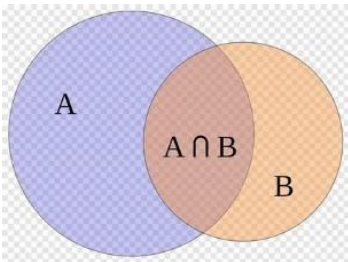
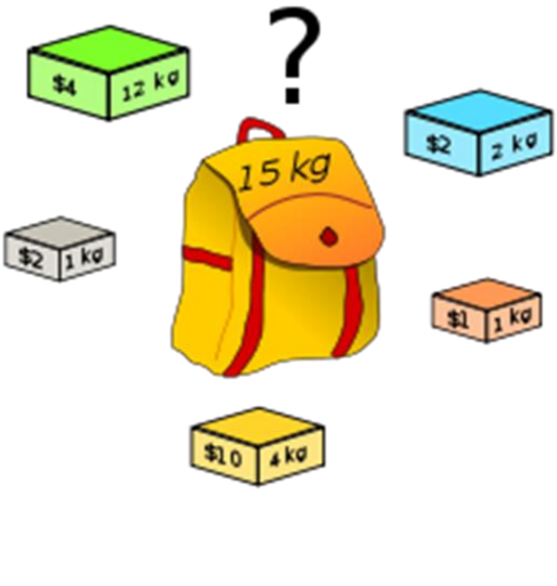
Владимирский государственный университет

В. С. ТУЛЯКОВ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие





Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. С. ТУЛЯКОВ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2023

ISBN 978-5-9984-1609-5

УДК 519(075.8)
ББК 22.17я73

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент
зав. кафедрой электроники, приборостроения и биотехнических систем
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
К. В. Татмышевский

Кандидат технических наук
начальник управления информатизации, телекоммуникаций
и делопроизводства администрации города Владимира
С. В. Черников

Туляков, В. С.
Дискретная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. С. Туляков ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 169 с. – ISBN 978-5-9984-1609-5. – Электрон. дан. (4,65 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Изложены основные элементы дискретной математики и математической логики. Приведены примеры упражнений для каждого раздела дискретной математики: теории множеств, комбинаторики, теории графов, алгебры логики, дискретной вероятности, теории матриц, а также прикладные задачи.

Предназначено для студентов 1-го курса бакалавриата очной формы обучения по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Рекомендовано для формирования общепрофессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 6. Ил. 120. Библиогр.: 24 назв.

ISBN 978-5-9984-1609-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» – формирование у студентов совокупности знаний в области математического анализа дискретных объектов и систем.

Задача курса – формирование у студентов следующих навыков:

- правильного употребления математической символики и корректного оперирования математическим инструментарием;
- определения условий применения математического инструментария при решении практических задач;
- использования корректных математических моделей применительно к практическим задачам;
- классифицирования задачи и применения математического аппарата для ее формализации и решения.

С точки зрения характера изучаемых процессов или объектов математику условно можно разделить на две части – прерывную и непрерывную. Непрерывная математика базируется на теории пределов и непрерывности процессов, а прерывная, или дискретная, математика представляет инструментарий методов для манипуляции с конечными объектами.

Категория «конечность» определяет некоторые особенности, не присущие объектам, работающим с бесконечными и непрерывными структурами. В дискретных направлениях математики, как правило, обширнее класс разрешимых задач, так как во многих случаях для решения возможен полный перебор вариантов. При работе с бесконечными и непрерывными структурами для разрешимости обычно требуются существенные ограничения.

Если рассматривать электронику как объект математики, то непрерывная математика позволяет формализовать поведение электрических цепей. Например, ток, проходящий через конденсатор, пропорционален скорости изменения приложенного напряжения, согласно формуле

$$I = C(dU/dt)$$

Если напряжение на конденсаторе изменится на один вольт за одну секунду, то получим ток через конденсатор в один ампер. Практическое применение данной математики заключается в следующем: если подать ток силой один миллиампер на конденсатор емкостью один микрофарад, то напряжение за одну секунду возрастет на 1000 В. Этот эффект используется для создания фотовспышек в фотоаппаратах или смартфонах.

Дискретная математика (с помощью раздела алгебры логики) позволяет формализовать алгоритм работы цифровых модулей вычислительной техники, которые можно физически реализовать в виде микросхем.

Объектами внимания дискретной математики являются следующие предметные области:

- базы данных и базы знаний;
- языки программирования, программы и алгоритмы;
- синтез цифровых схем;
- массивы данных, их обработка и поиск;
- шифрование кодов;
- логистика;
- планирование;
- управление;
- микроэлектроника.

К дискретной математике относятся следующие разделы: арифметика; теория множеств; теория нечетких множеств; алгебра логики; матрицы; математическая логика; комбинаторика; теория графов; дискретная вероятность; теория цифровых автоматов.

Технологическое развитие человеческого общества предопределило востребованность математического аппарата дискретной математики –основы вычислительной техники, инструмента формализации алгоритмов в программировании. Методы дискретной математики применяются в электронике, физике, биологии, генетике, экономике, химии. Современная дискретная математика – фундаментальная основа математической статистики, компьютерных наук, программирования и информационных технологий.

Работа состоит из семи глав. Глава 1 посвящена основам теории множеств. Глава 2 рассматривает комбинаторику и ее практические приложения. Глава 3 посвящена введению в теории вероятностей.

Глава 4 рассматривает элементы алгебры логики, логических высказываний и введение в теорию цифровых автоматов. Глава 5 посвящена теории графов, глава 6 – теории матриц, глава 7 – решению систем линейных уравнений.

Императивы:

• Кто хочет влиять на государственные решения, на деятельность организаций и компаний – тому необходимо учиться языку чисел.

• Термины «бедность, счастье, честность, уровень жизни, рейтинг» переводятся на язык чисел.

• Геном человека – это самовоспроизводящийся цифровой код.

Двоичный код может стать основой новой неорганической жизни.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теория множеств - раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств - совокупностей элементов произвольной природы, обладающих каким-либо общим свойством.

Еще одно определение - теория множеств - это математическая теория о точно определённых наборах (множествах) отдельных объектов, называемых членами или элементами множества.

Основателем теории множеств является математик Георг Кантор (3 марта 1845, г. Санкт - Петербург - 6 января 1918, г. Галле, Германия). «Множество - это большое количество, которое позволяет воспринимать себя как одно» - писал Георг Кантор. Он доказал, что множество вещественных чисел «более многочисленно», чем множество алгебраических чисел.

Он впервые показал, что существуют бесконечные множества разных размеров, а не одна «единственная бесконечность», как это трактовалось до него.

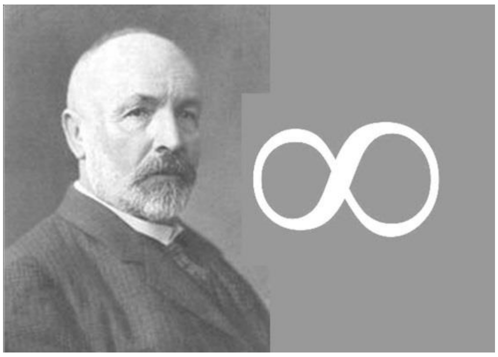


Рис. 1. Георг Кантор [1]

Примеры некоторых областей применения теории множеств в современных приложениях:

- Реляционных баз данных.
- Реляционная алгебра и её операции - используемые в языках запросов к базам данных, SQL.
- Списки или множества (уникальные наборы данных) IP-адресов, доменных имен, URL, сигнатур файлов.
- Экономика. Моделирование экономических процессов.
- Статистика. Системы управления.
- Системы принятия решений.

- Языки программирования.
- Логистика и планирование.

1.1. Основные понятия

Множество - совокупность элементов произвольной природы, обладающих каким-либо общим свойством. Например, страницы книги являются элементами множества «Книга». Любой цифровой модуль состоит из радио компонентов: микросхем, транзисторов, резисторов, конденсаторов. Отдельные компоненты являются элементами множества «Цифровой модуль».

В теории множеств выделяют следующие виды множеств:
- числовые;
- нечисловые;
- конечные;
- бесконечные (счетные и несчетные);
- четкие;
- нечеткие;
- упорядоченные;
- вполне упорядоченные.

Числовые множества – это множества, элементы которых представлены числами. Нечисловые множества – это множества, элементы которых представлены в виде конечных объектов: люди; автомобили; здания; инструменты и т.д.

Конечные множества имеют определенное количество элементов, которое можно пересчитать. Бесконечные множества не имеют ограничений на количество элементов. Если проводить сравнение всевозможных бесконечных множеств с множеством всех натуральных чисел N, то оказывается, что все бесконечные множества разбиваются на два класса: на класс множеств, эквивалентных множеству всех натуральных чисел (такие множества называют счетными) и на класс множеств, не эквивалентных множеству натуральных чисел (такие множества называют несчетными).

Чёткое множество – совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое. Нечёткое множество – математический объект, представляющий собой множество, принадлежность к которому представляет собой не отношение, а функцию: совокупность универсального множества X и характеристической функции $\mu_A(x)$, которая характеризует степень принадлежности элемента x нечёткому множеству. [2]

В чётком множестве все элементы делятся на два типа: относящиеся к нему и не относящиеся. Относительно элементов нечёткого множества можно говорить в какой мере они в него входят, а не просто входят они в него или нет. Операции над нечёткими множествами отличаются от операций над чёткими множествами.

Множество вместе с заданным на нем отношением порядка называют упорядоченным множеством. Отношения порядка могут быть:
двойственный порядок; отношение доминирования. Упорядоченное множество называют вполне упорядоченным, если его любое непустое подмножество имеет наименьший элемент.

В основе теории множеств лежат первичные понятия: множество и отношение принадлежности множества.

Множества обозначаются большими латинскими буквами **A**, **B**, **C**, …, а элементы множеств строчными буквами **a**, **b**, **c**, …. Если элемент **a** является элементом множества **A**, то пишут **a**$\in$ ***A*** (знак $\in$ - это знак принадлежности, а выражение **a** $\in$ ***A*** читается «элемент **a** принадлежит множеству **A**». Если элемент **a** не принадлежит множеству **A**, то пишут **a**$\notin$**A** (знак $\notin$ обозначает, что элемент **a** не принадлежит множеству **A**).

$$a \in A \qquad a \notin A$$

Для определения отношений между множествами используется знаки строгой ($\subset$) и не строгой ($\subseteq$) принадлежности. Если пишут **A**$\subset$**B** – это означает - все элементы множества **A** содержатся в множестве **B**, но не все элементы множества **B** являются элементами множества **A**.

Если используется знак не строгой принадлежности, например, **A**$\subseteq$**B** – это значит, что каждый элемент из множества **A**, также является элементом из множества **B**. **A**$\supseteq$**B** – читается «каждый элемент множества **B** является элементом множества **A**».

Если множество содержит конечное число элементов, то оно называется конечным. В противном случае множество называется бесконечным. В обозначении бесконечного множества применяется знак "∞".

- ПРИМЕР: Множество студентов в группе – конечное множество.
- ПРИМЕР: Множество транзисторов в ИС – конечное множество.
- ПРИМЕР: N, R – бесконечные множества.

Кроме этого, существует понятие пустого множества, которое не содержит не одного элемента. Знак пустого множества - ∅ или {}. Примеры пустого множества: множество людей на солнце; множество действительных корней уравнения $\boldsymbol{x^2+1=0}$.

Представление числовых множеств в теории множеств имеет следующие особенности. Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию **a ≤ x ≤ b** может быть задано как **[a;b],** где квадратные скобки заменяют знак больше или равно.

Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию **a<x<b** может быть задано как **((a;b)),** где круглые скобки заменяют знак больше.

$$a \le x \le b \Rightarrow [a;b]$$

$$a < x < b \Rightarrow ((a;b))$$

$$a \le x < b \Rightarrow [a;b)$$

$$a < x \le b \Rightarrow ((a;b])$$

Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию **x< a**, в теории множеств может быть представлено как **(**-∞; $\boldsymbol{a}$). Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию **x ≤ a**, в теории множеств может быть представлено, как **((**-∞; $\boldsymbol{a}$**]).** Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию x>b может быть представлено, как (b; +∞). Множество действительных чисел, удовлетворяющих условию x≥b может быть представлено, как ([b; +∞)).

$$x \le a \Longrightarrow ((-\infty; a])$$

$$x > b \Longrightarrow (b; +\infty)$$

$$x \ge b \Longrightarrow ([b; +\infty))$$

Числовые множества могут обозначаться следующими буквами:
- **N** – множество натуральных чисел {1,2,3…};
- **N0** – множество целых чисел с 0;
- **Z** – множество целых чисел {…-2,-1, 0, +1, +2…};
- **Q** – множество рациональных чисел m/n (n ≠ 0), где m - целое число, а n натуральное число;
- **R** – множество вещественных чисел;
- **C** – множество комплексных чисел z = x+i∗y, где i - мнимая единица, для которой выполняется равенство (i в степени 2) = -1.

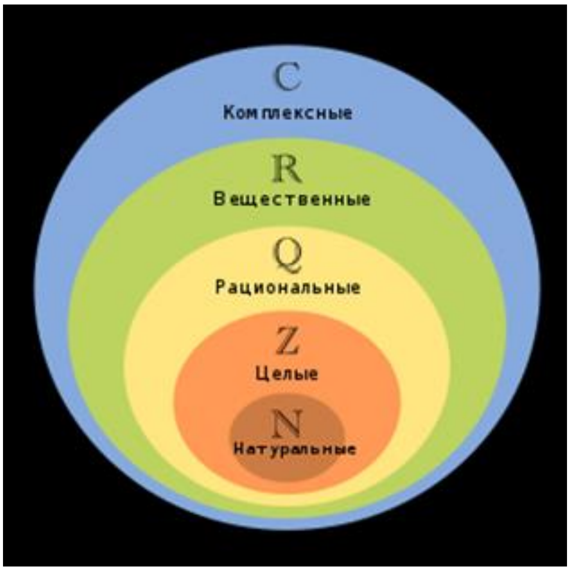


Рис. 2. Числовые множества, обозначения, соотношения

Учитывая данные обозначения, множество всех действительных чисел может быть представлено в виде следующих конструкций:
(-∞; +∞); ($|x| < +\infty$); R.

1.2. Задание множеств

Известны три способа или метода задания множеств:

- первый способ задания множества использует явное перечисление всех элементов множества;
- второй способ задания множества состоит в описании элементов множества определяющим свойством **P (x)**, общим и истинным для всех элементов множества;
- третий способ задания множества использует рекурсивное задание, которое предполагает получение элементов множества из других объектов или уже известных элементов множества. [3,4,5,6]

Рассмотрим примеры задания множеств.

Первый способ задания множества заключается в явном перечислении его элементов. При этом порядок перечисления элементов множества не имеет значения. Данный способ удобно применять лишь к ограниченному числу конечных множеств.

Например, множество **A** = {1,2,3} – означает, что множество **A** состоит из элементов **1,2,3**. Это конечное числовое множество. Например, множество **N** = {1, 2, 3, …}. Это бесконечное числовое множество, которое состоит из натуральных чисел.

Второй способ задания множества заключается в описании элементов множества определяющим свойством **P (x)**, общим и истинным для всех элементов множества. Например, $A = \{x\colon x = 2k,\ k \in N\}$, то есть **A** - множество положительных четных чисел 2, 4, 6,… и до бесконечности. Определяющим свойством для данного множества является $x = 2k$.

Второй способ применяется, когда множество нельзя или затруднительно задать перечислением (например, если множество содержит бесконечное число элементов).

Третий способ задания множества предусматривает применение рекурсии:

1. Указываются некоторые исходные элементы, входящие в множество.
2. Описывается алгоритм, позволяющий получить новые элементы из известных.

3. Объявляется, что в множестве нет никаких других объектов кроме тех, которые можно получить из исходных, применяя описанный в пункте два алгоритм.

Например, зададим множество, в котором каждый последующий элемент определяется, как сумма двух предыдущих, то есть множество F $=\{x_k : x_0 = 0, x_1=1, x_k=x_{k-2}+x_{k-1}, k \in N\}$

1.3. Отношения между множествами

Если имеется два множества **А** и **В** и известно, что каждый элемент множества **В,** является элементом множества **А**, то множество **В** является подмножеством множества **А**. Знаком показывающим отношения между множествами является знак включения - $\subset, \supset$. Например, множество А содержит множество В - А$\subset B$ или множество В включено в множество А. Например, множество четных чисел, есть подмножество множества целых чисел.

Например, если множество **А** = {x: x – группа студентов кафедры ВТ и СУ}, а множество **В** = {b: b – кафедра института ИИТР}, то множество **А** является подмножеством множества **В**. Данное отношение можно показать графически рисунком 3.

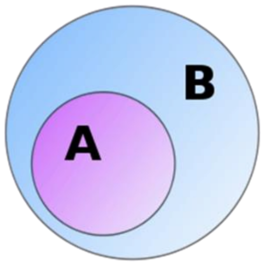


Рис. 3. Множество А включено в множество В

Собственное и несобственное множество

Любое множество **В** среди своих подмножеств содержит само себя и пустое множество.

Само множество **В** и пустое множество называют несобственными подмножествами, остальные подмножества называют собственными подмножествами.

Множество **A** является собственным подмножеством множества **B,** если множество **A** включено в множество **B**, не равно **B** и неравно пустому множеству.

При задании отношений между множествами часто используют кванторы общности (знак $\forall$), квантор существования (знак $\exists$), квантор взаимной импликации (знак $\leftrightarrow$), квантор импликации (знак $\rightarrow$).

Применение **квантора существования о**значает – что «существует хотя бы один элемент…». Применение **квантора общности** означает – **что** «любой элемент ….». **Взаимная импликация или равносильность** означает - высказывание **B** является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание **A**. **Квантор импликации** означает - что из справедливости высказывания **A** следует справедливость высказывания **B**.

Отношение не строгого включения между множествами - обозначается как $\mathbf{A \subseteq B}$, это значит, что **A** - несобственное подмножество множества **B**, и возможно совпадающее с **B**. Отношение строгого включения - обозначается как $\mathbf{A \subset B}$, и означает, что **A** - подмножество множества **B**, не совпадающее с **B**.

Отличие строгого и нестрогого включения заключается в том, что отношение $\mathbf{A \subseteq B}$ допускает ***тождественность множеств*** (**A=B**), то есть любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя, в то время как символ ***строгого включения*** ставится тогда, когда необходимо подчеркнуть, что $\mathbf{A \neq B}$, то есть во множестве **B** содержатся не только элементы множества **A**.

Равенство множеств

Если множество **A** и множество **B,** состоит из одних и тех же элементов, то такие множества называют равными. Равные множества обозначаются знаком равенства **A = B**. Например, множества, состоящие из элементов **{1;2}** и **{2;1}** равны, то есть **{1;2} = {2;1}**.

ТЕОРЕМА

Если $\mathbf{B \subset A}$, а $\mathbf{A \subset B}$, то множество **A** равно множеству **B** или **A=B**.
Доказательство:

1. Любой элемент из множества В, является элементом множества А.
2. Любой элемент из множества А, является элементом множества В.
*ТО есть множества А и В, состоят из одних и тех же элементов - это означает, что **А=В**.*

ТЕОРЕМА

Пустое множество является подмножеством любого множества.
Доказательство:

1. *Из определения подмножества следует, что множество В является подмножеством множества А, если множество В содержит элементы, являющихся элементами множества А.*
2. *Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит элементов, не принадлежащих А.*

ВЫВОД: пустое подмножество, есть подмножество любого множества.

Аксиома пустого множества

- Провозглашает существование по меньшей мере одного пустого множества, то есть множества, не содержащего ни одного элемента.
- Пустое множество является своим подмножеством, но не является своим элементом.

Свойства пустого множества:
- ни одно множество не является элементом пустого множества. $\forall a(a \notin \emptyset)$ и $\emptyset \notin \emptyset$;
- пустое множество является подмножеством любого множества. $\forall a(\emptyset \subseteq a)$ и $\emptyset \subseteq \emptyset$;
- объединение пустого множества с любым множеством равно последнему указанному множеству, $\forall a(\emptyset \cup a) = a$ и $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$;
- пересечение пустого множества с любым множеством равно пустому множеству; $\forall a(\emptyset \cap a = \emptyset)$ и $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$;
- пересечение любого множества с его дополнением равно пустому множеству; $\forall a(a \cap \bar{a} = \emptyset)$;

- исключение пустого множества из любого множества равно последнему указанному множеству; $\forall a(a \backslash \emptyset = a)$ и $\emptyset \backslash \emptyset = \emptyset$;
- исключение любого множества из пустого множества равно пустому множеству. $\forall a(\emptyset \backslash a = \emptyset)$ и $\emptyset \backslash \emptyset = \emptyset$;
- симметрическая разность пустого множества с любым множеством равна последнему указанному множеству; $\forall a(\emptyset \vartriangle a = a)$ и $\emptyset \Delta \emptyset = \emptyset$;
- декартово произведение пустого множества на любое множество равно пустому множеству; $\forall a(\emptyset \times a = \emptyset \wedge a \times \emptyset = \emptyset)$ и $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$;

Булеан и кардинальное число

Элементами множества могут быть подмножества. Множество всех подмножеств множества **A** называется его булеаном. Булеан обозначается **P(A).** Степенью или кардинальным числом называется количество подмножеств заданного множества и обозначается 2^n, где n количество элементов множества A.

Например, задано множество A= {a; b; c}. Тогда булеан множества A равен P(A)= {{}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}. Кардинальное число множества A=8.

Рассмотрим еще один пример. Пусть дано множество B = {{2,3}, 2,3,5,8}.
Булеан множества B обозначается P(B) =∅ | {{2,3}} | {2} | {3} | {5} | {8} | {{2, 3}, 2} | {{2, 3}, 3} | {{2, 3}, 5} | {{2, 3}, 8} | {2, 3} | {2, 5} | {2, 8} | {3, 5} | {3, 8} | {5, 8} | {{2, 3}, 2, 3} | {{2, 3}, 2, 5} | {{2, 3}, 2, 8} | {{2, 3}, 3, 5} | {{2, 3}, 3, 8} | {{2, 3}, 5, 8} | {2, 3, 5} | {2, 3, 8} | {2, 5, 8} | {3, 5, 8} | {{2, 3}, 2, 3, 5} | {{2, 3}, 2, 3, 8} | {{2, 3}, 2, 5, 8} | {{2, 3}, 3, 5, 8} | {2, 3, 5, 8} | {{2, 3}, 2, 3, 5, 8}.
Кардинальное число множества B: |P(B)|= (2^n) , где n=|B| = 5, тогда |P(B)| = 32.

Универсальное множество

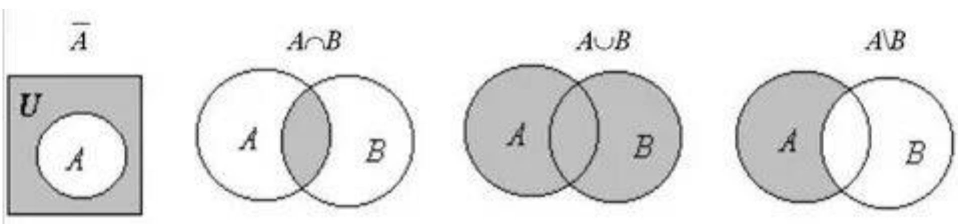
В любой задаче приходится иметь дело только с подмножествами некоторого, фиксированного для данной задачи или предметной области, множества. Это множество принято называть ***универсальным*** и обозначать символом **U**.

Для арифметики универсальным множеством является множество целых чисел.

Свойства универсального множества:
- любой объект, какова бы ни была его природа, является элементом универсального множества. $\forall a: a \in U$;
- универсальное множество содержит себя в качестве одного из многих элементов. U∈U;
- любое множество является подмножеством универсального множества. $\forall A: A \subseteq U$;
- универсальное множество является своим подмножеством U⊆ U;
- объединение универсального множества с любым множеством равно универсальному множеству $\forall A: A \cup U = U$;
- объединение универсального множества с самим собой равно универсальному множеству U∪ $U = U$;
- пересечение универсального множества с любым множеством равно последнему множеству $\forall A: U \cap A = A$;
- пересечение универсального множества с самим собой равно универсальному множеству U∩U=U;

1.4. Операции над множествами

Диаграммы Венна – это схематичное графическое изображение всех возможных операций (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность) нескольких подмножеств универсального множества (рисунок 4). Диаграммы Венна (изобретённые в 1880 году Джоном Венном), применяются при решении задач вывода логических следствий из посылок, выраженных на языке формул исчисления высказываний.



А В с д

Рис. 4. Представление операций над множествами диаграммами Венна

Объединение множеств

Если даны два множества **А** и **В**, то их объединением будет называться множество **С**, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств **А** и **В**. Знак операции объединения – «∪». ПРИМЕР операции объединения цифровых множеств А={1,2,3} и В={2,3,4}, {1,2,3}∪{2,3,4}= {1,2,3,4}.

Графическое представление операции объединения показано на рисунке 5.

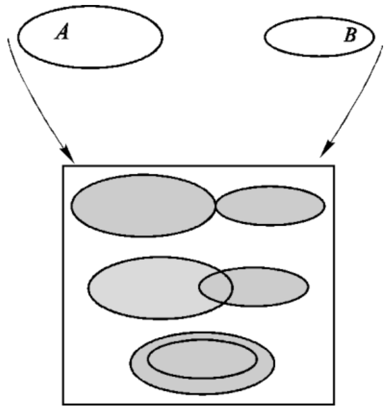


Рис. 5. Операция объединения множеств и возможные варианты

Если заданы множества А и В, то следствием выполнения операции объединения является следующее: результатом объединения множества **А** с множеством **А** будет множество **А, (А∪А)=А** ; множество **А** будет включено в объединение множеств **А** и **В**, А⊂(А∪В); множество В будет включено в объединение множеств **А** и **В**, В⊂(А∪В).

Операция объединения может быть распространена на N множеств. Тогда операцию объединения записывают, как $C=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, где k=1,2,3,…n, или в сокращенной форме $C=\bigcup_{k=1}^{n} A_n$.

Операция пересечения

Если даны два множества **А** и **В**, то пересечением их будет называться множество **С**, которое будет состоять из элементов, принадлежащих одновременно множеству **А** и множеству **В.** Знак операции пересечения – «∩». ПРИМЕР операции пересечения множеств А и В, где А ={1,2,3} и В={2,3,4}, будет множество С ={2, 3}, С=(А∩В).

Следствием операции пересечения множества А и множества В является: результат пересечения множества А с множеством А является пустое множество, (А∩А) =∅ ; результат пересечения множества А с множеством В будет включено в множество А, (А∩В)⊂А и (А∩В)⊂В.

Особенностью операции пересечения для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение равно пустому множеству.

НАПРИМЕР, если заданы числовые множества А и В, А={1,2,3} В={4,5,6}, то пересечение А с В равно пустому множеству, (А∩В)=∅. Графическое представление операции пересечения множества А и множества В показано на рисунке 6.

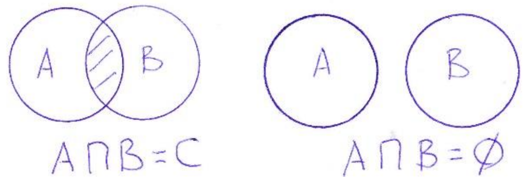


Рис. 6. Операция пересечения множеств

- ***Множества, пересечение которых, является пустым множеством называются непересекающимися.***
- ПРИМЕР 1: А – множество целых положительных чисел, В – множество целых отрицательных чисел. А и В – непересекающиеся множества.
- ПРИМЕР 2: А – множество людей старше 20 лет, В – множество людей младше 15 лет. А и В – непересекающиеся множества.

Операция пересечения может быть распространена на N множеств. Тогда записывают С=$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, где k=1,2,3,…n, или в сокращенной форме С=$\bigcap_{k=1}^{n} A_n$.

Разность множеств

Разностью множеств **А** и **В** называется совокупность тех элементов множества **А**, которые не являются элементами множества **В**. Знак операции пересечения – «/». ПРИМЕР операции пересечения множеств А и В, где А ={0,1,2,3} и В={2,3,4}, будет множество С ={0,1}, С=(А/В).

Особенностью операции разности множеств А и В, является существование трех возможных ситуаций результата. Первый вариант, если множество В содержится в множестве А, В⊂А. Второй вариант, если множество А и В содержат общие элементы (А∩В)⊂ А. Третий вариант, если множество А и множество В не имеют общих элементов.

Данные ситуации представлены на рисунке 7.

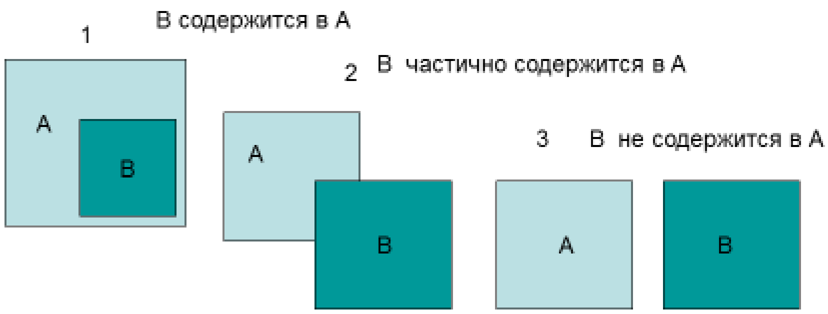


Рис. 7. Варианты операции разности множеств

Симметричная разность

Симметричной разностью множеств **А** и **В** называется совокупность тех элементов множества **А и В**, которые не являются одновременно элементами множества **А** и **В**. Знак операции симметричной разности – «∆». ПРИМЕР операции симметричной разности множеств А и В, где А ={0,1,2,3} и В={2,3,4}, будет множество С ={0,1,4}, С=(А∆В).

Графическое представление результата выполнения операции симметричной разности показано на рисунке 8 в виде выделенных цветом областей.

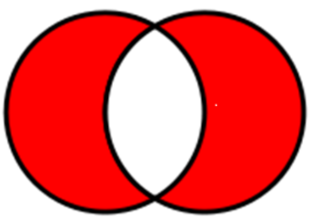


Рис. 8. Операция симметричной разности множеств

ПРИМЕР:

Пусть множество **A** - набор IP адресов подключавшиеся к компьютеру в рабочие дни, множество **B** - набор IP адресов подключавшиеся к компьютеру в выходные дни рисунок 9.

НАБОР А	**НАБОР В**
10.11.11.1	172.17.12.1
192.168.31.11	10.11.11.1
172.16.44.1	10.253.11.1
10.253.11.1	10.0.0.11
10.131.11.19	192.168.23.23
	10.144.244.233

Рис. 9. Множества A и B IP адресов

Необходимо получить перечень IP-адресов, которые подключались к нам и в будние дни и в выходные дни. Операция, которая дает ответ на запрос, называется симметрической разностью множеств A и B:

$$A \vartriangle B=\{10.11.11.1;\ 10.25311.1\}$$

Дополнение множества

Если ***A*** - множество, то дополнением ***A*** является множество элементов, не входящих в множество ***A***. Дополнением множества **A** до универсального множества **U**, является частный случай разности универсального **U** и множества **A** или $\bar{A}$ **=(U/A),** как показано на рисунке 10.

Пример, если ***A*** - множество нечетных чисел, то дополнением ***A*** является множество четных чисел.

$$\overline{A} = U \setminus A$$

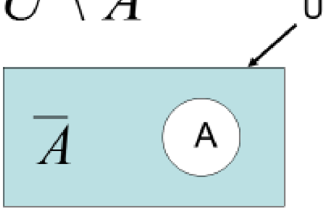


Рис. 10. Дополнение множества A

Следствием выполнения операции дополнения является:
- объединение множества А с дополнением множества А равно универсальному множеству U, или $A \cup \bar{A} = U$;
- пересечение множества А с дополнением множества А равно пустому множеству, $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- дополнение пустого множества равно универсальному множеству, $\bar{\emptyset} = U$;
- дополнение универсального множества равно пустому множеству, $\bar{U} = \emptyset$;
- дополнение дополнения множества А (или двойное дополнение) равно множеству А, $\bar{\bar{A}} = A$;

Декартово произведение множеств

Это множество всех упорядоченных пар элементов множества **A** и множества **B**, $A \times B = \{(x,y)\colon x \in A,\ y \in B\}$. Графическое представление декартова произведения множества X = {1,2,3} и множества Y = {2,4} показано на рисунке 11. Точка на плоскости может быть задана упорядоченной парой координат, то есть двумя точками на координатных осях.

Так как координаты представляются множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то прямое произведение $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$ представляет собой множество координат точек плоскости.

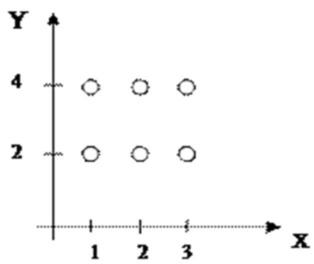


Рис. 11. Графическое представление декартова произведения

В общем случае, для произвольного семейства множеств (не обязательно различных) $\{X_i\}$ (множество индексов может быть бесконечным) прямое произведение $\{X = \prod_{i \in I} X_i\}$ определяется как множество функций, сопоставляющих каждому элементу $i \in I$ элемент множества X_I:

Особенностью выполнения произведения множеств является не выполнение коммутативного закона. Пусть заданы множества **A**= {***a, b, c***}; ***B***= {***b, c***}.

Тогда произведение **A**×***B*** ={(***a*** ,***b***), (***a*** ,***c***), (***b, b***), (***b, c***), (***c, b***), (***c, c***)}, а произведение **B**×***A***={(***b,a***}, (***b,b***), (***b,c***), (***c,a***), (***c,b***), (***c,c***)}. Из рассмотренного примера видно, что ***A*** умножить на ***B*** не равно ***B*** умножить на ***A***, то есть коммутативный закон для прямого произведения множеств не действует.

Декартова степень

N-я декартова степень множества X определяется для целых неотрицательных n, как n-кратное декартово произведение X на себя, то есть X^n . ЗАДАЧА; дано множество X = {0,1,2}, вычислить декартову степень множества X и его элементы. Элементы декартовой степени X^3 представлены в таблице 1.

Таблица 1 Элементы декартовой степени X^3

000	001	002	010	011	012	020	021	022
100	101	102	110	111	112	120	121	122
200	201	202	210	211	212	220	221	222
$\{0, 1, 2\}^3$, 3^3 = 27 элементов								

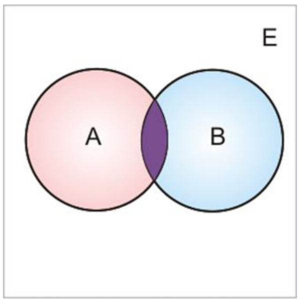
Очередность выполнения операций над множествами

Применяется строгий порядок выполнения действий с множествами. Первым выполняется действие в скобках. Когда скобки отсутствуют, первой выполняется операция “дополнение”, второй – “пересечение”, третьей – “объединение” и четвёртой – операция “исключение”, слева направо.

Мощность множества

Это характеристика количества элементов множества. Используется как признак эквивалентности над множествами, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие. Множества, равные по мощности, должны допускать взаимно-однозначное соответствие. Для обозначения мощности множества применяются следующие знаки: $|A|$ или $m(A)$.

Мощность объединения двух множеств A и B равно: $|A \cup B|=|A|+|B| - |A \cap B|$. Эта закономерность показана на рисунке 12.



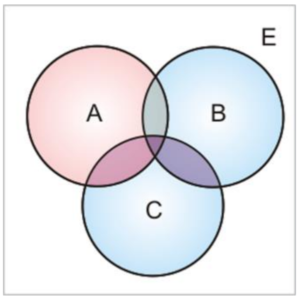


Рис. 12. Графическое представление вычисления мощности объединения двух и трех множеств

Мощность объединения трех множеств A,B,C определяется формулой:

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B| - |A \cap C|-|B \cap C|+ +|A \cap B \cap C|$$

Закономерности операций над множествами

1. Свойство двойного дополнения или инволюции.

Двойное дополнение множества A равно множеству A, $\overline{\overline{A}}=A$.

2. Свойство идемпотентности или свойство объединения и пересечения множества A.
   Объединение или пересечение множества A равно множеству A, $(A\cup A)=A$, $(A\cap A)=A$.
3. Свойство дополнения.
   Пересечение множества A с дополнением множества A равно пустому множеству, $A\cap \overline{A}=\varnothing$
4. Свойство универсального множества.
   Пересечение множества A с универсальным множеством U равно множеству A, $A\cap U=A$. Объединение множества A с универ-

сальным множеством U равно универсальному множеству, $A \cup U = U$.

5. Свойство пустого множества.
   Объединение множества A с пустым множеством равно множеству A, $A \cup \varnothing = A$. Пересечение множества A с пустым множеством равно пустому множеству, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. Закон де Моргана.
   Дополнение пересечений множества A и B равно объединению дополнений множества A и B, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$, дополнение объединений множества A и множества B равно пересечению дополнений множества A и множества B, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
7. Свойство коммутативности объединения и пересечения.
   Перемена мест множеств в операции пересечения и объединения не влияет на результат, $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
8. Свойство ассоциативности операции пересечения и объединения.
   Изменение последовательности выполнения операций пересечения и объединения не влияет на результат операции, $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.
9. Свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения и дистрибутивности пересечения относительно объединения.
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. Закон Порецкого.
    $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
11. Закон склеивания
    $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$
12. Закон элиминации или поглощения
    $A \cap (A \cup B) = A$

Проверка закона де Моргана ($\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$) с помощью метода логических рассуждений.

Пусть элемент $x \in \overline{A \cup B}$, тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$, следовательно $x \notin A$ и $x \notin B$, отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, поэтому $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$, следовательно $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Что и требовалось доказать.

Эквивалентность множеств

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Множества, для которых существует взаимно-однозначное соответствие называются эквивалентными. Эквивалентность множеств записывается с помощью знака «$\sim$»: $A \sim B$. Читается : А эквивалентно В. Об эквивалентных множествах говорят, что между ними установлено отношение эквивалентности. Отношение эквивалентности множеств обладает следующими свойствами:

1) Рефлексивность:
   $A \sim A$ (любое множество эквивалентно самому себе);
2) Симметричность:
   $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$
   (если множество A эквивалентно множеству B, то множество B эквивалентно множеству A и наоборот);
3) Транзитивность:
   $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (если множество А эквивалентно множеству В,а множество В эквивалентно множеству С, то множество А эквивалентно множеству С).

- ТЕОРЕМА.

Для того, чтобы два множества были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковое число элементов.

Доказательство:

Если множества А и В имеют одинаковое число элементов n, то, упорядочивая каждое из них некоторым образом и ставя в соответствие k-му элементу множества $\vec{A}$ k-й элемент множества $\vec{B}$, получим взаимно однозначное соответствие между множествами А и В, то есть множества А и В эквивалентны.

Предположим, что множество А имеет n элементов и существует взаимно однозначное соответствие между множествами А и В. Упорядочим множество А: пусть элементами множества А будут $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через b_k тот элемент множества В, который соответствует элементу a_k множества А.

Поскольку каждому элементу из множества А соответствует элемент из множества В и каждый элемент множества В соответствует элемент из множества А, то множество В состоит из элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, следовательно множество В состоит из n элементов.

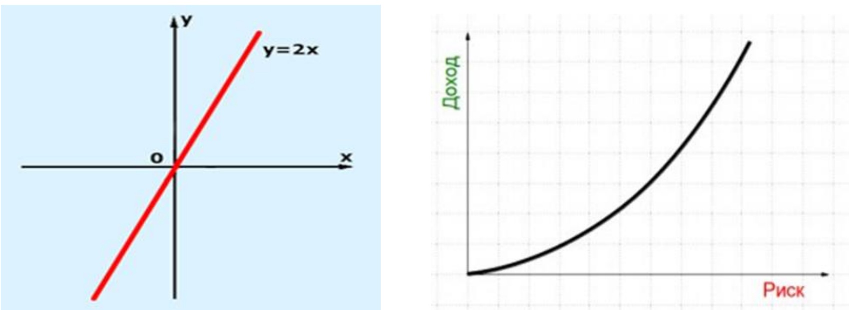
Следствие: если два множества эквивалентны, то они имеют одинаковое число элементов. Это свойство часто используют для вычисления количества элементов множеств.

1.5. Отображения и функции

Определение 1: **Функция** (отображение, оператор, преобразование) – математическое понятие, отражающее однозначную парную связь элементов одного множества с элементами другого множества.

Определение 2 альтернативное: **Функция** – это соответствие, между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие элемент другого множества.

- Понятие функции дает представление о том, как одна величина полностью определяет значение другой величины.
- ПРИМЕР: значение X определяет однозначно выражение y=(2X). Этот пример числовой функции y = (2X) показан в виде графика на рисунке 13а. Пример не числовой функции в виде зависимости дохода и риска показан на рисунке 13б.



а б

Рис. 13. Графическое представление числовой функции (а) и не числовой функции (б)

Термин «отображение» применяется для всех видов множеств, а термин «функция» – применяется для обычно для числовых множеств.

Подмножества декартова произведения $А_1$ ×...× $А_n$ множеств $А_1$,...,$А_n$ называются n отношениями между элементами множеств $А_1$,...,A_n и обозначаются строчными греческими буквами (возможно с индексами): ρ,δ ,...,$\rho 1$,$\rho 2$,... .

В частности, при n = 1 подмножества декартова произведения $А_1$ ×...× $А_n$= A_1 называются унарными отношениями между элементами множества A_1 и при n = 2 подмножества декартова произведения $А_1$ ×...× $А_n = A_1 \times A_2$ называются бинарными отношениями между элементами множеств $A_1 и\ A_2$.

Для бинарного отношения $\rho \subset A\times B$ область определения обозначается символом D_ρ и определяется по формуле: D_ρ={a: (a,b)∈ ρ для некоторого $b\in B$ }.

Для бинарного отношения $\rho \subset A\times$ В множество значений обозначается символом E_ρ и определяется по формуле: E_ρ ={b : (a, b)∈ ρ для некоторого $a\in A$ }.

Для любого подмножества $X \subset A$ множество $\rho(X)$ ={$b\in B$: (x, b)∈ ρ для некоторого $x\in X$ } называется образом множества X относительно отношения ρ. Образ одноэлементного множества $X = \{a\}$ относительно отношения ρ обозначается символом $\rho(a)$ и называется также срезом отношения ρ через элемент a.

Определение. Бинарное отношение $\rho \subset (A\times B)$ называется:

- всюду определенным, если его область определения при $D_\rho = A$;

- однозначным, если для каждого элемента $a \in D_\rho$ условие (a, b) $\in \rho$
выполняется точно для одного элемента $b\in B$, который называется значением функции ρ для элемента a и обозначается символом $\rho(a)$;

- взаимно однозначными, если оно однозначно и для каждого элемента $b\in E_\rho$ условие (a, b)∈ ρ выполняется точно для одного элемента $a \in A$, который называется прообразом элемента b для функции ρ и обозначается символом ρ^{-1}(b).

Известная и неявная функция

Если хотят подчеркнуть, что правило F известно, то говорят, что на множестве X задана функция F, принимающая значения из множества Y или Y = F (x).

Если правило F должно находится в результате решения уравнения, то говорят, что F неизвестная или неявная функция. F (x, y) = 0.

Функция y = f (x) представляет три объекта y, f, x - где

x – множество, которое называют областью задания функции.

Y – множество, которое называют областью значений функции.

F – правило, по которому каждому элементу множества x, сопоставляется элемент множества y.

- *Каждый элемент множества* **X** *называется независимой переменной или аргументом функции.*
- *Элемент* **y***, соответствующий фиксированному значению* **x***, называется частным значением функции в точке* **x.**

Обозначение функции:

$$1.\ f : X \to Y \text{или } x \xrightarrow{f} y$$

$$2.\ y = f(x) \text{или } y = y(x)$$

Две функции **f** и **g** равны, если совпадают их области задания и, если для каждого **x** имеет место равенство: **f (x) = g (x).**

- **ПРИМЕР:** Пусть x – элемент числового множества.
- ВОПРОС – Равны ли функции F и G если:

$$f(x) = x + 1, \text{a } g(x) = -x^3 + 2x + 1$$

На этот вопрос нельзя ответить, так как не указаны области задания функций. Если область задания функций – все действительные числа, то функции не равны. Пусть x=2, функции не равны. Пусть x = {-1,0, +1}, на этой области задания функции равны **f (x) = g (x).**

Виды отображений

Известны следующие виды отображений:

- Константа или постоянная.
- Взаимно однозначное отображение.
- Отображение нескольких аргументов.
- Числовая функция.
- Сужение функции.
- Суперпозиция или сложная функция.

Константа или постоянная

Если область значений f(x) состоит из одного элемента, то функцию f или отображение f называют постоянной или константой (рисунок 14).

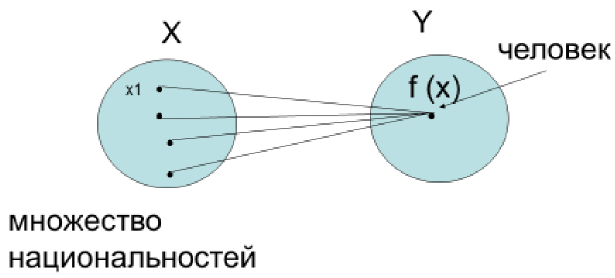


Рис. 14. Отображение f – константа

Взаимно однозначное отображение

Если разным элементам множества X соответствуют разные элементы множества У, то отображение называют взаимно-однозначным (рисунок 15).

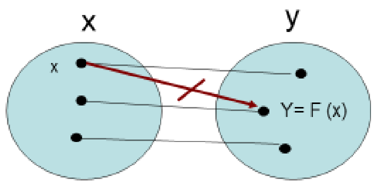
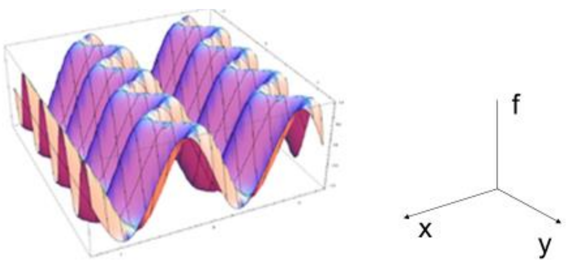


Рис. 15. Взаимно однозначное отображение

Отображение нескольких аргументов

Если множество X представляет собой декартово произведение множеств x1, x2….xn, тогда отображение f = x⟶Y где Y – множество вещественных чисел называют n – местным отображением, при этом элементы упорядоченного набора x=(x1,x2,…,xn) называют аргументами N-местной функции, каждый из которых пробегает свое множество Y= F(x_1,x_2,…,x_n), где $x_i \in X, i = 1,2, \dots n$.

Пример функции двух переменных в графической интерпретации показан на рисунке 16.



$$f(x, y) = \sin(x - \sin(2y))$$

Рис. 16. Графическое представление функции двух переменных

Функция, областью значений которой являются числовое множество, называют числовой. Термин «функция» употребляют именно для числовых функций, а термин «отображение» для всех других. Особенность числовых функций состоит в том, что в области их значений
имеются математические операции. Это влечет за собой возможность вводить аналогичные операции для числовых функций. Например, суммирование функций h (x) = f (x) + g (x).

Сужение функции

Пусть имеются две функции $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$ с областями определения в виде множеств $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$. Пусть $X_1 \subset X_2$ и для всех x$\in X_1$ выполняется равенство f_1(x)=f_2(x), тогда f_1 называют сужением функции f_2, рисунок 17.

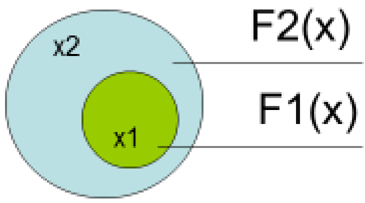


Рис. 17. Графическое представление сужения функции

Суперпозиция

Суперпозиция функций (или сложная функция, или композиция функций) - это функция, полученная из некоторого множества функций путем подстановки одной функции в другую или отождествления переменных.

Пусть f – функция, определенная на множестве D, со значениями в множестве E, а F – функция, определенная на множестве $A \subset E$ со значениями в множестве H. Тогда функция G, определенная на множестве B, включенном D, таком что, $f(B)=A\cap f(D)$ со значениями в множестве H, где $G(x)=F[f(x)]$, $x\in B$ называется сложной функцией или суперпозицией, рисунок 18.

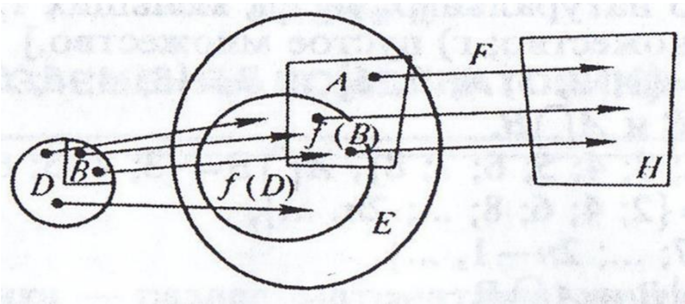


Рис. 18. Графическое представление сложной функции

Способы задания числовой функции:

1. Аналитический. С помощью формулы и стандартных обозначений, например, $y = 2x$, или $y = x.^2$
2. Графический. По оси абсцисс откладывается аргумент (x), а по оси ординат - значение функции (y). По графику тоже можно выбрать любой x и найти соответствующее ему значение y, как на рисунке19. Данный метод можно применять только для однозначных функций.
3.

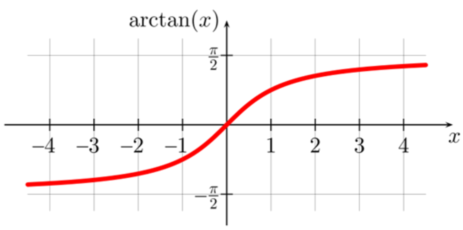


Рис. 19. Графическое представление функции

4. Табличный с помощью таблицы значений области заданий X и области значений Y, например,

x	-3	-1	0	2	3	4
y	5	2	-4	-5	-8	-9

4. Рекурсивный. Каждый следующий элемент множества определяется на основе известных:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

5. Описательный или словесный. Например, игрек равно целая часть от икс или каждому действительному значению аргумента x ставится в соответствие его удвоенное значение.

Понятие образа при отображении

Элемент **y = f (x)**, который сопоставлен элементу x, называется образом элемента x (при отображении f).

Если выделить подмножество **A** в области задания функции **f**, то можно рассмотреть совокупность образов всех элементов множества **A**, а именно подмножество области значений вида:

F(A)={f(x): x$\in A$}, где F(A) называют образом множества A, рисунок 20.

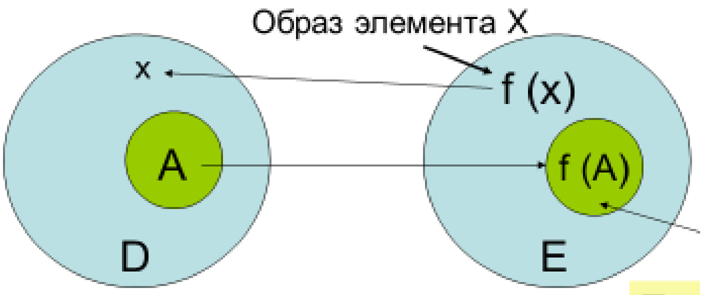


Рис. 20. Образ при отображении

Обратное отображение

Если отображение f:X⟶ Y является взаимно однозначным, то существует отображение, у которого: область задания (множество Y) совпадает с областью отображения f и область значений (множество X) совпадает с областью задания отображения f. Тогда можно записать, что x=f^{-1}(y), если y=f(x). Отображение f^{-1} называют обратным по отношению к отображению f.

Свойства образов

Пусть A и B подмножества области задания функции f: $X \longrightarrow Y$, тогда образы множеств A и B, при отображении f, обладают следующими свойствами:

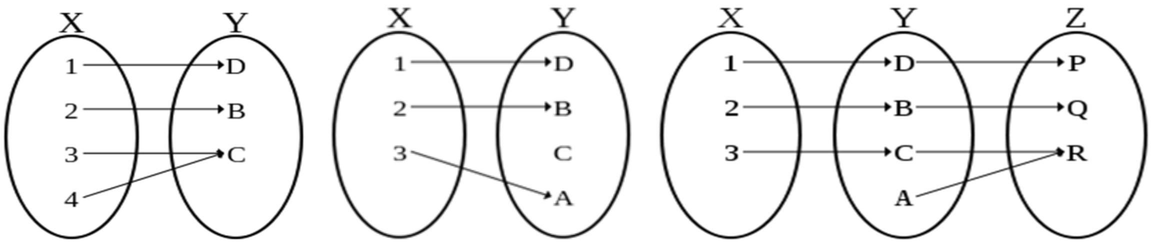
1. $F(\varnothing)=\varnothing$;
2. Если $A \neq \varnothing$, то $f(A) \neq \varnothing$;
3. Если $A \subset B$. То $f(A) \subset f(B)$;
4. Образ объединения множеств равен объединению образов $f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$;
5. Образ пересечения множеств является подмножеством пересечения образов $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

Свойства 4 и 5 допускают обобщение на любое количество множеств.

Поведение функций и отображений

При рассмотрении функций и отображений можно выделить некоторые особенности их поведения, к которым можно отнести:
- сюрьекцию;
- инъекцию;
- биекцию;
- возрастание;
- убывание;
- неубывающая функция, монотонная;
- невозрастающая функция, монотонная;
- возрастающая функция, строго монотонная;
- убывающая функция, строго монотонная;
- периодическая;

Сюръекция (сюръективное отображение, от французского sur - «на») - отображение множества X на множество f: $X \rightarrow Y$, при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X , то есть $\forall y \in Y \exists x \in X$: y=f(x), рисунок 21а.



а *б* *в*

Рис. 21. Сюръекция(а), инъекция(б), биекция(в)

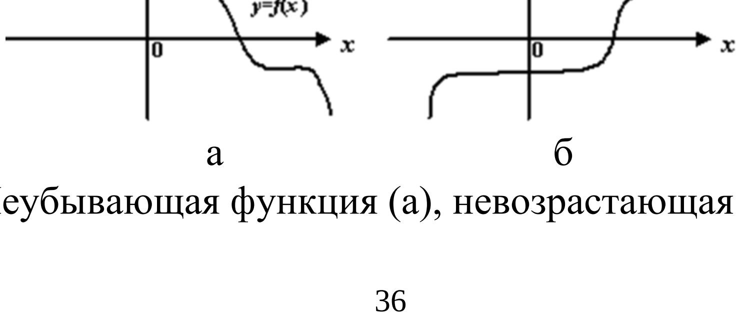
Пример, Отображение f : R→ $R+, f(x) = x^2$ сюръективно, для любого x, принадлежащего R+. Отображение f:R⟶R, $f(x) = x^2$ не сюрьективно, так как не существует x, принадлежащего R, чтобы f (x) = -9.

Инъекция означает такое отображение f множества X в множество Y, при котором разные элементы множества X соответствуют разным элементам множества Y, рисунок 21б.

Пример, отображение f: $R_{>0} \to R, f(x) = lnx$ инъективно, так как для каждого положительного вещественного числа будет существовать свой уникальный логарифм. Отображение f: $R \to R, f(x) = x^2$ не инъективна, так как f(-2)=f(2)=4.

Биекция - это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение, называют ещё взаимно-однозначным отображением, рисунок 21в.

Неубывающая функция. Пусть дана функция f:M⊂ $R \to R$, функция называется неубывающей на M, если для $\forall (x, y) \in M$, x>y⟹f(x)≥ $f(y)$, рисунок 22а.



а б

Рис. 22. Неубывающая функция (а), невозрастающая функция (б)

Невозрастающая функция. Пусть дана функция f:M$\subset R \to R$, функция называется невозрастающей на М, если для $\forall(x, y) \in M$, x>y $\Longrightarrow$ f(x)$\leq f(y)$, рисунок 22б.

Убывающая функция. Пусть дана функция f:M$\subset R \to R$, функция называется убыва́ющей на М, если для $\forall(x, y) \in M$, x>y $\Longrightarrow$ f(x)$< f(y)$, рисунок 23.

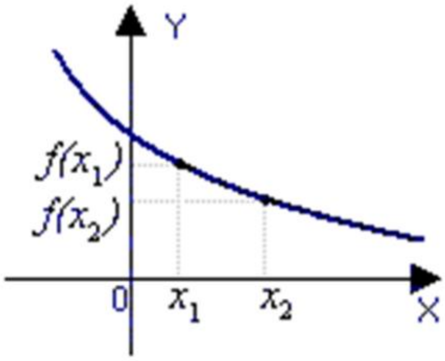


Рис. 23. Убывающая функция

1.6. Введение в теорию нечетких множеств

В классической теории множеств используется формальная логика, которая направлена на преодоление неопределенности и расплывчатости представления человеческих знаний, в которых существует человек.

Но создание систем, моделирующих способности человека, а именно систем искусственного интеллекта, привело к необходимости создания теории, позволяющей формально описывать нечеткие понятия знаний и обеспечивающей возможность моделирования процессов рассуждений, которые содержат такие понятия.

Значительным шагом в этом направлении был сделан ученым Лотфи А.Заде в 1965 году, его фотография показана на рисунке 24, (1921г.- 2017г.). Им была предложена теория нечетких множеств, которая позволяет дать строгое математическое описание расплывчатых и нечетких утверждений, что позволяет преодолеть барьер между человеком, использующим нечеткие суждения, и машинами, которые используют четкие инструкции.

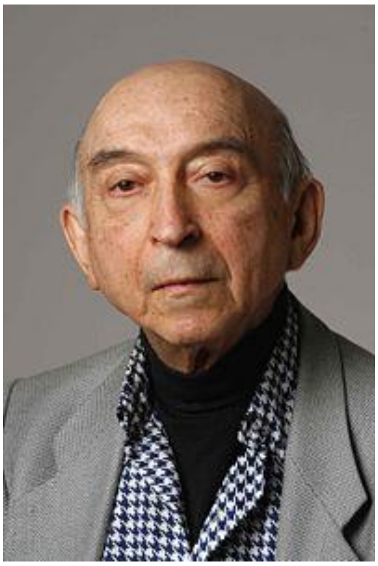


Рис. 24. Лотфи А.Заде (1921г.- 2017 г.)

Теория нечетких множеств развивалась в результате достижений: многозначной логики; теории вероятностей и математической статистики; дискретной математики. В настоящее время в теории нечетких множеств предлагаются следующие способы формализации нечетких понятий.

Первый способ, основанный на работах Л. Заде, предполагает, отказ от основного утверждения классической теории множеств о том, что некоторый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству. При этом вводится специальная характеристическая функция множества – так называемая функция принадлежности, которая принимает значения из интервала [0.1].

Второй способ формализации нечеткости предполагает, что характеристические функции множества принимают значения не на интервале [0,1], а в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке.

Третий способ это $\psi -$нечеткие множества. При этом каждый элемент универсального множества связан не с точкой в интервале [0,1], а с подмножеством или частью этого интервала.

Первый подход к формализации нечеткости состоит в следующем. Нечеткое множество образуется путем введения обобщенного понятия принадлежности, то есть расширения двухэлементного множества значений характеристической функции {0,1} (принадлежит, не принадлежит) до континуума [0,1].

Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его непринадлежности происходит не скачком, а плавно, причем принадлежность элемента множеству выражается числом из интервала [0,1], как на рисунке 25.

Нечеткое множество A={(x,$\mu_{\text{A}}(x)$)} определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и сопутствующих степеней принадлежности $\mu_{\text{A}}(x)$. Пример записи нечеткого множества: A={(x_1, 0.2),(x_2, 0.6),(x_3, 1),(x_4, 0.8)}.

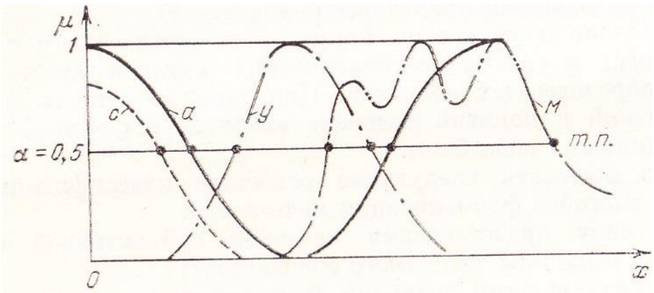


Рис. 25. Графическое представление нечеткого множества

Основные определения и свойства нечетких множеств

1. Носителем нечёткого или суппортом (sup A) множества называется множество {x: $x \in X, \mu_{\text{A}}(x)$>0};

2. Нечеткое множество A нормально, если верхняя граница его функции принадлежности равна единице, то есть sup$\mu_{\text{A}}(x)$=1. При sup$\mu_{\text{A}}(x) < 1$ нечеткое множество называется субнормальным.

3. Нечеткое множество пусто, если $\mu_{\text{A}}(x)$=0 ∀x∈X.

4. Множеством уровня α ($\alpha -$ срезом) нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества X, определяемое в виде A$_\alpha$={x∈ X: $\mu_{\text{A}}(x) \geq \alpha$,}, где α ∈[0,1], рисунок 26.

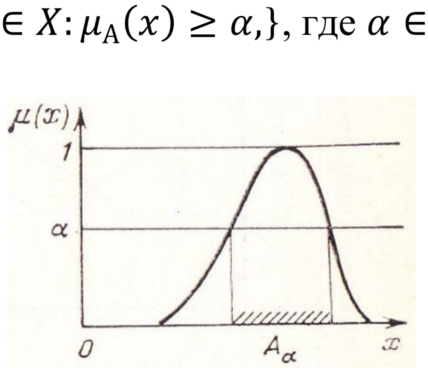


Рис. 26. Графическое представление альфа среза нечеткого множества

6. Точка перехода нечеткого множества A – это такой элемент x∈ X, для которых $\mu_{\mathrm{A}}(x)$=0.5.
7. Четкое множество, ближайшее к нечеткому множеству, определяется как:

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 0, \text{если } \mu_{\mathrm{A}}(x) < 0.5, \\ 1, \text{если } \mu_{\mathrm{A}}(x) > 0.5 \\ 0 \text{ или } 1, \text{если } \mu_{\mathrm{A}}(x) = 0.5 \end{cases}$$

8. Нечеткое множество A в пространстве X=R^n называется выпуклым нечетким множеством тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, то есть для каждой пары точек x, y из X удовлетворяет неравенству $\mu_{\mathrm{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y)$)≥min($\mu_{\mathrm{A}}(x)$, $\mu_{\mathrm{A}}(y)$), где для всех λ:0≤ $\lambda \leq 1$.

Операции над нечеткими множествами

Операции над нечеткими множествами при множестве принадлежности M = [0,1].

Пересечением нечетких множеств A и B называется нечеткое подмножество с функцией принадлежности, являющейся минимумом функций принадлежности A и B: $\mu_{\mathrm{A\cap B}}$(x)=min($\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x)$).

Произведением нечетких множеств A и B называется нечеткое подмножество с функцией принадлежности равной $\mu_{\mathrm{A\times B}}$(x)=μ_{A}(x)× μ_{B}(x).

Объединением нечётких множеств A и B называется нечёткое подмножество с функцией принадлежности, являющейся максимумом функций принадлежности A и B: $\mu_{\mathrm{A\cup B}}$(x)=max(μ_{A}(x), μ_{B}(x)).

Суммой нечётких множеств A и B называется нечёткое подмножество с функцией принадлежности: $\mu_{\mathrm{A+B}}$(x)=μ_{A}(x)+(μ_{B}(x)-(μ_{A}(x)× $\mu_{\mathrm{B}}(x)$).

Дополнением множества A называется множество $\overline{\mathrm{A}}$ с функцией принадлежности: μ_{A}(x)=1-μ_{A}(x) для каждого x∈X.

Пример графического представления нечеткого множества «Распределение автомобилей по стоимости среди трех групп людей» показан на рисунке 27.

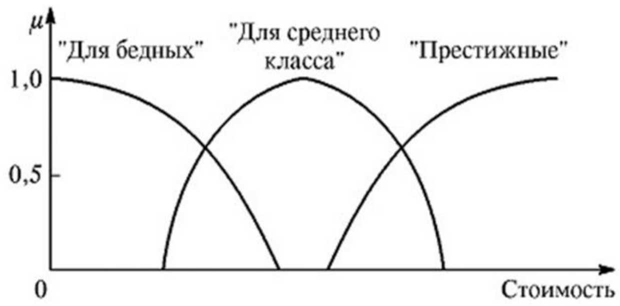


Рис. 27. Графическое представление нечеткого множества

«Распределение автомобилей по стоимости среди трех групп людей»

1.7. Упражнения

При решении задач по теории множеств самое главное - умело пользоваться определениями основных понятий. Так, выполнение операций над множествами и доказательство тождеств базируется на понятии принадлежности элемента множеству ($x \in A$), равенства множеств ($A = B$), отношения включения множеств ($A \subseteq B$). Кроме того, необходимо знать содержание понятий собственного и несобственного подмножеств, семейства всех подмножеств данного множества ($P(A)$), универсального множества (U) и смысл используемых операций.

При доказательстве тождеств применяется следующий метод: сначала предполагается принадлежность некоторого элемента множеству, обозначение которого записано слева от знака «=», и логически выводится принадлежность этого элемента множеству, обозначение которого записано справа; затем следует процедура вывода «справа налево».

Как вспомогательное средство при решении задач данного типа можно применять диаграммы Венна. Для доказательства ложности какого-либо общего утверждения достаточно привести хотя бы один опровергающий это утверждение пример. [7]

Операции над множествами

1. Доказать:
   а) $A \subseteq A$ (рефлексивность);
   б) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивность).

2. Доказать, что если A есть множество корней уравнения
 $x2 - 7x + 6 = 0$ и $B = \{1,6\}$, то $A = B$.
3. Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.
4. Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1,2, 3\}$
5. Доказать, что для любого A:
 а) $\varnothing \subseteq A \subseteq U$;
 б) если $A \subseteq \varnothing$, то $A = \varnothing$, если $U \subseteq A$, то $A = U$;
 в) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$.
6. Доказать, что существует лишь одно множество, не имеющее элементов.
7. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$,
$A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?
8. Доказать, что $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = U$.
9. Доказать следующие тождества:
а) $A \cup A = A \cap A = A$;
б) $A \cup B = B \cup A$;
в) $A \cap B = B \cap A$;
г) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
д) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
е) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
з) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$;
и) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
к) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
л) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
10. Доказать, что
а) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;
б) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;
в) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;
г) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;
д) $A = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = U$;
11. Найти все подмножества множеств 0, $\{0\}$, $\{x\}$, $\{1, 2\}$.
12. Доказать, что множество из n элементов имеет n^2 подмножеств.
13. Доказать, что $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
14. Доказать, что для любых, a, b, c, d

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.
15. Какие из утверждений верны для всех A, B и C?
а) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
б) Если $A \cap B \subseteq \bar{C}$ и $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \varnothing$.
в) Если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$.
г) Если $A \subseteq \overline{B \cup C}$ и $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$.
16. Доказать, что $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \Leftrightarrow \{B \setminus A) = \varnothing$.
17. Доказать, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times \{B \cup D)$.

Типовая методика решения для некоторых упражнений

Упражнение 1. Множество $\varnothing$ не имеет элементов, а множество $\{\varnothing\}$ имеет один элемент.
Упражнение 7. ОТВЕТ Нет. Пусть $x \in A \cap B$, тогда $x \notin C$. Таким образом, $x \in (A \cap B) \setminus C$.
Упражнение 9. Докажем, например, задачу(е):

Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$, тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$.
Если $x \in B$, то $x \in A \cap B$, а значит, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Если $x \in C$, то $x \in A \cap C$, а значит, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Итак, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пусть $x \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$, то есть $x \in A \cap (B \cup C)$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \cup C$,
то есть $x \in A \cap (B \cup C)$.
Итак, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
Задача 10. Докажем, например, задачу(в).

Пусть $(A \setminus B) \cup B = A$ и $x \in B$. Тогда ясно, что $x \in A$.
Пусть $B \subseteq A$. Тогда $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = A$.
Упражнение 14. Если $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, то второе множество должно содержать элемент $\{a\}$, то есть $\{a\} = \{c\}$ или $\{a\} = \{c, d\}$. В обоих
случаях, $a = c$. Теперь осталось доказать, что из $\{a, b] = \{a, d\}$ следует $b = d$. Если, $a = b$, то $a = d$ и значит, $b = d$. Если $a \neq b$, то
$a \neq d$, значит, $b = d$. Обратное очевидно.
Упражнение 15
а) ОТВЕТ - Неверно. Например, $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$, $C = \{\{\varnothing\}\}$.
б) Рассмотрите пример (а).

в) ОТВЕТ - Верно. Докажем от противного. Пусть $x \in A \cap C$, тогда, так
как $A \cup C \subseteq B$, то $x \in B$. Но $x \in A \cap B$, а значит, $x \in \bar{C}$. Это противоречит тому, что $x \in C$.
г) ОТВЕТ - Неверно. Например, возьмем $A = C \neq B$.
д) ОТВЕТ- Неверно. Например, возьмем три попарно непересекающихся
непустых множества.
Упражнение 17
Пусть $x \subseteq (A \times B) \cup (C \times D)$. Тогда $x = <y,z>$ *и* $y \in A, z \in B$ или
$y \in C, z \in D$. Отсюда $y \in A \cup C$ и $z \in B \cup D$ *и* $x \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.
Таким образом, $(A \times B) \cup (C\ x\ D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются ме-тоды построения комбинаций элементов конечных множеств, в соот-ветствии со специальными правилами. Такие комбинации принято называть комбинаторными конфигурациями.

Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки элементов конечного множества и его конечные подмножества с заданным числом элементов. При изучении комбинаторных конфигураций принципиально важными проблемами являются задачи существования таких конфигураций, нахождения методов их построения и определения правил подсчета числа таких конфигураций.

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем рисунок 28, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Расчет способов осуществления некоторых действий - является сущностью комбинаторных задач. С тех пор прошло много лет, но комбинаторика продолжала развиваться в трудах многих известных ученых и оказалась весьма востребованной, как инструмент решения актуальных задач современности.

Рис. 28. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 г. – 1716 г.)

Некоторые современные прикладные приложения комбинаторики:

- Криптография (это прикладная наука о методах и способах преобразования информации с целью её защиты от незаконных пользователей);
- Логистика (это поиск путей по сокращению издержек на хранение, транспортировку товара с момента производства или его закупа, до его конечной реализации);
- Сортировка (необходима для организации быстрого поиска объекта с нужными свойствами);
- Планирование (организация рабочего времени и рабочего места);
- Трассировка печатных плат (Заключается в проведении на печатной плате всех электрических соединений схемы с учетом заданных ограничений – отсутствие пересечений проводников, минимальное количество переходов по слоям платы и изгибов проводов), как на рисунке 29.

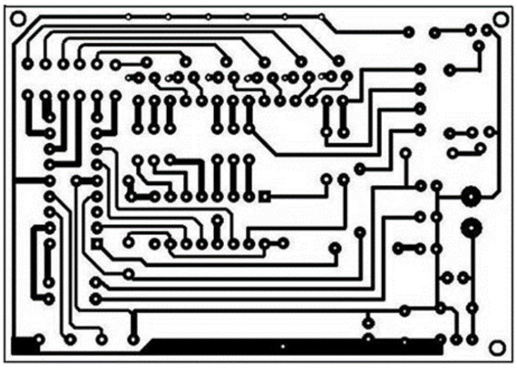


Рис. 29. Печатная плата

2.1. Основные правила комбинаторики

Простейшими правилами подсчета числа комбинаторных конфигураций, являются правила суммы, произведения и степени.

Правило суммы: если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами и элемент x_2 можно выбрать n_2 способами, причем все эти способы выбора попарно различны, то выбор одного из элементов x_1, x_2 можно осуществить суммой $n_1 + n_2$ способами.

В общем случае, если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами, элемент x_2 можно выбрать n_2 способами и т.д., наконец, элемент x_m можно выбрать n_m способами, причем все эти способы выбора попарно различны, то выбор одного из элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$ можно осуществить $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ способами.

Правило суммы означает, что для любых конечных взаимно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$ выполняется равенство:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$

Правило произведения: если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами и элемент x_2 можно выбрать n_2 способами, то упорядоченный набор (x_1, x_2) можно выбрать $(n_1 \times n_2)$ способами.

В общем случае, если элемент x_1 можно выбрать n_1 способами и элемент x_2 можно выбрать n_2 способами и т.д., наконец, элемент x_m можно выбрать n_m способами, то упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно выбрать $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m)$ способами.

Правило произведения означает, что для любых конечных множеств A_1, $\mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_m$ выполняется равенство: $|A_1 \times \mathrm{A}_2, \times \dots \times \mathrm{A}_m| = |A_1| \times |\mathrm{A}_2| \times \dots \times |\mathrm{A}_m|$.

Пример. Пусть задан алфавит {0,1}. Конечная последовательность $\mathrm{a}_1, \dots \mathrm{a}_n$ символов алфавита A называется словом длины n. Определить число слов: а) длины 3; б) длины не больше 4.

Решение. Обозначим N_k– число слов длины k и $N_{\le k}$– число слов длины не больше k.

Слово длины 3 определяется комбинаторной конфигурацией (a_1, a_2, a_3). Так как каждый из элементов можно выбрать двумя способами, то по правилу произведения: N_3=2×2×2=2^3.

По правилу суммы: $N_{\le 4}$=N_1+N_2+N_3+N_4=2+2^2+2^3+2^4=30.

Правило степени: если каждый из элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$ можно выбрать n способами, то упорядоченный $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ набор можно выбрать n^mспособами. Правило степени означает, что для любых конечных множеств A,B множество A^{B} всех отображений B в A имеет $|\mathrm{A}|^{|\mathrm{B}|}$ элементов, т.е. выполняется равенство: $||\mathrm{A}^{\mathrm{B}}| = |\mathrm{A}|^{|\mathrm{B}|}$.

Пример. В кодовом замке на общей оси вкладыша установлены 5 дисков, каждый из которых разделен на 7 секторов. Сколько наборов кодов имеет такой замок?

Решение. Наборы замка моделируются комбинаторными конфигурациями вида $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4, \mathrm{x}_5)$ где x – установленные на 5 дисках некоторые значения из 7 секторов. Значит, по правилу степени число таких наборов равно 7^5.

2.2. Комбинаторные конфигурации

- **Определение**: множество в котором задан порядок его элементов называется упорядоченным. Каждому элементу множества указан его порядок (или место) в множестве.
- Если задано множество A= {a1, a2, a3}, то A1= {a2, a1, a3} – упорядоченное множество.

Рассмотрим n-элементное множество M={$\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_n$}, где n ∈ N.

Определение понятий размещение и перестановки

Упорядоченный набор ($x_1,\ldots,x_m$) m различных элементов множества M называется **размещением из n элементов по m**. Другими словами, размещения из n элементов по m – это комбинации из m различных элементов n-элементного множества M, которые различаются либо составом элементов, либо порядком их расположения в комбинации.

Число всех таких размещений обозначается A_n^mили $(n)_m$ (читается: «число размещений из n по m»). Из определения по правилу произведения получаем формулу: A_n^m= n$\times$ $(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-m+1)$

для значений $1\leq m\leq n$. В остальных случаях A_n^0=A_0^0 =1 и A_n^m=0 при m > n.

В частности, при m = n получим размещение из n по n элементов или упорядоченный набор всех n различных элементов множества M. Такие наборы называются **перестановками** n-элементного множества M. Другими словами, перестановки n элементов – это комбинации из всех элементов n-элементного множества M, которые различаются порядком расположения элементов.

Число всех таких перестановок обозначается P_n (читается «число перестановок n элементов»).[] Из определения получаем формулу вычисления числа перестановок:

$$P_n= A_n^n = \mathrm{n} \times (n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1 = n!$$

При n = 0, P_0= 0! =1

Задача. Сколько можно составить перестановок из n элементов множества, в которых заданные два элемента, a и b не стоят рядом.

- Шаг 1. Определим число перестановок, в которых a и b стоят рядом.
- Шаг 2. Возможны варианты: a стоит на первом месте, a стоит на втором месте, a стоит на (n-1) месте; b стоит правее a – таких случаев (n-1).
- Шаг 3. Кроме этого, a и b можно поменять местами и следовательно существует 2×(n-1) способов размещения a и b рядом.
- Шаг 4. Каждому из этих способов соответствует (n-2)! перестановок других элементов.

- Шаг 5. Таким образом число перестановок в которых a и b стоят рядом равно: 2×(n-1)×(n-2)! = 2×(n-1)!
- ИЗВЕСТНО - Общее число перестановок n!
- ВЫВОД - Число перестановок, где элементы a и b не стоят рядом равно можно вычислить по формуле:

$$n!-2\times(n-1)!=(n-1)!\times(n-2)$$

Определение понятия сочетания

Подмножество $(x_1,\dots,x_m)$ множества M, состоящее из m различных элементов $x_1,\dots,x_m$, называется **сочетанием из n элементов по m**. Другими словами, сочетания из n элементов по m – это комбинации из m различных элементов n-элементного множества M, которые различаются составом элементов.

Число всех таких сочетаний обозначается C_n^m(читается: «число сочетаний из n по m»).

Поскольку в случае $1\leq m \leq n$ каждое сочетание из n элементов по m можно упорядочить $m!$ способами и получить из такого сочетания $m!$ размещений из n элементов по m, то выполняется равенство: $A_n^m = C_n^m \times m!$. Отсюда получаем формулу вычисления числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-m+1)}{m!}$$

В остальных случаях считаем: $C_n^0 = C_0^0 = 1$ и при m > n, $C_n^m = 0$.

После умножения числителя и знаменателя последней дроби на выражение получаем компактную формулу вычисления числа сочетаний для условия $1\leq m \leq n$:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\times(n-m)!}$$

Свойства числа сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

3. $(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \times x^n$.
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Задача. Задана прямоугольная сетка квадратов размерами m на n. Определите число различных вариантов путей из точки с координатами (0,0) в точку (M, N) по вертикальным и горизонтальным отрезкам рисунок 30.

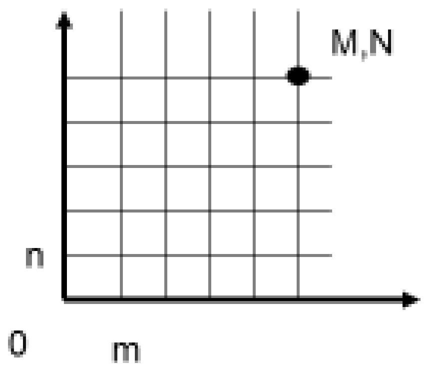


Рис. 30. Координатная сетка к задаче

Решение:

1. Кратчайший путь из точки (0,0) в точку (N, M) состоит из **n+m** отрезков.
2. Общее число путей равно числу способов, которыми из **(m+n) отрезков** можно выбрать n вертикальных отрезков или **m** горизонтальных отрезков, что соответствует формуле:

$$C_{n+m}^{n} = C_{\mathrm{m+n}}^{\mathrm{m}}$$

Доказать. Число сочетаний из **n** по **k** равно сумме числа сочетаний из **(n-1)** по **k** и числа сочетаний из **(n-1)** по **(k-1)**:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Доказательство:
Для доказательства, используем алгоритм решения предыдущей задачи, с использованием координатной сетки (Y, X) рисунок 31.

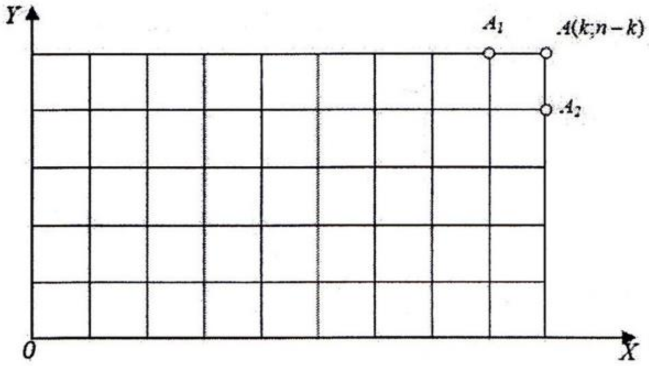


Рис. 31. Координатная сетка к задаче

Число кратчайших путей из точки с координатами (0,0) в точку A с координатами (k, n-k) равно:

$$C_{k+(n-k)}^{k} = C_{n}^{k}$$

Все такие пути можно разделить на две группы, проходящие через точку A1 (k-1; n-k) и точку A2 (k; n-k-1), соответственно число путей, проходящих через A1 и A2:

$$C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1} /////// \; C_{k+(n-k-1)}^{k} = C_{n-1}^{k}$$

Следовательно, общее количество путей - это сумма:

$$C_{n}^{k} = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$$

Задача. Докажите справедливость тождества:

$$C_{2n}^{n} = (C_{n}^{0})^{2} + (C_{n}^{1})^{2} + \ldots + (C_{n}^{n})^{2}$$

Решение:

1. Множество всех кратчайших путей из точки с координатой (0; 0) в точку с координатой A (n, n) рисунок 32.

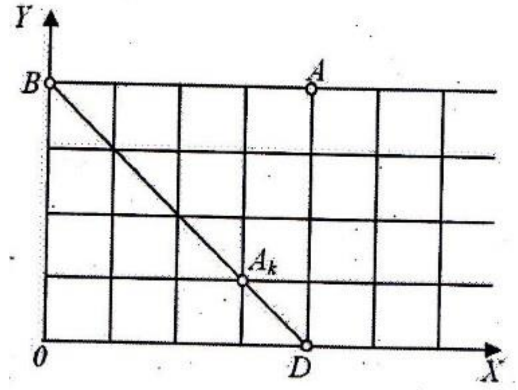


Рис. 32. Координатная сетка к задаче о доказательстве тождества

2. Каждый такой путь проходит через точку Ak лежащих на диагонали BD.
3. Число путей из точки 0 до Ak равно:

$$C^{\mathrm{k}}_{\mathrm{k+(n\text{-}k)}} = C^k_n$$

4. Число путей из точки Ak в точку A равно:

$$C^k_{n-k+k} = C^k_n$$

5. Число путей из точки 0 в точку A через точку Ak равно:

$$C^k_n \times C^k_n = (C^k_n)^2$$

6. Переберем все точки k от 0 до n. То получим сумму квадратов сочетаний

Определение понятия размещения с повторением

Упорядоченный набор ($x_1,\ldots,x_m$) элементов $x_1,\ldots,x_m$ множества M называется размещением с повторением из n элементов по m. В отличие от обычных размещений из n элементов по m, в этом случае элементы $x_1,\ldots,x_m$ не обязательно различные.

Число всех таких размещений с повторением обозначается $\overline{A_n^m}$ (читается: «число размещений с повторением из n по m»).

Так как на каждом из m мест в размещении с повторением $x_1,\ldots,x_m$ может стоять любой из n элементов множества M, то по правилу произведения получаем формулу: $\overline{A_n^m} = n^m$

В частности, при m = n получим размещения с повторением из n элементов по n, которые называются также перестановками с повторениями из n элементов. Если рассматриваются перестановки с повторением из n элементов, в которых имеется k различных элементов, каждый из которых встречается соответственно $n_1,\ldots,n_k$ раз, то число всех таких перестановок обозначается $P_n(n_1,\ldots,n_k)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(n_1,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!}$$

Задача. Определить число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы, а; 4 буквы б; 2 буквы в; 2 буквы г). Ответ: 12! / (4! *4! *2! *2!) = 207900

Определение понятия сочетания с повторениями

Неупорядоченный набор $(x_1,\ldots,x_m)$ элементов множества M называется сочетанием с повторением из n элементов по m. В отличие от обычных сочетаний из n элементов по m, в этом случае ты $x_1,\ldots,x_m$ не обязательно различные.

Число всех таких сочетаний с повторением обозначается $\overline{C_n^m}$ (читается: «число сочетаний с повторением из n по m»).
Формула вычисления числа сочетаний с повторением имеет вид:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\times(n-1)!}$$

В таблице 3 предложена схема выбора формул комбинаторики.

Таблица 3. Алгоритм выбора формул комбинаторики [9]

Выбор формулы

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Да — Все ли элементы входят в соединение? (Да — Перестановки; Нет — Размещения)

Нет — Сочетания

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

2.3. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты

Всем известна формула квадратного уравнения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Возникает вопрос, как раскрыть скобки при вычислении выражения, которое называется биномом Ньютона:

$$(a+b)^n$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Имеет место равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n,$$

где

$C_n^k = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$ Называется биномиальным коэффициентом

Формулу бинома Ньютона можно свернуть до вида:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Формула называется биномом Ньютона (а комбинаторные числа называются биномиальными коэффициентами). Формула дает рекуррентное соотношение для последовательного вычисления биномиальных коэффициентов с помощью таблицы, которая называется треугольником Паскаля рисунок 33.

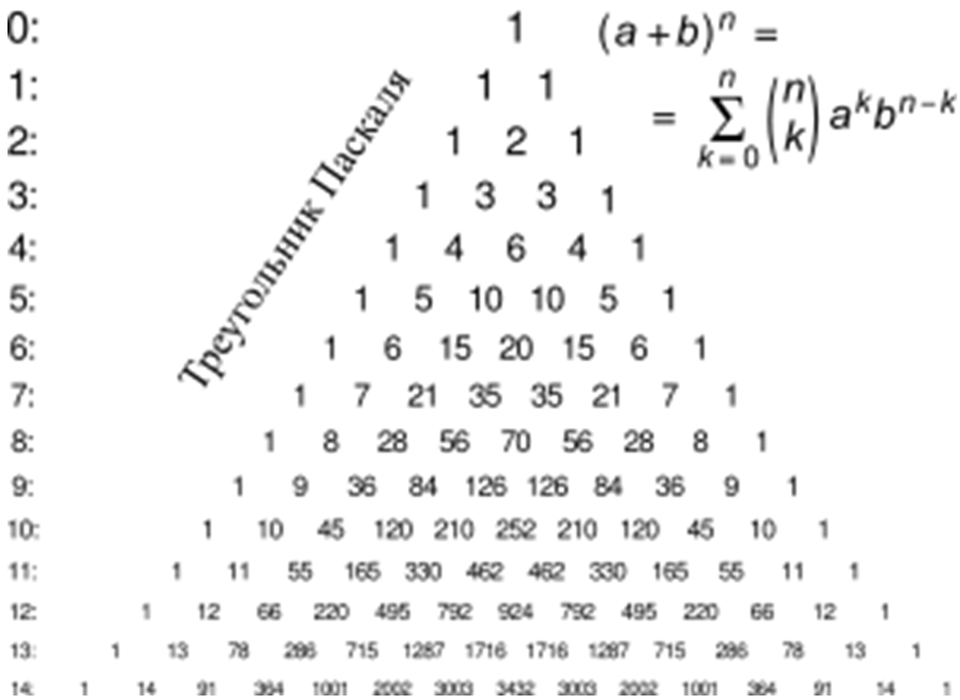


Рис. 33. Треугольник Паскаля

Интересны закономерности треугольника Паскаля:

1. Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.
2. В строке с номером n:
   - первые и последние числа равны единице;
   - вторые и предпоследние числа равны n;
   - третье число равно треугольному числу, что также равно сумме номеров предшествующих строк;
   - четвёртое число является тетраэдрическим;
   - m-е число (при нумерации с 0) равно биномиальному коэффициенту.

2.4. Методы вычислений комбинаторных конфигураций

Метод математической индукции

Используется для доказательства утверждений, в формулировке которых участвует натуральный параметр n.

Он основан на принципе математической индукции, которое формулируется - утверждение «для любого $n \in N$ выполняется правило P(n)» считается доказанным, если оно доказано для n =1 и для любого натурального числа k из предположения, что правило P(n) истинно для n = k, и доказана его истинность для n = k +1.

Этапами математической индукции являются:

1. База индукции. Доказывается истинность утверждения P(n) для n =1(обычно это удается сделать непосредственной проверкой).
2. Индуктивное предположение. Допускается, что утверждение P(n) верно для всех $1 \le n \le k$.
3. Индукционный переход. Исходя из индуктивного предположения, доказывается истинность P(n) для n = k +1.
4. Вывод. На основании первых трех этапов и принципа математической индукции делается вывод о справедливости утверждения для любого $n \in N$.

Пусть имеется конечное упорядоченное множество n натуральных чисел A = {1,2, 3,…, n}.

Предположим, что для некоторых элементов этого множества выполняется некоторое утверждение, например,

$$2^1 \ge 1+1$$

$$2^2 \ge 2+1$$

$$2^3 \ge 3+1$$

ВОПРОС. Всегда ли можно считать, что это утверждение будет справедливым для всех элементов множества A?

$$2^k \ge k+1$$

Ответ на это дает принцип математической индукции. Пример доказательства.

- 1. При n = 1 неравенство $2^n \ge n+1$ выполняется.
- 2. Предположим, что выполняется неравенство $2^k \ge k+1$.

- 3. Докажем, что справедливо неравенство $2^{k+1} \geq (k+1)+1$

$$2^{k+1} = 2 \times 2^{k} \geq 2(k+1) = 2k + 2 > \mathrm{k} + 2$$

$$\text{при } \mathrm{k} > 1$$

Таким образом, оба условия математической индукции выполняются и неравенство справедливо для любого натурального n.

Пример. Докажем формулу бинома Ньютона индукцией по переменной *n*. В этом случае для произвольного значения x∈ R свойство P=P(n) натуральных чисел n выражается равенством $(1+x)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m \times x^m$.
При n=1 это свойство имеет вид очевидного равенства:

$$(1+x)^1=\sum_{m=0}^{1} C_1^m \times x^m=\mathrm{C}_1^0 \times \mathrm{x}^0+\mathrm{C}_1^1 \times \mathrm{x}^1= 1+\mathrm{x}$$

Предположим теперь, что свойство P выполняется для натурального числа n, и докажем, что этим свойством P обладает следующее за ним
число n+1, то есть выполняется равенство:

$$(1+\mathrm{x})^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \times x^m$$

Тогда по нашему предположению с учетом второго свойства числа сочетаний получаем равенства:

$$(1+\mathrm{x})^{n+1}= (1+\mathrm{x})^n \times (1+x)= (\sum_{m=0}^{n} C_n^m \times x^m)\times (1+x)=$$

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \times x^m+\sum_{m=0}^{n} C_n^m \times x^{m+1}=$$

$$(\mathrm{C}_n^0 \times x^0)+(\sum_{m=1}^{n} C_n^m \times x^m)+(\sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} \times x^m)+(\mathrm{C}_n^n \times x^{n+1})=$$

$$(\mathrm{C}_{n+1}^0 \times x^0)+(\sum_{m=1}^{n}(C_n^m+C_n^{m-1})\, x^m)+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1} \times x^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m\, x^m$$

Что и требовалось доказать.

Метод включения и исключения

Обобщением правила суммы на произвольные два множества A,B является очевидное равенство: $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$.

В общем случае, для произвольного количества множеств $A_1, A_2, \ldots A_n,$ значение $\left|A_{1,} \cup A_{1,} \cup \ldots \cup A_{n,}\right|$ вычисляется по следующему правилу, которое называется принципом включения и исключения**:**

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| +\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}|A_i \cap \ldots \cap A_n|$$

2.5. Упражнения

1. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на тот же самый вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2, 3, 4, 5.

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр можно использовать не более одного раза?

4. Сколькими способами 7 человек могут разместиться в очередь в кассу?

5. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

6. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

7. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника? б) На сколько частей делят треугольник эти прямые?

8. Сколько существует двухзначных чисел, у которых обе цифры четные?

9. Сколько есть пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

10. Сколько четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? Найти сумму всех этих чисел.

11. Сколько есть трехзначных чисел, которые записываются с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делятся на 3?

12. Сколько есть пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких, как 67876, 17071)?

13. 5 мальчиков и 5 девочек садятся в ряд на 10 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с нечетными номерами, а девочки — на места с четными номерами. способами это можно сделать?

14. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове математика.?

15. Автомобильные номера составляются из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, используя 32 буквы русского алфавита.

16. В селении живут 1500 жителей. Доказать, что по крайне мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

17. От A до B 999 *км*. Вдоль дороги стоят столбы, на которых указаны расстояния до A и до B 0, 999; 1, 998; 2, 997; . . .; 999, 0. Сколько среди них таких, на которых только 2 различные цифры?

18. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

19. Каково число матриц из m строк и n столбцов с элементами из множества $\{0,1\}$? То же при условии, что строки матрицы попарно различны.

20. Применяя правило суммы и правило произведения, ответить на следующие вопросы:

а) Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

б) Бросают три игральные шестигранные кости. Сколькими способами они могут упасть так, что, либо все оказавшиеся вверху грани одинаковы, либо все попарно различны?

21. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружки? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

22. На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро - немецкий, шестеро - французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо - английский и французский, трое - немецкий и французский.

а) Сколько человек знают все три языка?

б) Сколько человек знают ровно два языка?

в) Сколько человек знают только английский язык?

23. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k $(0 \le k \le 4)$.

24. Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

25. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберется не менее 6 членов комиссии?

Рассмотреть задачу также в том случае, когда комиссия состоит из n членов, а сейф можно открыть при наличии m членов комиссии.

26. Дано m предметов одного сорта и n другого. Найти число выборок, составленных из r предметов одного сорта и s другого.

27. В розыгрыше первенства страны по футболу участвует 10 команд. Команды, которые займут первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые займут последние два места, покинут высшую лигу. Сколько разных результатов первенства может быть?

28. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слова "математика"?

29. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв, a, b, c, если известно, что буква, a встречается в слове не более двух раз, буква b - не более одного раза, буква c - не более трех раз?

30. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x1 + x2 + \ldots + xn = m$

31. Написать все сочетания с повторениями из трех элементов, a, b, c по 3.

32. Сколькими способами можно распределить k разных предметов среди n лиц?

33. Из n букв, среди которых буква, a встречается α раз, буква b – β раз, а остальные буквы попарно различны, составляются сочетания с повторениями по r элементов. Сколько среди них будет таких, которые содержат h раз букву, a и k раз букву b. Сколько различных слов, содержащих r букв, можно составить из этих n букв?

34. Имеется колода из $4n$ карт ($n \geq 5$), которая содержит четыре масти по n карт в каждой масти, занумерованных числами 1, 2, ..., n. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся:

а) пять последовательных карт одной масти;

б) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;

в) три карты с одним номером и две карты с другим;

г) пять карт одной масти;

д) пять последовательно занумерованных карт;

е) три карты из пяти с одним и тем же номером;

ж) две карты из пяти с одинаковыми, а остальные - с разными номерами.

35. n ($n > 2$) человек садятся за круглый стол. Два размещения по местам будем считать совпадающими, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколько существует способов сесть за стол?

36. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

37. Сколькими способами можно составить три пары из n шахматистов?

38. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные m элементов не стоят рядом в любом порядке?

39. Найти число способов раскладки n различных шаров по m различным урнам.

40. Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по m различным урнам?

41. Сколькими способами можно разложить n различных шаров ($n = n1 + n2 + . . . + nk$) по k различным урнам так, чтобы в первую урну попало $n1$ шаров, во вторую - $n2$ и т. д., в k-ю - nk шаров?

42. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 75226522?

43. На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие не проходят через один и тот же диаметр?

44. Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовали по 10 человек, причем никакие двое из ее членов не были на заседаниях вместе больше одного раза. Доказать, что число членов комиссии больше 60.

45. В некотором учреждении 25 сотрудников. Доказать, что из них нельзя составить больше 30 комиссий, по 5 человек в каждой, так, чтобы никакие две комиссии не имели более одного общего члена.

46. Группа из 41 студента успешно сдала сессию из трех экзаменов. Возможные оценки: 5, 4, 3. Доказать, что по крайней мере пять студентов сдали сессию с одинаковыми оценками.

2.6. Задача коммивояжера

Задача коммивояжера - одна из самых известных прикладных задач комбинаторной оптимизации. Классическая постановка задачи формулируется следующим образом:

Заданы N городов, соединённых между собой дорогами. Необходимо проложить между ними кратчайший замкнутый маршрут, проходящий через каждый город только один раз.

Расстояние из города j в город i считается неотрицательным числом: $D_{ji} \geq 0$. Это не обязательно "физическая длина" дороги. "Расстоянием" может быть время перемещения, стоимость билета или произвольное неотрицательное число. Часто D_{ji} называют стоимостью ребра, так как дороги можно представить рёбрами, соединяющими города-вершины некоторого весового орграфа рисунок 34. [10]

Таким образом, решение задачи коммивояжёра состоит в отыскании на нашем орграфе маршрута, проходящего однократно через все (***n***) вершин, при наименьшей его стоимости.

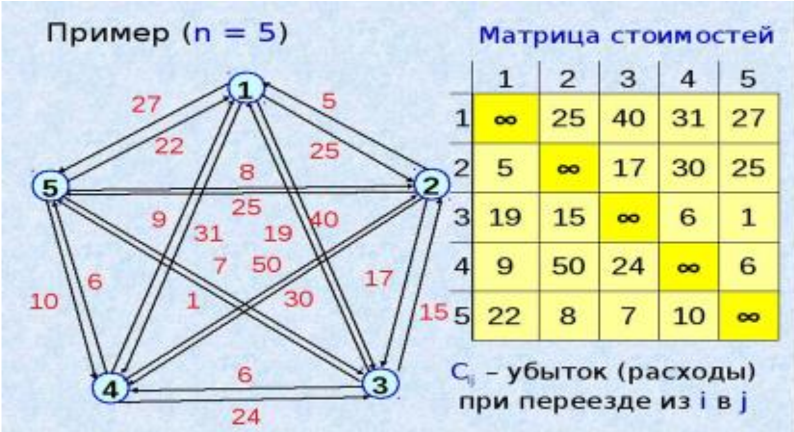


Рис. 34. Постановка задачи коммивояжера через задание весового орграфа и матрицы стоимостей

Все такие существующие маршруты в орграфах называются Гамильтоновыми циклами, которые задаются перестановками на множестве вершин графа, а для n городов всегда существует ½ (n - 1)! различных маршрутов

Гамильтоновым циклом называется маршрут ориентированного графа, включающий ровно по одному разу каждую его вершину, исключая исходную.

Математическая модель задачи коммивояжера

Рассматривается n городов, связанных дорожной сетью. Пусть xij = 1, если путешественник переезжает из i-ого города в j-ый и xij =0, если j-ый город не посещается. Условно введем (n+1)-й город, совмещенный с 1-м городом, т.е. расстояния от (n+1)-го города до любого другого, отличного от первого, равны расстояниям от первого города. При этом, если из первого города можно лишь выйти, то в (n+1)-й город можно лишь прийти. Введем дополнительные целые переменные, равные номеру посещения этого города на пути. u1=0, un+1=n. Для того, чтобы избежать замкнутых путей, выйти из первого города и вернуться в (n+1) введем дополнительные ограничения, связывающие переменные xij и переменные ui (ui целые неотрицательные числа). [11]

Целевая функция задачи будет определяться формулой на рисунке 35.

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \le j \le n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \le i \le n,$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \ge 1, \qquad S \ne \emptyset, S \subset \{1, \dots, n\},$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Рис. 35. Целевая функция задачи коммивояжера

Двойная сумма – это целевая функция задачи определение наименьшего значения. На переменные входящие в целевую функцию накладываются ограничения. Однократные суммы - указывают на требование для занятия единичными элементами плана-решения X единственной позиции в каждой строке (1≤ i ≤ n) и в каждом столбце (1 ≤ j ≤ n).

Верхняя двойная сумма - целевая функция задачи является определение наименьшего значения. На переменные входящие в целевую функцию накладываются ограничения. Однократные суммы - указывают на требование для занятия единичными элементами плана-решения X единственной позиции в каждой строке (1≤ i ≤ n) и в каждом столбце (1 ≤ j ≤ n).

Задача коммивояжёра относится к классу NP-трудных. Такой класс задач предполагает, что не известен алгоритм, который позволяет гарантировано её решить за полиномиальное по числу городов N время T ~ Nk, k=const. Тем не менее, для конечного количества городов существует множество способов решения, некоторые из которых рассмотрим далее.

1.Точные методы не только находят некоторое решение, но и при окончании своей работы доказывают, что это решение - наилучшее. Отметим следующие из них:

- полный перебор перестановок N-1 чисел (стартовый город фиксирован). Практически бесполезен при N> 15.

Направленный поиск с возвратами - перебор вариантов "вокруг" некоторого решения с отсечением путей, имеющих длину большую, чем лучший к текущему моменту путь.

- метод ветвей и границ - наиболее эффективный из известных метод отсечения "неперспективных" узлов, за счёт анализа матрицы расстояний. При поиске оптимального решения строится бинарное дерево (в каждом узле порождаются 2 ветви: коммивояжёр идёт в некоторый город или не идёт в него).

2. Эвристические методы, обычно, существенно быстрее точных, однако они не гарантируют оптимальности найденного решения. Результат их комбинации может далее использоваться как первое приближение для последующего улучшения, например, при помощи поиска с возвратом:

- жадный алгоритм при выборе очередного города берёт ближайший не посещённый до этого город.

- метод шнурка - геометрическая вариация жадного алгоритма, в которой города охватываются замкнутым контуром. Он постепенно растягивается, стараясь пройти через все города, минимальным образов увеличив свою длину.

- скользящий перебор переставляет местами города из небольшой части пути. Затем такое "окно перебора" скользит вдоль всего пути. Метод имеет различные вариации и оказывается эффективным способом улучшения решения, найденного предыдущими двумя эвристическими методами.

3. Вероятностные методы, совершают случайные изменения пути, в ожидании получения более короткого. Из этой группы методов отметим:

- метод отжига, в котором происходят перестановки городов с постепенно "затухающей" интенсивностью. При этом постоянно сохраняется наилучшее найденное решение.

- генетический алгоритм - более "продвинутый" вариант, при котором создаётся большое количество различных путей. Они постоянно "мутируют" и "скрещиваются" друг с другом, обмениваясь отдельным участками.

Первая задача, связанная с проблемой коммивояжёра, была поставлена и решена Леонардом Эйлером в 1757 г. Он предложил найти замкнутый путь для коня на шахматной доске. В этом случае речь идёт не о поиске кратчайшего пути, а о факте установления возможности существования такого пути, проходящего через все вершины графа один и только один раз.

Интерес к задаче коммивояжера объясняется тем, что многие предметные области, в которых ведет свою деятельность человек, сводятся к задаче комбинаторной оптимизации. Примерами некоторых таких предметных областей являются:

- логистика в торговле;
- логистика при перемещении грузов;
- логистика в туризме;
- проектирование печатных плат в электронике.

2.6.1. Метод ветвей и границ

По существу, метод является вариацией полного перебора с отсевом решений, заведомо не содержащих оптимальных решений. Метод ветвей и границ впервые предложили в 1960 году Аилсой Ленд и Элисон Дойг для решения задач целочисленного программирования.

Алгоритм метода ветвей и границ состоит из следующих шагов:

1. Построение матрицы с исходными данными.
2. Нахождение минимума значений по строкам.
3. Редукция строк.
4. Нахождение минимума значений по столбцам.
5. Редукция столбцов.
6. Вычисление оценок нулевых клеток.
7. Редукция матрицы.
8. Если полный путь еще не найден, переходим к пункту 2, если найден к пункту 9.
9. Вычисление итоговой длины пути и построение маршрута.

ПРИМЕР: Посетить каждый город из четырех без повторений с минимальными затратами на дорогу. Города связаны дорогами, имеющие стоимость использования, как указано на весовом орграфе на рисунке 36.

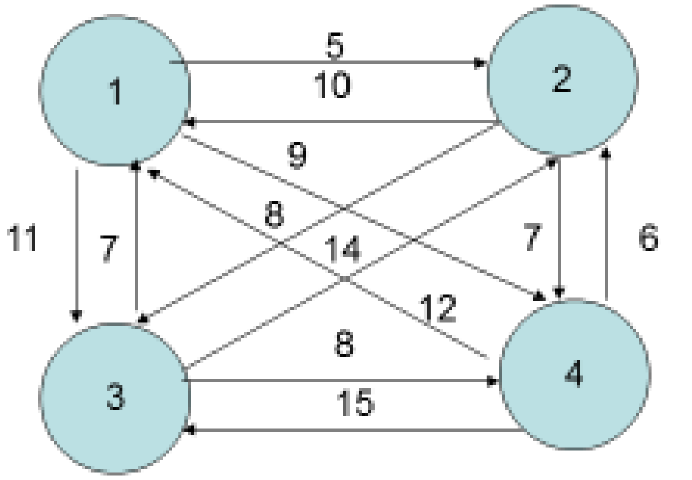


Рис. 36. Весовой орграф задачи коммивояжера для четырех городов

РЕШЕНИЕ.

1. Формируем матрицу стоимостей по исходному весовому орграфу рисунок 37. Буквой М обозначаем в матрице пути, не представляющие интереса для решения задачи, так как эти квадраты матрицы задают петли, которых в исходном графе нет.

Город	1	2	3	4
1	М	5	11	9
2	10	М	8	7
3	7	14	М	8
4	12	6	15	М

Бесконечность
Как исключение цикла

Рис. 37. Матрица стоимостей путей из города в город

2. Находим минимальные значения стоимости по строкам матрицы (di) рисунок 38.

Шаг 2

min

Город	1	2	3	4	di
1	M	5	11	9	5
2	10	M	8	7	7
3	7	14	M	8	7
4	12	6	15	M	6

Рис. 38. Нахождение min di по строкам

3. Производим редукцию строк – из каждого элемента в строке вычитаем соответствующее значение найденного минимума (di) рисунок 39.

Город	1	2	3	4	di
1	M	0	6	4	5
2	3	M	1	0	7
3	0	7	M	1	7
4	6	0	9	M	6

Рис. 39. Редукция строк

4. Далее находим минимальные значения стоимостей в каждом столбце матрицы (dj). Эти минимумы выписываем в отдельную строку рисунок 40.

Мин dj

Город	1	2	3	4	di
1	M	0	6	4	5
2	3	M	1	0	7
3	0	7	M	1	7
4	6	0	9	M	6
dj	0	0	1	0	

Рис. 40. Нахождение min dj по столбцам

5. Редукция столбцов. Вычитаем из каждого элемента в столбце матрицы соответствующее ему dj рисунок 41.

Город	1	2	3	4	di
1	M	0	5	4	5
2	3	M	0	0	7
3	0	7	M	1	7
4	6	0	8	M	6
dj	0	0	1	0	

Рис. 41. Редукция столбцов

6. Для каждой нулевой клетки преобразованной матрицы находим «оценку». Ею будет сумма значения минимального элемента по строке и минимального значения элемента по столбцу, в которых размещена данная нулевая клетка. Сама она при этом не учитывается. Найденные ранее di и dj не учитываются. Полученную «оценку» записываем рядом с нулем, в скобках рисунок 42.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0	0
3	0	7	M	1
4	6	0	8	M

Рис. 42. Нахождение «оценки» для нулевых значений матрицы

7. Выбираем нулевую клетку с наибольшей оценкой. Заменяем ее состояние на «М». Таким образом определяется один из участков искомого пути. Фиксируем его (от какого города к какому движемся, в нашем примере от 4-ого к 2-му) рисунок 43.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0 (5)	0 (1) ← M
3	0 (4)	7	M	1
4	6	0 (6)	8	M

M 4-2 → Первый участок пути найден

Рис. 43. Нахождение первого участка пути

8. Редукция матрицы. Ту строку и тот столбец, где образовалось две «М» полностью вычеркиваем. В клетку, соответствующую обратному пути, ставим еще одну букву «М» (т.к. мы уже не будем возвращаться обратно) рисунок 44.

Город	1	2	3	4
1	M	0 (4)	5	4
2	3	M	0 (5)	M
3	0 (4)	7	M	1
4	6	M	8	M

Рис. 44. Редукция матрицы

9. Поиск второго участка пути. Для этого повторяем выполнение алгоритма с первого шага. Находим минимальное значение стоимости по строкам (di) рисунок 45.

	1	3	4	di min
1	M	5	4	4
2	3	0	M	0
3	0	M	1	0

Рис. 45. Нахождение min di по строкам

10. Производим редукцию строк – из каждого элемента в строке вычитаем соответствующее значение найденного минимума (di) рисунок 46.

	1	3	4
1	M	1	0
2	3	0	M
3	0	M	1

Рис. 46. Редукция строк

11. Далее находим минимальные значения стоимостей в каждом столбце матрицы (dj). Эти минимумы выписываем в отдельную строку рисунок 47.

	1	3	4
1	M	1	0
2	3	0	M
3	0	M	1

0 0 0 dj min

Рис. 47. Редукция столбцов

12. Для каждой нулевой клетки преобразованной матрицы находим «оценку». Две нулевые клетки имеют оценку 4. Нам интересен путь из города 2 в город 3. Поэтому эти клетки матрицы оставляем, а редукции подвергаем последнюю строку и третий столбец. Остается один путь из города 3 в город 1 рисунок 48.

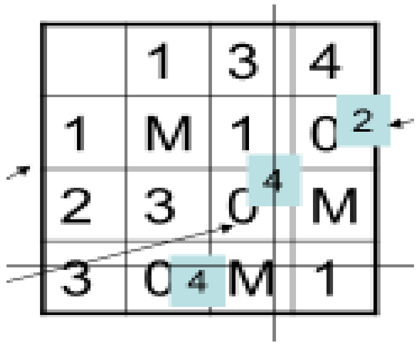


Рис. 48. Редукция матрицы

Таким образом найденный путь 4-2-3-1, с общей стоимостью преодоления пути 21.

2.6.2. Метод ближайшего соседа

Метод ближайшего соседа относится к эвристическим алгоритмам. Эвристический алгоритм – это алгоритм, сокращающий полный перебор вариантов за счет приемов, отбрасывающих не интересные варианты решения. Эвристика – это прием или правило придуманное человеком для сокращения перебора вариантов. Алгоритм метода ближайшего соседа относится к категории жадных алгоритмов. Он весьма прост и сводится к нескольким шагам:

1. Поставить все вершины как не посещённые.
2. Выбрать начальную вершину ***v*** и пометить её, как посещённую.
3. Выбрать ближайшую не посещённую смежную вершину ***u*** к вершине ***v***.
4. Поставить ***u*** как текущую вершину и пометить как посещённую.
5. Если все вершины посещены, то завершить алгоритм. Иначе, вернуться к шагу 3.

На выходе будем иметь последовательность вершин, предположительно оптимального решения. [12]

Задача: Посетить каждый город из четырех без повторений с минимальными затратами. Стоимость затрат на перемещения между городами задана на ориентированном графе на рисунке 49.

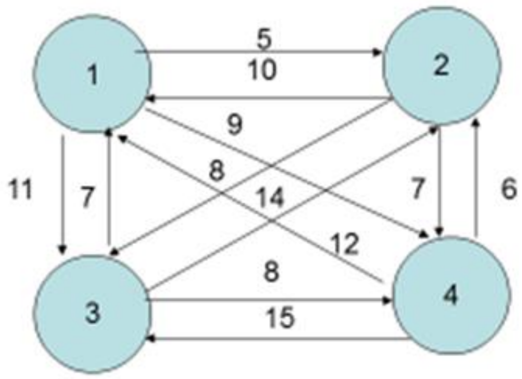


Рис. 49. Весовой ориентированный граф задачи коммивояжера

Начнем с исходного города под номером один. Согласно алгоритма получаем решение с маршрутом 1-2-4-3 со стоимостью затрат на перемещение 5+7+15=27.

Пусть исходным городом будет город под номером четыре. Согласно алгоритма получаем решение с маршрутом 4-2-3-1 со стоимостью затрат на перемещение 6+8+7=21.

Пусть исходным городом будет город под номером два. Согласно алгоритма получаем решение с маршрутом 2-4-1-3 со стоимостью затрат на перемещение 7+12+11=30.

Пусть исходным городом будет город под номером три. Согласно алгоритма получаем решение с маршрутом 3-1-2-4 со стоимостью затрат на перемещение 7+5+7=19.

Таким образом последний маршрут 3-1-2-4 является оптимальным по стоимости затрат на перемещение между городами.

2.6.3. Алгоритм Дейкстры

Алгоритм поиска оптимального пути на графах, изобретён нидерландским учёным Эдсгером Дейкстрой в 1959 году. Алгоритм позволяет найти кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных, если пути имеют оценки по длительности или сложности преодоления.

Рассмотрим алгоритм Дейкстры применительно к задаче нахождения кратчайшего пути. Пусть дана сеть автомобильных дорог (граф на рисунке 50), соединяющих города области. Каждая дорога имеет свою длину. Найти кратчайшие пути от центра областного города до каждого города области. [13]

Города обозначены вершинами графа, а ребрами графа обозначены пути между городами. В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначен их вес – длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка – длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

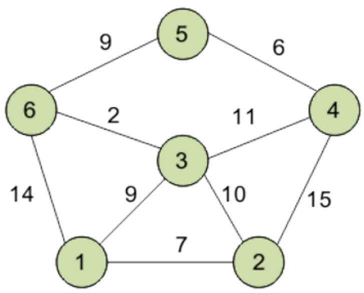


Рис. 50. Граф к задаче нахождения кратчайшего пути

Метка самой вершины 1 полагается равной 0, метки остальных вершин – недостижимо большое число (в идеале — бесконечность) рисунок 51. Это отражает то, что расстояния от вершины 1 до других вершин пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как непроверенные.

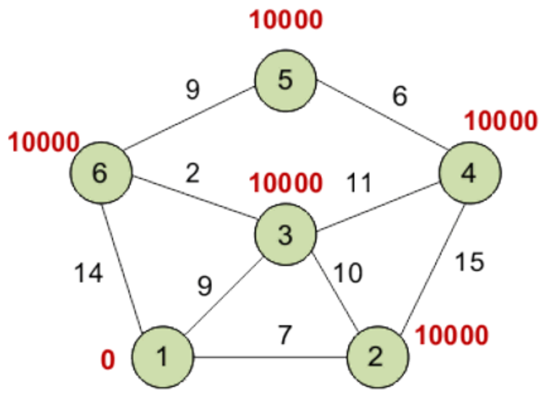


Рис. 51. Обозначение вершин графа метками 10000, как не проверенные

Первый шаг

Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6. Обходим соседей вершины по очереди. Первый сосед вершины 1 – вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме кратчайшего расстояния до вершины 1 (значению её метки) и длины ребра, идущего из 1-й во 2-ю, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2 (10000), поэтому новая метка 2-й вершины равна 7. Аналогично находим длины пути для всех других соседей (вершины 3 и 6).

Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вершина 1 отмечается синим цветом, как посещенная рисунок 52.

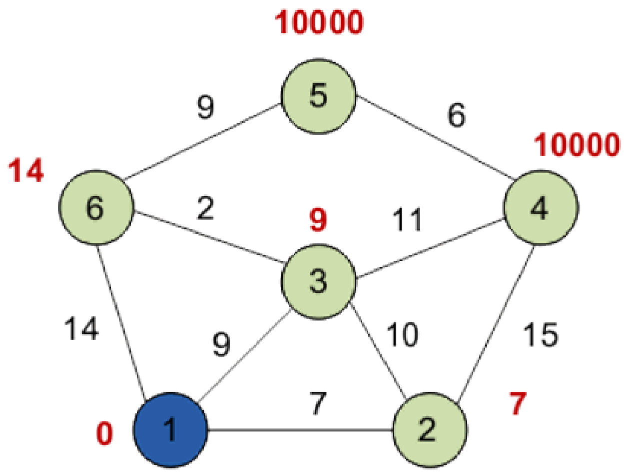


Рис. 52. Обозначение посещенной вершины 1

Второй шаг

Шаг 1 алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7. Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.

Вершина 1 уже посещена. Следующий сосед вершины 2 — вершина 3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9, а 9 <17, поэтому метка не меняется.

Ещё один сосед вершины 2 - вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна 22 (7 + 15 = 22). Поскольку 22<10000, устанавливаем метку вершины 4 равной 22. Все соседи вершины 2 просмотрены, помечаем её как посещенную рисунок 53.

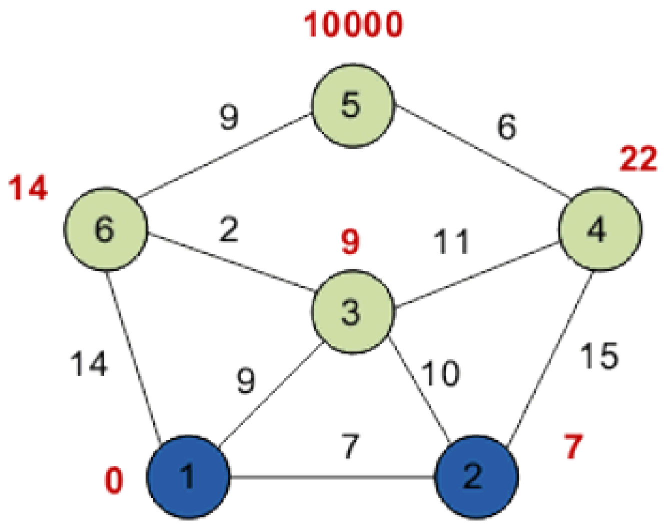


Рис. 53. Обозначение посещенных вершин

Третий шаг

Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим следующие результаты, показанные на рисунке 54.

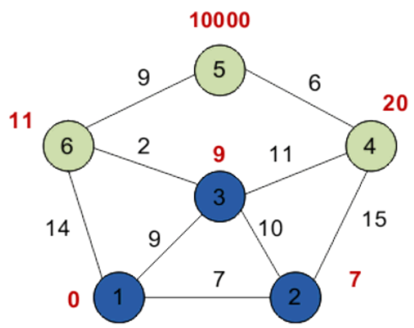
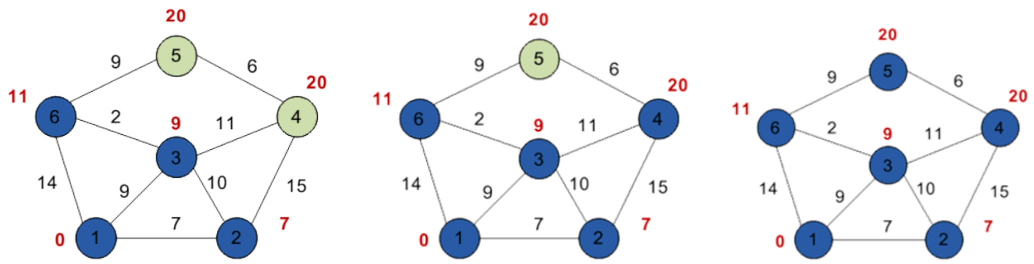


Рис. 54. Обозначение посещенных вершин

Четвертый, пятый, шестой шаги

На рисунке 55 показаны результаты четвертого шага (а), пятого шага (б) и шестого шага (в) алгоритма Дейкстры.



а б в

Рис. 55. Результаты выполнения четвертого (а), пятого (б), шестого (в) шагов алгоритма

Таким образом, кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 будет путь через вершины 1 - 3 - 6 - 5, поскольку таким путем мы набираем минимальный вес, равный 20.

Следующий шаг алгоритма - определение кратчайшего пути. Мы знаем длину пути для каждой вершины, и теперь будем рассматривать вершины в обратном порядке.

Рассматриваем конечную вершину (в данном случае - вершина **5**), и для всех вершин, с которой она связана, находим длину пути, вычитая вес соответствующего ребра из длины пути конечной вершины.

Так, вершина **5** имеет длину пути **20**. Она связана с вершинами **6** и **4**.

Для вершины **6** получим вес (20–9)=11 (совпал).

Для вершины **4** получим вес (20-6)=14 **(не совпал)**.

Если в результате мы получим значение, которое совпадает с длиной пути рассматриваемой вершины (в данном случае - вершина **6**), то именно из нее был осуществлен переход в конечную вершину.

Отмечаем эту вершину на искомом пути. Далее определяем ребро, через которое мы попали в вершину **6**.

Проверка продолжается пока не дойдем до начала. Если в результате такого обхода у нас на каком-то шаге совпадут значения для нескольких вершин, то можно взять любую из них — несколько путей будут иметь одинаковую длину.

Алгоритм Дейкстры является оптимальным для поиска пути практически в любых графах, но он имеет одно ограничение. Алгоритм Дейкстры неприменим для графов, содержащих рёбра с отрицательным весом. Для поиска кратчайшего пути в таких графах обычно используют алгоритм Форда-Беллмана [14].

2.7. Задача о рюкзаке

Задача о рюкзаке - NP-полная задача комбинаторной оптимизации. Своё название получила от конечной цели: уложить как можно большее число ценных вещей в рюкзак при условии, что вместимость рюкзака ограничена рисунок 56.

Совершенно очевидно, что замена рюкзака на вагон или палетту, а замена вещей для укладки на упаковки товара, имеющие объем и вес, превращают задачу в актуальную проблему оптимальной загрузки любой транспортной платформы: фуры; вагона и т.д. Алгоритм работы банкомата при выдаче денег разного номинала, так же можно интерпретировать как задачу о рюкзаке.

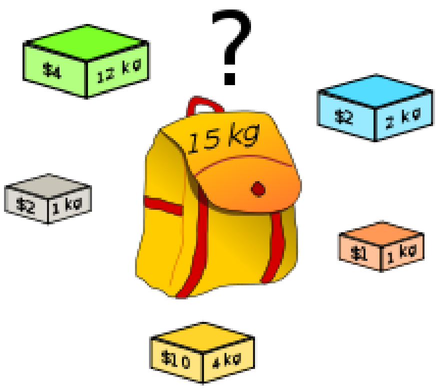


Рис. 56. Задача о рюкзаке

Постановка задачи допускает большое количество обобщений, в зависимости от условий, наложенных на рюкзак, предметы или порядок их выбора, например,

- укладывать не более одного экземпляра каждого предмета;
- укладывать не более заданного числа экземпляров каждого предмета;
- укладывать произвольное количество экземпляров каждого предмета;
- предметы разделены на группы, и из каждой группы требуется выбрать только один предмет;
- есть несколько рюкзаков, каждый со своим максимальным весом; - каждый предмет можно положить в любой рюкзак или оставить;
- вместо параметра вес, дано несколько разных ресурсов (например,

вес, объём, стоимость и время укладки). Каждый предмет тратит заданное количество каждого ресурса. Надо выбрать подмножество предметов так, чтобы общие затраты каждого ресурса не превышали максимума по этому ресурсу, и при этом общая ценность предметов была максимальна.

Математически задача о рюкзаке формулируется следующим образом: имеется **n** грузов. Для каждого i-го груза определены его масса w{i}>0 и ценность {i}>0, i=1,2, ..., n. Ограничение суммарного веса предметов в рюкзаке задаётся грузоподъёмностью рюкзака W.

Необходимо максимизировать количество предметов с максимальной ценностью, укладываемых в рюкзак. При этом надо учитывать ограничения веса, выдерживаемого рюкзаком.

Полный перебор

Чтобы решить задачу полным перебором, необходимо составить все комбинации наборов предметов и выбрать тот набор, масса которого не более W, а общая стоимость (по отношению к другим подходящим наборам) максимальна.

Дерево полного перебора, соответствующее поиску решения для трех предметов представлено на рисунке 57. В каждой вершине графа определяется, будет ли данный предмет уложен в рюкзак. Цифра в вершине соответствует номеру предмета. Цифры на рёбрах имеют следующие значения: 0 означает, что предмет не был взят; 1 - что был взят.

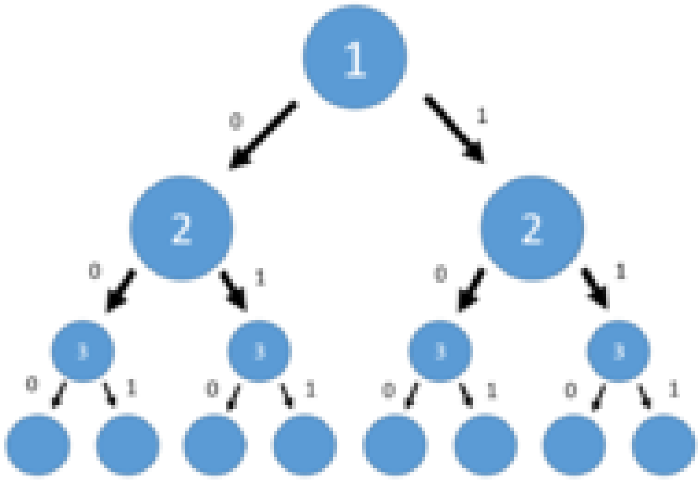


Рис. 57. Дерево полного перебора, соответствующее поиску решения задачи для трех предметов

В рамках терминов комбинаторики это означает, что нужно рассмотреть все перестановки из N. Общее количество перестановок находится по формуле: 2^n

- Если предметов три, то придётся рассмотреть 2^3 = 8 различных наборов предметов.

Очевидно, что вычислительная сложность алгоритма полного перебора для решения задачи о рюкзаке равна O(2^n). Минусом способа полного перебора всех предметов, является то, что, если количество вещей велико, тогда алгоритм не даст решения за приемлемое время.

Наиболее распространенной решаемой задачей является проблема рюкзака, которая ограничивает количество x_i копий каждого вида предметов нулем или единицей. Задан набор n предметов, пронумерованных от 1 до i, каждый из которых имеет вес w_i и значение v_i, а также максимальную грузоподъемность W, таким образом математически задача формулируется так. Необходимо максимизировать сумму $\sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i$ с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \leq W$, и $x_i \in \{0,1\}$.[15]

2.8. Задача сортировки

Еще одной классической задачей комбинаторики является задача сортировки объектов на основании заданных параметров. Мы говорим ПОРЯДОК (в доме, на рабочем месте, в библиотеке), а при этом выполняем СОРТИРОВКУ объектов по определенным правилам.

Сортировка обычно выполняется для организации поиска объекта с нужными свойствами. Фактически задача сортировки - это задача перебора вариантов. Алгоритмы решения задачи нацелены на сокращение полного перебора и уменьшении времени поиска нужного объекта.

В настоящее время известны следующие алгоритмы сортировки:
- пузырьковая сортировка;
- сортировка перемешиванием;
- сортировка расческой;
- сортировка вставками;
- сортировка выбором;
- быстрая сортировка;
- сортировка слиянием;
- пирамидальная сортировка.

Каждая из этих видов сортировки достаточно подробно описана в источниках с примерами реализации на языках программирования. [https://intuit.ru/studies/courses/648/504/lecture/11435?page=1]
Рассмотрим первые четыре вида сортировки из предложенного списка.

Пузырьковая сортировка

Пузырьковая сортировка предусматривает последовательно сравнивать значения соседних элементов и менять числа местами, если предыдущее оказывается больше последующего. Таким образом элементы с большими значениями оказываются в конце списка, а с меньшими остаются в начале. Рисунок 58 показывает объекты для пузырьковой сортировки. Сложность алгоритма оценивается как $O(n^2)$.

Алгоритм состоит из повторяющихся проходов по сортируемому массиву. За каждый проход элементы последовательно сравниваются попарно и, если порядок в паре неверный, выполняется перестановка элементов. Проходы по массиву повторяются n-1 раз или до тех пор, пока на очередном проходе не окажется, что обмены больше не нужны, что означает - массив отсортирован.

При каждом проходе алгоритма по внутреннему циклу очередной наибольший элемент массива ставится на своё место в конце массива рядом с предыдущим «наибольшим элементом», а наименьший элемент перемещается на одну позицию к началу массива («всплывает» до нужной позиции, как пузырёк в воде - отсюда и название алгоритма).

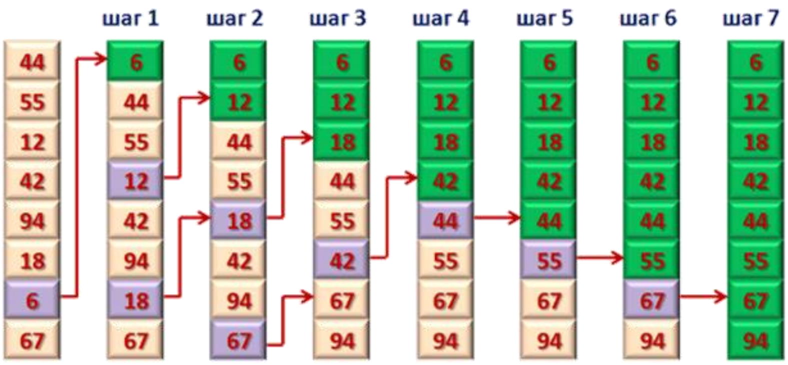


Рис. 58. Массив чисел для пузырьковой сортировки

Сортировка перемешиванием

Сортировка перемешиванием или шейкерная сортировка. Начинается процесс как в пузырьковой сортировке: совершается сравнение пар объектов при движении слева на право. После этого разворачиваемся и идём в обратную сторону, при этом перекладывая в начало не максимум, а минимум. Отсортировав в массиве первый и последний элементы, снова делаем изменение движения при просмотре пар объектов. Обойдя туда-обратно несколько раз, в итоге заканчиваем процесс, оказавшись в середине списка, как на рисунке??

Пусть массив требуется упорядочить по возрастанию. Обозначим каждый пройденный путь от начала до конца последовательности через $\mathbf{W_i}$, где **i** – номер пути; а обратный путь (от конца к началу) через —$\mathbf{W_j}$, где **j** – номер пути.

Тогда после выполнения $\mathbf{W_i}$, один из неустановленных элементов будет помещен в позицию справа, как наибольший из еще неотсортированных элементов, а после выполнения - $\mathbf{W_j}$, наименьший из неотсортированных, переместиться в некоторую позицию слева, как на рисунке 59.

Рис. 59. Сортировка перемешиванием [16]

Сортировка расческой

Сортировка расчёской - улучшение сортировки пузырьком. Её идея состоит в том, чтобы «устранить» элементы с небольшими значения в конце массива, которые замедляют работу алгоритма.

Если, в пузырьковой и шейкерной сортировках, при переборе массива сравниваются соседние элементы, то при «расчёсывании» сначала берётся достаточно большое расстояние между сравниваемыми значениями, а потом оно сужается вплоть до минимального.

Основная идея - устранить маленькие значения в конце списка, которые крайне замедляют сортировку пузырьком (большие значения в начале списка, не представляют проблемы для сортировки пузырьком).

Сортировка вставками

Алгоритм сортировки, в котором элементы входной последовательности просматриваются по одному, и каждый новый поступивший элемент размещается в подходящее место среди ранее упорядоченных элементов. Описание работы алгоритма по шагам представлено на таблице 4.

На каждом шаге алгоритма выбираем один из элементов входных данных и вставляем его на нужную позицию в уже отсортированной части массива, до тех пор, пока весь набор входных данных не будет отсортирован.

Метод выбора очередного элемента из исходного массива произволен, однако обычно (и с целью получения устойчивого алгоритма сортировки), элементы вставляются по порядку их появления во входном массиве. [17]

Таблица 4. Алгоритм сортировки вставками по шагам

До	**После**	**Описание шага**
*Первый проход (проталкиваем второй элемент — **2**)*		
5 2 4 3	**2 5** 4 3	Алгоритм сравнивает второй элемент с первым и меняет их местами.
*Второй проход (проталкиваем третий элемент — **4**)*		
2 **5 4** 3	2 **4 5** 3	Сравнивает третий со вторым и меняет местами
2 4 5 3	**2 4** 5 3	Второй и первый отсортированы
*Третий проход (проталкиваем четвертый — **3**)*		
2 4 **53**	2 4 **35**	Меняем четвертый и третий местами
2 **4 3** 5	2 **3 4** 5	Меняем третий и второй местами
2 3 4 5	**2 3** 4 5	Второй и первый отсортированы
*Четвертый проход (проталкиваем пятый элемент — **1**)*		
2 3 4 **5 1**	2 3 4 **1 5**	Меняет пятый и четвертый местами
2 3 **4 1** 5	2 3 **1 4** 5	Меняет четвертый и третий местами
2 **3 1** 4 5	2 **1 3** 4 5	Меняет третий и второй местами
2 1 3 4 5	**1 2** 3 4 5	Меняет второй и первый местами. Массив отсортирован.

2.9. Задача об оптимальной остановке

В задаче об оптимальной остановке критически важным вопросом является не какой вариант необходимо выбрать, а как много вариантов необходимо рассмотреть и учесть для принятия оптимального решения.

Типичной задачей об оптимальной остановке является задача о секретаре. [18]

Как долго необходимо проводить собеседования с кандидатами на позицию секретаря, чтобы принять на работу кандидата лучшего из всех. При осуществлении данного процесса можно совершить две ошибки: остановиться слишком рано, либо слишком затянуть процесс.

Если прекратить поиски рано, то можно лучшего кандидата не встретить. Если остановить поиск слишком поздно, то можно тратить время на поиски кандидата с показателями, которого не существует.

Существует много вариантов постановки задачи, основную проблему можно сформулировать следующим образом:

- Есть одна вакансия, которую нужно заполнить.
- Есть n претендентов на должность, и значение n известно.
- Кандидаты, если рассматривать их в целом, могут быть однозначно ранжированы от лучших к худшим.
- Кандидаты проходят собеседование последовательно в случайном порядке.
- Сразу после собеседования кандидат, прошедший собеседование, либо принимается, либо отклоняется, и решение не подлежит отмене.
- Решение о принятии или отклонении кандидата может основываться только на относительных рангах опрошенных кандидатов.
- Цель общего решения состоит в том, чтобы с наибольшей вероятностью выбрать лучшего кандидата из всей группы. Это то же самое, что максимизировать ожидаемый выигрыш, при этом выигрыш определяется как единица для лучшего кандидата и ноль в противном случае.

Кандидат определяется как претендент, который на собеседовании показал себя лучше, чем все кандидаты, с которыми были проведены предыдущие собеседования. Пропустить - используется для обозначения "отклонить сразу после собеседования". Поскольку цель задачи состоит в том, чтобы выбрать единственного лучшего кандидата. "Кандидат" в данном контексте соответствует понятию записи в перестановке.

Кратчайшее строгое доказательство, известное до сих пор, обеспечивается алгоритмом коэффициентов. Это означает, что оптимальная вероятность выигрыша всегда равна минимум $1/\mathrm{e} = 37$ (где e - основание натурального логарифма, константа равная 2.71828…).

Правило оптимальной остановки предписывает всегда отклонять первых n/e кандидатов, с которыми проводится собеседование, а затем останавливаться на первом кандидате, который лучше, чем все кандидаты, с которыми были проведены собеседования до сих пор (или продолжать до последнего заявителя, если этого никогда не происходит). Иногда эту стратегию называют правилом $1/\mathrm{e}$ остановки, потому что вероятность остановки на лучшем кандидате с этой стратегией составляет примерно уже $1/\mathrm{e}$ при умеренных значениях n.

Одна из причин, по которой проблеме секретаря уделяется так много внимания, заключается в том, что оптимальная политика для решения этой проблемы (правило остановки) проста и выбирает единственного лучшего кандидата примерно в 37% случаев, независимо от того, 100 или 100 миллионов претендентов таблица 5.

Таблица 5 Задача о секретаре

Количество кандидатов	Номер кандидата. После которого начинается выбор	Вероятность выбрать лучшего кандидата P()
3	1 (33.3%)	50%
4	1 (25%)	45.83%
5	2 (40%)	43.33%
6	2 (33.33%)	42.48%
7	2 (28.57%)	41.43%
8	3 (37.5%)	40.98%
9	3 (33.3%)	40.59%
10	3 (30%)	39.87%
20	7 (35%)	38.42%
30	11 (36.67%)	37.86%
40	15 (37.5%)	37.57%
50	18 (36%)	37.43%
100	37 (37%)	37.10%
1000	369 (36.9%)	36.81%

Когда мы встречаем первого кандидата, у нас нет никакой информации о нем, поэтому он окажется лучшим кандидатом. Когда мы беседуем с третьим кандидатом, у нас нет свободы выбора, поскольку необходимо кого-то нанять, а остальные кандидатуры были отклонены. Но когда происходит встреча с о вторым претендентом, существует альтернатива: можно оценить – лучше или хуже второй кандидат, чем первый.

Оптимальной политикой для решения проблемы является правило остановки. В соответствии с ней интервьюер отклоняет первых кандидатов $r-1$ (пусть кандидат M будет лучшим кандидатом среди этих кандидатов $r-1$), а затем выбирает первого последующего кандидата, который лучше, чем кандидат M. Можно показать, что оптимальная стратегия лежит в этом классе стратегий. Для произвольного отсечения r вероятность того, что будет выбран лучший кандидат, равна:

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{i-1}$$

Пусть n стремится к бесконечности, записывая как предел (r−1) / n, используя t для (i−1) / n и dt для 1 / n, сумма может быть аппроксимирована интегралом:

$$P(x) = x\int_{x}^{1} \frac{1}{t}dt = -x\ln(x)$$

Глава 3. ДИСКРЕТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

3.1. Термины

Испытание. Исход. Событие. В теории вероятностей под испытанием понимают комплекс определенных условий, воспроизводимый сколь, угодно большое число раз, наличие которого приводит к какому-либо исходу. Исход случаен, если испытание, приводящее к какому-либо определенному исходу, имеет и другие исходы. [19]

Случайным событием (или просто событием) называется любая совокупность случайных исходов. Событие может состоять и из одного исхода, и поэтому сами исходами также можно именовать событиями. Исходы называются независимыми, если они представляют собой результаты отдельных испытаний.

Пример. Возьмем кубик, на гранях которого отмечены от одного до шести очков и бросим его на стол. На верхней грани брошенного кубика выпадает определенное количество очков. Совокупность указанных условий – наличие кубика, стола и сама процедура бросания кубика – это испытание.

Количество очков на верхней грани кубика – это исход испытания. Общее число возможных исходов равно шести. Случайным событием в данном примере будет событие, состоящее в том, что на верхней грани кубика окажется четное число очков. Это событие есть совокупность трех исходов: выпадения 2,4.6 очков. Случайные события обозначаются большими латинскими буквами A, B, C,… или $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$,..

Достоверным событием называют событие, которое обязательно произойдет при данном испытании. Невозможным событием называют событие, которое заведомо не произойдет на данном испытании. Так, в рассматриваемом примере с игровым кубиком, событие, состоящее в том, что в результате испытания выпадет несколько очков от одного до шести – это достоверное событие, а событие, состоящее в том, что выпадет семь очков – это невозможное событие.

Два случайных события называются **противоположными,** если одно из них происходит только в том случае, когда не происходит другое. Событие, противоположное событию A, обычно обозначается $\bar{A}$. Пусть брошен игральный кубик и выпало шесть очков. Обозначим это событие как A, тогда событием $\bar{A}$ будет выпадение очков от одного до пяти.

События $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, .. A_n$ называются **несовместными**, если наступление одного из них исключает наступление других.

ПРИМЕР. Пусть в коробе находится три белых шара, пронумерованных цифрами 1,2.3, и два черных шара нумерованных как 4 и 5. Вытаскиваем наугад из короба один из шаров. Пусть событие A состоит в том, что выбранный шар белый, а событие B состоит в том, что выбранный шар имеет четный номер. События A и B – совместные, так как из короба может быть выбран белый шар с номером 2. Далее, пусть событие С состоит в том, что выбран шар с номером 5. События А и С несовместны, так как белые шары нумерованы цифрами 1,2.3. События $А_1$, $А_2$, $А_3$,..A_n образуют полную группу событий, если в результате данного испытания обязательно произойдет одно из них.

Среди всех возможных событий, которые в данном испытании могут произойти, можно выделить множество элементарных событий или элементарных исходов, выделяемых из множества всех событий по следующим признакам:

1. Все они взаимно исключают друг друга, и в результате испытания обязательно происходит одно из этих событий.
2. Каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному событию можно судить о том, наступило или не наступило событие А.

3.2. Понятие вероятности

Вероятность – количественная оценка возможности наступления какого- либо события. Понятие вероятности формализуется как числовая характеристика события, принимающая на множестве испытаний значения ноль или единица. Значение «единица» соответствует достоверному событию, а значение «ноль» - не достоверному или не возможному событию. Если вероятность наступления события на ρ, то вероятность его ненаступления (а также невероятность наступления) равна $1-\rho$. В частности, вероятность $\frac{1}{2}$ означает равную вероятность наступления и не наступления события.

В классической модели теории вероятностей полагается, что:

1. Множество элементарных событий (исходов) одного испытания $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$, образует полную группу несовместных событий.
2. С каждым исходом ω_i можно связать неотрицательное число ρ_i, называемое вероятностью этого исхода причем сумма таких вероятностей равна единице $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k=1$.

3. Вероятность P(A) наступления события A, состоящего в том. что наступило одно из событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$, равна сумме вероятностей наступления этих событий P(A)= $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k$. События $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$ называют благоприятствующими событию A.
4. В случае, когда события $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k$ равновероятны, то есть $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\ldots=\rho_k={}^1/_k$, вероятность P(A) вычисляется по формуле:

   $$P(A) = {}^r/_k,$$

   где r – число исходов, благоприятствующих событию A, а k – число всех равнозначных исходов. Фактически эта формула и есть классическое определение вероятности события.

ПРИМЕР. Предположим, что брошены две игральные кости, грани которых пронумерованы цифрами от 1 до 6. Какова вероятность выпадения одинакового события? Каждый исход этого опыта можно представить, как упорядоченную пару чисел (m, n), где m – число очков, выпавших на первой кости, n – число очков на второй.

Все исходы равновероятны, и число всевозможных исходов равно 36. Событие A – выпадение дубля, происходит тогда и только тогда, когда наступает один из исходов, когда m = n. Таких исходов 6. Следовательно согласно определения вероятности, вероятность наступления события A равно P(A) = 6/36=1/6.

3.3. Операции над событиями

Два события A и B называют равными и пишут A = B, если наступление события A влечет за собой наступление события B и наоборот, наступление события B влечет за собой наступление события A.

Объединением или суммой событий A и B называется событие, состоящее в наступлении события A или B. Объединение событий обозначается A∪B или A+B.

Пересечением или произведением событий А и В называется событие, состоящее в одновременном наступлении как события А так и события В. Пересечение событий А и В обозначается А∩В или А× B.

Разностью событий А и В называется событие, состоящее в том, что наступает событие А, но не наступает событие В. Разность событий А и В обозначается А\ В.

3.4. Операции над вероятностями

Сложение вероятностей

Рассмотрим несовместные события A_1 и A_2 и их объединение А = $A_1 \cup A_2$. Пусть производится серия испытаний, результатом каждого из которых могут быть события А, A_1, A_2. Пусть n – число всех испытаний; n(А), n(A_1), n(A_2) – число тех испытаний, которые привели к наступлению событий А, A_1, A_2 соответственно. Если в каком-либо испытании произошло событие А, то это значит, что произошло или событие A_1 или A_2 (одновременно события A_1 и A_2 произойти не могут так как они несовместны). Поэтому числа n(А), n(A_1), n(A_2) связаны между собой равенством:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2)$$

И, следовательно, частоты этих событий связаны равенством:

$$\frac{n(A)}{n} = \frac{n(A_1)}{n} + \frac{n(A_2)}{n}$$

При большом числе испытаний N частоты становятся близки к вероятностям соответствующих событий и, следовательно, вероятность события А равно:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$$

Это равенство называется формулой сложения вероятностей. Формула сложения вероятностей справедлива и в случае, когда событие А есть объединение любого числа несовместных событий.

3.5. Теорема Байеса

Одна из основных теорем теории вероятностей, которая позволяет определить вероятность события при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие. Другими словами, по формуле Байеса можно уточнить вероятность какого-либо события, взяв в расчёт как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

Теорема Байеса названа в честь её автора Томаса Байеса (1702 г.-1761 г.) - английского математика и священника, который первым предложил использование теоремы для корректировки убеждений, основываясь на обновлённых данных. Его работа «An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances» впервые опубликована в 1763 году. Формула Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B\backslash A)P(A)}{P(B)},$$ где

$P(A)$ - априорная вероятность гипотезы А;

$P(A\backslash B)$ - вероятность гипотезы А при наступлении события В (апостериорная вероятность);

$P(B\backslash A)$ - вероятность наступления события B при истинности гипотезы A;

P(B) - полная вероятность наступления события B.

Формула Байеса позволяет «переставить причину и следствие»: по известному факту события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной. При этом необходимо понимать, для применения теоремы причинно-следственная связь между и не является обязательной.

События, отражающие действие «причин», в данном случае называют гипотезами, так как они - предполагаемые события, повлёкшие данное. Безусловную вероятность справедливости гипотезы называют априорной, а условную - с учётом факта произошедшего события - апостериорной.

3.6. Упражнения

1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Решение: Вероятность набрать верную цифру из десяти равна по условию 1/10. Рассмотрим следующие случаи: 1. первый звонок оказался верным, вероятность равна 1/10 (сразу набрана нужная цифра). 2. первый звонок оказался неверным, а второй - верным, вероятность равна 9/10*1/9=1/10 (первый раз набрана неверная цифра, а второй раз верная из оставшихся девяти цифр). 3. первый и второй звонки оказались неверными, а третий - верным, вероятность равна 9/10*8/9*1/8=1/10 (аналогично пункту 2). Всего получаем Р=1/10+1/10+1/10=3/10=0,3 - вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. **Ответ:** 0,3

2. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность выбора не белового шара.

Решение: Вероятность появления красного шара (событие А):

Р (А) =10/30=1/3

Вероятность появления синего шара (событие В):

Р(В)=5/30=1/6

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность:

Р (А+В) =Р (А) +Р (В) = 1/3+1/6=1\2

3.В лотерее на серию 1000билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность выигрыша на один лотерейный билет. [Ответ: 0.2].

4.Какова вероятность одновременного появления герба при одновременном бросании двух монет. [Ответ 0.25].

5. Имеется два набора деталей. Вероятность того. Что деталь первого набора стандартна, равна 0.8, а второго – 0.9. Найдите вероятность того, что взятая случайно деталь из случайного взятого набора – стандартна. [Ответ: 0.85]

6. В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах;

б) двое выйдут на одном этаже;

в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что случайность здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя (т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж).

Решение: вычислим общее количество исходов: C_{19}^{1} =19 способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^{1} = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^{1} = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^{1}C_{19}^{1}C_{19}^{1} = 6859$ возможных исходов.

То есть, каждый этаж выхода 1-го человека может комбинироваться с каждым этажом выхода 2-го человека и **с** каждым этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на размещениях с повторениями $A_{19\ \text{с повтор.}}^{3} = 19^{3}$.

а) Рассмотрим событие: А– пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов: A_{19}^{3}.=19 ×18 ×17=5814 способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах.

По классическому определению: Р(А)=$\frac{5814}{6859}$=$\frac{306}{361}$

в) Рассмотрим событие: В – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют C_{19}^{1} =19 исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: Р(В)=$\frac{19}{6859} = \frac{1}{361}$.

б) Рассмотрим событие: С – два человека выйдут на одном этаже (и, соответственно, третий – на другом).

События А, В, С образуют полную группу (считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =)), а значит, Р(А)+Р(В)+Р(С)=1.

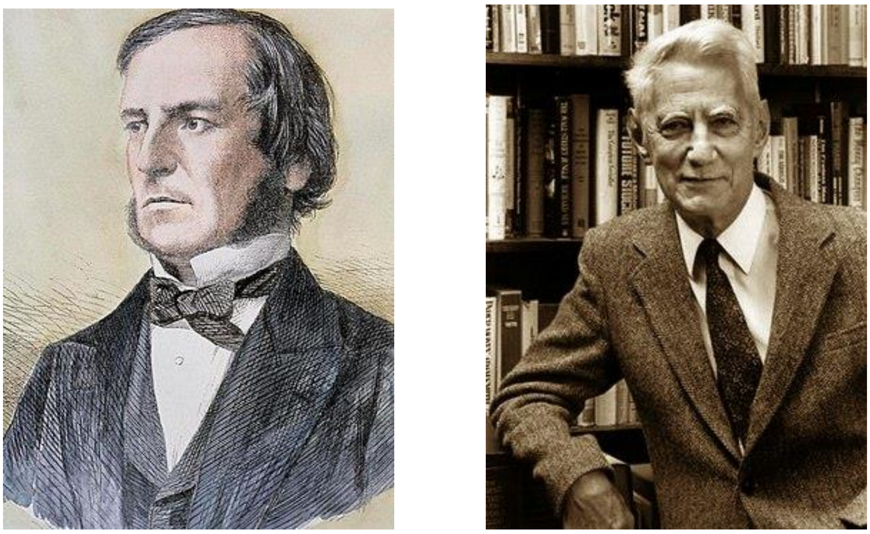
В результате, искомая вероятность: Р(С)=1-Р(А)-Р(В)=1-$\frac{306}{361}$ - $\frac{1}{361}$=$\frac{54}{361}$

Ответ: а) $\frac{306}{361}$ б) $\frac{54}{361}$ в) $\frac{1}{361}$

[21]

Глава 4. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Алгебра логики - это раздел дискретной математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними. Алгебра логики сформулирована в середине XIX века в трудах английского математика Джорджа Буля (рисунок 60а) (2 ноября 1815 г. – 8 декабря 1864 г.) «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей», «Математический анализ логики».



а *б*

Рис. 60. Джорж Буль (2 ноября 1815 г. – 8 декабря 1864) (а), Клод Элвуд Шеннон (б)

В 1938 году американский математик и инженер Клод Элвуд Шеннон (рисунок 60б) показал, что алгебра логики применима для описания самых разнообразных процессов, в том числе и для функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем. Это является до настоящего времени теоретической основой создания вычислительной техники.

Базовыми элементами, которыми оперирует алгебра логики, являются логические высказывания. Высказывания могут принимать значения: ложно (0) или истинно (1). Высказывания могут быть представлены аналитическим способом и графическим способом через логические схемы.

Примером простого логического высказывания являются следующие логические выражения:

- Сейчас идет дождь.
- Цифра 2 больше цифры 5.
- Земля имеет форму шара.
- Энергия не исчезает.

Если эти логические высказывания обозначить буквой F, то согласно алгебры логики F может принимать значения из множества A= {0;1}.

ЗАДАЧА: Вычислите логические значения следующих высказываний:

1. ("В минуте 70 секунд") ИЛИ ("часы показывают время");
2. (28> 7) И (300/5 = 60);
3. ("Телевизор — это электрический прибор") И ("Стекло из дерева");
4. Не ((300> 100) ИЛИ ("Жажду можно утолить водой"));

ОТВЕТЫ НА НА ЧЕТЫРЕ ВАРИАНТА ЗАДАЧИ:

1) Значение высказывания в первых скобках равно "ложь", значение выражения во-вторых скобках - "истина". Высказывания соединены логической операцией "ИЛИ", поэтому логическое значение всего данного высказывания - "истина".

2) Значение высказывания в первых скобках - "истина", значение высказывания во-вторых скобках - также "истина". Высказывания соединены логической операцией "И", поэтому логическое значение всего данного высказывания - "истина".

3) Значение высказывания в первых скобках - "истина", значение высказывания во-вторых скобках - "ложь". Высказывания соединены логической операцией "И". Поэтому логическое значение всего данного высказывания - "ложь".

4) Значение высказывания в скобках - "истина", значение высказывания во-вторых скобках - также "истина". Оба высказывания соединены операцией "ИЛИ", поэтому значение высказывания в обобщающих скобках - "истина". Перед обобщающими скобками стоит логическая операция отрицания. Поэтому логическое значение всего данного высказывания - "ложь".

4.1. Булевы функции

Множество всех булевых функций от любого числа аргументов часто обозначается F, а от n аргументов - F(n). Переменные, принимающие значения из булева множества, называются булевыми переменными. Булевы функции названы по фамилии математика Джорджа Буля.

Рассмотрим булевы функции одной переменной.

1. Название – «константа нуля». Формула F(x)=0. Таблица истинности функции F(x)=0:

x	F(x)
0	0
1	0

Определение функции: при любом значении x функция равна нулю.

2. Название – «константа единицы». Формула F(x)=1. Таблица истинности функции F(x)=1:

x	F(x)
0	1
1	1

Определение функции: при любом значении x функция равна единице.

3. Название - «переменная F». Формула F(x) = x. Таблица истинности функции F(x) = x:

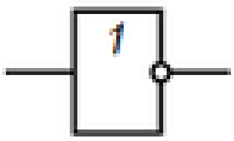
x	F(x)
0	0
1	1

Определение функции: значение функции равно значению переменной.

4. Название функции – «инверсия F». Текстовая идентификация – «НЕ» Формула F(x) = $\bar{x}$. Таблица истинности функции F(x)= $\bar{x}$:

x	F(x)
0	1
1	0

Определение функции: значение функции противоположно значению переменной. Графическое изображение инверсии:

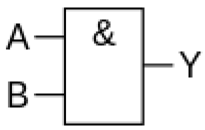


Рассмотрим булевы функции двух переменных.

1. Название функции – «конъюнкция» - логическое умножение. Формула F(a,b) =a ∧ b. Знак операции – «∧». Текстовая идентификация – «И». Таблица истинности функции a ∧ b:

a	b	a ∧ b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

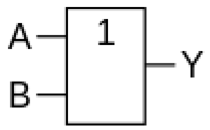
Определение функции: функция равна единице, если переменные одновременно равны единице. Функциональная метка конъюнкции в графическом изображении – «&». Графическое изображение конъюнкции двух переменных:



2. Название функции – «дизъюнкция». Формула F(a,b) =a ∨ b. Знак операции – «∨». Текстовая идентификация – «ИЛИ». Таблица истинности функции a ∨ b:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

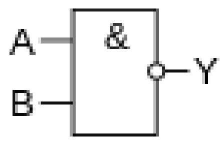
Определение дизъюнкции: функция равна нулю тогда и только тогда, когда обе переменные равны нулю. Функциональная метка дизъюнкции в графическом изображении – «1». Графическое изображение дизъюнкции двух переменных:



3. Название функции – «функция Шеффера» или «инверсия конъюнкции двух переменных». Текстовая идентификация - 2И-НЕ. Формула функции Шеффера $F(a,b) = \overline{a \wedge b}$. Таблица истинности функции Шеффера:

a	b	$\overline{a \wedge b}.$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Определение функции: функция Шеффера равна нулю тогда и только тогда, когда переменные равны единице. Графическое изображение функции Шеффера:

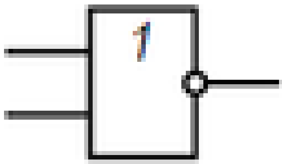


4. Название функции – «стрелка Пирса или функция Вебба. Текстовая идентификация - «2ИЛИ-НЕ». Формула функции стрелки

Пирса F(a,b) = $\overline{a \vee b}$. Таблица истинности функции стрелки Пирса:

a	b	$\overline{a \vee b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Определение функции: функция 2ИЛИ-НЕ равна единице тогда и только тогда, когда переменные одновременно равны нулю. Графическое обозначение функции 2ИЛИ-НЕ:

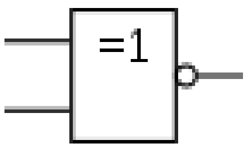


5. Название функции: эквивалентность или равнозначность.

Формула F(a,b) = (a = b). Знак операции – «=». Таблица истинности функции равнозначность:

a	b	(a=b)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

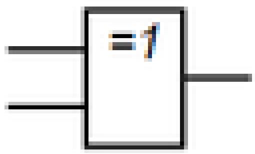
Определение функции равнозначность: функция равна единице тогда и только тогда, когда переменные одновременно принимают одинаковые значения. Графическое обозначение равнозначности:



6. Название функции: сложение по модулю два или исключающее ИЛИ. Знак операции сложения по модулю два – «$\oplus$». Формула F(a,b) = a $\oplus$ b. Таблица истинности функции сложение по модулю два:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

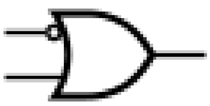
Определение функции сложение по модулю два: функция равна нулю тогда и только тогда, когда переменные принимают одинаковые значения. Графическое обозначение сложения по модулю два:



7. Название функции: импликация от, а к b. Знак операции импликации – «а →». Формула импликации от а к b $F(a,b) = a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$. Таблица истинности импликации:

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Определение импликации: функция импликации равна нулю в том случае, если, переменная «**а»** равна единице, а переменная «b» равна нулю. Графическое изображение импликации:



Пример задачи и ее решения с применением логических операций

При составлении расписания занятий на понедельник преподаватели просили, чтобы уроки проходили в следующем порядке:

а) математика - первым или третьим уроком;

б) история - первым или вторым;

в) литература - вторым или третьим.

Можно ли удовлетворить просьбы всех трех преподавателей и каким образом, если это возможно?

РЕШЕНИЕ:

Введем следующие обозначения элементарных логических высказываний:

- A - математика 1 урок;
- B - математика 3 урок;
- C - история 2 урок;
- D - история 1 урок;
- E - литература 2 урок;
- F - литература 3 урок.

Тогда просьбы всех преподавателей можно выразить следующими логическими высказываниями, объединенными дизъюнкцией:

$S_1 = A \vee B$

$S_2 = C \vee D$

$S_3 = E \vee F$

Логическое высказывание, удовлетворяющее просьбы всех трех преподавателей, есть конъюнкция S1, S2, S3, то есть $S = S1 \wedge S2 \wedge S3$, и оно должно быть истинным. Применим дистрибутивный закон в преобразованиях:

$$S = (A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (E \vee F) = (A \wedge C \vee B \wedge C \vee A \wedge D \vee B \wedge D) \wedge (E \vee F)$$

В данном случае конъюнкция $A \wedge D = 0$, так как первым уроком математика и история одновременно быть не могут.

$$S = (A \wedge C \wedge E) \vee (B \wedge C \wedge E) \vee (B \wedge D \wedge E) \vee (A \wedge C \wedge F) \vee (B \wedge C \wedge F) \vee (B \wedge D \wedge F)$$

Очевидно, что $(A \wedge C \wedge E) = 0$, так как $(C \wedge E) = 0$ - второй урок не может быть одновременно уроком истории и литературы. Аналогично $(B \wedge C \wedge E) = 0$; $(B \wedge C \wedge F) = 0$; $(B \wedge D \wedge F) = 0$, таким образом результат равен:

$S = (B \wedge D \wedge E) \vee (A \wedge C \wedge F) = 1$

Конъюнкция высказываний истинна, если истинны все входящие в нее сомножители. В результате получаем два возможных варианта ответа:

B & D & E = 1, т.е. история — I урок; литература — II урок; математика — III урок;	A & C & F = 1, т.е. математика — I урок; история — II урок; литература — III урок.

4.2. Тождества алгебры логики

Алгебра логики – это вычисление булевых функций на основе тождеств. ВАЖНО. Одну и туже булеву функцию можно задать разными формулами. Эти формулы и есть тождества. Используя тождества, можно менять аналитическое выражение функции, не изменяя ее значение. Для преобразований логических выражений, содержащих одну переменную. используют следующие тождества:

$$A \vee 1 = 1 \qquad A \times 1 = A \qquad A \vee \bar{A} = 1$$
$$A \vee 0 = A \qquad A \times 0 = 0 \qquad A \wedge \bar{A} = 0$$
$$A \vee A \vee A \vee \ldots \vee A = A \qquad A \wedge A \wedge A \wedge \ldots \wedge A = A$$

Для преобразования логических выражений, содержащих множество переменных применяются тождества, называемые законами алгебры логики.

1. *Переместительный закон*. Иногда он называется коммутативным и наоборот. От перемены места аргумента в формуле значение логической функции не меняется:
$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \times B = B \times A$$
2. *Сочетательный закон или закон ассоциативности.* Изменение порядка вычисления логической функции при использовании скобочного приоритета – значение логической функции не изменяется:
$$(C \vee A) \vee B = B \vee (C \vee A)$$
$$(C \times A) \times B = B \times (C \times A)$$
3. *Распределительный закон*. Иногда его называют законом дистрибутивности:

$$(A \lor B) \times C = (A \times C) \lor (B \times C)$$

$$A \times (B \lor C) = (A \lor C) \times (B \lor C)$$

4. *Закон двойного отрицания*:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

5. *Правило де Моргана или закон двойственности*:

$$\overline{a \lor b} = \bar{a} \land \bar{b}$$

6. *Закон поглощения*:

$$a \lor ab = a; \qquad a \cdot (a \lor b) = a$$

7. Закон склеивания:

$$ab \lor a\bar{b} = a$$

Тождества полезны при решении задачи минимизации логической функции, то есть уменьшение количества переменных, которые не влияют на результат вычисления логической функции.

С точки зрения схемотехники, интерес представляет тот факт, что любая логическая функция может быть представлена графически с помощью функциональной схемы.

Например, как показано на рисунке 61. При этом опускается тот факт, как эти логические схемы реализуются физически: с помощью электромагнитных реле; с помощью биполярных транзисторов или с помощью полевых транзисторов.

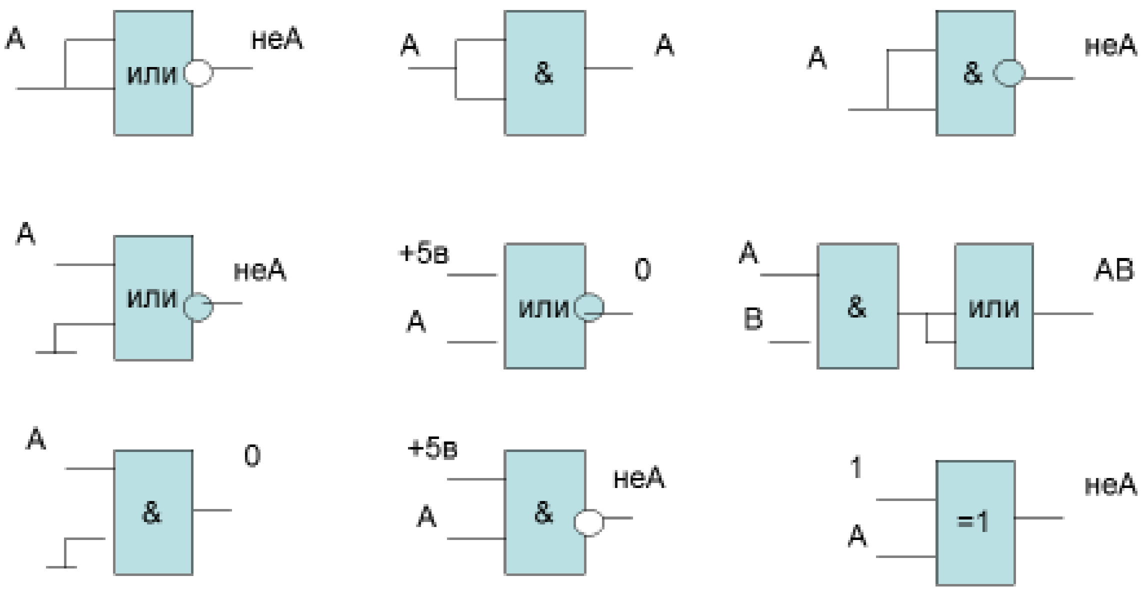


Рис. 61. Графическое представление логических функций

Тождества полезны при решении задачи перехода от одного логического базиса к другому логическому базису. В электронике это задача перехода от одной элементной базы к другой элементной базе.

Например, пользователю предоставлен базис элементов 2И-НЕ в неограниченном количестве. Необходимо из этого базиса реализовать логический элемент 2ИЛИ. Это задача легко решается с использованием тождеств алгебры логики, как на рисунке 62. Применяя закон двойного отрицания и закон де Моргана, логический элемент 2ИЛИ может быть реализован на основе трех элементов 2И-НЕ.

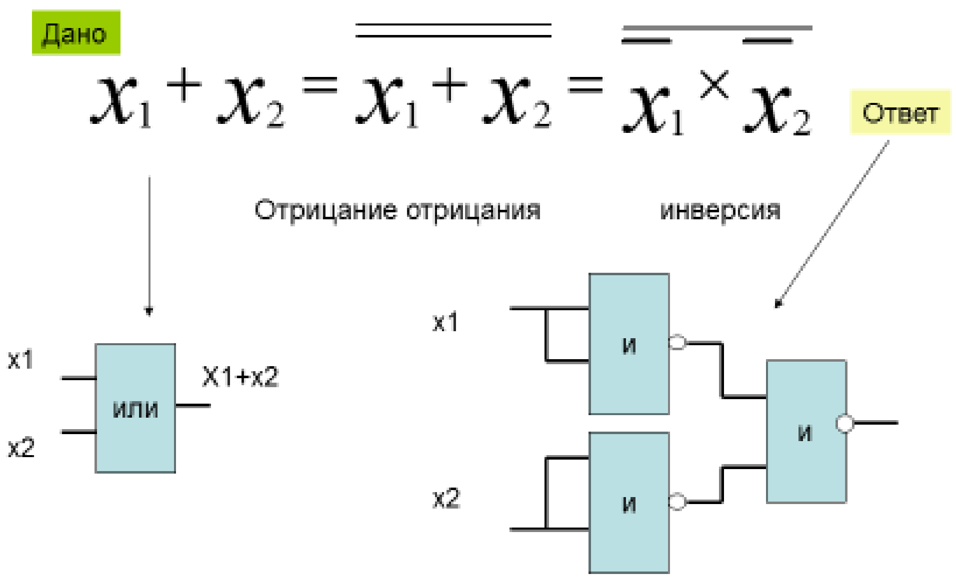


Рис. 62. Пример использования тождеств для перехода к другому логическому базису

Если в формуле логического выражения применено большое количество переменных, то такую логическую функцию называют сложной. Возникает вопрос, а как такую функцию вычислить? На этот вопрос отвечает алгоритм, представленный на рисунке 63. Он заключается в том, что вычисление функции разбивается на этапы – шаги.

Каждый шаг предусматривает оценку возможных состояний переменных и значений элементарных функций, входящих в общую формулу. В рассматриваемом примере на пятом шаге алгоритма получаем варианты значения функции при разных вариантах значения переменных x1 и x2.

$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2).$$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
№ шага		1	2	3	4	5

результат

Рис. 63. Пример табличного алгоритма вычисления логической функции

Любую логическую формулу можно представить графически в виде функциональной логической схемы. Иначе говоря, всегда можно перейти от аналитического выражения к графической схеме или функциональной электрической схеме. Например, логические функции X1 и X2 на рисунке 64 представлены в виде функциональных электрических схем.

Переход представляет алгоритм, по которому выделяются переменные, а затем последовательно развертываются логические элементы, из которых состоит логическая формула. Соответственно, если есть логическая схема, то всегда можно на ее основе получить аналитическое выражение.

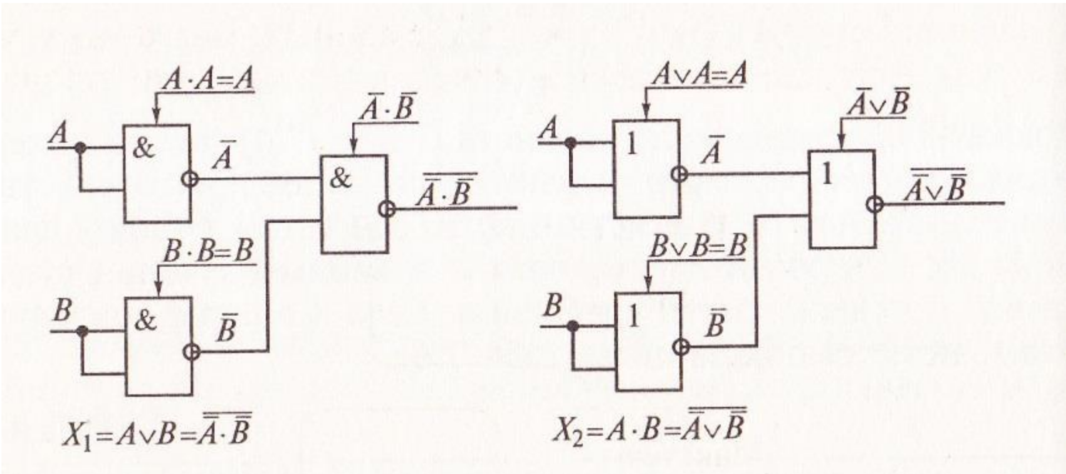


Рис. 64. Иллюстрация перехода от аналитического
выражения к логической схеме

- Любую булеву функцию **n** переменных можно задать с помощью формулы, употребляя только логические функции, тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Далее приведем пример, подтверждающий это утверждение, основываясь на том, что любая логическая функция имеет свою таблицу состояний.

4.3. Дизъюнктивная и конъюнктивная совершенные нормальные формы

Пусть задана таблица состояний рисунок 65. Находим в таблице строки, где значения функции равные единице. Для каждой такой строки составим конъюнкцию значений переменных строки. Получим Y2, Y3, Y7. Далее можно построить дизъюнкцию Y2, Y3, Y7:

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_2 \vee y_3 \vee y_7 =$$
$$= (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Функция, стоящая в правой части данного равенства, называется нормальной дизъюнктивной формой. Таким образом, чтобы, знать переключательную функцию, необязательно задавать все ее значения при всех сочетаниях переменных. Достаточно знать состояния, при которых она равна единице.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2$, X3)
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Рис. 65. Задание формулы логической функции по таблице состояний

Определения:

- Произведение (конъюнкция) переменных, в которое каждая из переменных входит только один раз в прямом или инверсном виде, называется **минтермом** рисунок 66.

- Сумма (дизъюнкция) переменных, в которую каждая из переменных входит только один раз в прямом или инверсном виде, называется **макстремом.**
- Количество переменных, входящих в минтерм и макстерм, называется рангом.

$$X = \underbrace{ABC \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}}_{\text{Минтерм}};$$

$$X = \overbrace{\left(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}\right) \cdot \left(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}\right) \cdot \left(A \vee B \vee C\right)}^{\text{Макстерм}}.$$

Переменные		Макстермы	Минтермы
A	B	M	m
0	0	$M_0 = A \vee B$	$m_0 = \bar{A} \cdot \bar{B}$
0	1	$M_1 = A \vee \bar{B}$	$m_1 = \bar{A} \cdot B$
1	0	$M_2 = \bar{A} \vee B$	$m_2 = A \cdot \bar{B}$
1	1	$M_3 = \bar{A} \vee \bar{B}$	$m_3 = A \cdot B$

Рис. 66. Макстерм и минтерм

Переход от табличной формы представления логической функции к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) или к совершенной конъюнктивной нормальной форме показан на рисунке 67. Пусть задана функция F (A, B, C) таблицей состояний.

X_0 (M)	A	B	C	X	X_1 (m)
—	0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$
—	0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
$A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$	0	1	1	0	—
—	1	0	0	1	$A\bar{B}\bar{C}$
$\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$	1	0	1	0	—
$\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$	1	1	0	0	—
—	1	1	1	1	ABC

Произведение макстермов, в которых функция равна нулю называется СКНФ

сумма минтермов, в которых функция равна единице называется СДНФ

Рис. 67. Переход от табличного задания логической функции к аналитическому

Из таблицы на рисунке 67 всегда можно выбрать дизъюнкцию, всех переменных, для которых функция равна единице. Эта формула X1 называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой или сокращенно - СДНФ:

$$X_1 = \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee ABC.$$

Минтерм

Из таблицы на рисунке 67 можно выбрать произведение всех макс термов, для которых функция равна нулю. Переменные, входящие в макстерм, имеют инверсный вид по отношению к табличным значениям. Эта запись X0 называется совершенной конъюнктивной нормальной формой или сокращенно - СКНФ:

$$X_0 = \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right).$$

Макстерм

4.4. Минимизация логических функций

Цель процедуры минимизации логических функций – получить логическое выражение, содержащее минимальное количество переменных.

Следствием минимизации логических функций – является использование минимального количества логических элементов в логической схеме.

Существует три метода решения задачи минимизации логических функций:
- с помощью тождеств алгебры логики;
- с помощью метода карт Карно;
- с помощью метода испытаний.

Минимизация логических функций с помощью тождеств алгебры логики

Данный метод совершенно очевиден. Обычно в данном случае применяются тождества склеивания, поглощения, свертки. Пример применения операции поглощения показан на рисунке 68. Переменная А поглощает произведение A×B. Задана функция двух переменных А и В. Если не применять алгоритм минимизации, то необходимо два логических элемента для ее реализации.

Но после минимизации оказывается, значение представленной логической функции всегда будет равно значению аргумента А, поэтому логические элементы 2И и 2ИЛИ можно исключить.

$$A \vee AB = A(\overset{1}{\cancel{1 \vee B}}) = A,$$

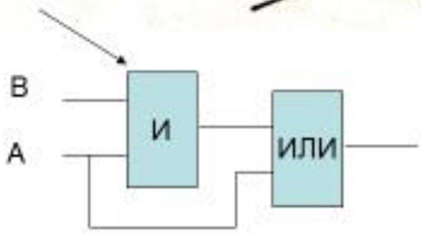


Рис. 68. Пример выполнения операции поглощения

Операция склеивания применяется в случае, когда имеется пара произведений или сумм, в каждую из которых одна переменная входит в прямом и инверсном виде, а вторая имеет одинаковый вид. Например, как в двух примерах, показанных на рисунке 69. В результате для реализации первой и второй функции исключаем по четыре логических элемента.

$$AB \vee A\overline{B} = A(\overset{1}{\cancel{B \vee \overline{B}}}) = A;$$

$$(\overline{A} \vee B)(A \vee B) = \overset{0}{\cancel{\overline{A}A}} \vee B = B.$$

Рис. 69. Пример выполнения операции склеивания

Операция свертки показана на рисунке 70. Развертываем функцию X0, раскрывая скобки, а затем применяем простейшие тождества для сведения парных произведений к нулю или единице. В результате функция двух переменных сводится к инверсии переменной А. И исчезает необходимость применения четырех логических элементов.

$$X_0 = \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee B\right) = \overset{\overline{A}}{\cancel{\overline{A}\,\overline{A}}} \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee \overline{A}B \vee \overset{0}{\cancel{\overline{B} \cdot B}} =$$

$$= \overline{A} \vee \overline{A}\overset{1}{\cancel{(\overline{B} \vee B)}} = \overline{A} \vee \overline{A} = \overline{A}.$$

Рис. 70. Пример выполнения операции свертки

Для минимизации функции можно применять и другие тождества алгебры логики рисунке 71. Если минимизация логической функции начинается после формирования СДНФ и СКНФ по таблице состояний, то конечная минимизированная форма называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) или конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

$$X = \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC =$$

$$= BC\overset{1}{\cancel{(\overline{A} \vee A)}} \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} = BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} =$$

$$= C\left(B \vee A\overline{B}\right) \vee AB\overline{C} = C(A \vee B)\overset{1}{\cancel{(B \vee \overline{B})}} \vee AB\overline{C} =$$

$$= AC \vee BC \vee AB\overline{C} = AC \vee B\left(C \vee A\overline{C}\right) =$$

$$= AC \vee B(C \vee A)\overset{1}{\cancel{(C \vee \overline{C})}} = AC \vee BC \vee AB.$$

Рис. 71. Минимизация СДНФ

Для возвращения к исходной форме записи – СДНФ, в ДНФ следует дописать отсутствующие переменные в виде суммы прямого и инверсного значений:

$$X_1 = AB \vee AC \vee BC = AB\left(\underline{C \vee \overline{C}}\right) \vee A\left(\underline{B \vee \overline{B}}\right)C \vee \left(\underline{A \vee \overline{A}}\right)BC =$$

$$ABC \vee AB\overline{C} \vee ABC \vee A\overline{B}C \vee ABC \vee \overline{A}BC = ABC \vee AB\overline{C} \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}BC.$$

Минимизация логических функций с помощью метода карт Карно

Применяется в основном для минимизации СДНФ. Карта Карно представляет из себя таблицу, разбитую на клетки, каждая из которых соответствует одному из возможных сочетаний переменных – минтермов.

Метод карт Карно был разработан в 1952 году Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 году Морисом Карно, физиком из «Bell Labs». Их целью было найти метод упрощения цифровых электронных схем при проектировании.

Карта Карно представляют собой специальную таблицу, разбитую на клетки. На рисунке 72 показана карта Карно, построенная на основе таблицы состояний для функции двух переменных. Каждая клетка соответствует одному из возможных сочетаний переменных – минтермов.

X_1	X_2	$f(X_1, X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

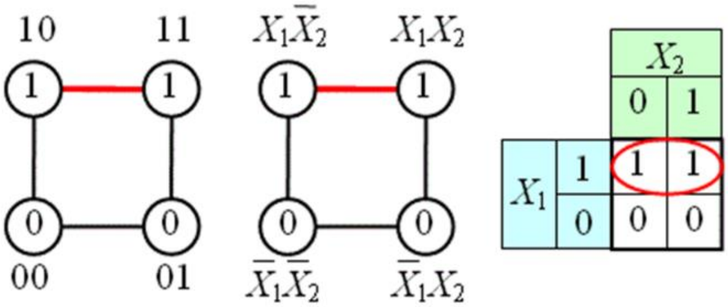


Рис. 72. Пример карты Карно для функции двух переменных

Процесс минимизации логической функции состоит нескольких этапов:

Этап 1. Представление переключательной функции на карте Карно. Для этого на карте записывают единицы в клетках, соответствующих заданным сочетаниям переменных, при которых функция равна единице.

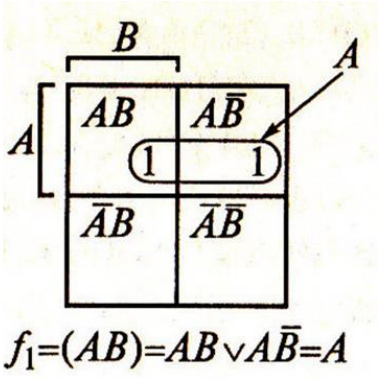
Этап 2. Склеивание минтермов производится по следующим правилам:

– единицы минтермов, количество которых кратно двум, расположены рядом в одном столбце или строке, или образуют квадрат;

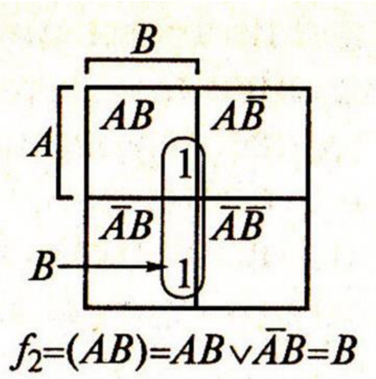
- единицы минтермов расположены в противоположных концах столбца (строки) или по противоположным углам.
- склейки должны охватить максимальное количество единиц. За счет этого достигается оптимальный вариант минимизации.

Этап 3. Получение результата минимизации. Для минтермов, охваченных оптимальной склейкой, определяются общие переменные, которые и являются результатом минимизации.

На рисунке 73 показан процесс минимизации для двух функций F1 и F2, с применением карт Карно. На рисунке 73а склейка приводит к тому, что функция f1 становится равной переменной A. На рисунке 73б склейка столбца приводит к результату минимизации и f2 равно переменной B.



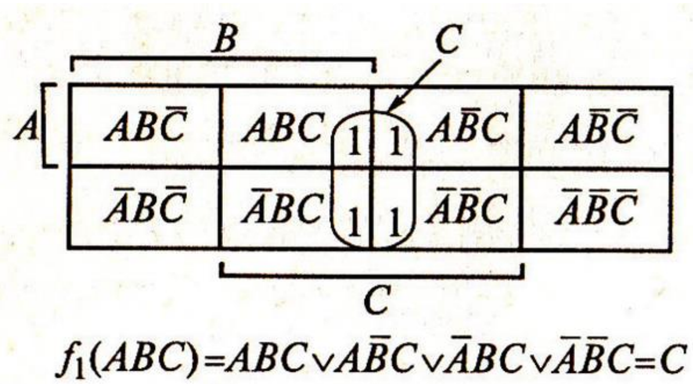
а



б

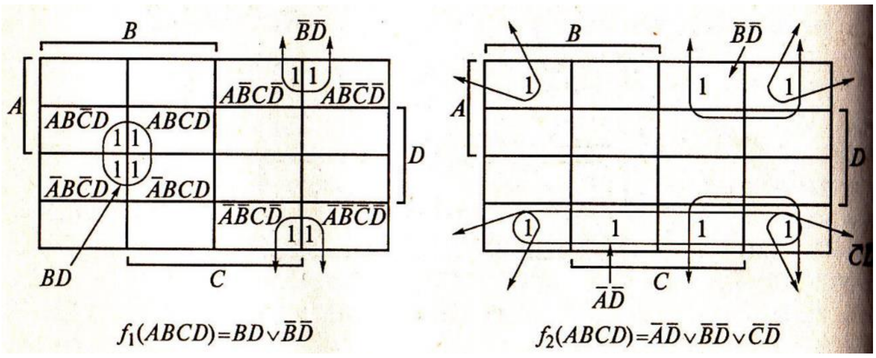
Рис. 73. Карты Карно для минимизации функций f1(а) и f2(б) [20]

Пример минимизации функции с тремя переменными и четырьмя переменными показан на рисунке 74(а,б).



а

$$f_1(ABCD) = AB\bar{C}D \vee ABCD \vee \bar{A}B\bar{C}D \vee A\bar{B}C\bar{D} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \vee$$
$$\vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}BCD;$$
$$f_2(ABCD) = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \vee AB\bar{C}\bar{D} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}BC\bar{D} \vee$$
$$\vee \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \vee A\bar{B}C\bar{D}.$$



б

Рис. 74. Минимизация функции трех переменных(а) и четырех переменных(б)

Минимизация логических функций методом испытаний

Метод испытаний применяется после применения карт Карно и позволяет исключить в процессе выполнения алгоритма лишние склейки. Метод заключается в следующем:

1. Последовательно из упрощенной функции исключается один из минтермов и приравнивается к единице.
2. Анализируется значение функции без этого минтерма. Если функция при этом равна единице, то исключенный минтерм больше в функцию не вводится.
3. Такими испытаниями подвергается каждый минтерм.
4. В результате испытания в логической функции остаются минтермы влияющие на состояние функции.

Приведем пример данного метода минимизации функции на примере. Пусть после обработки таблицы истинности получена СДНФ f (A, B, C):

$$f(A.B,C) = \bar{A}B\bar{C} \vee \overline{ABC} \vee A\overline{BC} \vee A\bar{B}C$$

Применим к этой формуле метод минимизации функции - карту Карно рисунке 75 и получим результат f (A, B, C).

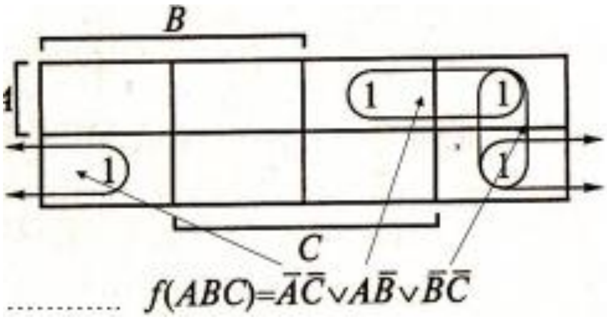


Рис. 75. Результат минимизации функции f (A, B.C)

Проверим с мощью метода испытаний - возможно ли более глубокая минимизация полученной логической функции после применения карты Карно.

1.Этап. Проверяем наличие лишних минтермов.

- Пусть первый минтерм равен единице. Тогда:

$$\bar{A}\bar{C} = 1, \rightarrow \bar{A} = 1, \bar{C} = 1, A = 0, C = 0$$

$$\rightarrow 0\bar{B} \vee \bar{B} \times 1 = \bar{B}$$

Таким образом, если первый минтерм:

$$\bar{A}\bar{C}$$

в логической функции равен единице, то логическая функция равна инверсии B, а не единице. Значит первый минтерм остается в первичной формуле.

- Пусть второй минтерм функции равен единице. Тогда:

$$A\bar{B} = 1, \rightarrow A = 1, \bar{B} = 1, \bar{A} = 0, B = 0$$

$$\rightarrow 0 \times \bar{C} \vee 1 \times \bar{C} = \bar{C}$$

Таким образом, если второй минтерм:

$$A\bar{B}$$

в логической функции равен единице, то логическая функция равна инверсии C, а не единице. Значит второй минтерм остается в формуле.

- допустим, что третий минтерм функции равен единице.

$$\bar{B}\bar{C} = 1, \rightarrow \bar{B} = 1, \bar{C} = 1, B = 0, C = 0$$

$$\rightarrow \bar{A} \times 1 \vee A \times 1 = 1$$

2.Этап. Таким образом, если третий минтерм ($\overline{B}\,\overline{C}$) в логической функции равен единице, то логическая функция равна единице. Согласно метода испытаний, на основании полученного результата, третий минтерм из логической функции может быть исключен, так как он не влияет на значение функции. Результат выполнения метода испытаний – формула логической функции:

$$f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{C} \vee A\overline{B}$$

Таким образом, в данном параграфе рассмотрены три метода минимизации логических функций: минимизация с помощью тождеств алгебры логики: минимизация с помощью карт Карно; минимизация с помощью метода испытаний.

4.5. Синтез логических схем

Задача синтеза логических схем – это задача разработки функциональной электрической схемы по заданной логической функции.
На практике редко встречаются логические схемы с одним выходом, реализующие одну логическую функцию. Обычно схемы имеют несколько выходов, причем значение логической функции на всех выходах зависят от одного набора переменных.

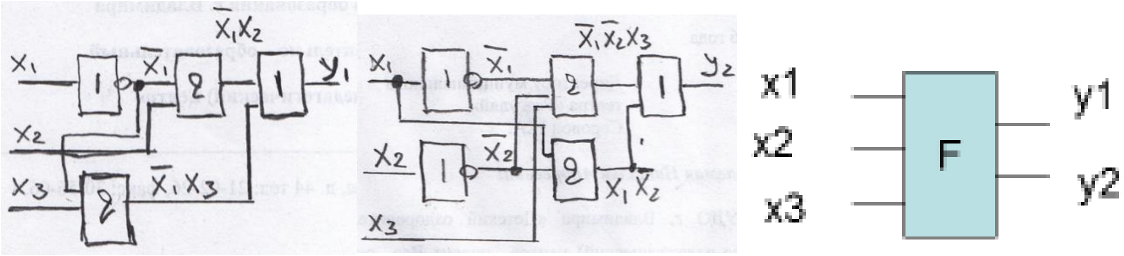
Задача синтеза усложняется, если в схеме применяются элементы памяти. Рассмотрим несколько типовых ситуаций, которые могут иметь место при решении задачи синтеза логической схемы.

Ситуация 1. Пусть даны две логические функции y1 и y2:

$$y_1 = \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2$$

$$y_2 = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2}$$

по которым можно построить графические схемы, показанные на рисунке 76(а, б), но возникает вопрос, как построить общую логическую схему рисунок 76в:



а б в

Рис. 76. Логические схемы y1(а), y2(б) и логическая схема, объединяющая y1 и y2(в)

Самый простой путь получения схемы с двумя выходами y1 и y2 это объединение ЛС по входам. Однако, можно заметить, что в схемах рисунке 76а и на рисунке 76б, есть общий инвертор **не x1**. При объединении двух функций в общую схему этот факт можно учесть. И тогда ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ общей схемы НЕОБХОДИМО 8 логических ЭЛЕМЕНТОВ, А НЕ 9!!! Но если применить алгебраический прием и **y2** представить в следующим виде:

$$y_2 = (\underline{\bar{x}_1 x_3} \vee x_1)\bar{x}_2$$

То обнаруживаем еще один общий элемент в функциях y1 и y2:

$\underline{\bar{x}_1 x_3}$

Это позволяет получить общую логическую схему рисунок 76в, состоящую из семи логических элементов. Таким образом, проведена минимизация количества логических элементов, необходимых для реализации функций y1 и y2 в одной комбинационной схеме.

Ситуация 2. Если функции Y1 и Y2 рис.77а заданы множествами и одно из них содержится в другом, то одну из этих функций можно выразить через другую в виде общей логической схемы рисунок 77б.

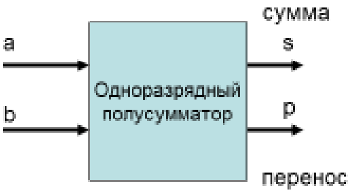
$$y_1 = ac \vee \overline{bc}$$

$$y_2 = y_1 \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c} \vee ab\bar{c}$$

а б

Рис. 77. Функция y2 использует y1, в качестве подчиненной подфункции (а), схема обобщенной логической функции (б)

Рассмотрим еще один пример синтеза логической схемы, например, схемы одноразрядного полного сумматора рисунок 78а, который формализован двумя логическими функциями: сумматора S рисунок 78б и вычислителя переноса P рисунок 78в.



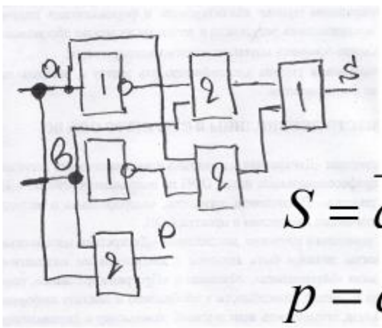
$$S = \overline{a}b \vee a\overline{b}$$

$$p = ab$$

а б в

Рис. 78. Одноразрядный полный сумматор (а), функция сумматора S (б), функция вычисления переноса P (в)

Согласно ранее представленной информации, логическую схему одноразрядного сумматора можно представить, как показано на рисунке 79.



$$S = \overline{a}b \vee a\overline{b}$$

$$p = ab$$

Рис. 79. Схема одноразрядного полного сумматора

ВОПРОС. Можно ли данную схему минимизировать по количеству применяемых элементов? ОТВЕТ – Да. Данную логическую схему можно упростить, если в функции суммы **S** использовать значение переноса **P,** но для этого надо получить аналитическое выражение логической функции S через P:

$$S = \overline{P}(a \vee b)$$

$$p = ab$$

S=$\bar{a}$b∨$\bar{b}$a∨ $\bar{a}a$ ∨ $\bar{b}$ b = (($\bar{a}$ ∨ $\bar{b}$)a)∨ (($\bar{a}$ ∨ $\bar{b}$)b)= ($\overline{ab}$) a∨ ($\overline{ab}$) b= ($\overline{ab}$) (a∨ b)

Тогда схему одноразрядного сумматора можно представить, как показано на рисунке 80. И как мы видим, схема одноразрядного полного сумматора реализована из четырех логических элементов, а не из шести.

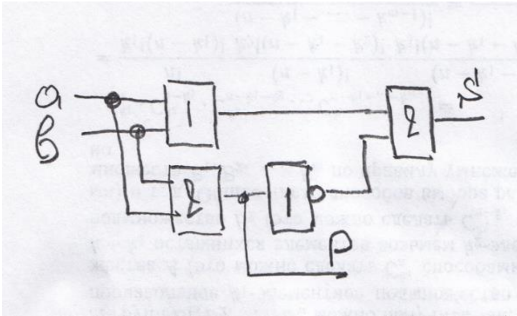


Рис. 80. Схема одноразрядного сумматора после математической минимизации

4.6. Пример разработки электронного устройства

Техническое задание: Разработать схему устройства автомобильной сигнализации. Алгоритм работы сигнализации – если водитель автомобиля находится на месте и открыта хотя бы одна из четырех дверей или багажник автомобиля должен срабатывать световая и звуковая сигнализация.

В качестве элементной базы использовать микросхемы К555ЛА3, красный светодиод и бузер. Питание схемы осуществлять от бортового питания автомобиля +12 В.

Разработать структурную, функциональную и принципиальную электрические схемы автомобильной сигнализации.

Разработка структурной электрической схемы

Выполнение разработки структурной электрической схемы устройства предполагает фактическую декомпозицию общей задачи проектирования устройства, на ряд более простых задач схемотехнического проектирования.

В рассматриваемом примере можно выделить применение блока дискретных датчиков, фиксирующих текущее положение дверей, багажника, водителя; блок управления, имеющий шесть дискретных входов, выполняющий логику 5ИЛИ-2И; блок индикации световой и звуковой; блок питания преобразующий бортовое напряжение +12 В в напряжение +5 В для питания микросхемы К555ЛА3. На рисунке 81. показаны выделенные структурные блоки и связи между ними, что и является структурной электрической схемой, разрабатываемого устройства.

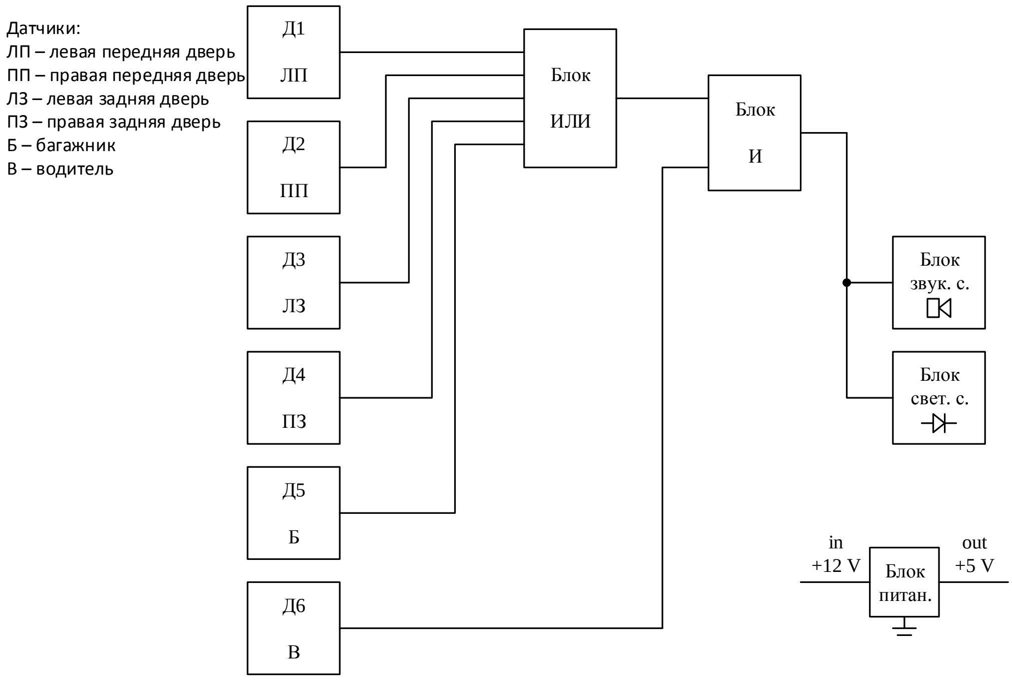


Рис. 81. Структурная электрическая схема автомобильной сигнализации

Разработка функциональной электрической схемы

Функциональная электрическая схема является следующим этапом разработки цифрового прибора. Функциональная электрическая схема предназначена для пояснения логического принципа работы устройства и описания процессов, происходящих при его работе. На схеме изображают функциональные элементы, устройства, функциональные группы и связи между ними.

Для создания функциональной схемы необходимо учесть тот факт, что для создания блока управления можно использовать только элементы 2И-НЕ, так как в ТЗ задан только один тип микросхемы К555ЛА3, которая представляет 4 логических элементов 2И-НЕ в одном корпусе.

Необходимо решить задачу представления элемента 5ИЛИ с помощью элементов 2И-НЕ. Здесь уместно вспомнить формулы алгебры логики, которые дают такое решение. Тогда функциональная электрическая схема может быть представлена так, как показано на рисунке 82.

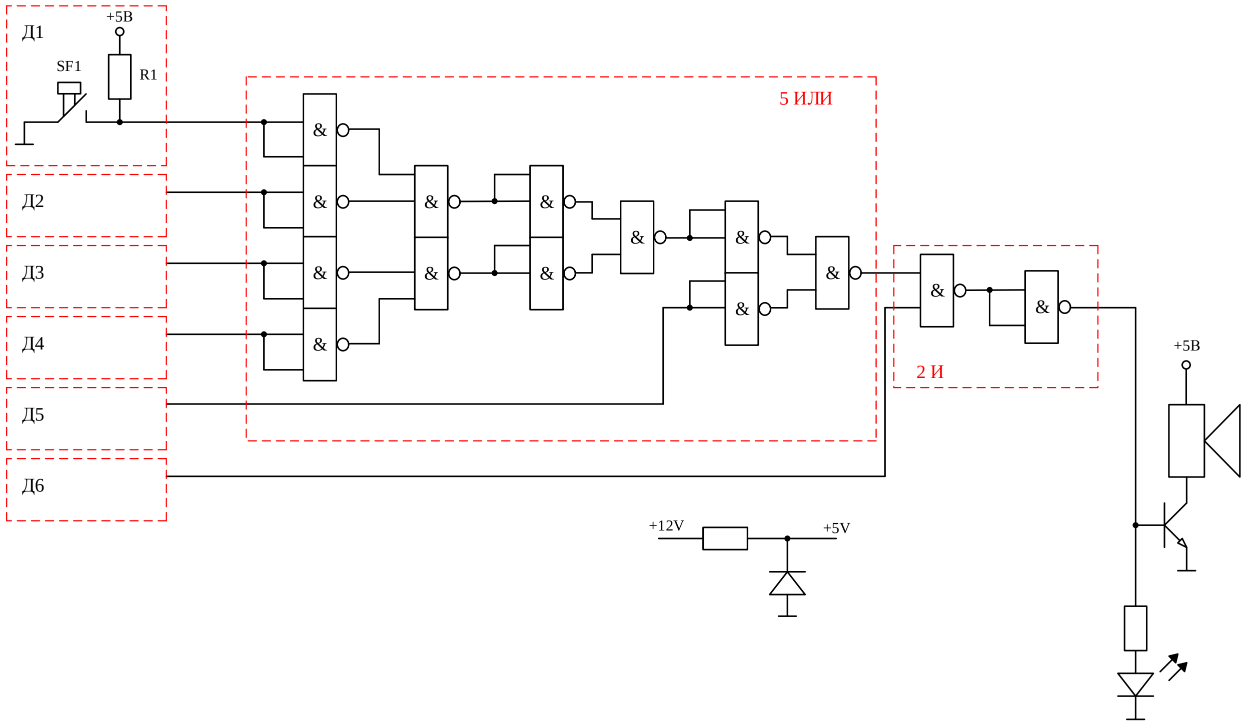


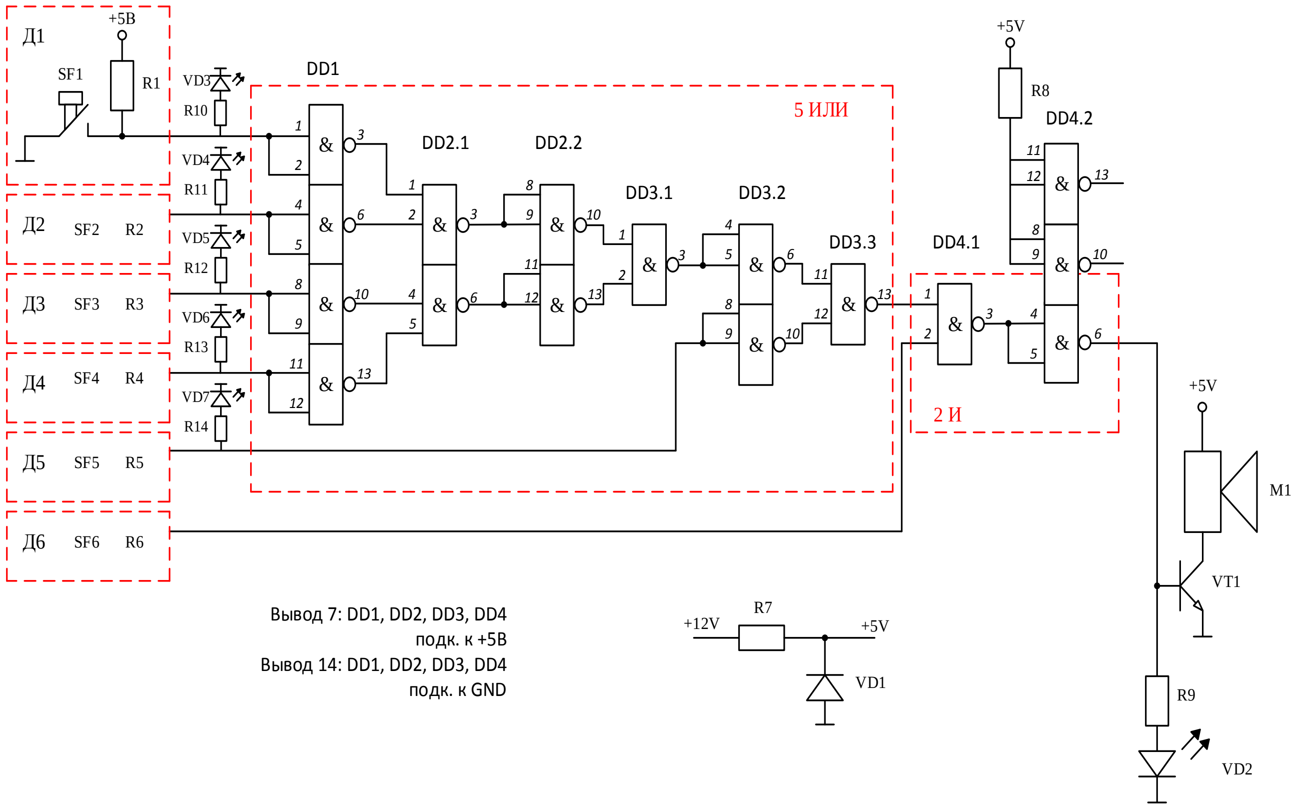
Рис. 82. Функциональная электрическая схема
автомобильной сигнализации

Функциональная электрическая схема является графической интерпретацией алгоритма работы автомобильной сигнализации технического задания. Логическая единица на выходе схемы управления 2И активирует работу светодиода и транзистора, в коллекторную цепь которого включен звуковой бузер.

Параметрический стабилизатор на стабилитроне будет обеспечивать преобразование бортового постоянного напряжения +12 В, в постоянное напряжение +5 В для обеспечения питания интегральных схем и блока индикации.

Разработка принципиальной электрической схемы

На принципиальной электрической схеме изображают все компоненты устройства с указанием их позиции в схеме, и электрические связи между ними на уровне выводов с указанием их номеров, как показано на рисунке 83.



Спецификация к принципиальной электрической схеме

№ п\п	Обозначение	Маркировка	Номинал	Количество	Тип корпуса
1	DD1- DD4	К555ЛА3		4	DIP
2	R1- R14	SMD 0805	1 кОм	14	SMD
3	VD2-VD7	А102м		6	SMD
4	VD1	Кс407		1	
5	SF1-SF6	МК		6	
6	VT1	К315		1	
7	M1	бузер		1	

Рис. 83. Принципиальная электрическая схема автомобильной сигнализации

В поле чертежа указаны правила подключения интегральных схем к цепи питания +5 В. Отдельно формируется спецификация компонентов, применяемых в принципиальной электрической схеме, которая открывает возможность расчета потребности компонентов при производстве любого количества модулей автомобильной сигнализации.

Главным результатом проектирования автомобильной сигнализации по техническому заданию до уровня принципиальной электрической схемы является возможность создания реального устройства.

4.7. Введение в теорию цифровых автоматов

Предметом теории автоматов является изучение математических моделей преобразователей дискретной информации. В данной теории решаются следующие основные задачи: анализ и синтез автоматов, определение полноты, минимизация и эквивалентные преобразования автоматов. Дадим краткую формулировку каждой из перечисленных задач.

Цифровой автомат – устройство для обработки цифровой информации. В цифровых автоматах принят алфавитный способ задания информации. Алфавит состоит из букв. Конечные последовательности букв алфавита называются словами. Число букв в слове называются длиной слова **k**. В алфавите из **m** букв можно получить m^kслов.

Любой цифровой преобразователь информации можно представить в виде устройства, на вход которого поступают слова входного алфавита, а на выходе образуются слова выходного алфавита. Процесс преобразования информации в таком устройстве сводится к установлению соответствия входного и выходного алфавита.

Эти правила соответствия называют алгоритмами. Обобщенную схему цифрового автомата можно представить в виде схемы, показанной на рисунке 84, где **x(t) –** входной сигнал, **y(t)** – выходной сигнал, **s(t+1)** – входной сигнал для блока памяти, **s(t)** – выходной сигнал блока памяти, блок сигма и блок лямбда – это комбинационные блоки.

Значение выходного сигнала **y(t)** представленного цифрового автомата будет зависеть от значения входного сигнала **x(t)** и значения выходного сигнала элемента памяти **s(t),** то есть внутреннего состояния цифрового автомата. На рисунке 84 представлена обобщенная структурная схема цифрового автомата. Отметим некоторые особенности данной схемы.

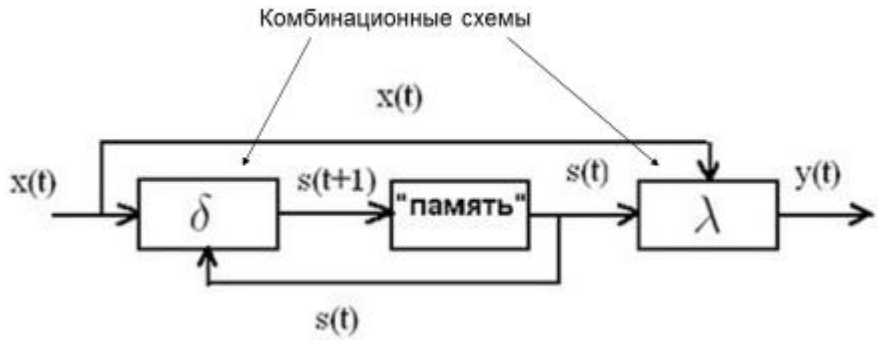


Рис. 84. Обобщенная структурная схема цифрового автомата

1. Автомат имеет конечное множество внутренних состояний.
2. Переход автомата из одного состояния в другое происходит скачкообразно или мгновенно. Но для учета задержек в системе вводится понятие интервала дискретности, через который происходит изменение состояния.
3. Это позволяет рассматривать работу автомата в так называемом дискретном времени, принимающем целые значения.

При работе с цифровыми автоматами решается несколько видов задач: задача синтеза; задача анализа; задача минимизации.

Задача анализа цифрового автомата сводится - по заданному автомату описать его поведение. Вариант постановки: по неполному описанию автомата установить некоторые его свойства.

Задача синтеза цифрового автомата заключается в построении автомата с заданным алгоритмом функционирования. Задачу синтеза принято рассматривать двояко: абстрактный синтез как построение математической модели автомата и структурный синтез как разработку функциональной логической схемы автомата.

Задача минимизации цифрового автомата. Минимальный автомат обладает наименьшим числом компонентов модели (в частности, минимальной мощностью множества так называемых состояний) и при этом функционально эквивалентен заданному автомату.

Цифровые автоматы могут быть классифицированы по группам, представленным на рисунке 85.

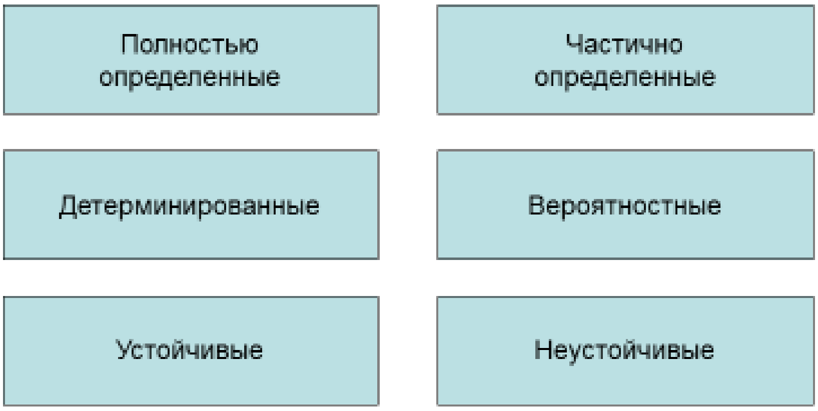


Рис. 85. Классификация цифровых автоматов

Полностью определенный автомат имеет для каждого состояния входа определенное внутреннее состояние. В детерминированных автоматах под воздействием произвольного входного сигнала автомат может перейти в одно и только одно состояние. В неустойчивых автоматах переход возможен в несколько состояний при изменении состояния входа.

Для задания алгоритма работы автомата необходимо задать множество букв входного алфавита автомата **U**, множество букв выходного алфавита **V**, множество букв алфавита его внутренних состояний **W**.

$$U = \{u\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

$$V = \{v\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

$$W = \{w\} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{l-1}\}$$

На заданных множествах необходимо задать функцию переходов и функцию выходов, тогда мы зададим алгоритм работы автомата. Функция переходов определяет состояние автомата w(t+1) в интервале дискретности (t+1) в зависимости от его состояния в w(t) и входного сигнала u(t).

$$W(t+1) = \varphi(w(t), u(t))$$

Алгоритм работы автомата можно задать с помощью функции выхода. Функция выходов определяет выходной сигнал v(t). Функция выхода может быть задана двумя способами.

Способ 1. Если выходной сигнал **v(t)** в момент времени **t** определяется только состоянием автомата **w(t)** вовремя **t**, то такой автомат называется автоматом Мура. Выходной сигнал цифрового автомата Мура определяется формулой:

$$v(t) = \varphi(w(t))$$

Способ 2. Если выходной сигнал зависит не только от состояния автомата, но и от входного сигнала, то такой автомат называют автоматом Мили. Выходной сигнал цифрового автомата Мили определяется формулой:

$$v(t) = \varphi(w(t)u(t))$$

В теории цифровых автоматов доказано что для каждого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура. Это обстоятельство
позволяет рассматривать только автоматы Мура, как более простые.

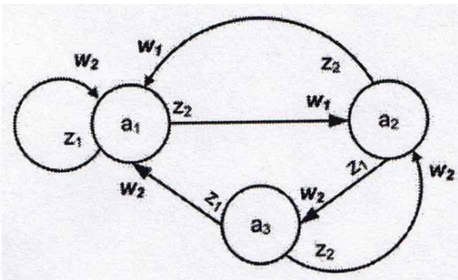
Пример задания автомата Мили табличным способом (автомат имеет два входных сигнала z1 и z2, два выходных сигнала w1 и w2 и три состояния a1, a2, a3). Согласно теории графов, исходя из задания можно построить таблицу переходов рисунок 86а и таблицу выходов рисунок 86б, на основании которых строится граф переходов рисунок 86в, являющийся алгоритмом работы автомата.

Таблица переходов

δ	a_1	a_2	a_3
z_1	a_1	a_3	a_1
z_2	a_2	a_1	a_2

Таблица выходов

λ	a_1	a_2	a_3
z_1	w_2	w_2	w_2
z_2	w_1	w_1	w_2



а б в

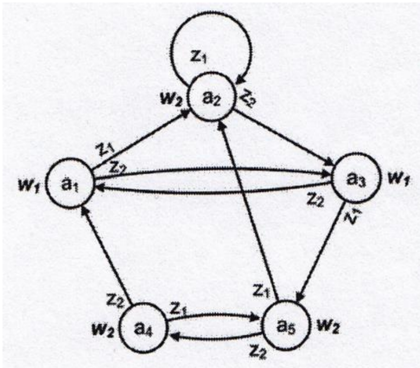
Рис. 86. Таблица переходов(а), таблица выходов(б),
граф переходов автомата(в)

Пример задания автомата Мура. В автомате Мура выходной сигнал зависит только от состояния автомата и не зависит от входного сигнала. Поэтому для задания автомата Мура в таблице переходов достаточно добавить одну строку – значения выхода (w).

Автомат Мура на пять состояний (а), имеющий два входных сигнала (z) и два выходных сигнала (w). Таблица переходов такого автомата показана на рисунке 87а. По таблице переходов можно построить граф переходов, показанный на рисунке 87б.

λ	w_1	w_2	w_1	w_2	w_2
δ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
z_1	a_2	a_2	a_5	a_5	a_2
z_2	a_3	a_3	a_1	a_1	a_4

а



б

Рис. 87. Пример задания автомата Мура с помощью таблицы переходов(а), граф переходов автомата Мура(б)

Глава 5. ГРАФЫ

Первое появление слова «граф» состоялось в 1878 году в заметке английского математика Джеймса Сильвестра в журнале Nature. В 1936 году вышла первая в мире книга по теории графов на немецком языке Денеша Кёнига «Теория конечных и бесконечных графов», где были объединены результаты применения графов, начиная с 1736 года - даты выхода первой статьи Леонарда Эйлера по теории графов с решением задачи о кёнигсбергских мостах.

Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними.

НАПРИМЕР,

– Электрическая схема.

- Карта дорог.

- Описание конструкции изделия.

- Описание работы цифрового автомата.

В подобных случаях, удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми вершинами, а связи между ними задавать линиями, называемыми ребрами. Множество вершин **V**, связи между которыми определены множеством ребер **E**, называют графом и обозначают **G= {V; E}.**

5.1. Термины

Перечислим определения, принятые в теории графов.

1. Вершины и рёбра графа называются элементами графа, число вершин в графе - порядком, число рёбер - размером графа. Вершины U и V называются концевыми вершинами (или просто концами) ребра **e= {U, V}**.
2. Ребро, в свою очередь, соединяет эти вершины. Две концевые вершины одного и того же ребра называются соседними. Два ребра называются смежными, если они имеют общую концевую вершину.
3. Два ребра называются кратными, если множества их концевых вершин совпадают.
4. Ребро называется петлёй, если его вершины совпадают, то есть **e= {U, U}**.

5.2. Классификация графов

Существует следующая классификация графов:

- Ориентированный (орграф) и неориентированный.
- Смешанный.
- Конечный и бесконечный.
- Полный граф.
- Пустой граф или нуль граф.
- Регулярный граф.
- Мультиграф и псевдограф.
- Двудольный граф или биграф.
- Гамильтонов граф.
- Взвешенный граф.
- Планарный граф.
- Графы типа дерева.

Ориентированный, неориентированный и смешанный графы

Часто связи между объектами характеризуются определенной ориентацией – направлением. НАПРИМЕР, течение электрического тока, направление передачи сигнала, направление движения автомобилей, причинная связь событий. Для указания направления ребро графа отмечается стрелкой и называется дугой, а граф с ориентированными ребрами называется орграфом рисунок 88а. Неориентированный граф – граф, у которого ребра не имеют направленности рисунок 88б. Смешанным называют граф, в котором имеются рёбра хотя бы двух из упомянутых трёх разновидностей (звенья, дуги, петли).

а б

Рис. 88. Ориентированный (а) орграф и неориентированный (б) граф

Пустой, конечный и бесконечный графы

Граф, состоящий только из вершин, называется пустым графом или нуль графом. Если множество вершин графа конечно, то он называется конечным графом. Соответственно существуют бесконечные графы, но мы их рассматривать не будем.

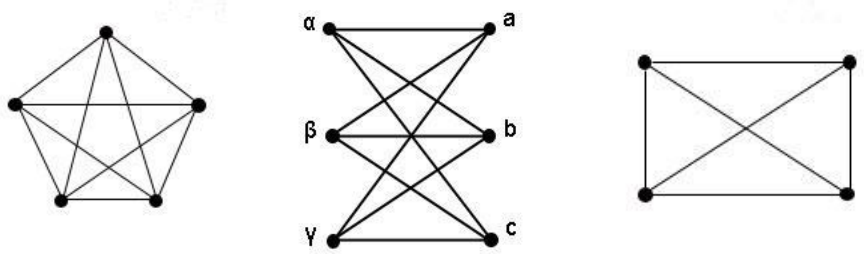
Простой граф, мультиграф и псевдограф

Граф без петель и кратных ребер называется обыкновенным или простым графом. Граф без петель, но с кратными ребрами называется мульти графом. Граф содержащий петли и кратные ребра называют псевдографом.

Полный граф, биграф, регулярный граф

Граф называют полным, если он содержит все возможные рёбра при неизменном множестве вершин рисунок 89а. Граф называется двудольным или биграфом, если множество его вершин можно разбить на два подмножества так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного и того же подмножества рисунок 89б.

Регулярным графом рисунок 89с, называется связный граф, все вершины которого имеют одинаковую степень k. Число вершин регулярного графа k-й степени не может быть меньше $k+1$. У регулярного графа нечётной степени может быть лишь чётное число вершин.



а б с

Рис. 89. Полный граф (а), биграф (б), регулярный граф (с)

Гамильтонов граф и взвешенный граф

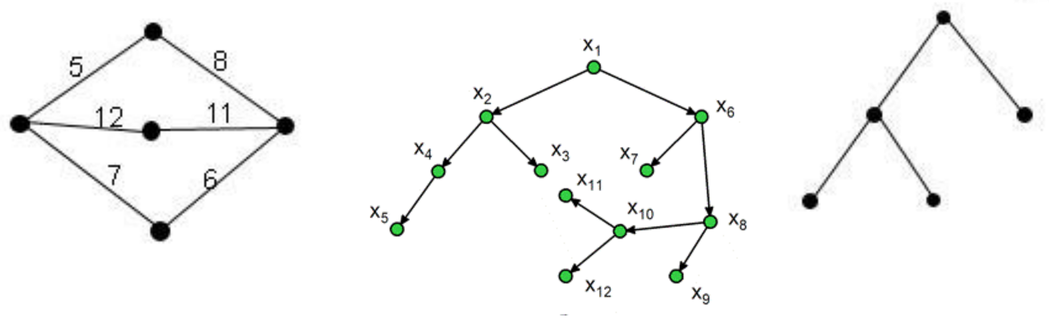
Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл. Гамильтоновым циклом называется цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа. Гамильтонов граф - это такой граф, в котором можно обойти все вершины без повторений рисунок 89с.

Взвешенным графом называется граф, вершинам и (или) рёбрам которого присвоены числовые значения или по-другому «вес». Пример взвешенного графа – транспортная дорожная сеть, в которой рёбрам присвоены весы, означающие стоимость перевозки груза по ребру рисунок 90а.

Граф типа дерева

Деревом называется связный граф без циклов рисунок 90б. Любые две вершины дерева соединены лишь одним маршрутом. [22]

Ориентированное дерево представляет собой ориентированный граф без циклов, как на рисунке 90с.



а **б** **с**

Рис. 90. Взвешенный граф (а), граф типа дерева (с), ориентированное дерево (б)

5.3. Инцидентность и смежность

Две вершины Vi и Vj графа G={V,E} называют смежными, если они являются вершинами одного ребра $e_k \subset$ E. Отношение смежности на множестве вершин графа можно определить, представив каждое ребро как пару смежных вершин e_k=(v_i, v_j), где k=1,2,3….

Множество вершин V с определенным на нем отношением смежности

полностью определяет граф.

Если вершина Vi является началом или концом ребра Ek, то говорят, что они инцидентны. Инцидентность определяет отношение разнородных объектов вершин и ребер графа. В орграфах различают положительную и отрицательную инцидентность. Число ребер, инцидентных вершине называют степенью вершины $\delta(v_i) = N$. Петля в графе, при расчете степени учитывается дважды.

Теорема

- Для любого псевдографа, сумма степеней всех его вершин – число четное равное удвоенному числу ребер графа.

- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Заключение этой теоремы следует из того, что каждое ребро имеет два конца, а каждая петля учитывается два раза.
- СЛЕДСТВИЕ: в любом конечном графе число вершин нечетной степени четно.

5.4. Задание графов с помощью матриц

Любой граф может быть задан матрицей смежности или матрицей инцидентности. Пример матрицы смежности показан на рисунке 91а. В качестве горизонтальных и вертикальных координат используются помеченные вершины графа. В данном случае вершины, a, b, c, d, e. В пересечении координат указывается количество ребер графа соединяющие данные вершины.

Матрица смежности неориентированного графа всегда симметрична, а орграфа - в общем случае несимметрична. Неориентированным рёбрам соответствуют пары ненулевых элементов, симметричных относительно главной диагонали матрицы, а петлям - ненулевые элементы главной диагонали.

В столбцах и строках, соответствующих изолированным вершинам, все элементы равны нулю. Элементы матрицы простого графа равны 0 или 1, причём, элементы главной диагонали равны 0.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
V_1 = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|l} \hline & 1 & & 1 & & a \\ \hline & & 1 & 1 & & b \\ \hline & 1 & & 1 & & c \\ \hline & & 1 & & 1 & d \\ \hline 2 & & & & & e \\ \hline \end{array}
\end{array}
\\ \textbf{а}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
A = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|l} \hline 1 & & & & & & v_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & v_2 \\ \hline & 1 & 1 & & 1 & & v_3 \\ \hline & & & & & & v_4 \\ \hline & & & 1 & 1 & 2 & v_5 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\\ \textbf{б}
\end{array}
$$

Рис. 91. Пример матрицы смежности(а) матрицы инцидентности(б)

На рисунке 91б представлен пример матрицы инцидентности. Каждый столбец матрицы содержит обязательно два единичных элемента (для орграфа эти элементы всегда имеют различные знаки и равны, соответственно, 1 и -1). Количество единиц в строке равно степени соответствующей вершины (для орграфа количество положительных единиц определяет положительную степень, а количество отрицательных единиц - отрицательную степень).

Нулевая строка соответствует изолированной вершине, а нулевой столбец - петле. Следует иметь в виду, что нулевой столбец матрицы инцидентности лишь указывает на наличие петли, но не содержит сведений том, с какой вершиной эта петля связана (в практических приложениях это может быть несущественно).

Правильность составления матрицы легко проверить: число единиц в i-ой строке матрицы соответствует степени вершины графа, а число единиц в каждом столбце - двум, так как каждое ребро соединяет две вершины графа. Единственное исключение составляет петля, дважды инцидентная одной и той же вершине.

Столбец, соответствующий петле, состоит из нулей, в результате чего матрица не указывает на существование петель. Поэтому при изучении свойств графа с помощью этой матрицы необходимо исключить из него петли.

Граф однозначно задаётся матрицами смежности и инцидентности. В свою очередь, каждая из этих матриц полностью определяет граф. Существуют простые приёмы перехода от одной матрицы к другой.

5.5. Изоморфизм и планарность графов

Графы, в которых сохраняются отношения инцидентности при различных графических изображениях называют изоморфными рис. 92.

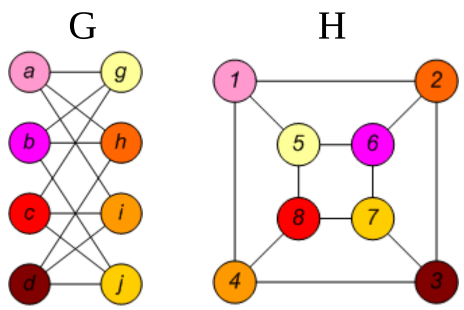


Рис. 92. Граф G и граф H изоморфны

Графы G и H являются изоморфными, если путём перестановки строк и столбцов матрицы смежности графа G удается получить матрицу смежности H графа. Однако перебор всех возможных перестановок характеризуется вычислительной сложностью, что существенно ограничивает применение подобного подхода на практике.

Граф называют планарным, если его можно так изобразить на плоскости так, что никакие два ребра, за исключением, выходящих из общей вершины, не имеют общих точек (то есть не пересекаются). Граф, который можно так изобразить на плоскости называется плоским. При этом ребра графа соединяющие соседние вершины образуют грани графа.

Очевидно, что у всякого планарного графа имеется плоское представление, и наоборот, плоское представление имеет только планарный граф. У планарных графов существует закономерность между количеством вершин В, ребер Р и граней Г: В-Р+Г=2, рис. 93.

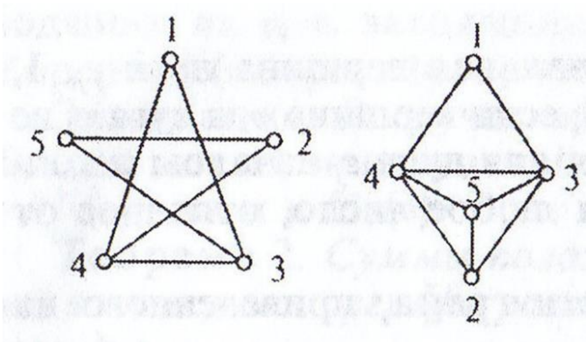


Рис. 93. Пример планарного графа

Формула была найдена Эйлером в 1736 г. при изучении свойств выпуклых многогранников. Это соотношение справедливо и для других поверхностей с точностью до коэффициента, называемого эйлеровой характеристикой. Для плоскости или сферы он равен двум, а, например, для поверхности тора - нулю. Формула имеет множество полезных следствий.

5.6. Маршруты, цепи, циклы, пути

Пусть G - неориентированный граф. Маршрутом в графе G называется такая последовательность ребер, в которой каждые два ребра имеют инцидентную вершину, например, как на рисунке 94. В маршруте одно и тоже ребро может встречаться несколько раз. В маршруте существует понятие начала и конца маршрута.

Маршрут, все ребра которого различны называется цепью или путем. Маршрут, у которого различны все вершины называется простой цепью. Замкнутая цепь называется циклом. Понятие ориентированный маршрут используется на орграфе. Число ребер маршрута, называется длиной пути.

Две вершины графа называются связанными, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, у которого любая пара вершин связана называется связным графом. В противном случае граф называется несвязным.

Расстоянием между вершинами неориентированного связного графа называют минимальную длину простой цепи, связывающую эти вершины. Центром графа называется вершина, от которой, расстояние до других вершин минимально. Минимальное расстояние от центра графа до его вершин называется радиусом графа.

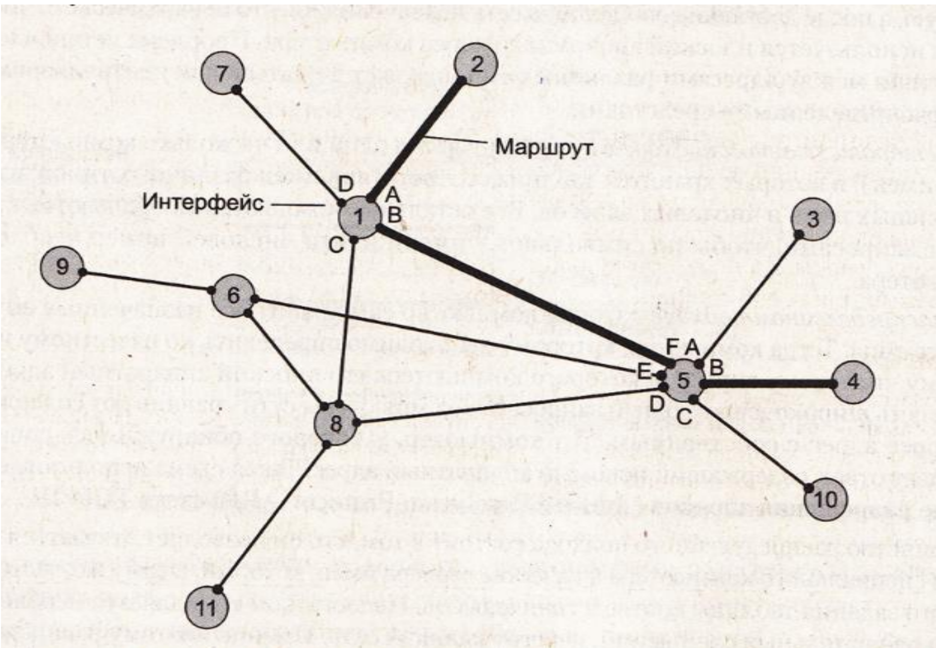


Рис. 94. Пример маршрута графа

В графе на рисунке 95 последовательность вершин разные, например,

- последовательность 2,3,5,4 - не маршрут;
- последовательность 2,3,4,5,1,4,3 - маршрут, но не путь;
- последовательность 3,1,4,5,1,4,3 - путь, но не простой;
- последовательность 2,3,1,4,3,1,2 - замкнутый маршрут, но не цикл;
- последовательность 2,3,1,4,5,1,2 - цикл, но не простой;
- последовательность 2,3,4,5,1,2 - простой цикл.

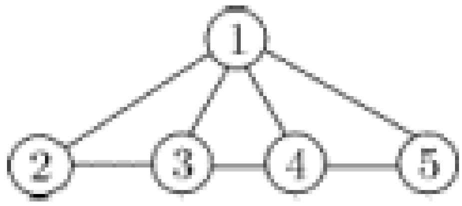


Рис. 95. Граф (планарный), имеющий маршруты, циклы, пути

Гамильтонов граф

Гамильтоновы путь, цикл и граф названы в честь ирландского математика У. Гамильтона, который впервые определил эти классы, исследовав задачу «кругосветного путешествия» по додекаэдру.

При этом гамильтоновым циклом является такой замкнутый путь, который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу; то есть простой цикл, в который входят все вершины графа, рисунок 96. [23]

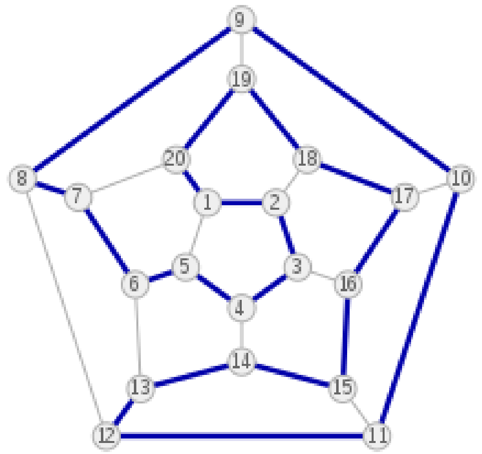


Рис. 96. Граф с обозначенным синим цветом гамильтоновым циклом

Необходимое условие существования гамильтонова цикла в неориентированном графе: если неориентированный граф G содержит гамильтонов цикл, тогда в нём не существует ни одной вершины с локальной степенью N < 2.

5.7. Операции над графами

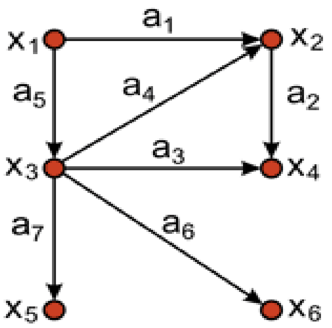
Рассмотрим ряд операций, которые можно производить над графами.

Объединение графов

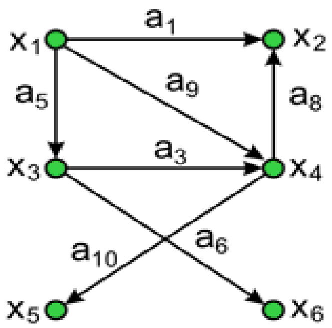
Объединение графов G1 и G2 , обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет такой граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, что множество его вершин является объединением X1 и X2 , а множество ребер – объединением A1 и A2 .

Граф G3 , полученный операцией объединения графов G1 и G2 , показан на рисунок 90д, а его матрица смежности – на рисунок 90е. Матрица смежности результирующего графа получается операцией поэлементного логического сложения матриц смежности исходных графов G1 рисунок 97а,в и G_2рисунок 97б,г.

Пример. [24]



а



б

$A_1=$

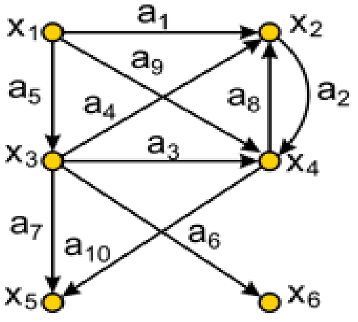
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1			
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4						
x_5						
x_6						

в

$A_2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2						
x_3				1		1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

г



д

$A_3=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1	1		
x_2				1		
x_3		1		1	1	1
x_4		1			1	
x_5						
x_6						

е

Рис. 97. Пример операции объединения графов (а) и (б), результат (д)

Пересечение графов

Пересечение графов G1 (рисунок 98а) и G2 (рисунок 98б), обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G_3 = (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ рисунок 98в. Таким образом, множество вершин графа G3 состоит из вершин, присутствующих одновременно в G1 и G2. Операция пересечения графов G1 и G2 показана на рисунке 98в, а результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического умножения матриц смежности исходных графов G1 и G2. показана на рисунке 98г. [24]

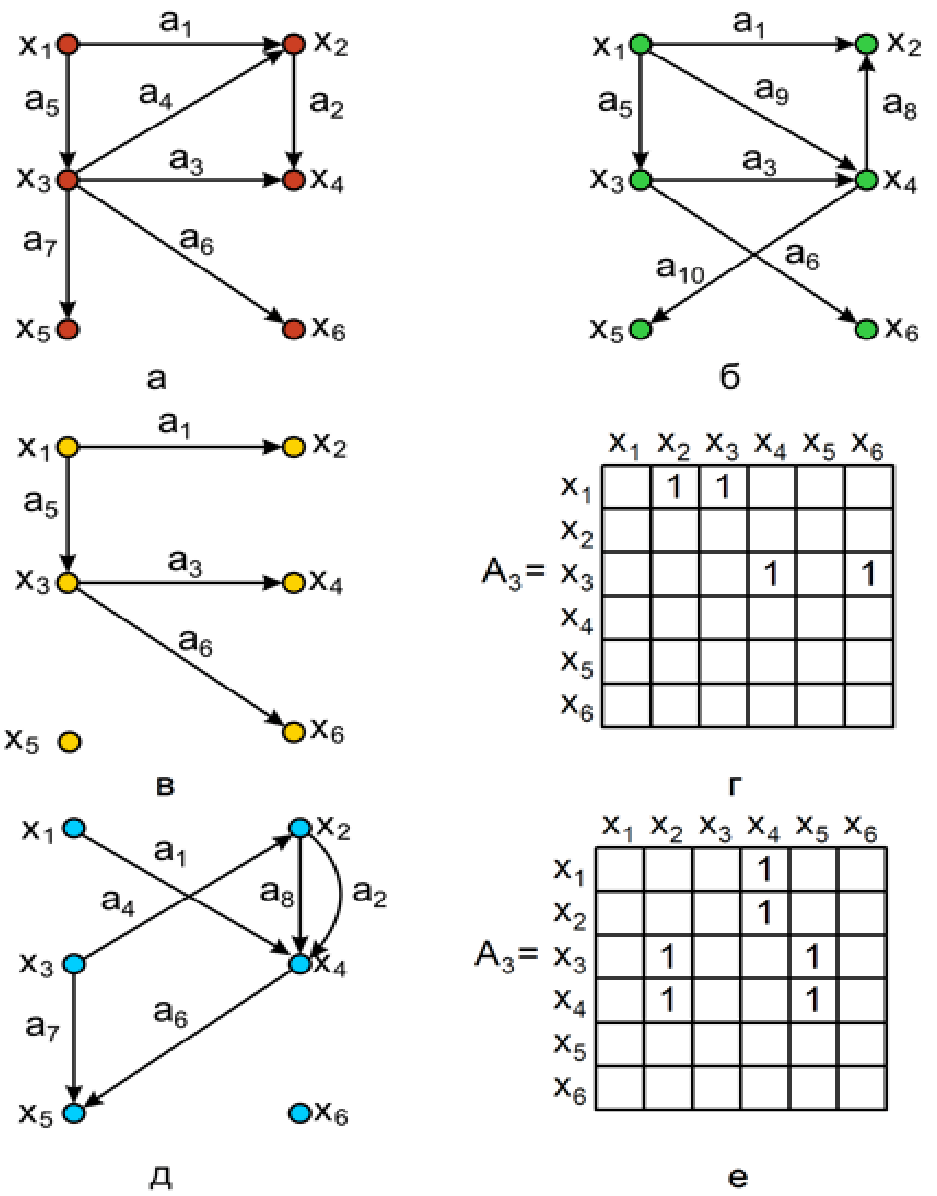


Рис. 98. Пример операции пересечения (в, г) графов G1а и G2б, и операции кольцевой суммы (д, е)

Кольцевая сумма

Кольцевая сумма двух графов G_1 рисунок 98а и G_2 рисунок 98б, обозначаемая как $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G_3 , порожденный на множестве ребер $A_1 \oplus A_2$. Другими словами, граф G_3 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1, либо в G_2, но не в обоих одновременно. Кольцевая сумма графов G_1 и G_2 показана на рисунке 98д, а результирующая матрица смежности получается операцией поэлементного логического сложения по mod2 матриц смежности исходных графов G_1 и G_2, показана на рисунке 98е.

Три рассмотренные операции коммутативны, и многоместны.

Рассмотрим унарные операции на графе.

Удаление вершины

Если x_i - вершина графа G = (X, A), то G – x_i -порожденный подграф графа G на множестве вершин X – x_i, то есть G – x_i является графом, получившимся после удаления из графа G вершины x_i и всех ребер, инцидентных этой вершине. Удаление вершины x_3 показано на рисунке 99б (для исходного графа, изображенного на рисунке 99а).

Матрица смежности исходного графа представлена в таблице 6а). Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления вершины x_i получается путем удаления, соответствующего i - го столбца и i -ой строки из исходной матрицы и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали начиная с (i+1) - го столбца и (i+1) -ой строки (таблица 6б).

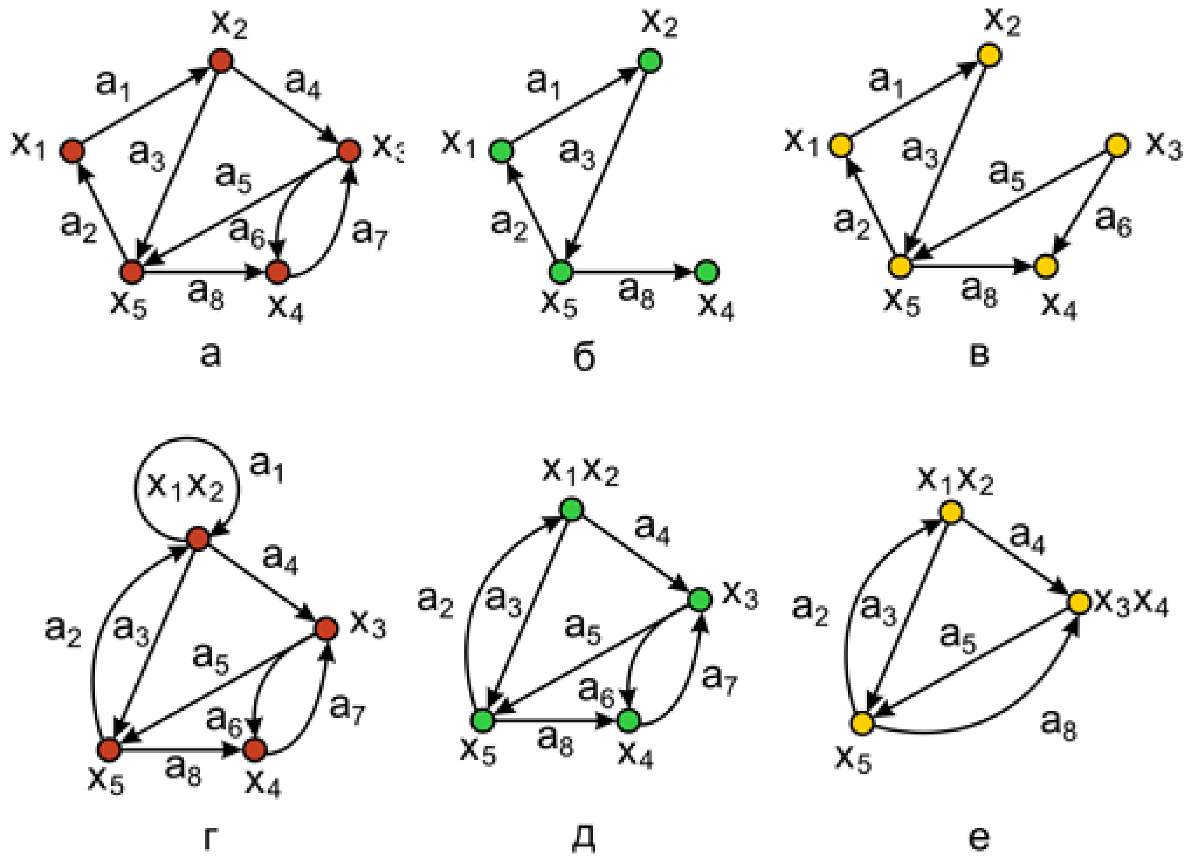


Рис. 99. Удаление вершины x_3(а, б), удаление ребра (в), замыкание (г), стягивание (е)

Удаление ребра или удаление дуги

Если a_i - дуга графа G = (X, A), то G-a_i – подграф графа G, получающийся после удаления из G дуги a_i. Заметим, что концевые вершины дуги a_i не удаляются. Удаление из графа множества вершин или дуг определяется как последовательное удаление определенных вершин или дуг.

Удаление дуг a_4 и a_7 показано на рисунке 99в. Результирующая матрица смежности графа после выполнения операции удаления дуги a_i получается путем удаления соответствующих элементов из исходной матрицы (таблица 6в).

Таблица 6а.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1		1			
X_2			1		1
X_3				1	1
X_4			1		
X_5	1			1	

Таблица 6б.

	X_1	X_2	X_4	X_5
X_1		1		
X_2				1
X_4				
X_5	1		1	

Таблица 6в.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1		1			
X_2					1
X_3				1	1
X_4					
X_5	1			1	

Таблица 6г.

	X_{1-2}	X_3	X_4	X_5
X_{1-2}	1	1		1
X_3			1	1
X_4		1		
X_5	1		1	

Таблица 6д.

	X_{1-2}	X_3	X_4	X_5
X_{1-2}		1		1
X_3			1	1
X_4		1		
X_5	1		1	

Таблица 6е.

	X_{1-2}	X_{3-4}	X_5
X_{1-2}		1	1
X_3			1
X_5	1	1	

Замыкание или отождествление

Считается, что пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все дуги в графе G, инцидентные x_i и x_j, становятся инцидентными новой вершине.

Например, результат замыкания вершины x_1 и x_2 показан на рисунке 99г для графа G (рисунке 99а). Матрица смежности графа после выполнения операции замыкания вершин x_i и x_j получается путем поэлементного логического сложения i - го и j - го столбцов и i - ой и j - строк в исходной матрице и "сжимания" матрицы по вертикали и горизонтали (таблица 6г).

Стягивание. Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин. Граф, изображенный на рисунке 99д получен стягиванием дуги a_1, а на рисунке 99е – стягиванием дуг a_1, a_6 и a_7. Соответствующие результирующие матрицы смежности показаны в таблицах 6д и 6е.

Эйлеровы графы

Эйлеровым путем в графе, называется путь, содержащий все ребра графа. Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа рисунок 100а.

Связный граф G называется эйлеровым рисунок 100(а, б), если существует замкнутая цепь, проходящая через каждое его ребро. Такая цепь называется эйлеровой цепью. Отметим, что в этом определении требуется, чтобы каждое ребро проходилось только один раз. Не эйлеров граф показан на рисунке 100в.

Если снять ограничение на замкнутость цепи, то граф называется полуэйлеровым, при этом каждый эйлеров граф будет полуэйлеровым.

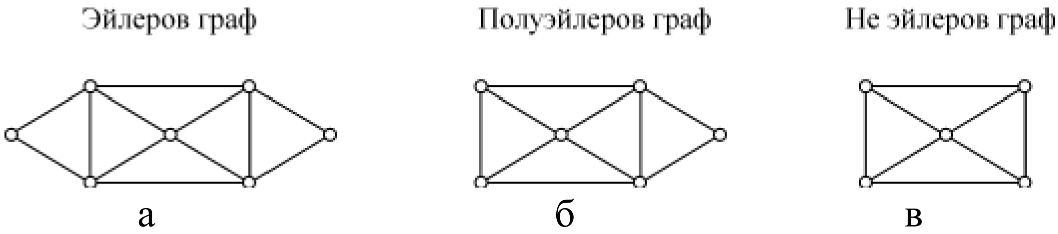


Рис. 100. Эйлеровы графы (а.б), не эйлеров граф(в)

Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике - например, можно ли нарисовать какую-нибудь диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды. Название "эйлеров" возникло в связи с тем, что Эйлер первым решил знаменитую задачу о Кенигсбергских мостах, в которой нужно было узнать, имеет ли граф, изображенный на рисунке 101, эйлерову цепь.

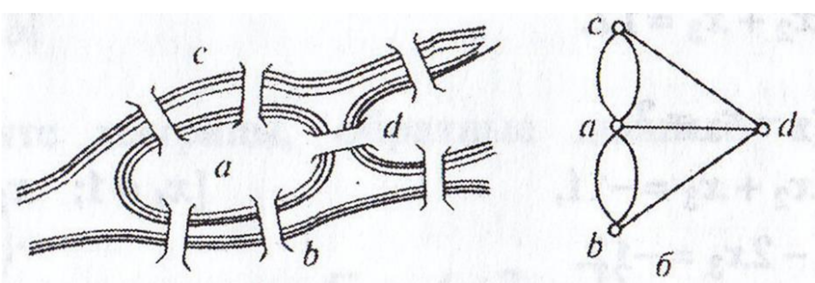


Рис.101. Задача о мостах

Теорема. Если граф G обладает эйлеровым циклом, то он является связным, а все его вершины - четными.
Доказательство: Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причем уже по другому ребру.

Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно результат подсчета входов в вершину, другое - выходов.

5.8. Алгоритмы поиска на графах

Поиск в глубину

При поиске в глубину посещается первая вершина, затем необходимо идти вдоль ребер графа, до попадания в тупик. Вершина графа является тупиком, если все смежные с ней вершины уже посещены. После попадания в тупик нужно возвращаться назад вдоль пройденного пути, пока не будет обнаружена вершина, у которой есть еще не посещенная вершина, а затем необходимо двигаться в этом новом направлении. Процесс оказывается завершенным при возвращении в начальную вершину, причем все смежные с ней вершины уже должны быть посещены.

Таким образом, основная идея поиска в глубину – когда возможные пути по ребрам, выходящим из вершин, разветвляются, нужно сначала полностью исследовать одну ветку и только потом переходить к другим веткам (если они останутся нерассмотренными).
Алгоритм поиска в глубину рисунок 102.
Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение не посещенная. Выбирается первая вершина и помечается как посещенная.
Шаг 2. Для последней помеченной как посещенная вершины выбирается смежная вершина, являющаяся первой помеченной как не посещенная, и ей присваивается значение посещенная. Если таких вершин нет, то берется предыдущая помеченная вершина.
Шаг 3. Повторить шаг 2 до тех пор, пока все вершины не будут помечены как посещенные. [25]

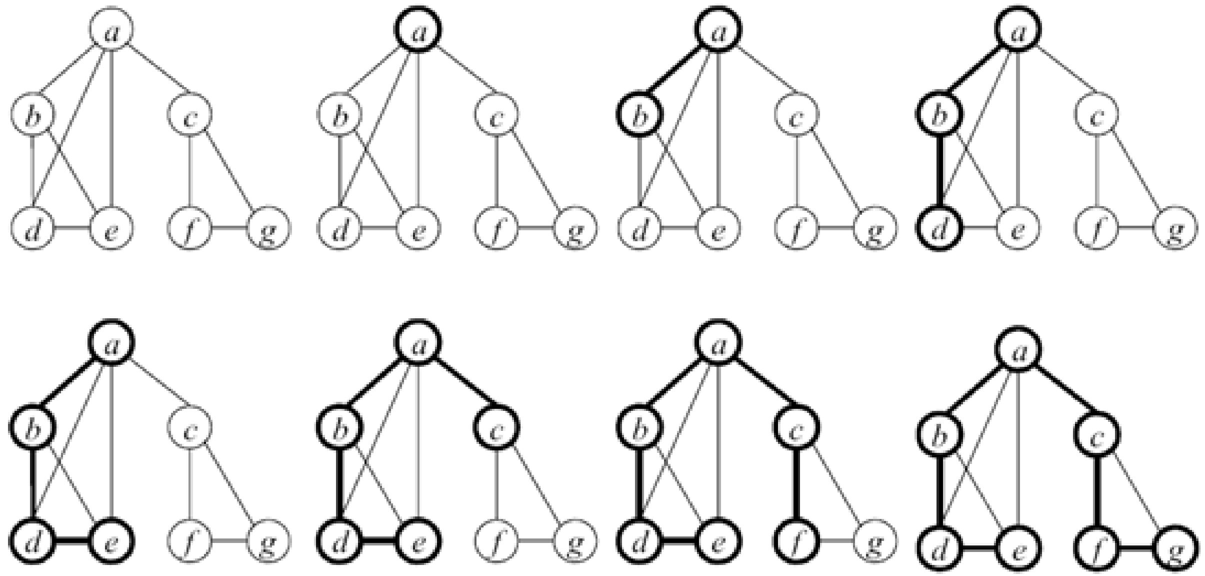


Рис.102. Алгоритм поиска в глубину

Применяется:

- для нахождения пути между двумя вершинами;
- для обнаружения циклов на графе;
- в топологической сортировке;
- в головоломках с единственным решением (например, лабиринтах).

Поиск в ширину

При поиске в ширину, после посещения первой вершины, посещаются все соседние с ней вершины. Потом посещаются все вершины, находящиеся на расстоянии двух ребер от начальной. При каждом новом шаге посещаются вершины, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего. Чтобы предотвратить повторное посещение вершин, необходимо вести список посещенных вершин. Для хранения временных данных, необходимых для работы алгоритма, используется очередь – упорядоченная последовательность элементов, в которой новые элементы добавляются в конец, а старые удаляются из начала.

Таким образом, основная идея поиска в ширину заключается в том, что сначала исследуются все вершины, смежные с начальной вершиной (вершина с которой начинается обход). Эти вершины находятся на расстоянии 1 от начальной. Затем исследуются все вершины на расстоянии 2 от начальной, затем все на расстоянии 3 и т.д. Обратим внимание, что при этом для каждой вершины сразу находится длина кратчайшего маршрута от начальной вершины.

Алгоритм поиска в ширину

Шаг 1. Всем вершинам графа присваивается значение не посещенная. Выбирается первая вершина и помечается как посещенная (и заносится в очередь).

Шаг 2. Посещается первая вершина из очереди (если она не помечена как посещенная). Все ее соседние вершины заносятся в очередь. После этого она удаляется из очереди.

Шаг 3. Повторяется шаг 2 до тех пор, пока очередь не пуста (рисунок 103). [25]

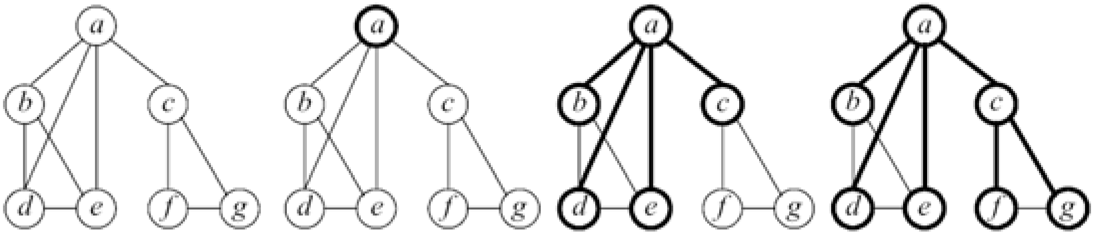


Рис. 103. Алгоритм поиска в ширину

Применяется для:

- определения кратчайших путей и минимальных остовных деревьев;
- индексации веб-страниц поисковыми ботами;
- поиска в соцсетях;
- нахождения доступных соседних узлов в одноуровневых сетях, таких как BitTorrent.

1. **Алгоритмы нахождения кратчайшего пути**

   - алгоритм Дейкстры.
   - алгоритм Беллмана-Форда.

   Применяются в:

- картографических сервисах типа Google maps или Apple maps для прокладки маршрутов и определения местоположения;
- сетях для решения проблемы минимальной задержки пути;

- абстрактных автоматах для определения через переход между различными состояниями возможных вариантов достижения некоторого целевого состояния, например, минимально возможного количества ходов, необходимого для победы в игре.

2. **Обнаружения циклов**
   - Алгоритм Флойда.
   - Алгоритм Брента.

   Применяются:

- в распределённых алгоритмах, использующих сообщения;
- для обработки крупных графов с использованием распределённой системы обработки в кластере;
- для обнаружения взаимоблокировок в системах с параллельным выполнением;
- в криптографических приложениях для выявления ключей сообщения, которые могут соответствовать одному и тому же зашифрованному значению.

Алгоритм нахождения минимального остовного дерева

Минимальное остовное дерево - это подмножество рёбер графа, которое соединяет все вершины, имеющие минимальную сумму весов рёбер, и без циклов.

- алгоритм Прима.
- алгоритм Крускала.

Применяются:

- для создания деревьев для распределения данных в компьютерных сетях;
- в кластерном анализе с использованием графов;
- при сегментации изображений;
- при социально-географическом районировании, когда смежные регионы объединяются.

Глава 6. МАТРИЦЫ

6.1. Определения

Таблица чисел вида, состоящая из m столбцов и n строк, называется матрицей размера m на n рисунок 104:

В матрице можно выделить строки, например, $(\mathrm{a}_{11}, \dots \mathrm{a}_{1n})$, столбцы, например, $(\mathrm{a}_{11}, \dots, \mathrm{a}_{m1})$, диагонали $(\mathrm{a}_{11}, \dots, \mathrm{a}_{mn})$, (a_i, j), где i=1,2,3,…,m j=1,2,3,…,n.

Впервые матрицы упоминались в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений.

Матрицы применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов - количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рис. 104. Матрица размерностью m на n

При m = 0, матрица вырождается в матрицу типа строка. При n = 0, матрица вырождается в матрицу типа столбец. При m = n, получается квадратная матрица, при этом число строк и столбцов называют порядком квадратной матрицы. Если m и n не совпадают по количеству, то матрицу называют прямоугольной.

На рисунке 105а показан пример квадратной матрицы второго порядка, а на рисунке 105б показана квадратная матрица третьего порядка. Матрица, все элементы которой равны нулю называется нуль матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

а б

Рис. 105. Квадратная матрица второго порядка(а), квадратная матрица третьего порядка(б)

Две матрицы А и В, называют равными А = В, если они одинакового порядка (то есть имеют одинаковое число строк и столбцов) и их соответствующие элементы равны рисунок 99.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Рис. 106. Равные матрицы А и В

6.2. Действия над матрицами

Для матриц возможны следующие алгебраические операции:
- сложение матриц, имеющих один и тот же порядок;
- умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую строк);
- умножение матрицы на вектор-столбец и умножение вектор-строки на матрицу (по обычному правилу матричного умножения; вектор является в этом смысле частным случаем матрицы);
- умножение матрицы на скаляр.

Сложение матриц

Матрицы одинакового порядка можно сложить. Суммой двух матриц А и В (рисунок 107а) будет матрица С (рисунок 107б), элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В, как показано на рисунке 107в.

A+B=C $\qquad$ $C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

а

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

б

Рис. 107. Сложение матриц А и В(а), пример сложения матриц(б)

Сложение матриц одного порядка, подчиняются переместительному и сочетательному законам:
A+B=B+A; (A+B) +C=A+ (B+C)

Разность матриц

Разностью двух матриц А и В, одинакового размера, называется матрица С, такая, что сложение матрицы С матрицей В в результате даст матрицу А. Разностью двух матриц А и В (рисунок 108) будет матрица С, элементы которой равны разности, соответствующих элементов матриц А и В.

A-B = C, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, то $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Рис. 108. Пример выполнения операции разности матрицы А и В

Умножение матрицы на константу

Произведением матрицы А на число λ называется матрица, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы А, как показано на рисунке 109.

$$A\times\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \lambda = \begin{pmatrix} 1\lambda & 0 & 2\lambda \\ 2\lambda & 3\lambda & 1\lambda \end{pmatrix}$$

Рис.109. Пример выполнения операции умножения матрицы на константу

Умножение матриц

Элемент матрицы произведения, находящийся на пересечении i-строки и k-столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-строки первой матрицы на элементы k-столбца второй матрицы, как показано на рисунке 110а, б. Это правило сохраняется при умножении квадратных матриц и прямоугольных, у которых число столбцов матрицы множимого равно числу строк матрицы множителя.

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то

$$A\times B= C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Рис. 110. Пример операции умножения матриц А и В

ПРИМЕР 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 5+2\times 7 & 1\times 6+2\times 8 \\ 3\times 5+4\times 7 & 3\times 6+4\times 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 1+1\times 2+0\times 2 & 2\times 2+1\times 1+0\times 2 \\ 3\times 1+1\times 2+1\times 2 & 3\times 2+1\times 1+1\times 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_2x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

ВЫВОД:

В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк сколько их имеет матрица множимое, и столько столбцов сколько их имеет матрица множитель.

ПРИМЕР 4:

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 5:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}.$$

ВЫВОД из примера 4 и примера 5: Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закон, то есть А$\times$ B $\neq$В$\times$ А. Произведение матриц подчиняется сочетательному закону
А(ВС) = (АВ) С

Особенность операции произведения матриц

Известно, что произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может не выполняться. На пример, как на рисунке 111 при умножении матрицы А и В получаем нуль матрицу:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Рис. 111. Особенность произведения матриц

Единичная матрица

Матрица вида Е на рисунке 112а – называется единичной матрицей. При умножении любой квадратной матрицы А второго порядка на единичную матрицу Е получаем матрицу АЕ, как на рисунке 112б. Аналогичный результат получим от умножения матрицы Е на матрицу А.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}= =\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

а б

Рис. 112. Единичная матрица (а), результат умножения матрицы А на единичную матрицу(б)

Единичная матрица n- порядка будет иметь вид, показанный на рисунке 113.

$$E=\left(\begin{array}{c} n\ \text{строк}\left\{\begin{matrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{matrix}\right. \\ \underbrace{\hphantom{1\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0}}_{n\ \text{столбцов}}\end{array}\right)$$

Рис.113. Единичная матрица n-порядка

Транспонированная матрица

Если в матрице А рисунок 114а, сделать все строки столбцами с тем же номером, то получим матрицу $A^{\text{т}}$ рисунок 114б , которую называют транспонированной к матрице А.

$$\text{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

а б

Рис. 114. Матрица $A^{\text{т}}$ (б), транспонированная к матрице А(а)

Диагональная матрица

Диагональная матрица - квадратная матрица, все элементы которой кроме диагональных имеют нулевые значения.

6.3. Определители

Теория определителей возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений. Термин определитель в математике имеет несколько значений. В данном случае слово «определитель» будем рассматривать только в приложении к теории матриц. Определителем называется квадратная числовая таблица, вычисляемая по определенным правилам.

Определитель второго порядка

Определителем второго порядка, соответствующим матрице А, называется число, равное (a11×a22-a12×a21), как на рисунке 115.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\times a_{22}-a_{12}\times a_{21}$$

Рис. 115. Определитель второго порядка

Примеры вычисления определителя второго порядка рисунок 116, а, б.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14-12=2 \qquad |E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

а б

Рис. 116. Пример вычисления определителей второго порядка, а и б

Свойства определителя:

1. Величина определителя не меняется, если его строки заменить соответствующими столбцами.
2. Меняется знак, если поменять местами его строки или столбцы.

3. Увеличивается в k раз, если элементы какого-либо столбца или строки увеличить в k раз, то есть общий множитель имеющийся в строке или столбце, можно выносить за знак определителя.
4. Равен нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю.
5. Равен нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны.

Определитель третьего порядка

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A рисунок 117, называется число равное:

|A| = (a11×a22×a33+a12×a23×a31+a13×a21×a32-a13×a22×a31-a11×a23×a32-a12×a21×a23)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Рис. 117. Матрица A для вычисления определителя третьего порядка

Существует негласное правило вычисления определителя третьего порядка, которое называют правилом треугольника. На рисунке 118 приведена схема по которой вычисляются элементы формулы, например, как на рисунке 119.

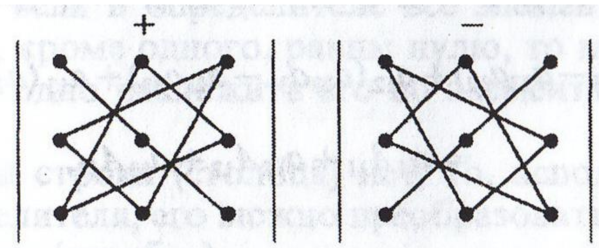


Рис. 118. Схема правила треугольника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 0.$$

Рис. 119. Пример вычисления определителя третьего порядка

Все свойства определителя второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка.

Минор элемента определителя

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного, вычеркиванием той строки и столбца, которым принадлежит данный элемент. Например, минором а12 матрицы А рисунок 114а является матрица на рисунке 120.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 120. Пример определения из матрицы А(а) минора M_{12}

Алгебраическое дополнение элемента определителя

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком минус.

$A_{i,k}$=(-1)$^{i+k}$ $M_{i,k}$. где

I – порядок элемента в строке матрицы,

k- порядок элемента в столбце матрицы,

А – алгебраическое дополнение элемента определителя. Если сумма i+k четно, то А присваивают знак минус, если сумма i+k нечетна, то А присваивают знак плюс,

$M_{i,k}$- минор.

ТЕОРЕМА

- Определитель равен сумме произведений элементов какой- либо строки или столбца на их алгебраические дополнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Определитель матрицы А можно получить по формуле, где в круглых скобках получаем дополнения определителя:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

|A|=$a_{11}a_{22}a_{33}$+$a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$-$a_{11}a_{23}a_{32}$-$a_{12}a_{21}a_{33}$=

$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$+ $a_{12}(a_{23}a_{31}$-$a_{21}a_{33})$+ $a_{13}(a_{21}a_{32}$-$a_{22}a_{31})$ =

$a_{11}A_{11}$+$a_{12}A_{12}$+$a_{13}A_{13}$

Данная формула называется разложением определителя по элементам первой строки

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

ТЕОРЕМА

- Если А и В – квадратные матрицы одного порядка с определителями |A| и |B|, то определитель матрицы |C| = |A|×|B| равен произведению определителей умножаемых матриц.

6.4. Обратная матрица

Данное положение работает только для квадратных матриц, имеющих не нулевой определитель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Обратная матрица – это такая матрица A^{-1}, при умножении на которую исходной матрицы А в результате дает нам единичную матрицу Е.

$$A \times A^{-1} = E$$

Чтобы построить обратную матрицу, необходимо сначала каждый элемент матрицы заменить его алгебраическим дополнением, деленным на определитель, а затем построить транспонированную матрицу, как показано ниже.

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{m}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$A_{i,k}$ – алгебраическое дополнение элементов матрицы, |A| - определитель матрицы.

Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1}$= A
2. $|A^{-1}|$ = 1/|A|
3. $(A \times B)^{-1}$= A^{-1}×B^{-1}
4. $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$=$(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, где T – операция транспонирования.
5. (K×(A^{-1}) = k^{-1}×A^{-1}, где k ≠ 0.
6. E^{-1}=E

6.5. Упражнения

1. Определите сумму матриц A и B и их разность:

A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Вычислите матрицу C=3A+2B, если

A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Вычислите матрицу C = A×B^

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

4. Дана матрица A. Найдите матрицу A^3:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

5. Найдите определитель матрицы A:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. Вычислите обратную матрицу А:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

7. Вычислите транспонированную матрицу A^T:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Найти минор M_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

9. Найти алгебраическое дополнение A_{23} к элементу a_{23} определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

10. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ методом треугольника.

Глава 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Матричная запись

Системой линейных алгебраических уравнений называется объединение n линейных уравнений, каждое из которых содержит k переменных:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ где} \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{matrix} \qquad (1)$$

a_{nn} – числа, называемые коэффициентами системы;
b_n – свободные члены, если $b_1 = b_2 = \ldots = 0$, то система линейных уравнений называется однородной.

Матрица A называется матрицей системы линейных уравнений (1), а ее определитель |A| является определителем системы линейных уравнений (1).

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Решением системы линейных уравнений (1) называется совокупность чисел $x_1, x_2 \ldots, x_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. Система, не имеющая решений, называется несовместной.

Пусть определитель системы (1) не равен нулю |A|≠0.

Обозначим матрицу из неизвестных через X и матрицу из свободных членов через B:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Согласно правила умножения матриц произведение A×X равно матрице:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Используя определение равенства матриц, произведение матрицы A на матрицу X можно записать как A×X=B. Данное равенство называется матричным уравнением. Так как по условию |A|≠0, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения на A^{-1} *и получим уравнение*:

$$\mathrm{A}^{-1}\,(\mathrm{A}\times\mathrm{X}) = \mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}$$

Используя сочетательный закон получим:

$$(\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{A})\times\mathrm{X} = \mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}$$

Но произведение $(\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{A})$ = E, равно единичной матрице, а EX=X, тогда получаем решение матричного уравнения в виде:

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}\mathrm{A}^{-1} \qquad (3)$$

Фактически в данном параграфе рассмотрен метод решения системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

7.2. Формулы Крамера

Способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно).

Решение системы (1) n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять с помощью определителей. Из равенства (3), согласно правила умножения матриц можно записать:

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} b_1 & \frac{A_{21}}{|A|} b_2 & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|} b_1 & \frac{A_{22}}{|A|} b_2 & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} b_1 & \frac{A_{1n}}{|A|} b_2 & \cdots & \frac{A_{nm}}{|A|} b_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует:

$x_i = \frac{1}{|A|} (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni})$, где i = 1,2,3,…,n

Или, согласно теореме для определителей n-порядка, можно записать:

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots & a_{1i-1} b_1 a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots & a_{2i-1} b_2 a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots & a_{ni-1} b_n a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Краткая запись будет сформулирована так:

$$x_i = \frac{\Delta^i}{\Delta},$$

где i = 1, 2, 3, n Δ – определитель системы, Δ^i – определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дискретная математика – активно развивающееся и практически востребованное направление математики. Ее методы и инструментальные средства применяются в различных науках и практических областях деятельности человека: электронике, программировании, биологии, химии, генетике и т.д. Поэтому актуальность изучения дискретной математики и ее направлений, являясь основой инженерной деятельности человека, не может подвергаться сомнению.

В учебном пособии рассмотрены основные базовые элементы разделов дискретной математики: теория множеств; комбинаторика; основы дискретной вероятности; алгебра логики; теория графов; теория матриц с учетом рабочей программы курса «Дискретная математика и математическая логика», утвержденной для направления подготовки 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника на кафедре вычислительной техники и систем управления Владимирского государственного университета.

Особенность издания – особый акцент на разделы дискретной математики и математической логики, используемые в прикладном программировании и микроэлектронике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://habr.com/ru/post/457312/

2. https://megalektsii.ru/s61787t1.html

3. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Вильямс, 2006. – 960 с. – ISBN 0-13-086998-8.

4. Редькин Н. П. Дискретная математика. – М.: Лань, 2006. – 96 с. – ISBN 5-8114-0522-7.

5. Борзунов С. В. Задачи по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 528 с. – 800 экз. – ISBN 978-5-9775-3672-1.

6. Капитонова Ю. В., Кривой С. Л., Летичевский А. А. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с. – 3000 экз. – ISBN 5-94157-54

7. Романов В.Ф. Основы дискретной математики: Метод, указания к практ. занятиям/ Владим. гос. ун-т. Владимир, 2008, 40 с.

8. https://yandex.ru/images/search?pos=12&img_url=http%3A%2F%2Fevkova.org%2Fevkovaupload%2Fimg%2F189362.png&text=%D0%B2%D1%8B%D0%B1%D0%BE%D1%80%20%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%20%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B8&lr=192&rpt=simage&source=serp.

9. https://synset.com/ai/ru/tsp/Salesman_Intro.html

10. https://habr.com/ru/post/560468/

11. Chromeextension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://vuz.exponenta.ru/PDF/book/commi.pdf

12. https://prog-cpp.ru/deikstra/

13. https://e-maxx.ru/algo/ford_bellman

14. https://translated.turbopages.org/proxy_u/en-ru.ru.15025489-63ce4662-f55f6479-74722d776562/https/en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem

15. https://www.yandex.ru/images/search?from=tabbar&text=%D1%81%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0%20%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D1%88%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%D0%BC&pos=36&img_url=http%3A%2F%2Fprog-cpp.ru%2Fwp-content%2Fuploads%2F2014%2F05%2Fsort4.png&rpt=simage&lr=20678

16. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A1%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0_%D0%B2%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%B2%D0%BA%D0%B0%D0%BC%D0%B8

17. Кристиан Брайан, Гриффитс Том. Математика жизни: Простые алгоритмы принятия верных решений; Пер. с анг. - М.: Альпина Паблишер, 2020. -372 с.ISBN 978-5-9614-3914-4

18. Справочник по математике для средних учебных заведений. Цыпкин А.Г.\ Под редакцией С.А. Степанова. -3-е изд. -М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981, 480 с.]

19. Туляков, В. С.Схемотехника цифровой электроники : учеб. пособие [Электронный ресурс] / В. С. Туляков ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 364 с. – ISBN 978-5-9984-1359-9.

20. Задачи. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Математические науки Издательство: МЦНМО ISB978-5-4439-1729-0

21. https://function-x.ru/graphs2_definitions_classes.html

22. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B2_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84

23. https://intuit.ru/studies/courses/1033/241/lecture/6210

24. https://intuit.ru/studies/courses/648/504/lecture/11474?page=2

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕСТ 1

1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр {1,2,3,4,6,0}, если
 А) ни одна цифра не повторяется более одного раза;
 В) цифры могут повторятся;
 С) числа должны быть нечетными;
2. Задано множество А = {1, 2, {а,3}}. Найдите булеан и кардинальное число А.
3. Изобразите на координатной сетке X и Y, произведение множеств А*В, если А = N, В = [1,2].
4. Два множества равны, если…… <продолжите фразу>.
5. Докажите тождество А/ (А/В) = пересечению (А и В). Аналитически.
6. Чему равна мощность пересечения множеств А и В?
7. Даны множества А = [- 2;1], В= (0,3). Найти объединение множества А и В и пресечение множеств А и В.
8. Заданы три множества А, В, С. Как найти мощность объединения множеств.
9. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,7, если каждая цифра входит в изображение числа один раз.
10. Задана функция у =F(x). Что означает: множество у, множество F, множество х.
11. Дайте определение равенства функций F(x) и G(x).
12. Поведение функции. Дайте определение монотонно возрастающей функции.
13. Вы выбираете автомобиль. Продавец предлагает варианты: седан или хэчбэк; дизель или бензиновый двигатель; объемы двигателя 2 литра, 2.4 литра; автоматическая коробка передач или механическая коробка передач; салон кожа или велюр; 20 видов окраски. Вы для себя решили, что будете покупать седан с бензиновым двигателем. Сколько вариантов выбора осталось без Вашего внимания.
14. В студенческой группе 16 человек, из них 4 девушки и 12 юношей. Сколько вариантов существует, чтобы выбрать двух человек одного пола.

15. В множестве N элементов. Сколько подмножеств существует в указанном множестве.
16. Задан алфавит из шести букв. Сколько четырех буквенных слов можно составить из заданного алфавита?
17. В соревновании участвуют 30 спортсменов. Из них 15 мужчин и 15 женщин.
Сколько существует вариантов присуждения золотой, серебряной и бронзовой медали?
18. У туриста поклажа состоит из рюкзака и трех сумок разного веса. Сколько вариантов переноса поклажи существует у туриста, если сумки можно переносить по одной в руках, а рюкзак за спиной.
19. Дайте определение сочетания без повторений. (текстом).
20. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждые встретились один раз. Сколько сыграно партий?
21. Перечислите способы задания множеств.
22. Дайте определение симметричной разности множества А и В.
23. В обойме автомата N патронов. Стрельба может вестись в режиме одиночного выстрела либо очередями с любым количеством патронов. Сколько существует вариантов опустошения обоймы?
24. У стола овальной формы 6 стульев. Сколько вариантов посадки 6 посетителей
существует?

ТЕСТ 2

Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «ПРИЧЕМ»

Заданы множества А= [1,6] и В= [1,3]. Дайте графическое изображение декартова произведения АВ.

Число слов, которые можно составить из 12 букв (4 буквы А, 3 буквы Б, 2 буквы В, 2 буквы Г)

В вазе лежит банан, груша и яблоко. Сколько способов существует, чтобы взять хотя бы один фрукт.

Напишите таблицу состояния логической функции «отрицание модуля2».

6. Напишите в виде формулы следующие логическое высказывание: "Если a и b истинны, то c — истинно. Но если c — ложно: значит, a или b ложны".

7. В аудитории 5 парт, у каждой парты 2 стула. Сколько существует способов посадить за столами 10 студентов?

8. Дайте таблицу состояний конъюнктура на три входа, у которого один вход подключен к «0».

9. В студенческой группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 3 человек?

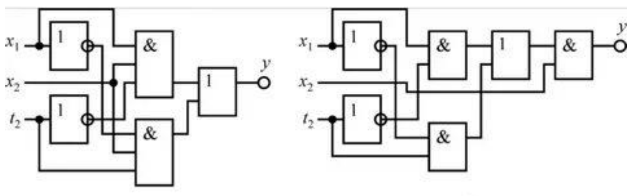
10. По формуле нарисуйте логическую схему.

$F = (\overline{A} \oplus B \wedge C) \vee A \wedge \overline{B}$

11. Заданы в не ограниченном количестве логические схемы 2ИЛИ-НЕ. Постройте графическую схему 4И из элементов 2ИЛИ-НЕ.

12. Напишите формулу Бинома Ньютона третьего порядка.

13. Восстановите по логической схеме аналитическую формулу логической функции



14. Логическая функция задана таблицей состояний. Постройте дизъюнктивную нормальную форму логической функции F и нарисуйте логическую схему по формуле.

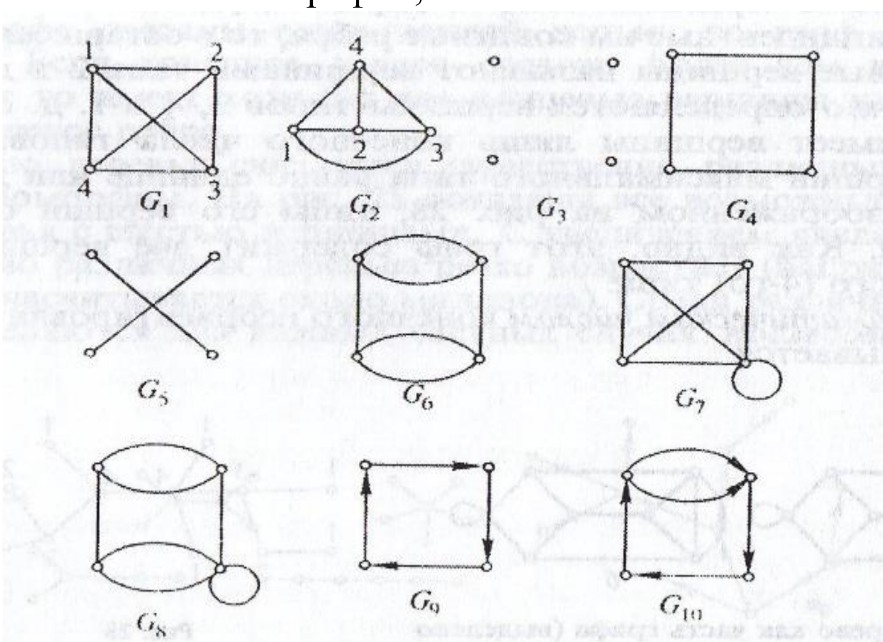
a	в	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
1	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	0

15. В магазине продают апельсины, бананы, яблоки, киви, манго. Надо выбрать четыре фрукта. Сколько способов существует?

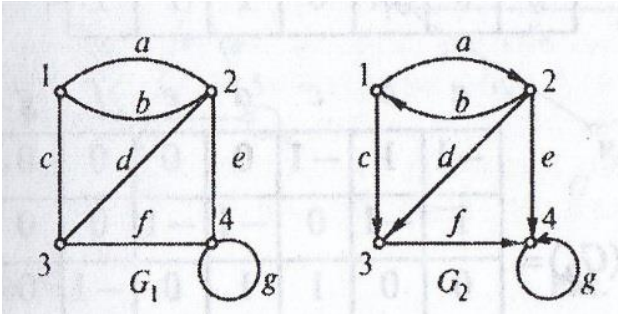
16. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 7 дней. Сколько существует способов?
17. Задано множество А, состоящее из 4 элементов. Сколько можно получить упорядоченных подмножеств данного множества?
18. Обсуждая конструкцию нового трёхмоторного самолёта, трое конструкторов поочередно высказали следующие предположения:
1) при отказе второго двигателя надо приземляться, а при отказе третьего можно продолжать полёт;
2) при отказе первого двигателя лететь можно, или при отказе третьего двигателя лететь нельзя;
3) при отказе третьего двигателя лететь можно, но при отказе хотя бы одного из остальных надо садиться.
Лётные испытания подтвердили правоту каждого из конструкторов. Определите, при отказе какого из двигателей нельзя продолжать полёт.
19. Нарисуйте функциональную схему ручного управления светофором.
20. В студенческой группе каждый студент знает хотя бы один иностранный язык. 5-английский, 6 - немецкий, 3 - английский и немецкий. Сколько студентов в группе и сколько знают только один язык?

ТЕСТ 3

1. Дайте полное название графам, показанным ниже.



2. Вычислить степени вершин графов G1 и G2.



3. Нарисуйте по матрицам смежности графы G1 и G2.

1	2	3	4	
0	2	1	0	1
2	0	1	1	2
1	1	0	1	3
0	1	1	1	4

1	2	3	4	
0	1	1	0	1
1	0	1	1	2
0	0	0	1	3
0	0	0	1	4

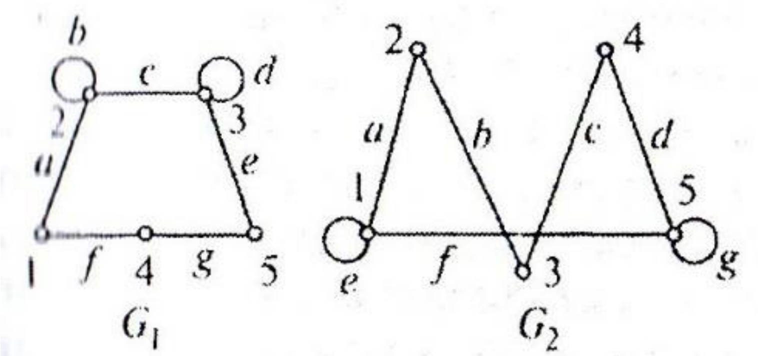
4. На рисунке заданы матрицы инцидентности. Нарисуйте графы G1 и G2.

$A(G_1)=$

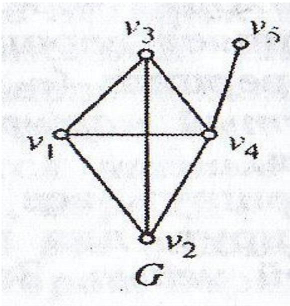
a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	2
0	0	1	1	0	1	0	3
0	0	0	0	1	1	1	4

a	b	c	d	e	f	g	
−1	1	−1	0	0	0	0	1
1	−1	0	−1	−1	0	0	2
0	0	1	1	0	−1	0	3
0	0	0	0	1	1	2	4

5. Что значит - задать алгоритм работы цифрового автомата?
6. Определите изоморфность графов G1 и G2(на уровне Да или Нет).



7. Имеют ли пятиугольник и четырехугольная пирамида эйлеров цикл?
8. Определите радиус и центр графа.



9. Дайте определение маршрута на графе.
10. Приведите пример изображения планарного графа.
11. Дайте определение автомата Мили и автомата Мура.
12. Нарисуйте граф автомата Мура, имеющий 5 состояний 2 входных сигнала и 2 выходных по таблице переходов.

λ	w_1	w_2	w_1	w_2	w_2
δ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
z_1	a_2	a_2	a_5	a_5	a_2
z_2	a_3	a_3	a_1	a_1	a_4

13. Дайте определение псевдографа.
14. Какой граф называется деревом?
15. В первенстве группы по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводят по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной, Еленой; Борис – с Андреем, Галиной; Виктор – с Галиной, Дмитрием, Еленой; Галина – с Андреем, Виктором и Борисом. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?
16. Теорема Эйлера. Дайте определение.
17. Синтезируйте логическую схему для трехразрядного умножителя (A*B), где A и B трехразрядные двоичные числа.
18. Чем маршрут отличается от цепи, по теории графов?
19. Задана матрица M (n, m), n> m. Взять диагонали матрицы и переписать их элементы в обратном порядке. Вопрос – это решаемая задача для программиста? (ДА или НЕТ и почему).
20. Минимизируйте логическую функцию с помощью тождеств и метода испытаний

$$f(A.B,C) = \bar{A}B\bar{C} \vee \overline{ABC} \vee A\overline{BC} \vee A\bar{B}C$$

Учебное электронное издание

ТУЛЯКОВ Валерий Станиславович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и радиоэлектроники
кафедра вычислительной техники и систем управления
tulyakov801@yandex.ru