задают положительное направление числовой прямой (положительную ориентацию), а строго отрицательные числа задают отрицательное направление числовой прямой (отрицательную ориентацию).

2) E – плоскость с отмеченной точкой. Базисы

$$\begin{array}{c} \vec{e}_2 \\ \uparrow \\ \rightarrow \vec{e}_1 = \vec{f}_1 \\ \downarrow \\ \vec{f}_2 \end{array}$$

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -1 < 0.$$

3) Правый ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и левый ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ 3-мерного пространства

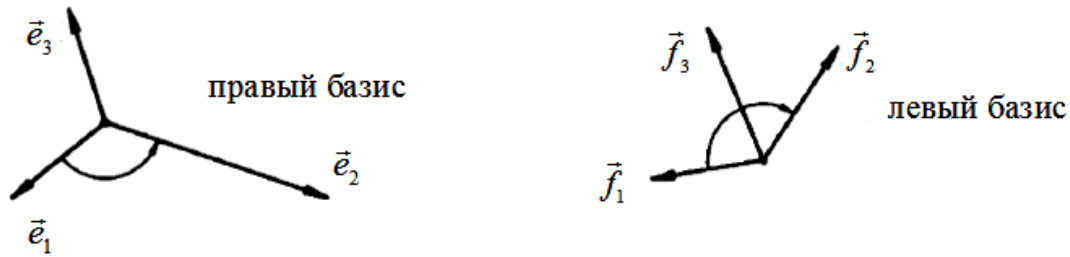


рис. 8

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -1 < 0.$$

Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (другими словами, $\det \mathcal{A} \neq 0$). Тогда $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ – новый базис пространства E , причем $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$. Поэтому базисы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ имеют одинаковую ориентацию $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} > 0$ (что эквивалентно соотношению $\det A > 0$, поскольку определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса).

Если $\det \mathcal{A} > 0$, то мы будем говорить, что оператор \mathcal{A} сохраняет ориентацию.

Например, если \mathcal{A} – поворот плоскости на угол φ , то \mathcal{A} сохраняет ориентацию, потому что

$$\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Напомним, что операторы, сохраняющие скалярное произведение, называются ортогональными.

Поскольку для любого ортогонального оператора \mathcal{A} имеем соотношение $\det \mathcal{A} = \pm 1$, то сохраняющие ориентацию ортогональные операторы – это в точности повороты.

33. Линейные операторы, сохраняющие объем

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем \mathbb{R} вещественных чисел, $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (т.е. $\det \mathcal{A} \neq 0$). Тогда (объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = |\det \mathcal{A}| \cdot (\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$

В частности, \mathcal{A} увеличивает объемы тел в $|\det \mathcal{A}|$ раз.

Доказательство.

Для простоты мы рассмотрим случай $\dim E = 3$.

Можно считать, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис E . Имеем

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \vec{e}_i,$$

поэтому объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_3)$, равен

$$\begin{aligned} & \left(\text{абсолютной величине} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right) = \\ & = \left(\text{абсолютной величине} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) = |\det \mathcal{A}| = \\ & = |\det \mathcal{A}| \cdot \underbrace{(\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{=1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Оператор \mathcal{A} сохраняет объем $\Leftrightarrow |\det \mathcal{A}| = 1$.

Следствие 2. Оператор \mathcal{A} сохраняет объем и ориентацию $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 1$.

В частности, повороты сохраняют объем и ориентацию.

Линейные операторы $\mathcal{A}: E \rightarrow E$, сохраняющие объем и ориентацию, образуют *специальную линейную группу* $SL(E)$ (special linear group). По определению,

$$SL(E) = \{\mathcal{A}: E \rightarrow E \mid \det \mathcal{A} = 1\}.$$

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – линейный оператор, сохраняющий объем и углы между векторами. Тогда \mathcal{A} – ортогональный оператор.

Доказательство.

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$.

Пусть \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный базис плоскости. Так как \mathcal{A} сохраняет углы, то

$$\frac{\pi}{2} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому параллелограмм, построенный на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$, является прямоугольником.

Пусть $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ – диагональ квадрата, построенного на векторах \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

Ясно, что $\mathcal{A}(\vec{d}) = \mathcal{A}(\vec{e}_1) + \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ – диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$. Поэтому из равенств

$$\frac{\pi}{4} = (\vec{d}, \vec{e}_1) = (\mathcal{A}(\vec{d}), \mathcal{A}(\vec{e}_1)),$$

следует, что прямоугольник является квадратом.

Поскольку \mathcal{A} сохраняет площади, то площадь этого квадрата равна 1. Значит, длины векторов $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ равны 1. Поэтому оператор \mathcal{A} переводит ортонормированный базис \vec{e}_1, \vec{e}_2 в ортонормированный базис $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ и, следовательно, \mathcal{A} – ортогональный оператор.

Теорема доказана.

34. Простейшие примеры алгебр Ли

Определение 1. Векторное пространство g над полем k называется алгеброй Ли, если каждой паре векторов $x, y \in g$ отвечает вектор $[x, y] \in g$, причем выполняются следующие аксиомы:

- 1) $\forall \lambda \in k \quad [\lambda x, y] = [x, \lambda y] = \lambda[x, y]$;
- 2) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$; $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$;
- 3) $\forall x \in g \quad [x, x] = 0$;
- 4) (тождество Якоби) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Из свойств 2) – 3) следует, что

$$0 = [x + y, x + y] = \underbrace{[x, x]}_{=0} + [y, x] + [x, y] + \underbrace{[y, y]}_{=0}.$$

Поэтому $[x, y] = -[y, x]$.

Примеры.

1) g – 3-мерное пространство со скалярным произведением, $[x, y]$ – векторное произведение.

Нуждается в проверке только тождество Якоби. Его достаточно проверить только для базисных векторов правого ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (легкое упражнение).

2) $g = M_n(\mathbb{R})$ – кольцо квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля k .

Пусть $[x, y] = xy - yx$, где xy – обычное произведение матриц. В этом случае тождество Якоби действительно выполняется:

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] &= [xy - yx, z] + [yz - zy, x] + [zx - xz, y] = \\ &= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xzy + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz = 0. \end{aligned}$$

3) Пусть $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in g$. В этом случае алгебра Ли g называется коммутативной.

4) Пусть $g = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ – множество всех квадратных матриц порядка n с нулевым следом.

Если $\text{Tr}(x) = 0$ и $\text{Tr}(y) = 0$, то

$$\text{Tr}([x, y]) = \text{Tr}(xy - yx) = \text{Tr}(xy) - \text{Tr}(yx) = 0$$

(и поэтому $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ – алгебра Ли) в силу общей теоремы:

Теорема 1. Для любых квадратных матриц x, y порядка n

$$\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx).$$

Доказательство.

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(xy) &= \sum_{i=1}^n (xy)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik} y_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n y_{ki} x_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^n (yx)_{kk} = \text{Tr}(yx). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $x \in M_n(\mathbb{R})$ и ${}^t x$ – транспонированная матрица.

Тогда

$${}^t(xy) = {}^t y \cdot {}^t x.$$

Доказательство.

Очевидно,

$$\begin{aligned} ({}^t(xy))_{ij} &= (xy)_{ji} = \sum_{k=1}^n x_{jk} y_{ki} = \\ &= \sum_{k=1}^n {}^t x_{kj} \cdot {}^t y_{ik} = \sum_{k=1}^n {}^t y_{ik} \cdot {}^t x_{kj} = ({}^t y \cdot {}^t x)_{ij}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Определение 2. Квадратная матрица $x \in M_n(\mathbb{R})$ называется ко-сосимметрической, если ${}^t x = -x$.

Теорема 3. Множество $\text{so}_n(\mathbb{R}) = \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = -x\}$ всех ко-сосимметрических матриц порядка n является алгеброй Ли.

Доказательство.

Если $x, y \in \text{so}_n(\mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} {}^t[x, y] &= {}^t(xy - yx) = {}^t(xy) - {}^t(yx) = {}^t y \cdot {}^t x - {}^t x \cdot {}^t y = \\ &= (-y)(-x) - (-x)(-y) = yx - xy = -[x, y], \end{aligned}$$

поэтому $x, y \in \text{so}_n(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

35. Экспонента и логарифм квадратной матрицы

Пусть $x \in (\mathbb{R})$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Действительно, если $x = 0$, то это соотношение очевидно. Если же $x \neq 0$, то из второго замечательного предела получим:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)}} \right]^x = e^x.$$

Бином Ньютона дает соотношение

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \\ &= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^m + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \cdot x^m + \dots \end{aligned}$$

В курсе математического анализа доказывается, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots$$

– сумма сходящегося всюду степенного ряда.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ на конечномерном евклидовом пространстве E определим его норму формулой

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{\vec{e} \in E \\ \|\vec{e}\| \leq 1}} \|\mathcal{A}(\vec{e})\|.$$

Поскольку функции $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ и $E \xrightarrow{\vec{e} \mapsto \|\vec{e}\|} \mathbb{R}$ непрерывны, их композиция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве (компакте) $B = \{e \in E \mid \|e\| \leq 1\}$, и в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса ограничена на единичном шаре B . Поэтому норма оператора \mathcal{A} существует. Более того, она обладает следующими свойствами:

$$\text{i) } \|\mathcal{A}\| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{e} \in B; \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{e} \in B \mathcal{A}(\vec{e}) = \vec{0} \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0;$$

$$\text{ii) } \|\lambda\mathcal{A}\| = \sup_{\vec{e} \in B} |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\|;$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| &= \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{A}(\vec{e}) + \mathcal{B}(\vec{e})\| \leq \sup_{\vec{e} \in B} (\|\mathcal{A}(\vec{e})\| + \|\mathcal{B}(\vec{e})\|) \leq \\ &\leq \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{A}(\vec{e})\| + \sup_{\vec{e} \in B} \|\mathcal{B}(\vec{e})\| = \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|; \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \forall \vec{e} \in E \quad \|\mathcal{A}(\vec{e})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\vec{e}\|, \text{ потому что}$$

$$\forall \vec{e} \neq \vec{0} \quad \left\| \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right\| = 1, \quad \frac{1}{\|\vec{e}\|} \|\mathcal{A}(\vec{e})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right) \right\| \leq \|\mathcal{A}\|;$$

$$\text{v) } \|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \text{ (действительно, в силу свойства (iv) имеем:}$$

$$\forall \vec{e} \in E,$$

$$\|(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e})\| = \|\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}))\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}(\vec{e})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \cdot \|\vec{e}\|).$$

Наличие нормы в пространстве $\text{End } \mathbb{R}(E)$ линейных операторов позволяет перенести на функции со значениями в E (линейные операторы) теорию сходящихся последовательностей. По определению, последовательность операторов \mathcal{A}_n сходится к оператору $\mathcal{A} \Leftrightarrow \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ определим его экспоненту $e^{\mathcal{A}}$ формулой

$$e^{\mathcal{A}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{n} \right)^n = 1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \dots$$

Сходимость обеспечивается теоремой Вейерштрасса, потому что ряд

$$1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \dots \text{ мажорируется (согласно свойству (v)) сходящимся числовым рядом}$$

$$\|1\| + \|\mathcal{A}\| + \frac{\|\mathcal{A}\|^2}{2!} + \dots + \frac{\|\mathcal{A}\|^m}{m!} + \dots = e^{\|\mathcal{A}\|}.$$

Если $x \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства E , то можно определить экспоненту e^x теми же формулами:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots$$

Теорема (без доказательства). Если матрицы $x, y \in M_n(\mathbb{R})$ коммутируют, т.е. $[x, y] = xy - yx = 0$, то

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Теорема. Если $x \in \text{so}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица, то e^x – ортогональная матрица.

Доказательство.

По условию, ${}^t x = -x$, поэтому

$${}^t(e^x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{{}^t x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

С другой стороны, матрицы x и $-x$ коммутируют:

$$[x, -x] = -[x, x] = 0,$$

поэтому $1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x} = e^x \cdot {}^t(e^x)$ и, следовательно, ${}^t(e^x) = (e^x)^{-1}$.

Поэтому e^x – ортогональная матрица.

Теорема доказана.

Если $x \in \mathbb{R}$ и $|x| < 1$, то

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x [1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^m x^m + \dots] dx = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1} + \dots, \end{aligned}$$

поэтому можно определить логарифм вещественного числа $y = 1 + x$ (где $|x| < \varepsilon < 1$) формулой

$$\ln y = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots$$

Теорема (без доказательства). Если $y = 1 + x$, где x – квадратная матрица, близкая к нулевой матрице, то определен логарифм

$$\ln y = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots$$

причём, $e^{\ln y} = y$, $\ln e^x = x$.

Следствие. Если $y = e^x$ – ортогональная матрица, близкая к единичной матрице (так что логарифм $\ln y = \ln(e^x) = x$ существует), то x – кососимметрическая матрица.

Доказательство.

Поскольку $y = e^x$ – ортогональная матрица, то ${}^t(e^x) = (e^x)^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} {}^t x &= {}^t(\ln y) = \\ &= \left((y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1} + \dots \right) = \\ &= ({}^t y - 1) - \frac{({}^t y - 1)^2}{2} + \frac{({}^t y - 1)^3}{3} - \frac{({}^t y - 1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^m ({}^t y - 1)^{m+1}}{m+1} + \dots = \\ &= \ln({}^t y) = \ln((e^x)^{-1}) = \ln(e^{-x}) = -x \end{aligned}$$

и, следовательно, x – кососимметрическая матрица.

Следствие доказано.

Мы видим, что экспонента взаимно однозначно отображает малую окрестность нулевой матрицы в алгебре Ли $so_n(\mathbb{R})$ кососимметрических матриц на малую окрестность единичной матрицы в группе $O_n(\mathbb{R})$ ортогональных матриц. Обратное отображение осуществляется с помощью логарифма. В частности,

$$\dim \mathbb{R} O_n(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R} so_n(\mathbb{R}).$$

Поскольку кососимметрическая матрица $x \in so_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то $\dim \mathbb{R} so_n(\mathbb{R}) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n(n-1)/2$. Такую же размерность имеет группа ортогональных матриц $O_n(\mathbb{R})$.

36. Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты симметрической матрицы

Теорема. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ в евклидовом пространстве E имеем: $\det e^{\mathcal{A}} = e^{\text{Tr}\mathcal{A}}$.

Доказательство.

Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Характеристическое уравнение оператора \mathcal{A} имеет вид

$$\lambda^2 - \text{Tr}\mathcal{A} \cdot \lambda + \det\mathcal{A} = 0.$$

Поэтому комплексные собственные числа оператора \mathcal{A} различны $\Leftrightarrow (\text{Tr}\mathcal{A})^2 - 4\det\mathcal{A} \neq 0$. Это условие задает открытое плотное подмножество U в кольце $\text{End } \mathbb{R}(E)$.

Все операторы $\mathcal{A} \in U$ диагонализируются (над полем \mathbb{C} комплексных чисел). Значит, в некотором базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 имеем: $\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – собственные числа оператора \mathcal{A} .

Очевидно,

$$\mathcal{A}^m(\vec{e}_1) = \lambda_1^m \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}^m(\vec{e}_2) = \lambda_2^m \vec{e}_2,$$

поэтому

$$e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_1) = e^{\lambda_1} \vec{e}_1, \quad e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_2) = e^{\lambda_2} \vec{e}_2,$$

и, следовательно, матрица оператора $e^{\mathcal{A}}$ в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\det e^{\mathcal{A}} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\text{Tr}\mathcal{A}}.$$

В итоге мы доказали теорему для операторов $\mathcal{A} \in U$. Поскольку $e^{\mathcal{A}}$ и $e^{\text{Tr}\mathcal{A}}$ непрерывны (как функции от \mathcal{A}) и совпадают на открытом плотном подмножестве $U \hookrightarrow \text{End } \mathbb{R}(E)$, то они совпадают всюду.

Теорема доказана.

Следующая очевидная теорема позволяет сравнительно просто вычислять экспоненты симметрических матриц и самосопряженных операторов.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E , A_e – (симметрическая) матрица оператора \mathcal{A} в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} . Пусть Q – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, определенная формулой $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \vec{e}_i$. Тогда

$$A_f = Q^{-1} A_e Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$e^{A_f} = Q^{-1} e^{A_e} Q = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$e^{A_e} = Q \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}.$$

Доказательство.

Все следует из очевидных равенств

$$A_f^2 = Q^{-1} A_e Q Q^{-1} A_e Q = Q^{-1} A_e^2 Q,$$

$$A_f^3 = Q^{-1} A_e^3 Q, \dots, A_f^m = Q^{-1} A_e^m Q.$$

Теорема доказана.

37. Аффинная группа

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k . Положим $GL(E) = \{A: E \rightarrow E \mid \det A \neq 0\}$ (general linear group). Это группа линейных автоморфизмов линейного пространства E над полем k .

Очевидно, вектор $\vec{0}$ является неподвижным вектором любого линейного оператора A в силу соотношения $A(\vec{0}) = \vec{0}$.

Мы хотим расширить группу $GL(E)$ обратимых операторов до аффинной группы

$$\text{Aff}(E) = \{\Phi: E \rightarrow E \mid \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = A(\vec{x}) + \vec{a}, \quad A \in GL(E) \quad \vec{a} \in E\}.$$

Из определения тотчас следует, что $\Phi(\vec{0}) = A(\vec{0}) + \vec{a} = \vec{a}$.

Таким образом, элемент $\vec{0}$ может переводиться элементами аффинной группы $\text{Aff}(E)$ в произвольный элемент $\vec{a} \in E$, что более отвечает реальностям физического мира.

Проверим, что $\text{Aff}(E)$ действительно является группой. Если $\Psi(\vec{x}) = B(\vec{x}) + \vec{b}$, то

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\vec{x}) &= \Psi(\Phi(\vec{x})) = \Psi(A(\vec{x}) + \vec{a}) = B(A(\vec{x}) + \vec{a}) + \vec{b} = \\ &= B(A(\vec{x})) + B(\vec{a}) + \vec{b} = C(\vec{x}) + \vec{c}, \end{aligned}$$

где $C = BA \in GL(E)$ – произведение линейных операторов $A, B \in GL(E)$, $\vec{c} = B(\vec{a}) + \vec{b} \in E$ – фиксированный вектор.

Поэтому $\Psi \circ \Phi \in \text{Aff}(E)$.

С другой стороны, если Ψ – обратный элемент для Φ , то мы имеем $\forall \vec{x} \in E \quad \Psi \circ \Phi(\vec{x}) = \vec{x}$.

Поэтому $B(A(\vec{x})) + B(\vec{a}) + \vec{b} = \vec{x}$ и, следовательно, $\forall \vec{x} \in E$ $B(A(\vec{x})) = \vec{x}$, $B(\vec{a}) + \vec{b} = \vec{0}$. Значит, $B = A^{-1}$, $\vec{b} = -A^{-1}(\vec{a})$, поэтому

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}(\vec{x}) - A^{-1}(\vec{a}) = A^{-1}(\vec{x} - \vec{a}).$$

Теорема. Группа $\text{Aff}(E)$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу параллельных переносов

$$\text{Transl}(E) = \{T \in \text{Aff}(E) \mid \forall \vec{x} \in E \quad T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t} \xrightarrow{\sim} E,$$

причём

$$\text{Aff}(E)/\text{Transl}(E) \xrightarrow{\sim} \text{GL}(E).$$

Доказательство.

Рассмотрим каноническое отображение

$$f : \text{Aff}(E) \rightarrow \text{GL}(E),$$

$$\Phi \mapsto \mathcal{A}.$$

Проверим, что f – морфизм групп (т.е. что $f(\Psi \circ \Phi) = f(\Psi) \circ f(\Phi) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$).

Действительно, мы уже знаем, что

$$\Psi \circ \Phi(\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})) + \mathcal{B}(\vec{a}) + \vec{b}.$$

Поэтому

$$f(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = f(\Psi) \circ f(\Phi).$$

С другой стороны, ядро f равно

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{\Phi \in \text{Aff}(E) \mid \mathcal{A} = 1\} = \\ &= \{\Phi \in \text{Aff}(E) \mid \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}\} = \\ &= \text{Transl}(E) \xrightarrow{\sim} E \end{aligned}$$

и является нормальной подгруппой в $\text{Aff}(E)$ (согласно общей теореме из теории групп, ядра морфизмов являются нормальными подгруппами); кроме того, согласно общей теореме из теории групп фактор по ядру изоморфен образу, т.е.

$$\text{Aff}(E)/\text{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} f(\text{Aff}(E)) = \text{GL}(E),$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Определение. Элементы группы $\text{Aff}(E)$ называются аффинными морфизмами.

Очевидно, любой аффинный морфизм $\Phi : E \rightarrow E$ является композицией линейного морфизма $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ и параллельного переноса $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$.

38. Движения (изометрии) евклидова пространства

Определение. Пусть E – евклидово пространство (конечномерное линейное пространство над полем \mathbb{R} , снабженное скалярным произведением). Тогда E имеет структуру метрического пространства с метрикой $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Движением (изометрией) пространства E называется любое отображение $\Phi: E \rightarrow E$, сохраняющее расстояние, т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}).$$

В этом определении движения не предполагается, что Φ – аффинное отображение, но на самом деле Φ – аффинное.

Теорема. Отображение $\Phi: E \rightarrow E$ является движением $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$, где $\mathcal{A} \in O(E)$ – ортогональный оператор. Если, кроме того, $\mathcal{A} \in SO(E)$ (другими словами, \mathcal{A} сохраняет ориентацию), то Φ называется собственным движением.

Доказательство.

Предположим, что $\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$, где $\mathcal{A} \in O(E)$ – ортогональный оператор.

Поскольку \mathcal{A} сохраняет длины векторов, то

$$\begin{aligned} \rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) &= \rho(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}, \mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a}) = \\ &= \|(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}) - (\mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a})\| = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

поэтому Φ – изометрия.

Предположим теперь, что $\Phi: E \rightarrow E$ – произвольная изометрия. Пусть $\vec{a} = \Phi(\vec{0})$ и $T_{\vec{a}}: E \rightarrow E$ – параллельный перенос на вектор \vec{a} , определенный формулой $T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$.

Тогда $\mathcal{A} = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi$ является изометрией (потому что композиция двух изометрий является изометрией). Очевидно, $T_{\vec{a}}(\vec{0}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1}(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Следовательно, $\Phi = T_{\vec{a}} \circ \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$, т.е. любая изометрия является произведением изометрии \mathcal{A} , оставляющей неподвижной точку $\vec{0}$, и сдвига $T_{\vec{a}}$. Осталось проверить, что \mathcal{A} – линейный ортогональный оператор.

Поскольку \mathcal{A} – изометрия, то

$$\|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| = \rho(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Полагая в этом соотношении $\vec{y} = \vec{0}$, получим:

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

(другими словами, \mathcal{A} сохраняет длины векторов).

Проверим, что \mathcal{A} сохраняет скалярное произведение: действительно,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 &= (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = (\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\vec{y}\|^2, \end{aligned}$$

поэтому

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})).$$

Осталось проверить, что \mathcal{A} – линейный оператор. Для этого рассмотрим вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} 0 &= \|\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \|\vec{z}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2(\vec{z}, \vec{x}) - 2(\vec{z}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= \|\mathcal{A}(\vec{z})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{x})) - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{y})) + 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \\ &= (\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) = \|\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{0}$ и $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{z}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Теорема доказана.

39. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства

Изометрии постоянно встречаются в геометрии и механике твердого тела, поэтому мы рассмотрим классификацию изометрий евклидовых пространств малых размерностей.

1) Пусть $E = \mathbb{R}$ – аффинная прямая. Любая изометрия $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$\Phi(x) = \varepsilon x + a,$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Действительно, любой ортогональный оператор \mathcal{A} на \mathbb{R} сохраняет скалярное произведение и является гомотетией с коэффициентом ε , поэтому из соотношения $\mathcal{A}(x)\mathcal{A}(x) = x^2$ следует, что $\varepsilon x \varepsilon x = \varepsilon^2 x^2 = x^2$ и $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Если $\varepsilon = 1$, то $\Phi(x) = x + a$, и поэтому Φ – сдвиг (параллельный перенос прямой). Если, кроме того, $a \neq 0$, то Φ не имеет неподвижных точек.

Если $\varepsilon = -1$, то $\Phi(x) = -x + a$. Неподвижная точка отображения Φ находится из уравнения

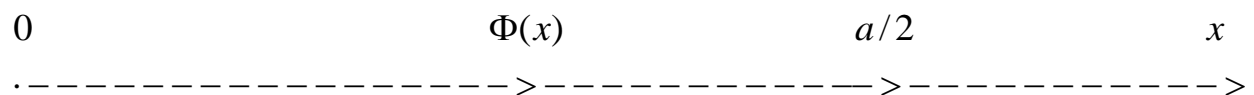
$$x_0 = \Phi(x_0) = -x_0 + a.$$

Это точка $x_0 = a/2$.

Очевидно,

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(x) - a/2 = -(x - a/2),$$

поэтому Φ – отражение прямой относительно неподвижной точки $a/2$ (оно не сохраняет ориентацию):



2) Пусть E – евклидова плоскость, \vec{e}_1, \vec{e}_2 – ортонормированный базис E . Тогда $\Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$, где \mathcal{A} – поворот на угол φ (если \mathcal{A} сохраняет ориентацию) или \mathcal{A} – ортогональный оператор с определителем -1 .

Предположим сначала, что \mathcal{A} имеет ненулевой собственный вектор. Можно считать, что \vec{e}_1 является собственным вектором оператора \mathcal{A} с собственным числом $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Поскольку оператор \mathcal{A} ортогональный, то

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_1)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1,$$

поэтому

$$(\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_1 \vec{e}_1) = \lambda_1^2 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$$

и, следовательно, $\lambda_1 = \pm 1$. С другой стороны,

$$0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)) = (\lambda_1 \vec{e}_1, \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) \perp \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_2.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то $\forall \vec{x} \in E \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x}$ и Φ – параллельный перенос на вектор \vec{a} .

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то $\forall \vec{x} \in E \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = -\vec{x}$ и $\Phi(\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{a}$.

Неподвижная точка отображения Φ находится из уравнения

$$\vec{x}_0 = \Phi(\vec{x}_0) = -\vec{x}_0 + \vec{a}.$$

Это точка $\vec{x}_0 = \vec{a}/2$. Очевидно,

$$\forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) - \vec{a}/2 = -(\vec{x} - \vec{a}/2),$$

поэтому Φ – отражение плоскости относительно неподвижной точки $\vec{a}/2$ (оно сохраняет ориентацию). Легко видеть, что в этом случае мы имеем поворот плоскости E вокруг неподвижной точки $\vec{a}/2$ на угол π .

Наконец, можно считать, что $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$. В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2,$$

$$\Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = (x_1 + a_1) \vec{e}_1 + (-x_2 + a_2) \vec{e}_2.$$

Очевидно, Φ является композицией отражения относительно оси, проходящей через точку $(0, a_2/2)$ параллельно вектору \vec{e}_1 , и сдвига на вектор $a_1 \vec{e}_1$.

Предположим теперь, что \mathcal{A} не имеет вещественных собственных векторов. Тогда комплексные собственные числа оператора \mathcal{A}

связаны соотношениями $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ (потому что λ_1 является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \text{Tr} \mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0$$

с вещественными коэффициентами и, следовательно, $\bar{\lambda}_1$ также является корнем характеристического уравнения),

$$\{\pm 1\} \ni \det \mathcal{A} = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 > 0,$$

поэтому $\det \mathcal{A} = 1$ и, следовательно, \mathcal{A} сохраняет ориентацию (т.е. является поворотом на угол $\varphi \neq 0, \neq \pi$). В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{e}_1) &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \\ \mathcal{A}(\vec{e}_2) &= -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2, \end{aligned}$$

поэтому

$$\Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2.$$

Неподвижная точка (x_1^0, x_2^0) определяется уравнением

$$\begin{aligned} \Phi(x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2) &= \\ &= x_1^0 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2^0 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \\ &+ a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2, \end{aligned}$$

которое имеет единственное решение по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1^0 (\cos \varphi - 1) - x_2^0 \sin \varphi + a_1 = 0 \\ x_1^0 \sin \varphi + x_2^0 (\cos \varphi - 1) + a_2 = 0 \end{cases},$$

потому что определитель

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1 + \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos \varphi \neq 0.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} \Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + (x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2)) &= \\ &= (x_1 + x_1^0) (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + (x_2 + x_2^0) (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \\ &= x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \\ &+ x_1^0 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2^0 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = \\ &= x_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + x_2 (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + (x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2) \end{aligned}$$

следует, что Φ – это поворот плоскости на угол φ вокруг неподвижной точки (x_1^0, x_2^0) .

В результате доказана следующая теорема:

Теорема. Любая изометрия евклидовой плоскости, сохраняющая ориентацию, является параллельным переносом или вращением вокруг неподвижной точки. Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой.

3) Изометрии 3-мерного евклидова пространства допускают следующее описание:

Теорема. Любая изометрия 3-мерного евклидова пространства, сохраняющая ориентацию, является винтовой, т.е. является композицией параллельного переноса вдоль некоторой прямой и вращения вокруг этой же прямой (винтовая изометрия включает как чистый параллельный перенос, так и чистое вращение). Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный той же плоскости, либо является композицией отражения относительно некоторой плоскости P и вращения на угол φ вокруг некоторой прямой L , перпендикулярной плоскости P .

Следствие (теорема Эйлера). Любое перемещение твердого тела с одной закрепленной точкой является вращением вокруг некоторой оси, проходящей через закрепленную точку.

40. Аффинная классификация кривых второго порядка

Две фигуры F_1 и F_2 в пространстве E называются аффинно эквивалентными $\Leftrightarrow \exists g \in \text{Aff}(E) \ g(F_1) = F_2$.

Теорема. Любая кривая второго порядка на плоскости аффинно эквивалентна одному из следующих объектов:

- 1) окружность $x^2 + y^2 = 1$;
- 2) мнимая окружность $x^2 + y^2 = -1$;
- 3) гипербола $x^2 - y^2 = 1$;
- 4) парабола $y^2 = 2x$;

5) пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $x^2 + y^2 = 0$;

6) пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $x^2 - y^2 = 0$;

7) пара параллельных вещественных прямых $x^2 = 1$;

8) пара параллельных мнимых прямых $x^2 = -1$;

9) пара совпадающих вещественных прямых $x^2 = 0$.

Доказательство.

Из метрической классификации кривых 2-го порядка известно, что композиция ортогонального линейного оператора и параллельного переноса приводит уравнение кривой к одному из следующих типов:

1') эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

2') мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$;

3') гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

4') парабола $y^2 = 2px$;

5') пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;

6') пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;

7') пара параллельных вещественных прямых $\frac{x^2}{a^2} = 1$;

8') пара параллельных мнимых прямых $\frac{x^2}{a^2} = -1$;

9') пара совпадающих вещественных прямых $x^2 = 0$.

Замена координат $x = ax'$, $y = by'$ отвечает некоторому аффинному линейному оператору и приводит уравнение 1') – 3'), 5') – 8') к

соответствующему уравнению 1) – 3), 5) – 8). Наконец, аффинная замена $x' = px$, $y' = y$ приводит уравнение 4') к виду 4).

Очевидно, эллипс аффинно неэквивалентен кривым 2) – 8), так как он является ограниченным замкнутым 1-мерным множеством (и это свойство сохраняется при аффинных морфизмах), в отличие от кривых 2) – 9), множество вещественных точек которых либо пусто (2,8), либо неограничено (3,4,6,7,9), либо нульмерно (5).

Аналогично проверяется неэквивалентность всех других классов. Например, гипербола состоит из двух ветвей, и поэтому неэквивалентна параболе. Наконец, надо учесть, что параллельность прямых сохраняется при аффинных морфизмах.

41. Понятие о плоскости Лобачевского

Напомним, что любое комплексное число z имеет вид $z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ и $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ называются вещественной и мнимой частью z .

Определение 1. Пусть $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ – верхняя полуплоскость. Назовем "прямыми" в H лучи, перпендикулярные вещественной оси $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = y = 0\}$, а также полуокружности, центры которых расположены на вещественной оси (такие полуокружности пересекаются с вещественной осью под прямым углом). Верхняя полуплоскость с такими "прямыми" называется плоскостью Лобачевского (или, более точно, моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского).

Теорема. Через любые две точки $z_1 \neq z_2 \in H$ проходит единственная "прямая".

Доказательство.

Если $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) = a$, то точки z_1, z_2 лежат на одном вертикальном луче $\operatorname{Re}(z) = a$ и не могут лежать на полуокружности с центром на вещественной оси $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$ (потому что для любых точек $z_1 \neq z_2$ на полуокружности выполнено соотношение

$\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$). Следовательно, в этом случае существует единственная "прямая", проходящая через z_1 и z_2 .

Если $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$, то точки z_1, z_2 не лежат на вертикальном луче. Существует единственная точка

$$a \in \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\},$$

для которой $|z_1 - a| = |z_2 - a|$, поэтому точка a является центром полуокружности, проходящей через точки z_1 и z_2 .

Теорема доказана.

Можно проверить, что все аксиомы обычной евклидовой геометрии (кроме 5-го постулата Евклида) выполнены на плоскости Лобачевского.

Напомним, что 5-й постулат Евклида утверждает существование и единственность прямой на евклидовой плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

На плоскости Лобачевского 5-й постулат Евклида не выполняется: через данную точку, не лежащую на "прямой" l , можно провести более одной "прямой", параллельной (т.е. не пересекающей) l .

На самом деле таких параллельных прямых бесконечно много.

Наша конструкция показывает, что 5-й постулат не является логическим следствием других аксиом евклидовой геометрии.

Хорошо известно, что 5-й постулат Евклида имеет следующую эквивалентную формулировку: сумма внутренних углов треугольника на евклидовой плоскости равна π .

Теорема (без доказательства). Сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского строго меньше π (угол в точке пересечения двух "прямых" по определению равен обычному углу между касательными в точке пересечения). Более того, сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского может быть сколь угодно малой.

Определение 2. Фиксируем вещественное положительное число $a \neq 1$ и определим неевклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in H$ формулой

$$\rho_L(z_1, z_2) = \log_a \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}. \quad (39.1)$$

Можно проверить, что неевклидовы окружности, т.е. множества точек, равноудаленных от одной точки в смысле неевклидова расстояния ρ_L , являются обычными окружностями на верхней полуплоскости, не пересекающими вещественную ось.

Отображение $\Phi: H \rightarrow H$ называется изометрией плоскости Лобачевского $\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in H \quad \rho_L(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) = \rho_L(z_1, z_2)$.

Теорема (без доказательства). Любая изометрия $\Phi: H \rightarrow H$ плоскости Лобачевского имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

или

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}\bar{z} + a_{12}}{a_{21}\bar{z} + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0.$$

42. Классификация поверхностей 2-го порядка в 3-мерном пространстве

В 3-мерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ рассмотрим поверхность 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = \\ = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2,$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3,$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^3 q_{ij}\vec{e}_i,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} - \text{ортогональная матрица перехода от ба-}$$

зиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = \\ = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2 + q_{31}\vec{e}_3) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2 + q_{32}\vec{e}_3) + y_3(q_{13}\vec{e}_1 + q_{23}\vec{e}_2 + q_{33}\vec{e}_3).$$

Сравнивая коэффициенты при \vec{e}_j в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 \\ x_3 = q_{31}y_1 + q_{32}y_2 + q_{33}y_3. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение поверхности, получим уравнение

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) + \\ + \lambda_3 \left(y_3^2 + \frac{b_3}{\lambda_3} y_3 + \left(\frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 \right) + b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \lambda_3 \left(\frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(y_3 + \frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2 + b_0 - \underbrace{\lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \lambda_3 \left(\frac{b_3}{2\lambda_3} \right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2 \\ y_3 + \frac{b_3}{2\lambda_3} = z_3. \end{cases}$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = -c_0.$$

1) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 > 0$, то положим

$a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

(эллипсоид).

2) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 < 0$, то положим

$a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = -1$$

(мнимый эллипсоид).

3) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, b^2 = \frac{1}{\lambda_2}, c^2 = \frac{1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(мнимый конус).

4) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, -c_0 > 0$, то положим $a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

(однополостный гиперболоид).

5) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, -c_0 < 0$, то положим $a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}, b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}, c^2 = \frac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = -1$$

(двуполостный гиперболоид).

6) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}, b^2 = \frac{1}{\lambda_2}, c^2 = \frac{-1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(конус).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1} y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2} y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + b_3 y_3 + b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = 0; \\
& \lambda_1 \left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \\
& + b_3 y_3 + b_0 - \lambda_1 \left(\frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{c_0}$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases}
y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\
y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} = z_2 \\
y_3 = z_3
\end{cases} .$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + b_3 z_3 = -c_0.$$

Если $b_3 \neq 0$, то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases}
z_1 = t_1 \\
z_2 = t_2 \\
z_3 + \frac{c_0}{b_3} = t_3
\end{cases} ,$$

и уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + b_3 t_3 = 0$$

Предположим сначала, что $b_3 \neq 0$.

7) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b_3 > 0$, то положим $a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{b_3}{\lambda_2}$.

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} + \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$$

(эллиптический параболоид); случай $b_3 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

8) Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $b_3 > 0$, то положим $a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-b_3}{\lambda_2}$.

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$$

(гиперболический параболоид); случай $b_3 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_3 = 0$ (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной t_3 или $\lambda_2 = 0$ (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной t_2)). В обоих случаях мы имеем дело с цилиндрами, основаниями которых служат кривые 2-го порядка. Так как кривые 2-го порядка классифицированы (существуют 9 типов), то каждый из этих типов дает соответствующий цилиндр.

Очевидно, цилиндры 2-го порядка задаются следующими каноническими уравнениями:

9) эллиптический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$;

10) мнимый эллиптический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1$;

11) гиперболический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$;

12) параболический цилиндр $z_2^2 = 2pz_1$;

13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых $\frac{z_1^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных плоскостей);

16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых $\frac{z_1^2}{a^2} = -1$ (пара параллельных мнимых плоскостей);

17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых $z_1^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существуют 17 классов поверхностей 2-го порядка:

- 1) эллипсоид;
- 2) мнимый эллипсоид;
- 3) мнимый конус;
- 4) однополостный гиперболоид;
- 5) двуполостный гиперболоид;
- 6) конус;
- 7) эллиптический параболоид;
- 8) гиперболический параболоид;
- 9) эллиптический цилиндр;
- 10) мнимый эллиптический цилиндр;
- 11) гиперболический цилиндр;
- 12) параболический цилиндр;
- 13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);
- 14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);
- 15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых (пара параллельных плоскостей);
- 16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых (пара параллельных мнимых плоскостей);
- 17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых (пара совпадающих плоскостей).

43. Прямые на однополостном гиперboloиде

Пусть однополостный гиперboloид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (41.1)$$

Рассмотрим пару вещественных чисел $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ и систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{cases} \quad (41.2)$$

Для каждой пары чисел (α, β) наши уравнения (41.2) определяют пару плоскостей, пересекающихся по прямой, и эта прямая целиком лежит на однополостном гиперboloиде, так как решение системы уравнений (41.2) дает решение уравнения (41.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих однополостного гиперboloида, которое мы обозначим через I . Оно зависит от одного параметра $u = \beta/\alpha$. Аналогично уравнениям (41.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha'\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta'\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta'\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha'\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (41.3)$$

определяющую прямую, лежащую на однополостном гиперboloиде; мы получим в итоге семейство Π прямолинейных образующих однополостного гиперboloида, зависящее от одного параметра $v = \beta' / \alpha'$.

Легко проверяется, что через каждую точку однополостного гиперboloида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства Π .

44. Прямые на гиперболическом параболоиде

Пусть гиперболический параболоид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

(согласно классификации поверхностей 2-го порядка гиперболический параболоид задается уравнением

$$\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0,$$

и мы полагаем здесь $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = -2z$).

Перепишем каноническое уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z \quad (42.1)$$

Для каждой пары вещественных чисел $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2\beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \alpha \end{cases} \quad (42.2)$$

Эта система задает прямую (пересечение двух плоскостей, задаваемых двумя линейными уравнениями из системы (42.2)), и эта прямая лежит на гиперболическом параболоиде, потому что решение системы (42.2) дает решение уравнения (42.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра $u = \beta / \alpha$.

Аналогично уравнениям (42.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha', \beta') \neq (0,0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha' \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = 2\beta'z \\ \beta' \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = \alpha', \end{cases} \quad (42.2)$$

определяющую прямую, лежащую на гиперболическом параболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих гиперболического параболоида, зависящее от одного параметра $v = \beta' / \alpha'$.

Легко проверяется, что через каждую точку гиперболического параболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II, причем любые две образующие, принадлежащие разным семействам, пересекаются, а принадлежащие одному семейству всегда скрещиваются.

45. Проективное пространство

Проективизацией $\mathbb{P}(E)$ конечномерного линейного пространства E над полем k называется фактормножество $(E \setminus 0 / \sim)$, где векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times \vec{x} = \lambda \vec{y}$ (здесь $k^\times = k \setminus 0$ – группа ненулевых элементов поля k с операцией умножения).

Таким образом, $\mathbb{P}(E)$ – это множество всех прямых пространства E , проходящих через точку 0 .

Положим $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$.

В этих обозначениях $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ называется n -мерным вещественным проективным пространством, $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ называется n -мерным комплексным проективным пространством.

Очевидно, проективная вещественная прямая $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ – это множество всех прямых в \mathbb{R}^2 , проходящих через начало координат.

Каждая такая прямая пересекает единичную окружность U^1 с центром 0 в двух диаметрально противоположных точках; эта пара диаметрально противоположных точек задает единственную точку проективной прямой $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$.

В итоге можно рассматривать $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ как окружность с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Более точно, существует каноническое непрерывное сюръективное отображение $U^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ склеивания диаметрально противоположных точек единичной окружности. Отождествим \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} , и будем рассматривать U^1 как группу комплексных чисел $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$. Тогда точки $z_1, z_2 \in U^1$ диаметрально противоположны $\Leftrightarrow z_1 = -z_2$. Таким образом, $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ можно естественным образом отождествить с факторгруппой $U^1 / \{\pm 1\}$.

Попробуем найти такой сюръективный морфизм групп $f : U^1 \rightarrow U^1$, чтобы $\text{Ker} f = \{\pm 1\}$. Можно взять, например, $f(z) = z^2$. Поскольку фактор по ядру изоморфен образу, то имеем:

$$U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} f(U^1) = U^1.$$

Значит, $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} U^1$ (как топологическое пространство).

Итак, вещественная проективная прямая $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ топологически устроена как единичная окружность.

Другой топологический изоморфизм $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1$ можно построить, если перенести центр единичной окружности в точку i и рассмотреть прямые, проходящие через точку $2i$. Каждая такая прямая (кроме прямой, перпендикулярной вещественной оси \mathbb{R}) пересекает вещественную ось в единственной точке и пересекает окружность в единственной точке; это устанавливает диффеоморфизм вещественной оси и окружности с выколотой точкой $2i$.

Прямая, параллельная вещественной оси и проходящая через точку $2i$, играет роль бесконечно удаленной точки ∞ на проективной прямой $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$.

Заметим, что U^1 – компакт (любое покрытие U^1 открытыми подмножествами содержит конечное подпокрытие). Поэтому компакт

$\mathbb{P}^1 \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$ можно рассматривать как одноточечную компактификацию аффинной прямой \mathbb{R} .

В теории функций одной комплексной переменной важную роль играет комплексная проективная прямая $\mathbb{P}^1 \mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \infty$, отождествляемая (с помощью стереографической проекции) с единичной сферой.

Вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ естественным образом изоморфна (как топологическое пространство) сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Пусть $\Phi: (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{P}^2 \mathbb{R} = (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ – каноническое сюръективное отображение. Проективной прямой на $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ называется образ $\pi \setminus 0$ при отображении Φ , где π – это плоскость в \mathbb{R}^3 , проходящая через начало координат. Так как любые две несовпадающие плоскости π_1, π_2 в \mathbb{R}^3 пересекаются по прямой $l = \pi_1 \cap \pi_2$, то соответствующие проективные прямые $\Phi(\pi_1 \setminus 0)$ и $\Phi(\pi_2 \setminus 0)$ пересекаются в одной точке $\Phi(l \setminus 0)$ проективной плоскости.

Итак, любые две несовпадающие проективные прямые на вещественной проективной плоскости пересекаются в единственной точке.

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k . Группа $GL(E)$ обратимых линейных операторов $\mathcal{A}: E \rightarrow E$ естественным образом действует на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Действительно, если векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны, то $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ для некоторого $\lambda \in k^\times$, поэтому $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\lambda \vec{y}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{y})$ и, следовательно, $\mathcal{A}(\vec{x}) \sim \mathcal{A}(\vec{y})$. Значит, можно определить действие оператора \mathcal{A} на проективизации $\mathbb{P}(E)$ формулой $\mathcal{A}(\vec{x} \text{ mod } \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \text{ mod } \sim$.

Если \mathcal{A} – гомотетия с коэффициентом $\mu \in k^\times$, то для любого вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ имеем:

$$\mathcal{A}(\vec{x} \text{ mod } \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \text{ mod } \sim = \mu \vec{x} \text{ mod } \sim = \vec{x} \text{ mod } \sim.$$

Поэтому гомотетии действуют тривиально на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Значит, на $\mathbb{P}(E)$ определено каноническое действие факторгруппы $PGL(E) = GL(E)/k^\times$, где $k^\times \hookrightarrow GL(E)$ – подгруппа гомотетий. Группа $PGL(E)$ называется проективной линейной группой. Поскольку эле-

менты из $GL(E)$ переводят любую плоскость в пространстве E в любую другую плоскость, то элементы из $PGL(E)$ переводят любую проективную прямую в проективизации $\mathbb{P}(E)$ в любую другую проективную прямую.

Пусть $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис линейного пространства E над полем k , $\vec{x} = x_0\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Пусть $E \setminus 0 \rightarrow \mathbb{P}(E)$ – каноническое отображение, которое вектору $\vec{x} \neq \vec{0}$ ставит в соответствие точку $\vec{x} \bmod \sim \in \mathbb{P}(E)$. Ясно, что для любого $\lambda \in k^\times$ векторы с координатами (x_0, x_1, \dots, x_n) и $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ дают одну и ту же точку проективного пространства, которую мы обозначим через $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. По определению, имеем:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n).$$

Набор $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ называется набором однородных координат точки проективного пространства $\mathbb{P}(E)$.

Очевидно,

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{i=0}^n D_+(x_i),$$

где

$$D_+(x_i) = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}.$$

Рассмотрим для примера

$$D_+(x_0) = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\} = \left\{ \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0} \right) \right\}.$$

Поскольку $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ могут принимать любые значения из поля k , то

$$D_+(x_0) \xrightarrow{\sim} k^n.$$

Значит, $\mathbb{P}(E)$ склеено из множеств $D_+(x_0), D_+(x_1), \dots, D_+(x_n)$, каждое из которых изоморфно k^n .

46. Проективная классификация кривых второго порядка

Проективная кривая 2-го порядка на проективной плоскости $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ задается уравнением

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Существует такой ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^3 , в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 0.$$

Предположим сначала, что квадратичная форма невырождена (т.е. $\det A \neq 0$, что эквивалентно неравенству $\forall i \lambda_i \neq 0$). Можно считать, что замена координат

$$z_i = \sqrt{|\lambda_i|} \cdot y_i$$

приводит квадратичную форму к одному из следующих видов:

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \text{ (мнимый овал);}$$

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0 \text{ (вещественный овал).}$$

В открытом множестве $D_+(z_0)$ вещественный овал задается уравнением

$$1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{z_2^2}{z_0^2} = 0$$

(гипербола), в то же время в $D_+(z_2)$ этот овал задается уравнением

$$\frac{z_0^2}{z_2^2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} - 1 = 0$$

(окружность).

Если квадратичная форма вырождена, то можно считать, что уравнение кривой принимает один из следующих видов:

$$z_0^2 + z_1^2 = 0 \text{ (пара мнимых проективных прямых);}$$

$$z_0^2 - z_1^2 = 0 \text{ (пара вещественных проективных прямых);}$$

$$z_0^2 = 0 \text{ (пара совпадающих проективных прямых).}$$

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Любая кривая 2-го порядка на вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ проективно эквивалентна одному из следующих объектов:

мнимый овал;

вещественный овал;

пара мнимых проективных прямых;

пара вещественных проективных прямых;

пара совпадающих проективных прямых.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(5; 0)$, если фокальное расстояние равно 6.
2. Доказать, что уравнение $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$ является уравнением эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние.
3. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(4; 0)$ и оси ординат в точке $B(0; -3)$. Составить уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны осям координат.
4. Эллипс проходит через точку $M(1; 1)$ и имеет эксцентриситет равен $3/5$. Составить уравнение эллипса.
5. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.
6. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.
7. На эллипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до ее левого фокуса.
8. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ с прямой $2x - y - 9 = 0$.
9. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $A(-4; 3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$.
10. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:
 - 1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами – 10;

- 2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;
- 3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $(9; -4)$;
- 4) гипербола проходит через две точки $A(-5; 2)$ и $B(2\sqrt{5}; \sqrt{2})$.

11. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что:

- 1) расстояние между фокусами равно 6 и расстояние между директрисами равно 4;
- 2) директрисы заданы уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами – прямой;
- 3) асимптоты даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;
- 4) асимптоты даны уравнениями $y = \pm \frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку $D(6; 9)$.

12. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы-векторы этой точки и угол между ними.

13. Найти фокальные радиусы-векторы гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках пересечения её с окружностью $x^2 + y^2 = 91$.

14. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

15. На параболе $y^2 = 8x$ найти:

- 1) точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20;
- 2) точку, расстояние до которой от директрисы равно 4.

16. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную:

- 1) в точке с абсциссой $x = 5$;
- 2) параллельно прямой $x - 2y + 3 = 0$;
- 3) перпендикулярно прямой $2x - 3y + 7 = 0$;

4) образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

17. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние до которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.

18. Составить уравнение параболы, если известно, что её фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox .

19. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}.$

20. Вычислить определители 3-го порядка:

21. 1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 6 & -7 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$

22. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ -5 & 0 & -7 \end{vmatrix}$, используя правило треугольника.

23. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$, используя правило Саррюса.

24. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, приведя его к треугольному виду.

25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, разложив по элементам первой строки.

26. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$, разложив по элементам второй строки.

27. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$, разложив по элементам третьей строки.

28. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, разложив по элементам первого столбца.

29. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, разложив по элементам второго столбца.

30. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, разложив по элементам третьего столбца.

31. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам первой строки.

32. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам второй строки.

33. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам третьей строки.

34. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 7 \\ -7 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам четвёртой строки.

35. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам первого столбца.

36. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам второго столбца.

37. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ -7 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам третьего столбца.

38. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ -9 & 2 & 5 & 3 \\ -8 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, разложив по элементам четвёртого столбца.

39. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ -9 & 2 & 5 & 3 \\ -8 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, приведя его к треугольному виду.

40. Решить системы методом Крамера

$$1) \begin{cases} 2x - y + 10z = 13 \\ 3x + 2y + 5z = 23; \\ 9x - y + 7z = 62 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x - y + 2z = 16 \\ 3x + 2y - z = 3 . \\ 9x - y + 4z = 30 \end{cases}$$

41. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (7; -2; 3)$ и $\vec{b} = (-5; 1; 4)$.

42. Даны векторы $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\lambda\vec{j} + 3\vec{k}$ При каком значении λ эти векторы перпендикулярны?

43. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 6\vec{b}$, если

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 6, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

44. Найти косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} , если $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(-3;2;-1)$.
45. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (7;-2;3)$ и $\vec{b} = (-5;1;4)$.
46. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
47. Даны точки $A(1;-3;-1)$, $B(3;-5;-2)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .
48. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .
49. Вектор \vec{x} , перпендикулярный к векторам $\vec{a} = (4;-2;-3)$ и $\vec{b} = (0;1;3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 6$, найти его координаты.
50. Вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox . Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти его координаты.
51. Найти вектор \vec{x} , зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (2;-3;1)$ и $\vec{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
52. Вычислить объем треугольной пирамиды, с вершиной в точке $C(-3;2;-1)$, если $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $D(-1;4;2)$.
53. Написать разложение вектора $\vec{x} = (-1;3;1)$ по векторам $\vec{e}_1 = (2;4;1)$, $\vec{e}_2 = (3;5;2)$, $\vec{e}_3 = (5;1;2)$.
54. Выяснить компланарны векторы или нет:
 $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(1;-3;-7)$, $\vec{c}(1;2;3)$.
55. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:
 1) $\vec{a} = (-2;1;5)$, $\vec{b} = (4;-3;0)$, $\vec{c}(0;-1;10)$;
 2) $\vec{a} = (2;0;2)$, $\vec{b} = (1;-1;0)$, $\vec{c}(0;-1;-2)$;
56. Найти обратную матрицу для матриц:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$2) B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4) D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5) T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

57. Найти значение матричных многочленов:

$$1) 2C - 5C \cdot D, \text{ где } D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A^2 + 2A \cdot E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$3) A^T - 2E \cdot A, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$4) 2AB - 5E, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

58. Решить матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

59. Исследовать систему на совместность и найти общее решение

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}.$$

60. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений систем:

$$1) \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

61. Найти координаты вектора \vec{x} в базисе $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, если он задан в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$1) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (2; 4; 1);$$

$$2) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{6}{5}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (10; 5; 1);$$

$$3) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{7}{6}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-12; 6; 1);$$

$$4) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{8}{7}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-1; 7; 14);$$

$$5) \begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \vec{x} = (-3; 2; 4).$$

62. Найти ранг матрицы и её базисные миноры

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

63. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

64. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=1$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

65. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=7$.

66. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-2; 3)$ и $B(4; 5)$.

67. Дано общее уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$. Составить нормальное уравнение прямой.

68. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $A(6; 2)$ и $B(-3; 5)$.

69. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -5)$ и параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

70. Найти острый угол между прямыми $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$.

71. Определить расстояние от точки $A(2; -1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$, $b=6$.

72. Найти расстояние от точки $A(-1; 2)$ до прямой $2x - 5y + 4 = 0$.

73. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ и параллельную прямой $4x - 3y = 0$.

74. Даны вершины треугольника $A(-4; -3)$, $B(6; 2)$, $C(-2; 11)$. Составить уравнения его медиан.
75. Даны вершины треугольника $A(-4; -3)$, $B(6; 2)$, $C(-2; 11)$. Составить уравнения его высот.
76. Даны стороны треугольника $AB: x + y - 6 = 0$, $AC: 3x - 5y + 14 = 0$, $BC: 5x - 3y - 14 = 0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B .
77. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $A(1; -4; 2)$, $B(7; 1; -5)$.
78. Найти точку A , симметричную точке $B(3; -3; -1)$ относительно плоскости $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.
79. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 0; -1)$, $B(1; -1; 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.
80. Найти точку A , симметричную точке $B(0; 2; 1)$ относительно прямой $\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$.
81. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

82. Привести к каноническому виду следующие общие уравнения кривых 2-го порядка и нарисовать получившиеся фигуры:

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;

2) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;

3) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;

4) $7xy - 3 = 0$;

5) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;

6) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$;

7) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$;

8) $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$;

9) $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$;

10) $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$;

11) $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$;

12) $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$;

13) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$;

14) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;

15) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$;

16) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;

17) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$;

18) $3x^2 - 4y + 5 = 0$;

19) $x^2 - 5y = 0$;

20) $4x^2 - 2x - 3 = 0$;

21) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;

22) $x^2 + 2y^2 - 16 = 0$;

23) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;

24) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$;

25) $x^2 + y = 0$;

26) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

27) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$;

28) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$;

29) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$;

30) $y^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = 0$;

31) $x^2 - 4x - y + 3 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-практическом пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения основных разделов математики (линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия), изучаемой в высшей школе студентами всех инженерно-технических и математических специальностей; проиллюстрировать теорию примерами и разобрать задачи разного уровня сложности.

Дополнительный дидактический материал позволит студентам самостоятельно закрепить полученные знания и отработать на практике приобретённые навыки решения задач.

Автор надеется, что пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 911 с.
2. Архангельский, А.В. Конечномерные векторные пространства / А.В. Архангельский. – М.: МГУ, 1982. – 248 с.
3. Заманский, М. Введение в современную алгебру и анализ / М. Заманский. – М.: Наука, 1974. – 487 с.
4. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
5. Кострикин, А.И. Сборник задач по алгебре / А.И Кострикин. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
6. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты: учебное пособие. – 9-е изд., стер. –СПб.: Издательство Лань, 2007. – 240 с.
7. Милнор, Дж., Хьюзмоллер, Д. Симметрические билинейные формы / Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. – М.: Наука, 1986. – 175 с.
8. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1/ Д.Т. Письменный. – 10-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
9. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1967. – 384 с.
10. Шихобалов, Л.С. Матрицы и определители. – СПб., 2015. – 55 с.

Учебное электронное издание

ПРОХОРОВА Татьяна Вячеславовна

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader;
дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт прикладной математики, физики и информатики
кафедра функционального анализа и его приложений
tvprokhorova@mail.ru