Владимирский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление

Учебно-практическое пособие

Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление

Учебно-практическое пособие

Владимир 2023

УДК 517
ББК 22.161
М34

Автор-составитель Ю. А. Кастэн

Рецензенты:
Кандидат технических наук
доцент кафедры вычислительной техники и систем управления
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. Б. Буланкин

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры высшей математики
Московского физико-технического института
И. В. Каржеманов

М34 **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ** АНАЛИЗ. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление : учеб.-практ. пособие / авт.-сост. Ю. А. Кастэн ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 95 с.
ISBN 978-5-9984-1842-6

Материал пособия соответствует программе дисциплины «Математический анализ». Содержит теоретические сведения, задачи для самостоятельной работы и решения типовых задач.

Предназначено для студентов всех форм обучения направлений 02.03.01 – Математика и компьютерные науки, 01.03.02 – Прикладная математика и информатика. Может быть полезно преподавателям, ведущим занятия по дисциплине «Математика» других направлений.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-1842-6

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие является задачником и решебником по курсу «Математический анализ». Оно содержит три раздела курса в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математический анализ» для направлений 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.02. «Прикладная математика и информатика» в 1-м семестре.

В каждом разделе приведены необходимый справочный материал для решения большинства задач, а также большое количество разобранных примеров по основным разделам курса. Представлены задачи для аудиторной и домашней работы, а также варианты заданий для подготовки к экзамену. Пособие может служить руководством к самостоятельной работе студентам, а также использоваться как задачник для домашней работы и подготовки к экзаменам.

В книге рассматриваются введение в математически анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной, а также общая схема исследования функции с помощью производной и построение графиков.

Разбираются типовые задачи, их подробное решение и объяснение, что углубляет понимание теоретического материала и поясняет применение формул, позволяет эффективно использовать книгу для самостоятельной работы. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованы преподавателем для проведения практических занятий или рейтинг-контроля по вариантам.

Подбор задач проводился в течение многих лет преподавания дисциплины «Математический анализ».

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Предел числовой последовательности

Пусть переменная x принимает последовательно значения

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью* $\{x_n\}$. Последовательность задана, если известна формула для n-го члена.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

<u>Пример 1.1.</u> Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Решение. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ принимает значения

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Возьмем произвольное число$\varepsilon > 0$. Покажем, что начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В данном случае $x_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$. Неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ или $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ будет выполняться, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех

$n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Это обозначает, что x_n имеет пределом нуль, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Пусть $\varepsilon = 0.001$. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000$. Следовательно, N=1000.

<u>Пример 1.2.</u> Доказать, что предел последовательности

$z = -3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ (n=1,2,3,…) равен -3.

Решение. Данная последовательность принимает значения

$$-4, -2\frac{3}{4}, -3\frac{1}{9}, -2\frac{15}{16}, \ldots$$

Пусть дано любое число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$z_n - (-3) = [-3 + \frac{(-1)^n}{n^2}] - (-3) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Эта разность будет по абсолютной величине меньше ε:

$$|z_n - (-3)| < \varepsilon, \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon, \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

когда $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$. В качестве N можно выбрать меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда при всех n>N $|z_n - (-3)| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -3$.

2. Предел функции

Число b называется *пределом функции y=f(x)* при $x \to a$ (в точке a), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$, когда $0 < |x - a| < \delta$.

Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$($x$ стремится к a произвольным образом).

Свойства пределов функции:

Если переменные величины $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)+\lim\limits_{x\to a}f_2(x)-\lim\limits_{x\to a}f_3(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)]=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_3(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}[c\cdot f_1(x)]=c\cdot\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)]$;

4) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$, ($n$-целое число, $n>0$);

5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\neq 0$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$.

Если c - постоянная величина, причем $c>0$, то:

7) $\lim\limits_{x\to a}\ c=c, c-const.$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\ cx=\infty$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\infty$;

10) $\lim\limits_{x\to -0}\frac{c}{x}=-\infty$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x}=\infty$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$;

Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, т.е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Пример 2.1. Найти предел функции $f(x)=x^5-5^{x+1}+3$ при $x\to -1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)=(-1)^5-5^{-1+1}+3=1$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -1}(x^5-5^{x+1}+3)=1$.

Пусть дана дробно-рациональная функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ - некоторые многочлены. Тогда:

Если степень многочлена $P(x)$больше степени многочлена $Q(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Если степень многочлена $P(x)$ равна степени многочлена $Q(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{p}{q}$, где p, q - числовые коэффициенты при наивысших степенях x в данных многочленах.

<u>Пример 2.2.</u> Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$.

Решение: В данном случае степени числителя и знаменателя равны двум, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2} = \frac{1}{3}$.

Ответ:$\frac{1}{3}$.

<u>Пример 2.3.</u> Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-8x}{3x^2-2x^3+3}$.

Решение: В данном случае снова имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия используем то же известное свойство, что и в предыдущем случае. Степень числителя равна двум, а степень знаменателя – трём. Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-8x}{3x^2-2x^3+3} = 0$.

*Ответ:*0.

<u>Пример 2.4.</u> Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+5x-14}$.

Решение: В данном случае снова имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, преобразуем данную функцию, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+5x-14} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x+7)} = \frac{4}{9}.$$

Ответ:$\frac{4}{9}$.

<u>Пример 2.5.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$.

Решение. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле $\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена, затем сокращаем дробь на $(x-5)$:

$$\lim_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to5}\frac{2(x-5)(x-\frac{1}{2})}{3(x-5)(x+\frac{1}{3})}=\lim_{x\to5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\frac{9}{16}$.

<u>Пример 2.6.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$.

Решение. Сократим дробь, разделив на $(x+2)$ числитель и знаменатель в отдельности:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to-2}\frac{x^4+x-5}{x^3+3x-1}=-\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}=-\frac{3}{5}$.

<u>Пример 2.7.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})$.

Решение. Производим вычитание дробей и полученную в результате дробь сокращаем на $(x-2)$:

$$\lim_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4})=\frac{1}{4}$.

Пример 2.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Решение. Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавляемся от иррациональности в числителе и затем делим числитель и знаменатель дроби на x:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

Ответ:$-\frac{5}{2}$.

Пример 2.9. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$.

Решение: В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{1}{\infty-\infty}$. Чтобы раскрыть её, домножим данную дробь на дробь, сопряжённую её знаменателю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{-2}=\frac{\infty}{-2}=-\infty$$

Ответ:$-\infty$.

Пример 2.10. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$.

Решение: В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, введём подстановку $t^6=x$. Заметим, что $t\to0$, при $x\to0$. Получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to0}\frac{t^3-4t^2}{t^4-t^2}=\lim_{x\to0}\frac{t-4}{t^2-1}=\frac{-4}{-1}=4$$
.

Ответ:4

3. Замечательные пределы

I замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$

II замечательный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=[1^\infty]=e$

<u>Пример 3.1.</u> Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}$.

Решение: Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{25}\cdot\frac{(5x)^2}{(\sin 5x)^2}\right)=\frac{1}{25}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot 1^2=\frac{2}{25}.$$

Ответ: $\frac{2}{25}$.

<u>Пример 3.2.</u> Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Решение: Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, как и в предыдущем задании, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Введём подстановку $t=\frac{\pi}{2}-x$. Заметим, что $t\to 0$, при $x\to\frac{\pi}{2}$. Получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 3.3. Найти предел функции: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x$.

Решение: Имеем неопределённость вида 1^∞. Чтобы раскрыть её, приведём данную дробь к виду, который допускал бы применение второго замечательного предела $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-4}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^x$. Далее, воспользовавшись равенствами $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+a}\right)^x = e$ и $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$, получим: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^x = e^{-4}$.

Ответ: e^{-4}.

Пример 3.4. Найти предел $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\ [(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}]^{-2x\cdot\frac{1}{x}} = e^{-2}.$$

Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = (1^\infty) = e^{-2}.$$

Ответ: e^{-2}.

Пример 3.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-3}{x+2})^{2x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-3}{x+2})^{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2-5}{x+2})^{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-5}{x+2})^{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ [(1+\frac{1}{\frac{x+2}{-5}})^{\frac{x+2}{-5}}]^{\frac{-5(2x+1)}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x-5}{x+2}}=e^{-10}$$

Ответ: e^{-10}.

Пример 3.6. Найти предел функции: $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обратим внимание, что в данном случае $x\to 3$, поэтому нет необходимости использовать второй замечательный предел, поскольку нет никакой неопределённости, и предел может быть вычислен непосредственно.

$$\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\left(1+\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}.$$

4. Непрерывность функции

Обозначения односторонних пределов функции:

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ - (x стремится к a слева, оставаясь меньше a),

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ - (x стремится к a справа, оставаясь больше a).

Если односторонние пределы совпадают, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Если односторонние пределы различны, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \to a$.

Определение. Функция f(x), определенная в некоторой окрестности U(a) точки a, называется непрерывной в этой точке, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция f(x), определенная в некоторой окрестности U(a) точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R$, $|x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Обозначение: *f(x)* □ C(a) - функция f(x) непрерывна в точке a

Определение. Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва.

Пусть a - точка разрыва функции $f(x)$. Рассмотрим два односторонних предела $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Возможны следующие три случая:

1. Оба этих предела являются конечными и равными друг другу, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, то точка a называется точкой **устранимого** разрыва.

2. Оба этих предела являются конечными и неравными друг другу, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, то точка a называется точкой разрыва **I рода.**

3. Если хотя один из односторонних пределов вообще не существует или равен $\pm\infty$, то точка разрыва , называется точкой разрыва **II рода**.

Пример 4.1. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1-0} 5^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение: Прежде всего, заметим, что если x стремится к единице слева, то $(x$-$1)$ будет принимать близкие к нулю отрицательные значения, и выражение $\frac{1}{x-1}$, очевидно, стремится к $-\infty$.
Тогда: $\lim\limits_{x\to 1-0} 5^{\frac{1}{x-1}} = [5^{-\infty}] = 0$.

Ответ: 0.

Пример 4.2. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{6}{x-3}$при $\text{x} \to 3$ слева и справа.

Решение. Задача сводится к нахождению двух пределов

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3}$$

Если $x \to 3-0$, т.е. x стремится к 3, оставаясь меньше 3, то величина $x-3$ является бесконечно малой, принимающей отрицательные значения. Обратная ей величина будет бесконечно большой, принимающей также отрицательные значения, тем же свойством обладает и величина $\frac{6}{x-3}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} = -\infty$.

Если $x \to 3+0$, т.е. x стремится к 3, оставаясь больше 3, то величина $x-3$ является положительной бесконечно малой. Обратная ей величина $\frac{6}{x-3}$ будет бесконечно большой, принимающей положительные значения. Этим свойством обладает и величина $\frac{6}{x-3}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3} = \infty$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} = -\infty \quad \lim\limits_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3} = \infty$.

Пример 4.2. Исследовать функцию на непрерывность: $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$.

Решение:

Найдём область определения данной функции. $D(f(x))$: $(-\infty; 1 \cup (1;3) \cup (3;\infty)$.

Итак, имеем две точки разрыва: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Теперь определим, каков характер разрыва функции в каждой из этих точек.

Точка $x_1 = 1$ является точкой бесконечного разрыва (второго рода), так как: $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2-3x}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{0} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^2-3x}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{-0} = +\infty$.

Точка $x_2 = 3$ является точкой устранимого разрыва, так как:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 .$$

Окончательный ответ: функция непрерывна при $x \in (-\infty; 1 \cup (1;3) \cup (3;\infty)$. Точка $x_1 = 1$ является точкой бесконечного разрыва; точка $x_2 = 3$ является точкой устранимого разрыва.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Переменная величина $\propto(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое $\delta > 0$, что $|\propto(x)| < \varepsilon$, когда $|x - a| < \delta$.

Предел бесконечно малой величины $\propto(x)$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \propto(x) = 0$.

Разность между переменной величиной x и ее пределом a есть величина бесконечно малая, т.е. $x - a = \propto$, откуда $x = a + \propto$.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин и их произведение есть величина бесконечно малая. Произведение постоянной и ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. (Величина x называется *ограниченной*, если существует число $c > 0$ такое, что для всех значений x выполняется неравенство $|x| < c$.)

Переменная величина x называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого положительного числа N можно указать такой момент в изменении этой величины, начиная с которого $|x| > N$.

Бесконечно большая величина предела не имеет, но иногда условно говорят, что предел ее есть бесконечность, причем если она, начиная с некоторого момента, принимает только положительные значения, то предел ее $+\infty$, если отрицательные, то $-\infty$.

Если x - бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ - бесконечно малая, т.е. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Если α - бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ - бесконечно большая величина, т.е. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha} = \infty$.

Сравнение бесконечно малых величин

Две бесконечно малые величины $\propto$ и β называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если предел их отношения отличен от нуля и от бесконечности, т.е. $\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta} = k, (k \neq 0, k \neq \infty)$.

Величина $\propto$ называется бесконечно малой величиной высшего порядка по сравнению с β при $x \to a$, если предел их отношения равен нулю, т.е. $\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta} = 0$.

Величина $\propto$ называется бесконечно малой величиной низшего порядка по сравнению с β при $x \to a$, если предел отношения $\propto$ к β является бесконечно большой величиной, т.е. $\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta} = \infty$.

Бесконечно малые величины $\propto$ и β называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице, т.е. $\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta} = 1$.

Обозначение эквивалентных бесконечно малых величин $\propto$ и β:

$$\propto \sim \beta$$

Эквивалентные бесконечно малые величины обладают следующими свойствами:

1) разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них;

2) при нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т.е. если $\propto \sim \propto_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\propto_1}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\propto}{\beta_1}=\lim_{x\to a}\frac{\propto_1}{\beta_1}$$

Замечание 1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.

Замечание 2. Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины, находят предел их отношения. Если это отношение предела не имеет, то величины несравнимы.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	2. $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
3. $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.	4. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.
5. $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$.	6. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.
7. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.	8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Пример 5.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot sin6x}{(2x)^2}$.

Решение. Используя эквивалентность бесконечно малых величин, заменяем $sin6x$ на $6x$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sin6x}{(2x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{(2x)^2}=\left[\frac{6}{4}\right]=\frac{3}{2}.$$

Ответ:$\frac{3}{2}$

Пример 5.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx\cdot ln^2(1+2x)}{(1-cosx)\cdot tg4x}$.

Решение. Преобразуем выражение так, чтобы использовать *I замечательный предел* и эквивалентность бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx\cdot ln^2(1+2x)}{(1-cosx)\cdot tg4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2x)^2}{\frac{x^2}{2}\cdot 4x}=2.$$

Ответ. 2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1) **С помощью преобразований графиков элементарных функций построить график функции $f(x)$.**

1.1 $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$	1.2 $f(x) = x + \sin x$
1.3. $f(x) = x \cdot sinx$	1.4 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
1.5 $f(x) = -4\cos\lvert 2x - \dfrac{\pi}{4}\rvert + 1$	1.6 $f(x) = \sqrt{\sin x}$
1.7 $f(x) = \sin\lvert x + \dfrac{\pi}{3}\rvert$	1.8 $f(x) = \lvert e^{x-1} - \dfrac{3}{2}\rvert$
1.9. $f(x) = x \cdot cosx$	1.10 $f(x) = x - \cos x$
1.11 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	1.12 $f(x) = \sqrt{\cos x}$
1.13 $f(x) = \cos\lvert x - \dfrac{\pi}{3}\rvert$	1.14 $f(x) = \lvert\cos\lvert x + \dfrac{\pi}{4}\rvert\rvert$
1.15 $f(x) = \lvert\dfrac{x-2}{x+3}\rvert$	1.16 $f(x) = x^2 - 2\lvert x\rvert + 5$
1.17 $f(x) = x^2 + \lvert 3x - 1\rvert$	1.18 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
1.19 $f(x) = \lvert x + \dfrac{\pi}{2}\rvert$	1.20 $f(x) = \lvert x^2 + x\rvert - 2$
1.21 $f(x) = e^{-\lvert x+3\rvert}$	1.22 $f(x) = \sin(3\lvert x - \dfrac{\pi}{4}\rvert)$
1.23 $f(x) = \lvert\cos(\dfrac{x}{2}) + \pi\rvert$	1.24 $f(x) = \lvert\dfrac{x+1}{x-3}\rvert$
1.25 $f(x) = \dfrac{\lvert x-2\rvert}{x+2}$	1.26 $f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert + 3}{x-3}$
1.27 $f(x) = -\sqrt{x^2 - x + 5}$	1.28 $f(x) = 2x^2 - \lvert 3x\rvert + 1$
1.29 $f(x) = x^2 - \lvert 2x + 4\rvert$	1.30 $f(x) = \cos(2\lvert\dfrac{\pi}{3} - x\rvert)$

2) **Показать, что последовательность $\{\alpha_n\}$ имеет пределом число A. Определить, начиная с какого номера N значения последовательности становятся и остаются меньше 0,005.**

2.1 $\alpha_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}, A = 2$.	2.2 $\alpha_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, A = \dfrac{3}{4}$.
2.3 $\alpha_n = \dfrac{1+3n}{6-n}, A = -3$.	2.4 $\alpha_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}, A = -\dfrac{1}{2}$.
2.5 $\alpha_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, A = -\dfrac{3}{5}$.	2.6 $\alpha_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, A = 2$.
2.7 $\alpha_n = \dfrac{5-4n}{2-n}, A = 4$.	2.8 $\alpha_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, A = \dfrac{1}{2}$.
2.9 $\alpha_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, A = -\dfrac{1}{2}$.	2.10 $\alpha_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, A = \dfrac{3}{5}$.
2.11 $\alpha_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}, A = -\dfrac{1}{2}$.	2.12 $\alpha_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, A = -\dfrac{2}{3}$.
2.13 $\alpha_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, A = 2$.	2.14 $\alpha_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, A = -\dfrac{2}{3}$.
2.15 $\alpha_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, A = -5$.	2.16 $\alpha_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, A = 3$.
2.17 $\alpha_n = \dfrac{n}{3n-1}, A = \dfrac{1}{3}$.	2.18 $\alpha_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}, A = -2$.
2.19 $\alpha_n = \dfrac{n+1}{1-2n}, A = -\dfrac{1}{2}$.	2.20 $\alpha_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, A = -3$.
2.21 $\alpha_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}, A = \dfrac{2}{3}$.	2.22 $\alpha_n = -\dfrac{5n}{n+1}, A = -5$.
2.23 $\alpha_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, A = -\dfrac{1}{2}$.	2.24 $\alpha_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, A = 2$.
2.25 $\alpha_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, A = \dfrac{4}{3}$.	2.26 $\alpha_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, A = -\dfrac{1}{2}$.
2.27 $\alpha_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, A = 7$.	2.28 $\alpha_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, A = \dfrac{7}{2}$.
2.29 $\alpha_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, A = \dfrac{3}{2}$.	2.30 $\alpha_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, A = 2$.

3) **Найти предел функции**

3.1 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{3x^2-16x+5}$	3.2 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-4x}{x^4-x^3-6x^2}$
3.3 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-2x-35}{x^3-8x^2+7x}$	3.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-1}$
3.5 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^3+3x^2-7x-21}$	3.6 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{5x^2-19x-4}$
3.7 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-7x+10}$	3.8 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+21x+5}{2x^2+9x-5}$
3.9 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{5x^2-14x-3}$	3.10 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+x^2+5x+5}$
3.11 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^4-6x^3-x+6}$	3.12 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+13x+4}{x^3+4x^2+2x+8}$
3.13 $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+3x-28}{5x^2+36x+7}$	3.14 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^3-8x^2-2x+16}{x^2-5x-24}$
3.15 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^3-2x^2-x+2}$	3.16 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{x^2-10x+9}$
3.17 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3-x^2-6x}$	3.18 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+8x}$
3.19 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+4x^2-2x-8}{x^2+8x+16}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{4x^2-5x+1}$
3.21 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$	3.22 $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{3x^2+28x+9}{x^3+9x^2+x+9}$
3.23 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{5x^2-26x+5}$
3.25 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+x^2+x+1}$	3.26 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}$
3.27 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3x^2-19x+6}{2x^2-13x+6}$	3.28 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{-x^2-12x-32}{x^2+16x+64}$
3.29 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-3x^2+22x-7}{4x^2-26x-14}$	3.30 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-10x+9}{-x^2+11x-18}$

4) **Найти предел функции**

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{6-x}}{x-2}$	4.2 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x+9}}{x+5}$
4.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{4+5x}}{x^2-1}$	4.4 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x-4}-2}{\sqrt{x}-2}$
4.5 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}+2}{x^3+27}$	4.6 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+3x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$
4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x+8}-2}{x^2-x}$	4.8 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{3-\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$
4.9 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x+4}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	4.10 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[4]{2x+4}-2}{\sqrt{3x-2}-4}$
4.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}-1+x}{x}$	4.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$
4.13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$	4.14 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{8x+3}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3x-3}}$
4.15 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-x}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$	4.16 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$
4.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[3]{1-5x}}$	4.18 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$
4.19 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x^2}-4}$	4.20 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{x+2/3}-\sqrt{3x}}$
4.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt[5]{x}}$	4.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+5x-2x^2}-2}{\sqrt[3]{2x^3+x^2}}$
4.23 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{3x+1}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	4.24 $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{x+1/2}-\sqrt{3x}}$
4.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+1}-2x-1}{\sqrt[3]{x}}$	4.26 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[3]{x/2}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$
4.27 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{3x-12}}$	4.28 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$
4.29 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$	4.30 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{3+\sqrt[3]{3x-3}}$

5) **Найти предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых величин**

5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$	5.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$
5.3 $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{2^{cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$	5.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{\ln^2 x+1}-1}{1+\cos \pi x}$
5.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$	5.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
5.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$	5.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin(2\pi(x+10))}$
5.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$	5.10 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$
5.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$	5.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$
5.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$	5.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{43x}$
5.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$	5.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$
5.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin 3x}$	5.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$
5.19 $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln x}$	5.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+^2 x}{x\sin 3x}$
5.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$	5.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$
5.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$	5.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$
5.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot\ln 2$	5.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$
5.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$	5.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
5.29 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$	5.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$

6) **Найти предел функции**

6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[7]{x+2}-\sqrt[5]{x^5+2}}$	6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^6+2}-x}$
6.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-5^{x+1}}{2^{x+1}+5^{x+2}}$	6.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}-5x^2}{x-\sqrt{x^4-x+1}}$
6.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[5]{x^5+1}}$	6.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!}$
6.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^3+1}-5x}$	6.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-7}+\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{x^5+5}+\sqrt{x}}$
6.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+4)!-(x+2)!}{(x+3)!}$	6.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt[5]{x^5+3}+\sqrt{x-3}}$
6.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[5]{x^7}-\sqrt{x+1}}$	6.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$
6.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7-x+x^2}}$	6.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x-1}}$
6.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)!+(3x+1)!}{(3x)!(x-1)}$	6.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt[5]{x^6+6}-\sqrt{x-6}}$
6.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x+4}-\sqrt[5]{x^5+5}}$	6.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-2^x}{3^{x-1}+2^x}$
6.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[4]{4x^4+1}-\sqrt[3]{x^4-1}}$	6.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{4x^6+3}-x}$
6.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!-(2x+2)!}$	6.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x^3+3}+\sqrt[4]{x^5+1}}$
6.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+7x^3}{\sqrt[4]{x^1 2+x+1}-x}$	6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x!+(x+2)!}{(x-1)!+(x+2)!}$
6.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt[4]{x^4+2}+\sqrt{x-2}}$	6.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{5x+2}-\sqrt[3]{8x^3+5}}{\sqrt[4]{x+7}-x}$
6.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+7^x}{2^x-7^{x-1}}$	6.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^5-4}-\sqrt[4]{x^4+1}}$
6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{9x^8+1}}$	6.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{7x}-\sqrt[4]{81x^8-1}}{(x+4\sqrt{x})\sqrt{x^2-5}}$

7) **Найти предел функции**

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$

7.2 $\lim\limits_{x\to 0} x\frac{\pi x}{2}$

7.3 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\sqrt{x(x^4-1)}-\sqrt{x^5-8})$

7.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+\frac{\pi}{2})$

7.5 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3})$

7.6 $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x^3-8})$

7.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\sqrt{(x^4+1)(x^2-1)}-\sqrt{x^6-1})$

7.8 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3})$

7.9 $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-9})$

7.10 $\lim\limits_{x\to 0} x2x$

7.11 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)}-\sqrt{x^4-9})$

7.12 $\lim\limits_{x\to -4}(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2})$

7.13 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)x$

7.14 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x)$

7.15 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x})$

7.16 $\lim\limits_{x\to 0} x(x/3)$

7.17 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3})$

7.18 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2})$

7.19 $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\frac{\pi x}{4}$

7.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})$

7.21 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+5)}-x)$

7.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x(x-1)(x-3)})$

7.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x(x-1)})$

7.24 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x(x-1)})$

7.25 $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2xx$

7.26 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3})$

7.27 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-^2 x)$

7.28 $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\frac{\pi}{4}-x)\frac{1}{\sin(3\pi/4+x)}$

7.29 $\lim\limits_{x\to -5}(\frac{1}{x+5}-\frac{3}{25-x^2})$

7.30 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2})$

8) Найти предел функции

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$	8.2 $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{2\sqrt{x}})^{2/\sin x}$
8.3 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^{x^4}$	8.4 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x})^{3x}$
8.5 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$	8.6 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-3x+6}{x^2+5x+1})^{x/2}$
8.7 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{3/(x^2\arcsin x)}$	8.8 $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}})^{3/x}$
8.9 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-10}{x+1})^{3x+1}$	8.10 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+\sqrt[3]{x}))^{x/\sin 4\sqrt[3]{x}}$
8.11 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$	8.12 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+2x+7})^{2x+5}$
8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 5^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	8.14 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$
8.15 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+x+1}{x^3+2})^{2x^2}$	8.16 $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^{\arcsin x^3})^{\frac{1}{x\sin^2 x}}$

8.17 $\lim_{x\to 0}(\frac{1+x\cos 2x}{1+x\cos 5x})^{1/x^3}$	8.18 $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7})^{x+1}$
8.19. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	8.20 $\lim_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$
8.21 $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2+2x+3}{2x^2+2x+1})^{3x^2-7}$	8.22 $\lim_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{\pi x}$
8.23 $\lim_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-1/\sin^2 x}$	8.24 $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+5})^{3x+2}$
8.25 $\lim_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/\ln(1+^2(\pi x/3))}$	8.26 $\lim_{x\to 0}(\frac{1+\sin x\cos 3x}{1+\sin x\cos 5x})^{1/\sin x^3}$
8.27 $\lim_{x\to\infty}(\frac{13x+3}{13x-10})^{x-3}$	8.28 $\lim_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$
8.29 $\lim_{x\to 0}(1+\ln(\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}))^{1/x^3}$	8.30 $\lim_{x\to\infty}(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3})^{1-2x}$

9) Исследовать функцию на непрерывность

9.1. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$	9.11. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$
9.2. $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$	9.12. $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$
9.3. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2-3x-10}$	9.13. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x^2-3x-10}$
9.4. $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$	9.14. $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$
9.5. $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-6}$	9.15. $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-6}$
9.6. $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$	9.16. $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$
9.7. $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-4x+3}$	9.17. $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-4x+3}$
9.8. $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-7x+10}$	9.18. $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-7x+10}$
9.9. $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-7x-8}$	9.19. $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-7x-8}$
9.10. $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$	9.20. $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная по определению

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x.

Разности

$$\Delta x = x - x_0 \ \text{и}\ \Delta y = f(x) - f(x_0) = y - y_0$$

называются соответственно приращением аргумента и приращением функции в точке x_0. Очевидно, что $x = x_0 + x$, $y = y_0 + y$, $y = f(x_0 + x) - f(x_0)$. В дальнейшем будем считать значение x_0 фиксированным, а x – переменным. При этом x и y являются переменными величинами.

Определение.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует. Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть $X = \{x\}$-множество всех таких x, для которых существует $y'(x)$. Очевидно, что $y'(x)$ является функцией, определенной на множестве X. Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (a, b), называется дифференцируемой на интервале (a, b).

<u>Пример 1.1</u>

Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, пользуясь определением производной.

Решение.

Рассмотрим некоторую (конкретную) точку x_0, принадлежащую области определения функции $f(x) = \sqrt{x}$, в которой существует производная. Зададим в данной точке приращение Δx и составим соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$$

Вычислим предел:

y'(x₀)= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

Неопределённость $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение :$\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Ответ: по определению производной: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Пример 1.2.</u>

Найти производную $f(x) = e^x$ по определению.

Решение:

Рассмотрим произвольную точку $x_0 = x$, принадлежащую $\mathcal{R}$, и зададим в ней приращение Δx. Тогда соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{x+\Delta x} - e^x$$

Найдём производную:

y'(x)= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

Используем эквивалентность бесконечно малых функций

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

Ответ: $f'(x) = e^x$ по определению.

Пример 1.3.

Найти производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2$, используя определение производной

Решение:

Рассмотрим произвольную точку $x_0 = x$, принадлежащую $\mathcal{R}$, и зададим в ней приращение Δx . Тогда соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 + 3(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0^3 + 3x_0^2) =$$

Используем формулы сокращенного умножения , раскрываем скобки и сокращаем всё, что можно сократить:

$$= 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6x_0 \cdot \Delta x + 3 \cdot (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 6x_0 \cdot \Delta x + 3 \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} = 3x^2 + 6x$$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 + 6$ по определению.

2. Таблица производных

Таблица производных

Функция	Производная
$y = C, \quad C = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

Если C - некоторое число, $U = U(x)$ $V = V(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1. $C'' = 0$;
2. $(U \pm V)' = U' \pm V'$;
3. $(CU)' = CU'$;
4. $(UV)' = U'V + UV'$;
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $(V \neq 0)$;

<u>Пример 2.1.</u> Найти производную функции

$$y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$$

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2}$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot (-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

<u>Пример 2.2.</u> Найти производную функции

$$y = sinx \cdot e^x$$

Решение:

Используем формулу $(UV)' = U'V + UV'$.

$$y' = (sinx)' \cdot e^x + sinx \cdot (e^x)' = cosx \cdot e^x + sinx \cdot e^x$$

Пример 2.3. Найти производную функции

$$y = \frac{x^2}{cosx}$$

Решение:

Используем формулу $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)'cosx - x^2(cosx)'}{(cosx)'} = \frac{2xcosx + x^2sinx}{cos^2x}$$

Задачи для практических занятий:

$f(x)=x$ $f(x)=2x-1$ $f(x)=2x^2$ $f(x)=-3x^3+3$ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$ $f(x)=2x^2-2x$	$y=3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+2$ $y=7x^{\frac{6}{7}}+6x^{\frac{5}{6}}+5x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{2}{3}}+2x+5$ $y=x^2\sqrt[3]{x}$ $y=\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ $y=\frac{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{4}$
$y=7\cos x-5\sin x-9$ $y=5\cos 2x$ $y=\sin x\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ $y=2tgx-ctgx$ $y=2x-\sin 3x$ $y=\sin x(1+\cos x)$ $y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$ $y=\frac{3-2tgx}{tgx}$	$y=\frac{x+5}{x-1}$ $y=\frac{3x-7}{2x+9}$ $y=\frac{(x-3)^2}{2x+1}$ $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$ $y=\frac{3x^2-2x-4}{2x-1}$ $y=\frac{2x+1}{x(x+1)}$

3. Производная сложной функции

Рассмотрим функции *f (x)* и *u (x)* . Сложной функцией или «функцией от функции» называют функцию вида *f (u (x))*.

При этом функцию $f(x)$ называют внешней функцией, а функцию $u(x)$ – внутренней функцией.

Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Другими словами, для того, чтобы найти производную от сложной функции $f(u(x))$ в точке x нужно умножить производную внешней функции, вычисленную в точке $u(x)$, на производную внутренней функции, вычисленную в точке x.

<u>Пример 3.1.</u> Найти производную функции

$$\mathrm{y} = \sin(x^2 + 3)$$

Решение:

Используем формулу $(sin\ u)' = cos\ u \cdot u'$.

$y = sin\ u$, *где* $u = x^2 + 3$

$$\mathrm{y}' = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x$$

<u>Пример 3.2.</u> Найти производную функции

$$\mathrm{y} = (x^2 + \mathrm{e}^x)^{10}$$

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, *где* $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x)$$

<u>Пример 3.3.</u> Найти производную функции

$$y = x^2 \cdot e^{sinx}$$

Решение:

$$y' = (x^2)' \cdot e^{sinx} + x^2 \cdot (e^{sinx})' = 2xe^{sinx} + x^2e^{sinx} \cdot cosx.$$

Задачи для практических занятий:

1. Найти производную функции

1. $y = arctg\frac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}$
2. $y = \arcsin\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$
3. $y = \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}arctg\frac{2x-1}{3}$
4. $y = arctg\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
5. $y = \arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
6. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$
7. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}arctgx$
8. $y = \frac{(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}}{2} - 9arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$
9. $y = \frac{(1+x)arctg\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$
10. $y = \frac{x^3}{3}arccosx - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$
11. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x}arctg\sqrt{x}$
12. $y = \frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)} + 3arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$
13. $y = \frac{4+x}{x^3}arctg\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$
14. $y = arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + arctg\sqrt{x}$
15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$
16. $y = 6\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$

2. Найти производную

1. $y = \frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$
2. $y = \frac{(2x^2-2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$
3. $y = \frac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$
4. $y = \frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$
5. $y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$
6. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$

7. $y = \frac{(x^2-6)\sqrt{4+x^2}}{120x^5}$

8. $y = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$

9. $y = \frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$

10. $y = \sqrt[3]{\frac{\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$

11. $y = \frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$

12. $y = \frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$

13. $y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

14. $y = \frac{\sqrt{x-1}(2x+3)}{4x^2}$

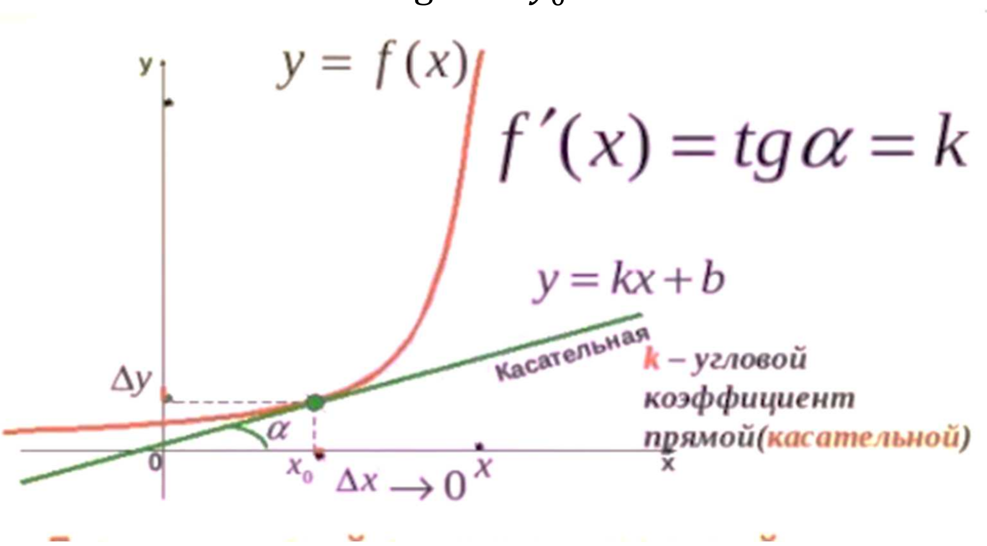
15. $y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{2x^8}$

16. $y = \frac{128-8x^3-x^6}{\sqrt{8-x^3}}$

4. Касательная и нормаль

Пусть на некотором интервале X задана функция $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in \mathrm{X}$. Нас интересуют геометрические характеристики графика этой функции в некоторой заданной точке при значении аргумента $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, где $y_0 = f(x_0)$. Пусть функция имеет в производную, которую будем обозначать как y_0''. Тогда через точку M_0 мы можем провести касательную к графику. Тангенс угла α между осью абсцисс x и касательной равен производной функции в точке x_0:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = y_0'$$



Само уравнение касательной имеет вид:

$$\mathrm{y} - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

В аналитической геометрии тангенс угла между прямой и осью абсцисс называют угловым коэффициентом прямой. Таким образом производная y_0' равна угловому коэффициенту касательной в x_0.

Прямая, перпендикулярная касательной, проведенной через точку M_0 , называется нормалью к графику функции в этой точке. Уравнение нормали имеет вид:

$$\mathrm{y} - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$$

Пусть две кривые $\mathrm{y} = \mathrm{f}_1(\mathrm{x})$ и $\mathrm{y} = \mathrm{f}_2(\mathrm{x})$ пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда угол φ между касательными к этим кривым в точке M_0 называется углом между кривыми. Он определяется по формуле:

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \left|\frac{\mathrm{f}_2'(\mathrm{x}_0) - \mathrm{f}_1'(\mathrm{x}_0)}{1 + \mathrm{f}_1'(\mathrm{x}_0) \cdot \mathrm{f}_2'(\mathrm{x}_0)}\right|,$$

где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Пример 4.1.

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\mathrm{y} = x^3 - 4x^2 + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

Найдем ординату точки касания: $\mathrm{y}(1) = 5$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$$\mathrm{k} = \mathrm{y}'(x_0) = (x^3 - 4x^2 + 8)'_{\mathrm{x}=1} = (3x^2 - 8\mathrm{x})_{\mathrm{x}=1} = -5$$

Подставляем значения x_0, y_0 и $\mathrm{y}'(x_0)$ в уравнение касательной :

$$\mathrm{y} - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

$$y = 5 - 5(x - 1) = -5x + 10$$

получили уравнение касательной $y = -5x + 10$.

Подставляем значения x_0, y_0 и $\mathrm{y}'(x_0)$ в уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$$

$$y = 5 - \frac{1}{-5}(x - 1) = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$$

получили уравнение нормали $y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$

Задачи для самостоятельной работы.

1. Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой с абсциссой в x_0.Построить график.

$$y = x^2 + x + 1, x_0 = -1$$

$$y = \frac{3x - 2x^3}{3}, x_0 = 1$$

$$y = tg\frac{x}{4}, x_0 = \pi$$

$$y = 32\sqrt[4]{x} - x, x_0 = 16$$

$$y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, x_0 = 4$$

$$y = 2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1$$

2. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.
3. Составить уравнение нормали к линии $y = -\sqrt{x} + 2$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.
4. Построить график функции $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ и найти точку пересечения касательных к графику, проведенных в точках с абсциссой $x_1 = 0, x_2 = \frac{5\pi}{12}$.
5. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$: 1) в начале координат; 2) в точке (3;9); 3) в точке (-2;4); 4) в точках пересечения ее с прямой $y = 3x - 2$.

6. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$: 1) параллельна оси Ох; 2) образует с осью Ох угол 45^0?
7. Под какими углами пересекаются
   1) $y = x^2$ и $3x - y - 2 = 0$?
   2) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$
   3) $y = (x-2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$
   4) $y = cosx$ и $y = sinx$
8. На линии $y = x^2(x-2)^2$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.
9. Составить уравнение нормали к параболе $y = x^2 - 6x + 6$ перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.
10. Составить уравнение касательной к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$ перпендикулярной прямой $2x - 6y + 1 = 0$.
11. В точках пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и параболы $y = x^2 - 4x + 5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

5. Неявно и параметрически заданная функция

Уравнение $y = f(x)$, разрешенное относительно y , задает явную функцию y аргумента x .

Уравнение $F(x, y) = 0$, неразрешенное относительно y , задает неявную функцию y аргумента x .

Чтобы найти первую производную от функции, заданной неявно, нужно один раз продифференцировать равенство, задающее эту функцию, считая y функцией аргумента x .

Пример 5.1.

Найти y': $y^2 + 2x^2y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция *y=y(x)* в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по *x*, полагая, что *y* есть функция от *x* и обозначая производную у через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2y' - 2x = 0$$

Выразим из полученного равенства y':

$$(2y + 2x^2)y' = 2x - 4xy$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}$$

Пример 5.2.

Найти y': $cosy = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$$-siny \cdot y' = 8yy' + e^x$$
$$(-siny - 8y) \cdot y' = e^x$$
$$y' = \frac{-e^x}{siny + 8y}$$

Рассмотрим функцию, заданную параметрическим способом:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная от функции, заданная параметрически, вычисляется по формуле:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример 5.3.

Найти y': $\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = cost \end{cases}$.

Решение:

Используем формулу $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$

$$y' = \frac{(cos\ \ t)'}{(t^2 + 3)'} = \frac{-sint}{2t}.$$

6. Производные высших порядков

$f''(x) = (f'(x))'$ – вторая производная – первая производная от производной первого порядка;
$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ – производная n-го порядка – первая производная от производной (n -1)-го порядка.

С помощью формулы Лейбница можно вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций. Она имеет следующий вид:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

где ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты).

<u>Пример 6.1.</u>

Дана функция $y = e^{4x}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение:

$$y' = (e^{4x})' = e^{4x} \cdot (4x)' = 4e^{4x};$$

$$y'' = (y')' = (4e^{4x})' = 4(e^{4x})' \cdot (4x)' = 16e^{4x};$$

$$y''' = (y'')' = (16e^{4x})' = 16(e^{4x})' \cdot (4x)' = 64e^{4x};$$

$$y^{(4)} = (y''')' = (64e^{4x})' = 64(e^{4x})' \cdot (4x)' = 256e^{4x}.$$

Ответ: $y^{(4)} = 256e^{4x}$.

<u>Пример 6.2.</u>

Найти производную 8 порядка

$$y = (x^2 - 3x) \cdot \ln 5x$$

Решение:

Запишем функции f(x) и g(x) и найдём их производные до 8-го порядка включительно.

$f^{(0)} = f = x^2 - 3x$	$g^{(0)} = g = ln5x$
$f' = x - 3$	$g' = \frac{1}{x}$
$f'' = 1$	$g'' = -\frac{1}{x^2}$
$f''' = f^{(4)} = \ldots = f^{(8)} = 0$	$g''' = \frac{2}{x^3}$
	$g^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$
	$g^{(5)} = \frac{24}{x^5}$
	$g^{(6)} = -\frac{120}{x^6}$
	$g^{(7)} = \frac{720}{x^7}$
	$g^{(4)} = -\frac{5040}{x^8}$

$y^{(8)} = (f \cdot g)^{(8)} = f^{(8)} \cdot g^{(0)} + 8f^{(7)} \cdot g' + 28f^{(6)} \cdot g'' + 56f^{(5)} \cdot g''' + 70f^{(4)} \cdot g^{(4)} + 56f''' \cdot g^{(5)} + 28f'' \cdot g^{(6)} + 8f' \cdot g^{(7)} + f^{(0)} \cdot g^{(8)} = 28 \cdot 1 \cdot (-\frac{120}{x^6}) + 8 \cdot (x - 3) \cdot \frac{720}{x^7} + (x^2 - 3x) \cdot (-\frac{5040}{x^8})$.

Пример 6.3.

Записать формулу производной n-го порядка для функции $y = \ln(4 - x^2)$.

Решение:

$y = ln(4 - x^2) = ln((2 - x)(2 + x)) = ln(2 - x) + ln(2 + x).$

$$y' = (ln(2 - x) + ln(2 + x))' = -\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x}$$

$$y'' = (-\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x})' = -\frac{1}{(2 - x)^2} - \frac{1}{(2 + x)^2}$$

$$y''' = (-\frac{1}{(2 - x)^2} - \frac{1}{(2 + x)^2})' = -\frac{1 \cdot 2}{(2 - x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{(2 + x)^3}$$

$$y^{(4)} = (-\frac{1 \cdot 2}{(2 - x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{(2 + x)^3})' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2 - x)^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2 + x)^4}$$

$$y^{(n)} = -\frac{(n - 1)!}{(2 - x)^n} - \frac{(-1)^{n+1}(n - 1)!}{(2 + x)^n}$$

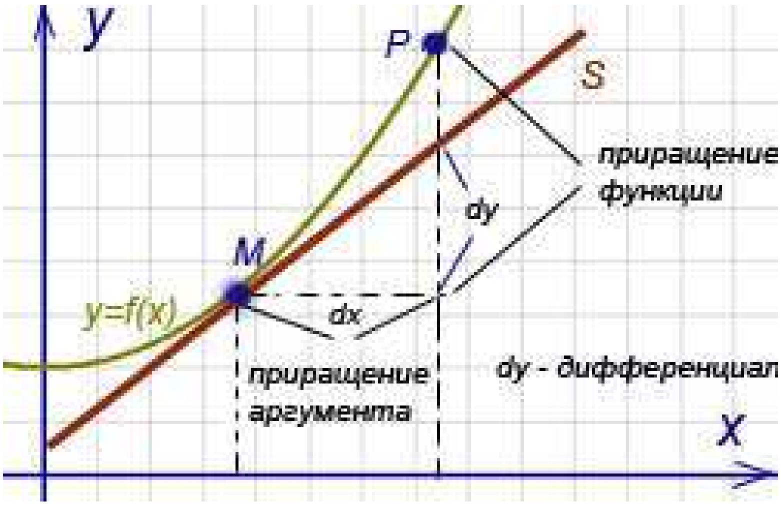
Задачи для практических занятий.

1. $y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1)\,, y^{IV} =?$
2. $y = (3 - x^2)\ln^2 x,\ \ y^{III} =?$
3. $y = xcosx^2,\ \ y^{III} =?$
4. $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}},\ \ y^{III} =?$
5. $y = \frac{lnx^2}{x^3},\ \ y^{III} =?$
6. $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1},\ \ y^{V} =?$
7. $y = x^2\sin(5x - 3)\,,\ \ y^{III} =?$
8. $y = \frac{lnx}{x^2}, y^{IV} =?$
9. $y = (2x + 3)\ln^2 x,\ \ y^{III} =?$
10. $y = (1 + x^2)arctgx,\ \ y^{III} =?$
11. $y = \frac{lnx}{x^3}, y^{IV} =?$
12. $y = (4x + 3)2^{-x}, y^{V} =?$
13. $y = e^{1-2x} \cdot \sin(2 + 3x)\,, y^{IV} =?$

14. $y = (2x^3 + 1)cosx, y^V = ?$
15. $y = (x^2 + 3)\ln(x - 3), y^{IV} = ?$
16. $y = (1 - x - x^2)e^{\frac{x-1}{2}}, y^{IV} = ?$

7. Дифференциал функции одной переменной

Определение.
Дифференциалом функции в некоторой точке x называется главная, линейная часть приращения функции.



Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента). Это записывается так:

$$dy = y'\Delta x$$

Или

$$df(x) = f'(x)dx$$

Геометрический смысл дифференциала.
Дифференциал функции y = f(x) равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M(x; y), при изменении x (аргумента) на величину $\Delta x = dx$ (см. рисунок).

Пример 7.1. Найти дифференциалы функций:

1) $y = x^4$;

2) $y = (2x-1)^4$;

3)$y = lnx$;

4) $y = ln(x^2 = 1)$.

Решение.

Применяя формулы дифференцирования степенной и логарифмической функций из таблицы производных, а также формулу $\mathrm{df(x) = f'(x)dx}$, находим:

1) $dy = 4x^3dx$;

2) $dy = 8(2x-1)^3dx$;

3)$dy = \frac{dx}{x}$;

4) $dy = \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Пример 7.2

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$: $\mathrm{y = ln(cosx)}$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosx} \cdot (cosx)' = \frac{-sinx}{cosx} = -tgx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = (-tgx)' = -\frac{1}{cos^2x}$$

Пример 7.3.

Найти дифференциал функции *y* , если $\mathrm{y = ln(\frac{sinx}{x})}$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$$y = ln(sinx) - lnx$$

Используем формулу $df(x) = y'dx$.

$$y' = \frac{1}{sinx} \cdot (sinx)' - \frac{1}{x} = ctgx - \frac{1}{x}$$

$$dy = (\mathrm{ctgx} - \frac{1}{\mathrm{x}})\mathrm{dx}$$

8. Правило Лопиталя

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty \cdot 0], [\infty^0], [1^\infty], [\infty - \infty]$$

Теорема (правило Лопиталя).

Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x▪ a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Пример 8.1:</u>

Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+lnx}{e^x-e}$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+lnx}{e^x-e} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+lnx)'}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \left[\frac{2+1}{e}\right] = \frac{3}{e}.$$

Ответ: $\frac{3}{e}$

<u>Пример 8.2:</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{x}{3}}-1}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{x}{3}}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2arctgx)'}{(e^{\frac{x}{3}}-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{x}{3}}\cdot(-\dfrac{3}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3e^{\frac{x}{3}}\cdot(1+x^2)}=\frac{2}{3}$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример 8.3:

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(xe^{\frac{x}{2}})'}{(x+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}})'}{(1+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{4}(4+x))'}{(e^{\frac{x}{2}})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0.$$

Задания для самостоятельной работы:

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^{lnx}-x}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-x}{x-sinx}$
4. $\lim\limits_{x\to a}arcsin\frac{x-a}{a}\cdot ctg(x-a)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2-sinx^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4sin^2(\frac{\pi x}{6})}{1-x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)lnx$

9. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{lnx}-\frac{x}{lnx})$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{2sinx+x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos8x}{tg^2 2x}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}lnx\cdot ln(x-1)$

13. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})})$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2cosx})$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}x^4 sin(\frac{a}{x})$

17. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6})$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{sinx}$

19. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot tg(\frac{x}{2})$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2a}}\frac{1-sinax}{(2ax-\pi)^2}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Вариант 1

1. Найти производные функции:	
$y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$ $y = \sin x \cdot arctg\ x$ $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$ $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2+1}}$ $y = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x$	$y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ $y = (1 + \ln\sin x)^2$ $y = 2^{\frac{1}{\ln x}}$ $y = x\ arctg\sqrt{x}$ $y = e^{\sin x}$ $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$x^3 + arctg(e^y) + y(x-1) = 0$ $\sin y = x + 3y$	$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = x\cos 2x$	3. Найти дифференциал функции: $y = \ln\frac{tgx}{\sqrt{x}}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = -1$.	

Вариант 2

1. Найти производные функции:	
$y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$ $y = \sqrt{x}\sin x$ $y = \frac{tgx}{\sin x - \cos x}$ $y = ctg(2x\sin\frac{1}{2})$ $y = (\arccos x + \arcsin x)^2$ $y = arctg\ln(2x+3)$	$y = tg\,\frac{e^x}{x}$ $y = \sin 3x\cos 5x$ $y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$ $y = tg^2 6x - 2^x$ $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$ $y = x + e^{\sin x}$
$y\sin x = \cos xy$ $x^3 + y^2 - 3axy = 0$	$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

2. Найти вторую производную: $y=\sqrt{1+x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y=\arcsin\dfrac{\ln x}{x^2}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=4x-x^2$ в точке с абсциссой $x=1$.	

Вариант 3

1. Найти производные функции:	
$y=x^{10}-2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{2}$ $y=e^x tgx$ $y=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$ $y=\dfrac{1}{x^2}\ln x$ $y=arctg\ \ x\cdot\ln x$	$y=tg\dfrac{x+1}{2}$ $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $y=\ln(1-2x)$ $y=\sin 2^x+3^{\sin x}$ $y=e^{-x^2}$ $y=10^{xtgx}$ $y=\sin 3x\cos 5x$
$e^{x-y}=\dfrac{x}{y}$, $\sin xy=x^2y$	$\begin{cases} x=2t^3+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=\ln(tg\,x)$	3. Найти дифференциал функции: $y=arctg\dfrac{\sin x}{x}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^2-4x+4$ в точке с абсциссой $x=2$.	

Вариант 4

1. Найти производные функции:	
$y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^4} + \sqrt{7}$ $y = e^x ctgx$, $y = \frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, $y = \cos x - \frac{1}{3}\sin 2x$, $y = \frac{x-1}{\ln x}$, $y = x^2 e^x$	$y = tg^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$, $y = \ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$, $y = x\arcsin\frac{2x-1}{5}$, $y = (e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$, $y = \frac{1}{arcctg\ e^x}$, $y = 3x^3\arcsin x + (x^2+2)\sqrt{x}$
$x^2 y = \arcsin yx$, $e^{x+y} = xy$	$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = x^2 a^x$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arcsin 2^{x^2}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 + 4x$ в точке с абсциссой $x = -2$.	

Вариант 5

1. Найти производные функции:	
$y = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{3}$ $y = xarctgx$ $y = \frac{x}{\sin x}$ $y = tg\sqrt{x} + \frac{1}{ctg(2x-1)}$ $y = \ln\frac{x}{e^x}$ $y = \arcsin\sqrt{x}\cdot\ln x$	$y = ctg\frac{\ln x+1}{2-\ln x}$, $y = (1+\sqrt{1+x})^2$ $y = \cos^3\sqrt{e^x}$ $y = x^2 10^{-x+2}$ $y = arctg(x^2-3x+1)$, $y = \arcsin x\cdot 9^{-x}$
$\arcsin\frac{x}{y} - yx = 0$,	$\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

$2x^2+x=y^3$	
2. Найти вторую производную: $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	3. Найти дифференциал функции: $y=tg\ln\left(x^3+2\right)$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^3+4x^2-1$ в точке с абсциссой $x=-1$.	

Вариант 6

1. Найти производные функции:	
$y=x^{10}-3\sqrt[3]{x^7}+\frac{1}{x^2}-\sqrt[3]{10}$ $y=e^x\arcsin x$ $y=\frac{e^x}{\cos x}$ $y=3\sin(3x-1)$ $y=(1-2\sqrt[3]{x})^2$ $y=\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{2}tg^2x$	$y=\frac{1-\ln x}{1+\ln 2x}$ $y=10^{1-\sin 2x}$ $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y=\sin^2 2x\cos\frac{x}{2}$ $y=3^{arctg 3x}$ $y=\ln\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$\frac{y}{x}=arctg(xy)$ $x-3y+e^y=5$	$\begin{cases} x=\ln\frac{t^2-1}{4} \\ y=\sin t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=\ln\sin x$	3. Найти дифференциал функции: $y=\arcsin\sqrt{1-2x^2}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2-2x-2$ в точке (0; - 2).	

Вариант 7

1. Найти производные функции:	
$y=10x^5-\frac{1}{4x^4}$ $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin x$ $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$ $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ $y=\ln(1-ctgx)$ $y=e^{-x}+10^{\ln x}$	$y=arctg\,\frac{1+x}{1-x}$ $y=\sin^2 3x\cos^3 2x$ $y=\arcsin e^x+\arccos\frac{1}{2^x}$ $y=tg3^{\ln x}$ $y=x\sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}$ $y=arctgx^2-\ln\sin x$
$xy=\ln\left(e^{x+y}-2\right)$ $tg(y-1)=x+y^2$	$\begin{cases} x=arctg\,t \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=\frac{x^3}{x-1}$	3. Найти дифференциал функции: $y=tg\left(x^3+\sqrt{x}\right)$
4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=-x^2-2x+1$ в точке (2; -7).	

Вариант 8

1. Найти производные функции:	
$y=7x^5-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}$ $y=\sqrt[3]{x}\cos x$ $y=\frac{\sin x}{\cos x+1}$ $y=\frac{1}{\cos^2 2x}$ $y=(arctgx+x)^2$ $y=tg5x\sin 7x$	$y=\cos^2 2x\sin^2 3x$ $y=(1+\arcsin x)^2$ $y=\frac{10^x+10^{-x}}{2x}$ $y=\ln(x^2-4x)$ $y=ctg(\ln 2x)$ $y=e^{\sin x+\cos x}$

$e^x tgy - x^2 + y^3 = 0$ $\cos x + e^{4y} = 9$	$\begin{cases} x = \ln\dfrac{\sin t - 1}{2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \dfrac{\ln x}{x}$	3. Найти дифференциал функции: $y = \dfrac{\ln x}{x}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x - 1$ в точке (1; -1).	

Вариант 9

1. Найти производные функции:	
$y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$ $y = (\sqrt{x} - 4)\sin x$ $y = \dfrac{e^x}{arctgx}$ $y = \sin(3x - 5)$ $y = e^{x^2-3} tgx$ $y = \dfrac{\arcsin(\ln x)}{\ln(\arcsin x)}$	$y = \ln\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$ $y = arctg\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $y = e^x tg\dfrac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$ $y = \sin^2 x^2$ $y = 3^{\ln(x+1)}$ $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\dfrac{x}{y} = \arcsin xy$ $arctgy = xy$	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t^2 - 5} \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = x\sqrt{1 + x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arcsin\dfrac{x^3}{x^2 + 2}$
3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 - x + 1$ в точке (-1; 1).	

Вариант 10

1. Найти производные функции:	
$y=7x^3+\frac{1}{2x^2}+\sqrt{x+\sqrt[3]{5}}$ $y=(x^3+1)\sin x$ $y=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ $y=\frac{tgx}{\sin x+3}$ $y=2^{x+\sin x}$ $y=\arccos\frac{x+1}{\sqrt{x}}$	$y=\ln(tg^2 2x)$ $y=e^{-\sqrt{x}+x}$ $y=arctg(e^{x+2})$ $y=\sin^2 x^2$ $y=arctg\sqrt[3]{x^2-2}$ $y=x^4\, e^{\sqrt{x^2+4}}$
$\ln y=\cos xy-7$ $x^2y^2-ctgy+3=0$	$\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\ln\sin t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y=\cos(arctg\,\frac{x}{2})$
3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2-4x+3$ в точке (1; 0).	

Вариант 11

1. Найти производные функции:	
$y=5x^7+\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{3}$ $y=(\sqrt[3]{x}+1)arctgx$ $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x}-x}$ $y=arcctg(4x^2+1)$ $y=\sin^3 x+2\sin x+x^3$ $y=\arcsin\frac{x+1}{x}$	$y=3^{arctg(x^2+1)}+\sqrt{2}$ $y=\cos\ln(x^2+1)$ $y=x\;\; arc\sin ctg\sqrt{x}$, $y=2^{\sin x}$, $y=\frac{e^x+2e^{-x}}{4}$, $y=tg(\cos x)$.

$x^4+y^4=x^2y^2$ $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$	$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-arctgt\end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=x\sin 3x$	3. Найти дифференциал функции: $y=\ln\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2}}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=-x^2-2x+5$ в точке с абсциссой $x=1$.	

Вариант 12

1. Найти производные функции:	
$y=4x^9-\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\sqrt[7]{2}$ $y=e^x arctgx$ $y=\dfrac{ctgx}{x-x^3}$ $y=\sin(\dfrac{x}{x^2+1})$ $y=(arctgx+e^x)^2$	$y=\log_2\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$ $y=\arcsin(tg^2x)$ $y-\log_2(x^2+4x-2)$ $y=\ln(3-\sqrt{x^2+1})$, $y=ctg^2 7x+(\sqrt{7})^x$, $y=x^6\cdot 2^{\sqrt{x}}$, $y=x+5e^{tgx}$
$2y\ln y=x$ $x\ \ +\ln y-x^2e^y=0$	$\begin{cases}x=e^{-t}\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=\sqrt{1-3x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y=\arccos\dfrac{\ln x}{x^4}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=-x^3-3x$ в точке с абсциссой $x=-2$.	

Вариант 13

1. Найти производные функции:	
$y=9x^5-7\sqrt[3]{x^8}+\frac{3}{x^8}-2\sqrt[4]{5}$ $y=\sqrt{x}\cos x$ $y=\frac{arctgx}{e^x-\sin x}$ $y=\log_7\sin x$ $y=\sqrt{1-\sin x}+2$ $y=2^{\log_3 x}$	$y=arctg\frac{3-x}{x-2}$ $y=e^{arctgx^2}$ $y=\arcsin\ x\cdot\lg x$, $y=3^{-x^2}$, $y=2^{xctgx}$, $y=\sin x\cos 2x$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=x+y$ $x^2\sin y+2x-y+1=0$	$\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^2-\sin t\end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=\ln(ctg\ x)$	3. Найти дифференциал функции: $y=arcctg\frac{\cos x}{x}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^3+4x-12$ в точке с абсциссой $x=1$.	

Вариант 14

1. Найти производные функции:	
$y=-7x^3+2\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{x^8}-3\sqrt[3]{4}$ $y=e^x ctgx$ $y=\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\arcsin x}$ $y=\log_5(\sqrt[3]{x}+2x)$ $y=(\sin x+\sqrt[3]{x^2})^2$ $y=\log_2\sin x$	$y=e^{\sqrt[4]{2-3x}}$ $y=x\arccos\frac{2x+1}{9}$, $y=(e^{\sqrt{x}}-2)(1+e^{3x})$, $y=\frac{1}{arctg\ \ 2^x}$, $y=2x^3\arcsin x-(x^3-1)\sqrt{x}$.

$y = 1 + xe^y + \sin e^y$ $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 + 15y^2 = 0$	$\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = x^4 3^x$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arccos 5^{x^2}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 - 3x - 1$ в точке с абсциссой $x = 2$.	

Вариант 15

1. Найти производные функции:	
$y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$ $y = e^x arcctgx$ $y = \dfrac{e^x}{arcctgx}$ $y = \sin(5x^2 + 1)$ $y = \ln(1 + 2\sin x)$ $y = arctg \ln x$	$y = \arcsin \dfrac{\sqrt{1-3x}}{x}$ $y = \sin\sqrt{1+x^2}$ $y = 3^{-x} \arccos x$, $y = tg \dfrac{\ln x}{2-x}$, $y = (1 - 2\sqrt{1+x})^3$ $y = \sin^4 \sqrt{e^x}$
$x = \sin(xy) + arctgy$ $y \ arctg \ y - \arcsin x = 0$	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = tarcctg \ t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$	3. Найти дифференциал функции: $y = ctg \ln\left(x^4 - 1\right)$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = -x^2 + 2x - 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.	

Вариант 16

1. Найти производные функции:	
$y=-3x^6+5\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^7}-\sqrt[5]{6}$ $y=\sin x\log_7 x$ $y=\frac{tgx}{\sin x-\sqrt[3]{x^2}}$ $y=\cos(\log_6 x)$ $y=\sin x^2+\ln(x^2+4)$ $y=\ln\arcsin x$	$y=(e^{\cos x}+3)^2$ $y=\log_7(x-\sin 7x)$ $y=x\ arctg\sqrt{x^3}$, $y=2^{\sin x}$, $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $y=arcctg\ e^x$.
$\sin(xy)+\cos(xy)=0$ $e^{xy}-y^2=0$	$\begin{cases} x=\sin t+\cos t \\ y=a^t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y=3x^2\cos 4x$	3. Найти дифференциал функции: $y=\ln\frac{tgx}{\sqrt{2}x^2}$
4.Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^3+2x$ в точке с абсциссой $x=-2$	

Вариант 17

1. Найти производные функции:	
$y=-6x^8-4\sqrt[9]{x^5}-\frac{7}{x^6}+3\sqrt[8]{3}$ $y=\sqrt[5]{x}\log_2 x$ $y=\frac{arcctgx}{\log_3 x}$ $y=arcctg\cos x$ $y=\ln(\sin x+2)$	$y=\ln\sin(2x+5)$ $y=\sin(3-tg^2x)$ $y=\ln(1+\sqrt{x^2+5})$, $y=tg^2 3x-3^x$, $y=x\cdot 7^{\sqrt{x}}$, $y=x-4e^{\sin x}$,

$y = ctg\,\dfrac{x+3}{3x}$	
$y = x^2 + arctgy$ $y^2 + 5x = 5^x - \sin y$	$\begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \sqrt{8 - x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arcsin \dfrac{e^x}{3x^2}$
4.Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 - 4x - 2$ в точке с абсциссой $x = 1$.	

Вариант 18

1. Найти производные функции:	
$y = 8x^3 - \sqrt[5]{x^6} + \dfrac{6}{x^9} - 4\sqrt[9]{5}$ $y = arcctgx \ \log_3 x$ $y = \dfrac{\log_7 x}{x^3 + x^2}$ $y = tg\,\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ $y = arctg(e^{2x}) + x$ $y = \sin(e^x + 2)$	$y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$ $y = tge^{2x+1}$ $y = arctg \ 2x \cdot \ln 4x$, $y = e^{-2x^3}$, $y = 2^{xtgx}$, $y = tg3x\cos 5x$.
$x^2 + xy - (y+1)^2 = 0$ $\sin(y - x^2) - 3 = 0$	$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \log_2(\sin x)$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arcsin \dfrac{\ln x}{x}$
4.Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x = 2$.	

Вариант 19

<table>
<tr><td colspan="2">1. Найти производные функции:</td></tr>
<tr><td>$y=-12x^4+2\sqrt[6]{x^7}-\frac{3}{x^7}+7\sqrt[3]{2}$
$y=\sin x\arcsin x$
$y=\frac{\sin x}{\ln x+\sqrt{x}}$
$y=\arcsin(x^2+x)$
$y=\arccos\sqrt{1-3x}$
$y=\sin^4 x+\ln^2 x$</td><td>$y=\sin^2 x\ arcctg^2 x$
$y=\arcsin^4(\cos x)$
$y=x^2\cos\frac{2x+1}{2}$,
$y=(2^{-\sqrt{x}}+1)(1+3^{2x})$,
$y=\frac{1}{arctg\ \ e^x}$,
$y=3x^3\arcsin 2x+(x^2+2)\sqrt{x^3}$.</td></tr>
<tr><td>$y-x=\arcsin x-\arcsin y$
$x^2+y^2\ln x-4=0$</td><td>$\begin{cases} x=\sin t\cos^2 t \\ y=-\cos^3 t \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>2. Найти вторую производную:
$y=2x^2 7^x$</td><td>3. Найти дифференциал функции:
$y=arctg 6^{x^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^2-3x-8$ в точке с абсциссой $x=-1$.</td></tr>
</table>

Вариант 20

<table>
<tr><td colspan="2">1. Найти производные функции:</td></tr>
<tr><td>$y=-4x^7+3\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{x^3}-2\sqrt[5]{3}$
$y=\arccos x\ \ ctgx$
$y=\frac{x\sqrt{x}+x^2}{x+x^2}$
$y=\log_3 ctgx$
$y=3^{\arcsin x}$
$y=e^{\sin x+x^2}$</td><td>$y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
$y=\sin^7 e^{2x}$
$y=3^{-2x}\arcsin x$,
$y=tg\frac{x}{2-\ln x}$,
$y=3(1+\sqrt{1-x})^3$</td></tr>
</table>

	$y = \cos^3 \sqrt{e^{3x}}$
$y\sin x - \cos(x - y) = 0$ $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$	$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \frac{x+2}{\sqrt{1+x^2}}$	3. Найти дифференциал функции: $y = tg\,\lg\left(x^3 - 1\right)$
4. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой $x = -2$.	

Вариант 21

1. Найти производные функции:	
$y = x^7 - 3\sqrt[4]{x^7} + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{13}$ $y = e^x arctgx$ $y = \frac{4^x}{\sin x}$ $y = 3\cos(3x - 1)$ $y = (7 - 2\sqrt[3]{x^2})^6$ $y = \frac{1}{5} ctg^5 x + \frac{1}{7} ctg^7 x$ $y = \frac{3 - \ln 4x}{3 + \ln 6x}$	$y = 14^{1 - \arcsin 6x}$ $y = \arccos\sqrt{1 - 3x^2} + \frac{1}{\sqrt{7}}$ $y = \sin^8 3x \cos\frac{x}{7}$ $y = 7^{\arccos 7x}$ $y = \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\ln\frac{y}{x} = x - \sin y$ $x^4 - 3y + 2^y = 6$	$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t^4} \\ y = \frac{4}{t^2} + \frac{1}{3t} \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \lg\cos 3x$	3. Найти дифференциал функции: $y = \arccos\sqrt{1 - 5x^2}$
4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 - 2x + 1$ в точке (1; -2).	

Вариант 22

1. Найти производные функции:	
$y = 12x^6 - \frac{2}{3x^3}$ $y = 2\cos x(x^2 - 1)$ $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ $y = \ln(2 + \sin x)$ $y = 4^x + 10^{-\ln x}$	$y = \sin^3 2x \cos^2 4x$ $y = arctge^x + arcctg\frac{1}{5^x}$ $y = ctg4^{\ln x}$ $y = x^2\sqrt{\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-3}}$ $y = arctgx^3 + \ln\cos x$ $y = \arcsin\frac{2-x}{2+x}$
$x + \sqrt{xy} = arctg\frac{x}{y}$ $\arccos x - 4y^2 = 5$	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \frac{x}{x^2 - 4}$	3. Найти дифференциал функции: $y = ctg\left(x^4 + \sqrt{x^3}\right)$
4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 3x + 3$ в точке (2; 1).	

Вариант 23

1. Найти производные функции:	
$y = 7x^8 - 6\sqrt[4]{x} + 7$ $y = \sqrt[5]{x}\sin x$ $y = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$ $y = \frac{1}{\cos^3 5x}$ $y = (\arcsin x + x)^5$	$y = (3 + \arccos x)^7$ $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{x}$ $y = \ln(x^3 - 5x^2)$ $y = cg(\ln 7x)$ $y = e^{2\sin x + 8\cos x}$

$y = arctg4x\ \sin 8x$	$y = \cos^7 4x\ \sin^2 8x$
$\arcsin xy = 2^{x+y} - 5$ $\cos(y+5) = 2x + y^3$	$\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \sqrt{t^3+1} \end{cases}$
2. Найти вторую производную: $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$	3. Найти дифференциал функции: $y = 4^{x \sin x}$
4.Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 3x - 3$ в точке (2; -1).	

Вариант 24

1. Найти производные функции:	
$y = 4x^{17} + 4\sqrt[5]{x^8} - \dfrac{1}{x^9} + \sqrt[4]{19}$ $y = (\sqrt{x^3} - 7)tgx$ $y = \dfrac{e^{3x}}{\arcsin x}$ $y = \cos(2x-6)$ $y = e^{x-3} ctgx^2$ $y = \ln\dfrac{\arccos x}{\sqrt{x^2+1}}$	$y = arctg\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[9]{x^8}}$ $y = 7^x tg\dfrac{6^x}{\sqrt{x^3-9}}$ $y = \sin^3 x^5$ $y = 5^{\ln x - 4}$ $y = \dfrac{\ln(\arcsin x)}{\arccos(\ln x)}$ $y = \log_5(x^4 + \sqrt{x+1})$
$e^x \sin y - x^2 y^3 = 0$ $\cos\dfrac{x}{y} + 3^{4y} = 0$	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = arctgt \end{cases}$
2.Найти вторую производную: $y = (1-x^2)\sqrt{x}$	3. Найти дифференциал функции: $y = arctg\dfrac{x^5}{x+2}$
4.Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 6x + 5$ в точке (-1; 0).	

Вариант 25

<table>
<tr><td colspan="2">1. Найти производные функции:</td></tr>
<tr><td>$y = 3x^7 + \frac{1}{3x^4} + \sqrt{2x + \sqrt[3]{5}}$
$y = \cos x(1 + \frac{6}{\sqrt{x^3}})$
$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$
$y = \frac{\sin x - 6}{ctgx}$
$y = 4^{x+\cos x}$</td><td>$y = \arcsin \frac{\sqrt{x+1}}{x}$
$y = \ln(tg^3 4x)$
$y = 2^{-\sqrt{x^3}+5x}$
$y = arcctg(e^{4-x})$
$y = \cos^7 x^5$
$y = arctg\sqrt[4]{x^5 - 7}$
$y = e^{\sqrt{x+2}} \arccos x^4$</td></tr>
<tr><td>$\arccos\frac{x}{y} = x + 4y$
$xtgy = x + y^2$</td><td>$\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin(t+1) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>2.Найти вторую производную:
$y = x\arccos x + \sqrt{1 - x^2}$</td><td>3. Найти дифференциал функции:
$y = arctg\sqrt[3]{1 + 5x^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 4x - 1$ в точке (0; -1).</td></tr>
</table>

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

1. Асимптоты графика функции $y = f(x)$.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ графика функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k\,; \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$$

В частном случае при *k=0* получим горизонтальную асимптоту.

Пример:

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Решение:

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = +\infty$, следовательно, $x = 1$- вертикальная асимптота.

Будем искать наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{(x-1)}-x)=1.$$

Наклонной асимптотой графика данной функции будет прямая $\mathrm{y}=\mathrm{x}+1$.

Пример:

Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\sqrt{x^4+9}-x^2$.

Решение:

Область определения функции: x — любое действительное число, то есть $\mathrm{D(f)}=(-\infty;+\infty)$. На всей области определения эта функция непрерывна, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет. Будем искать наклонные и горизонтальные асимптоты в виде $y=kx+b$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+9}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x(\sqrt{x^4+9}+x^2)}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+9}-x^2)=0.$$

Таким образом, заданная функция имеет только горизонтальную асимптоту y=0.

2. Экстремумы функции

Исследование функции на экстремум проводится следующим образом.

На первом этапе находим критические точки функции $y=f(x)$. Это точки, в которых $y=f(x)$ равна 0, или не существует.

На втором этапе определяем, действительно ли это точки экстремума. Для чего анализируем знак производной слева и справа от найденной точки. Если производная меняет знак с плюса на минус, то это – точка максимума. Если производная меняет знак с минуса на плюс, то это – точка минимума. Если же производная знака не меняет, то экстремума нет.

3. Промежутки выпуклости и вогнутости функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ и критические точки (точки в которых $y''(x) = 0$ или на существует)
3. Критические точки нанести на числовую прямую в порядке возрастания.
4. Определить знак второй производной на каждом интервале и сделать выводы:

1) Если вторая производная функции $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ на данном промежутке положительная, то кривая вогнута на этом промежутке, если отрицательна, - то выпукла.
2) Если при переходе аргумента через данную критическую точку вторая производная меняет знак, то эта точка - точка перегиба.

<u>Пример.</u>

Исследовать функцию $\mathrm{y} = \mathrm{x}^4 - 6\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 9$ на промежутки выпуклости и очки перегиба.

Решение.

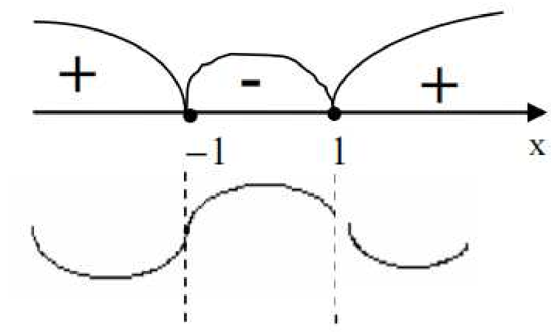
1) Область определения $\mathrm{D(y)} = \mathrm{R}$
2) Найдем вторую производную

$$y' = 4x^3 - 12x + 5$$
$$y'' = 12x^2 - 12$$

3) Определим критические точки

$$12x^2 - 12 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm 1$$

4) Нанесём эти точки на числовую ось и определим знак второй производной на каждом интервале.



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ график функции вогнутый (выпуклый вниз)

$x \in (-1; 1)$ - выпуклый (вогнутый вверх)

$x = 1, x = -1$ - абсциссы точек перегиба

Пример.

Исследовать функцию $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}-2} + 3$ на промежутки выпуклости и очки перегиба.

Решение.

1) Область определения $\mathrm{D(y)} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$
2) Найдем вторую производную

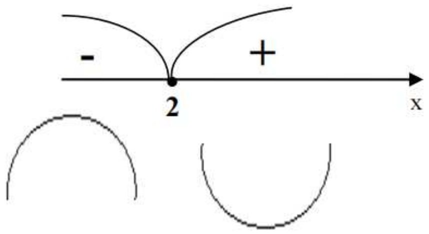
$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$y'' = (-(x-2)^2)' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

3) Определим критические точки

$$\frac{2}{(x-2)^3} = 0; \quad x \neq 2$$

4) Нанесём эту точку на числовую ось и определим знак второй производной на каждом интервале.



$x \in (-\infty; 2)$ график функции вогнутый (выпуклый вниз)

$x \in (2; \infty)$ - выпуклый (вогнутый вверх)

В точке $x = 2$ не существует не только вторая производная, но и сама функция, то это не может быть точкой перегиба.

5. Наибольшее и наименьшее значение функции

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значения функции непрерывной на отрезке $[a, b]$:

1) найти все критические токи, принадлежащие промежутку$[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2) вычислить значения функции на концах отрезка$[a, b]$, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$.

3) сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти интервалы монотонности

$$y = (x-2)^5(2x+1)^4$$

$$y = \frac{10}{4x^4 - 9x^2 + 6x}$$

$$y = 2\sin x + \cos 2x$$

2. Найти экстремумы функции

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$$

$$y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2+1)arctgx - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном интервале:

$$y = x^4 - 2x^2 + 5; \quad [-2; 2]$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}; [-6; 8]$$

$$y = \frac{x-1}{x+1}; [0; 4]$$

$$y = sin2x - x; \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

4. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

5. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см.куб., причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

6. Миноносец стоит на якоре в 9 ка от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 ка, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может идти пешком 5 км/ч, а на веслах 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время.

6. Общая схема исследования функции

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность – нечетность.

3. Найти вертикальные асимптоты.

4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения графика с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример 1.

Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x^2 + 8}{1 - x}$$

1) Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$1 - x = 0, \Rightarrow x = 1$.

Исключаем единственную точку x=1 из области определения функции и получаем:

$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 + 8}{1 - x} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точка x=1 является разрывом второго рода, прямая x=1 - вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0, получим y=8.

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0;8).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим y=0:

$$\frac{x^2 + 8}{1 - x} = 0 \to x^2 + 8 = 0$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что $x^2 + 8 > 0$ для любых x. Поэтому при $x \in (-\infty;1)$ функция $y>0$ (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при $x \in (1;+\infty)$ функция $y<0$ (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

5)Функция не является ни четной, ни нечетной, так как:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 8}{1 - (-x)} = \frac{x^2 + 8}{1 + x} \neq y(x) \neq -y(x)$$

6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

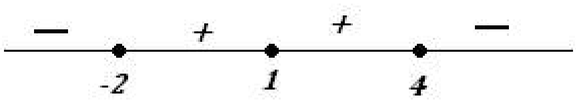
$$y' = (\frac{x^2 + 8}{1 - x})' = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем критические точки (в которых $y'=0$):

$$y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ (1 - x)^2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2, x = 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Получили три критические точки: $x=-2, x=1, x=4$.

Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При $x \in (-\infty;-2),(4;+\infty)$ производная $y'<0$, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При $x \in (-2;1),(1;4)$ производная $y'>0$, функция возрастает на данных промежутках.

При этом $x=-2$ - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), $x=4$ - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Таким образом, точка минимума (−2;4), точка максимума (4;−8).

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = (-\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2})'' = \frac{18}{(1 - x)^3}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \to \frac{18}{(1 - x)^3} = 0$$

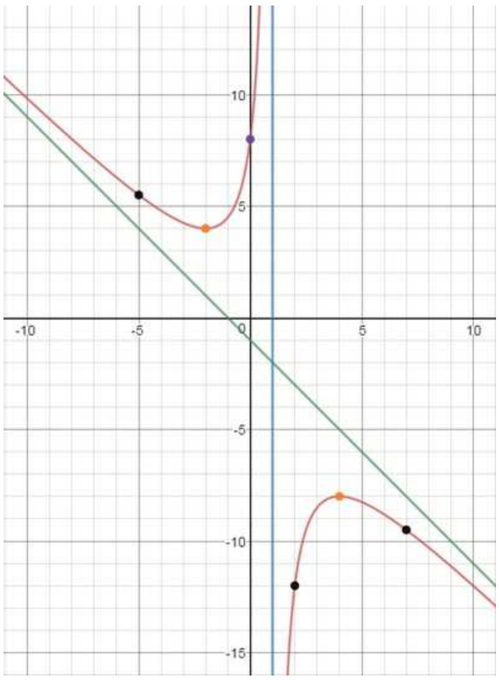
Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда x□(−∞;1) выполняется $y''>0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (1;+\infty)$ выполняется $y''<0$, то есть функция выпуклая.

8) Попробуем определить наклонные асимптоты вида y=kx+b. Вычисляем значения k,b по известным формулам:

$$\text{k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 8}{(1 - x)x} = -1;$$

$$\text{b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 8}{(1 - x)} - (-1) \cdot x = -1.$$

Получили, что у функции есть одна наклонная асимптота y=−x−1.



Пример 2.

Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график

$$y = \frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{4}$$

Решение:

1. Область определения функции вся числовая прямая, т.е. $D(y) = (-\infty; \infty)$. Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Оу, для чего приравниваем x=0, получим y=-1.

Таким образом, точка пересечения с осью Оу имеет координаты (0;-1).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ох, для чего положим y=0:

$$\frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{4} = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

Таким образом, точка пересечения с осью Ох имеет координаты (-1;0) и (2;0).

4)Функция не является ни четной, ни нечетной, так как:

$$y(-x) = \frac{-(-x)^3 + 3(-x)^2 - 4}{4} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{4} \neq y(x) \neq -y(x)$$

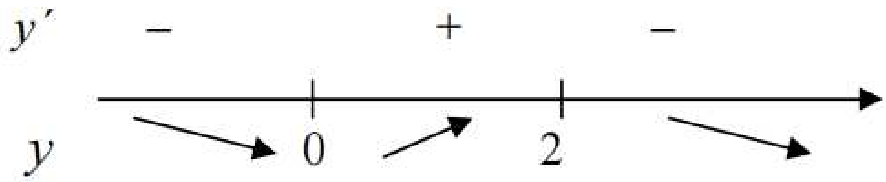
5) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{4}\right)' = -\frac{3}{4}x(x-2)$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем критические точки (в которых y′=0):

$$y' = 0 \rightarrow -\frac{3}{4}x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При x□(−∞;0),(2;+∞) производная y′<0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При x□(0;2) производная y′>0, функция возрастает на данных промежутках.

При этом x=0 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), x=2 - точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

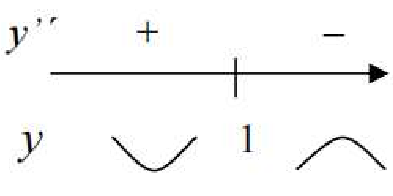
Таким образом, точка минимума (0;-1), точка максимума (2;0).

6)Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = (-\frac{3}{4}x(x-2))'' = -\frac{3}{2}(x-1)$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \to -\frac{3}{2}(x-1) = 0 \to x = 1$$



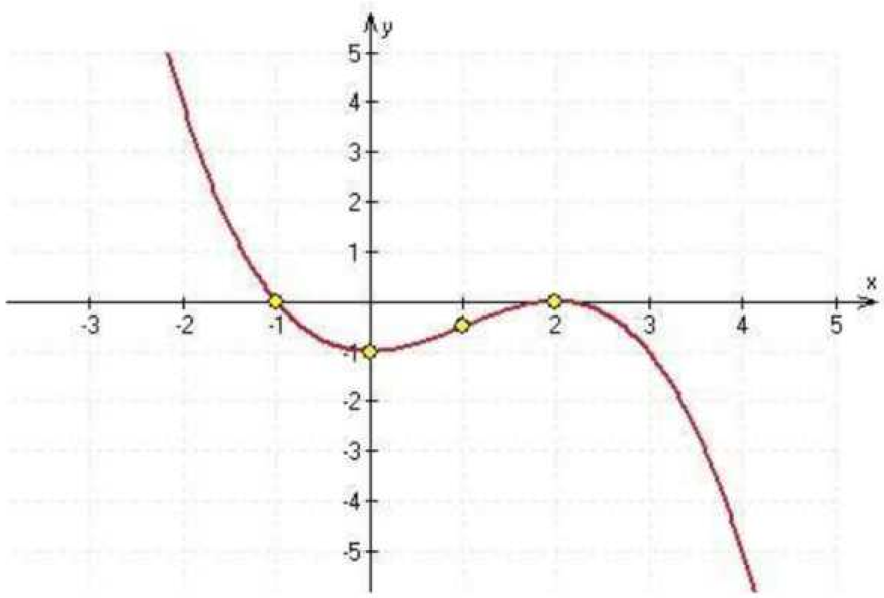
При этом, когда x□(−∞;1) выполняется y″>0, то есть функция вогнутая, когда x∈ (1;+∞) выполняется y″<0, то есть функция выпуклая.

$$y(1) = -0{,}5$$

9) Попробуем определить наклонные асимптоты вида y=kx+b. Вычисляем значения k,b по известным формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3 + 3x^2 - 4}{4x} = -\infty$$

Получили, что у функции наклонных асимптот нет.



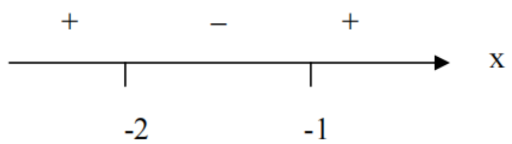
Пример 3.

Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln\frac{x+1}{x+2}$$

1) Область определения функции.

$$\frac{x+1}{x+2} > 0 \to (x+1)(x+2) > 0$$



D(y)=(−∞;-2)∪ (-1;+∞).

2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-2-0} y = \lim_{x\to-2-0} \ln\frac{x+1}{x+2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1+0} y = \lim_{x\to-1+0} \ln\frac{x+1}{x+2} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точки x=-1и x=-2 являются разрывами второго рода, а прямые x=-1 и x+-2 - вертикальными асимптотами.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0, получим y=-ln2$\approx -0{,}69$.

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0;-0,69).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим y=0:

$$\ln\frac{x+1}{x+2} = 0 \to \frac{x+1}{x+2} = 1 \to x+1 = x+2$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

5)Функция не является ни четной, ни нечетной, так как:

$$y(-x) = ln\frac{-x+1}{-x+2} \neq y(x) \neq -y(x)$$

6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$y' = (\ln\frac{x+1}{x+2})' = \frac{1}{(1+x)(x+2)}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем критические точки (в которых $y'=0$):

$$y' = 0 \to \frac{1}{(1+x)(x+2)} = 0 \to \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Получили две критические точки: $x=-2, x=-1$.

Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:

При $x \in (-2;-1)$ производная $y'<0$, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При $x \in (-\infty;-2),(-1;+\infty)$ производная $y'>0$, функция возрастает на данных промежутках.

Экстремумов нет.

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(\frac{1}{(1+x)(x+2)}\right)' = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \to -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} = 0 \to \begin{cases} x = -1,5 \\ x \neq -1, x \neq -2 \end{cases}$$

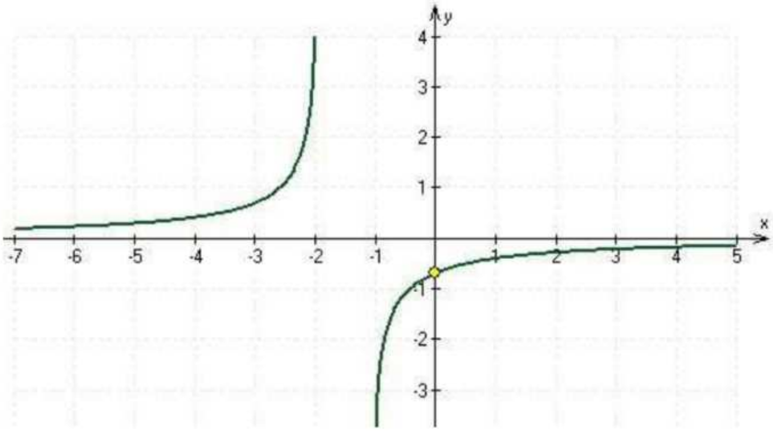
. При этом, когда $x \in (-\infty;-2)$ выполняется $y''>0$, то есть функция вогнутая, когда $x \in (-1;+\infty)$ выполняется $y''<0$, то есть функция выпуклая. Точек прегиба нет.

10) Попробуем определить наклонные асимптоты вида y=kx+b. Вычисляем значения k,b по известным формулам:

$$\mathrm{k} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x+1}{x+2}}{x} = 0;$$

$$\mathrm{b} = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x+2} - 0\cdot x = 0.$$

Получили, что у функции есть одна горизонтальная асимптота y=0.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Задача 1. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$

1.2. $y = 3x - x^3.$

1.3. $y = x^2\left(x-2\right)^2.$

1.4. $y = \left(x^3 - 9x^2\right)/4 + 6x - 9.$

1.5. $y = 2 - 3x^2 - x^3.$

1.6. $y = \left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^2.$

1.7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$

1.8. $y = 3x^2 - 2 - x^3.$

1.9. $y = \left(x-1\right)^2\left(x-3\right)^2.$

1.10. $y = \left(x^3 + 3x^2\right)/4 - 5.$

1.11. $y = 6x - 8x^3.$

1.12. $y = 16x^2\left(x-1\right)^2.$

1.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$

1.14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3.$

1.15. $y = \left(2x+1\right)^2\left(2x-1\right)^2.$

1.16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x.$

1.17. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2.$

1.18. $y = \left(2x-1\right)^2\left(2x-3\right)^2.$

1.19. $y = 27\left(x^3 - x^2\right)/4 - 4.$

1.20. $y = x\left(12 - x^2\right)/8.$

1.21. $y = x^2\left(x-4\right)^2/16.$

1.22. $y = 27\left(x^3 + x^2\right)/4 - 5.$

1.23. $y = \left(16 - 6x^2 - x^3\right)/8.$

1.24. $y = -\left(x^2 - 4\right)^2/16.$

Задача 2. Провести полное исследование функций и построить их графики.

2.1. $y=\left(x^3+4\right)\Big/x^2$.

2.2. $y=\left(x^2-x+1\right)\Big/(x-1)$.

2.3. $y=2\Big/\left(x^2+2x\right)$.

2.4. $y=4x^2\Big/\left(3+x^2\right)$.

2.5. $y=12x\Big/\left(9+x^2\right)$.

2.6. $y=\left(x^2-3x+3\right)\Big/(x-1)$.

2.7. $y=\left(4-x^3\right)\Big/x^2$.

2.8. $y=\left(x^2-4x+1\right)\Big/(x-4)$.

2.9. $y=\left(2x^3+1\right)\Big/x^2$.

2.10. $y=(x-1)^2\Big/x^2$.

2.11. $y=x^2\Big/(x-1)^2$.

2.12. $y=(1+1/x)^2$.

2.13. $y=\left(12-3x^2\right)\Big/\left(x^2+12\right)$.

2.14. $y=\left(9+6x-3x^2\right)\Big/\left(x^2-2x+13\right)$.

2.15. $y=-8x\Big/\left(x^2+4\right)$.

2.16. $y=\left((x-1)\big/(x+1)\right)^2$.

2.17. $y=\left(3x^4+1\right)\Big/x^3$.

2.18. $y=4x\Big/(x+1)^2$.

2.19. $y=8(x-1)\Big/(x+1)^2$.

2.20. $y=\left(1-2x^3\right)\Big/x^2$.

2.21. $y=4\Big/\left(x^2+2x-3\right)$.

2.22. $y=4\Big/\left(3+2x-x^2\right)$.

2.23. $y=\left(x^2+2x-7\right)\Big/\left(x^2+2x-3\right)$.

2.24. $y=1\Big/\left(x^4-1\right)$.

Задача 3. Провести полное исследование функций и построить их графики.

3.1. $y=(2x+3)\mathrm{e}^{-2(x+1)}$.

3.2. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

3.3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$.

3.4. $y=(3-x)\mathrm{e}^{x-2}$.

3.5. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2-x}}{2-x}$.

3.6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

3.7. $y=(x-2)\mathrm{e}^{3-x}$.

3.8. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

3.9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

3.10. $y=-(2x+1)\mathrm{e}^{2(x+1)}$.

3.11. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2(x+2)}}{2(x+2)}$.

3.12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$.

3.13. $y=(2x+5)\mathrm{e}^{-2(x+2)}$.

3.14. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{3-x}}{3-x}$.

3.15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

3.16. $y=(4-x)\mathrm{e}^{x-3}$.

3.17. $y=-\dfrac{\mathrm{e}^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$.

3.18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

3.19. $y=(2x-1)\mathrm{e}^{2(1-x)}$.

3.20. $y=-\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+2)}}{x+2}$.

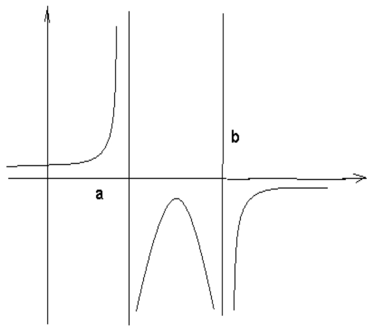
3.21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$.

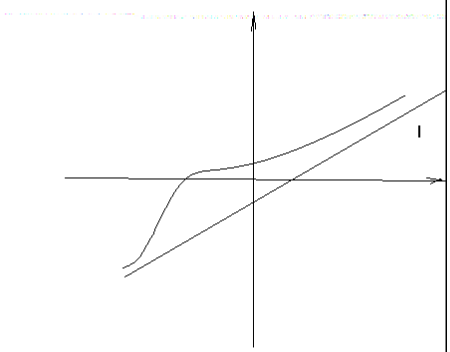
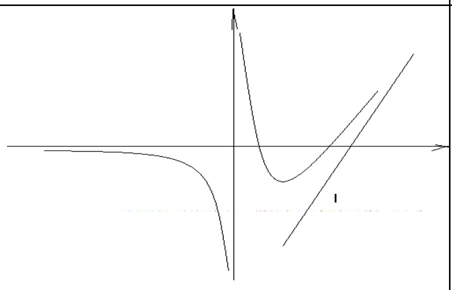
3.22. $y=-(x+1)\mathrm{e}^{x+2}$.

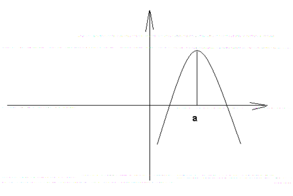
3.23. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x+3}}{x+3}$.

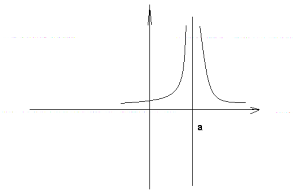
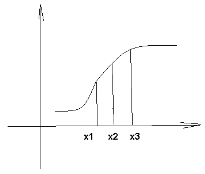
3.24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

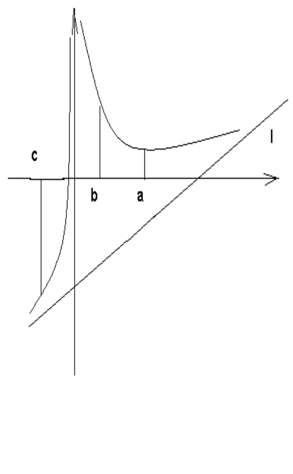
ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

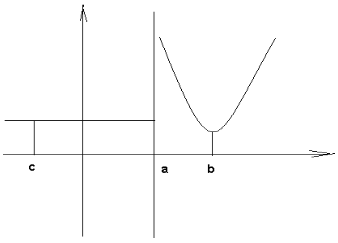
<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">$x=a$ – уравнение вертикальной асимптоты функции y=f(x). Тогда</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) $x=a$ – точка разрыва второго рода функции y=f(x)
2) $x=a$ – точка разрыва первого рода функции y=f(x)
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$,
4) $f'(a)=0$,
5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>1) Функция y=f(x) имеет две вертикальные асимптоты x=a и x=b
2) Функция y=f(x) имеет две наклонные асимптоты x=a и x=b
3) Точки x=a и x=b являются точками разрыва второго рода функции y=f(x)
4) y=f(x) непрерывна на [a,b]
5) y=f(x) непрерывна на (a,b)
6) Точка x=a является точкой экстремума функции y=f(x)</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">1) Вертикальные асимптоты y=f(x) перпендикулярны оси Ox
2) Вертикальные асимптоты y=f(x) параллельны оси Ox
3) Функция y=f(x) обязательно имеет хотя бы одну вертикальную асимптоту
4) Функция y=f(x) может иметь бесчисленное множество вертикальных асимптот</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) не имеет вертикальных асимптот
2) имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот
3) x=0 – вертикальная асимптота</td></tr>
</table>

5	Функция $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$	
	1) имеет две вертикальные асимптоты x=2 и x= – 2 2) не имеет вертикальных асимптот 3) имеет одну вертикальную асимптоту x=2	
6	Функция y=f(x) не имеет вертикальных асимптот	
	1. y=ln x, 2. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, 3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$	
7	Функция y=f(x)	
	1) может иметь бесчисленное множество наклонных асимптот 2) всегда имеет две наклонные асимптоты 3) может не иметь наклонных асимптот 4) может иметь только одну наклонную асимптоту	
8		1) Прямая l является правой и левой наклонной асимптотой функции y=f(x) 2) Прямая l является вертикальной асимптотой функции y=f(x) 3) Функция y=f(x) непрерывна на всей числовой оси 4) Функция y=f(x) имеет одну точку экстремума 5) Функция y=f(x) монотонно возрастает
9		1) Ось Oy является левой наклонной асимптотой функции y=f(x) 2) Ось Oy является вертикальной асимптотой функции y=f(x) 3) Прямая l является правой наклонной асимптотой функции y=f(x) 4) Ось Ox является левой наклонной асимптотой функции y=f(x)

10	Функция y=f(x) не имеет наклонных асимптот	
	1. $y=\dfrac{x^3}{x+2}$, 2. $y=\dfrac{x}{x^2+2}$, 3. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, 4. y = ln x, 5. y = x2	
11	Одна и та же прямая является и правой и левой наклонными асимптотами функции y=f(x)	
	1. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, 2. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, 3. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$, 4. y = ln (x+3)	
12	Функция y = f(x) имеет правую наклонную асимптоту и не имеет левую	
	$y=\dfrac{x-2}{x^2+4}$, 2) y = ln (x–3), 3) $y=e^{-x}$	
13	x = a – точка экстремума функции y = f(x)	
	1. $f'(a)=\infty$, 2. $f''(a)=0$ или $f''(a)=\infty$, 3. . $f'(a)=0$ или $f'(a)=\infty$ 4. x = a – точка разрыва функции, 5. x = a может быть граничной точкой ООФ	
14	$f'(x)$ меняет знак, переходя через точку а	
	1) x = a – точка экстремума функции y = f(x) 2) x = a – точка экстремума или точка разрыва функции y = f(x) 3) x = a – точка разрыва функции y = f(x)	
17		1. $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–» , переходя через точку а 2. $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», переходя через точку а 3. $f'(x)$ не меняет знак, переходя через точку а

18		1. $f'(x)$ меняет знак, переходя через точку а 2. $f'(x)$ не меняет знак, переходя через точку а 3. х = а –точка экстремума функции у = f(x) 4. х = а –точка разрыва функции у = f(x) 5. х = а –точка перегиба функции у = f(x)
19	х = а – точка перегиба функции у = f(x)	
	1) f(x) определена в точке х = а, 2) $f''(a)=\infty$, 3) $f'(a)=0$ 4) $f''(a)=0$ или $f''(a)=\infty$, 5) $f''(a)=0$, 6) х = а может являться граничной точкой ООФ	
20	$f''(a)=0$	
	1) х = а обязательно является точкой перегиба функции у = f(x) 2) х = а может являться точкой перегиба функции у = f(x) 3) х = а не может являться точкой перегиба функции у = f(x) 4) х = а является точкой перегиба функции у = f(x), если у = f(x) определена в точке а	
21		1) х0 – точка экстремума функции у = f(x) 2) х0 – точка перегиба функции у = f(x) 3) $f''(x_1)>0$, 4) $f''(x_1)<0$ 5) $f''(x_2)>0$, 6) $f''(x_2)<0$, 7) $f''(x_1)=0$, 8) $f''(x_2)=0$
22	График функции у = f(x) симметричен относительно оси Оу. Тогда	
	ООФ: $x\in(0,\infty)$, 2) f(x) – четная, 3) f(x) – нечетная, 4) f(x) – функция общего вида	

<table>
<tr><td>23</td><td colspan="2">График функции y = f(x) симметричен относительно начала координат. Тогда</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) f(x) – четная, 2) f(x) – нечетная,
3) f(x) – функция общего вида, 4) ООФ: $x \in (-\infty, 0)$</td></tr>
<tr><td>24</td><td colspan="2">$y = \ln(1 + x^2)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) f(x) – четная, 2) f(x) – нечетная, 3) f(x) – функция общего вида,
4) график имеет симметрию относительно начала координат</td></tr>
<tr><td>25</td><td colspan="2">$y = \frac{\cos x}{x}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) f(x) – четная, 2) f(x) – нечетная, 3) f(x) – функция общего вида,
4) график имеет симметрию относительно оси Oy</td></tr>
<tr><td>26</td><td colspan="2">$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) f(x) – четная, 2) f(x) – нечетная, 3) f(x) – функция общего вида,
4) график имеет симметрию</td></tr>
<tr><td>27</td><td colspan="2">$y = \ln(1 + x^2)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) x = 0 – точка экстремума функции y = f(x)
2) x = 0 – точка максимума функции y = f(x)
3) Прямые x = 1 и x = –1 – вертикальные асимптоты функции y = f(x)</td></tr>
<tr><td>28</td><td>
</td><td>1) Прямая l является правой и левой наклонной асимптотой y = f(x)
2) Прямая x = 0 является вертикальной асимптотой y = f(x)
3) $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \infty$, 4) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = -\infty$,
5) $f'(a) = 0$,
6) x = a – точка перегиба функции y = f(x)
7) f(x) монотонно возрастает при x<0
8) f(x) монотонна при x>0
9) $f'(b) > 0$, 10) $f'(c) > 0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>29</td><td>
</td><td>1) Существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
2) $f'(c)=0$
3) Не существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)$
4) $f''(a)=0$</td></tr>
<tr><td>30</td><td colspan="2">Функция имеет вид $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) f(x) определена на всей числовой оси кроме точки x = 0
2) f(x) – четная, 3) f(x) – нечетная,
4) Прямая x = 0 – вертикальная асимптота функции y = f(x)
5) Прямая y = 0 – правая и левая наклонная асимптота функции
6) Прямая y = 0 – правая наклонная асимптота функции</td></tr>
<tr><td>31</td><td colspan="2">$y=\ln(x^2-4x+8)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) ООФ: $x\in(-\infty,\infty)$,
2) вертикальных асимптот нет,
3) x = 2 – точка минимума функции,
4) график функции имеет симметрию</td></tr>
<tr><td>32</td><td colspan="2">Функция y = f(x) имеет вид: y = x при $x \neq 1$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1) x = 1 – точка непрерывности функции y = f(x)
2) x = 1 – точка устранимого разрыва функции y = f(x)
3) x = 1 – точка неустранимого разрыва функции y = f(x)
4) существует $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$,
5) f(x) – четная,
6) x = 1 $\in$ ООФ</td></tr>
<tr><td>33</td><td colspan="2">Угловой коэффициент касательной к кривой y = sin x в точке $x=\dfrac{\pi}{6}$
равен</td></tr>
</table>

	1) 1, 2) 0, 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 2) 4) $\propto$, 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
34	При вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{5x^3+8}$
	1) не возникает неопределенности 2)возникает неопределенность $\frac{0}{0}$ 3) возникает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, 4)возникает неопределенность $0*\infty$
35	При вычислении $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+6x-16}$
	1)возникает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, 2)возникает неопределенность $\frac{0}{0}$ 3)возникает неопределенность $0*\infty$ 4)возникает неопределенность 1^∞, 5) не возникает неопределенности
36	При вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{x^2}$
	1)возникает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, 2)возникает неопределенность $\frac{0}{0}$ 3)возникает неопределенность $0*\infty$, 4)возникает неопределенность 1^∞
37	Неопределенностью не является
	1) $\frac{\infty}{\infty}$, 2) $\frac{0}{\infty}$, 3) $\frac{0}{0}$, 4) 1^∞, 5) 2^∞, 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^\infty$

38	Бесконечно большими при $x \to \infty$ являются функции
	1) $\frac{1}{x}$, 2) e^x, 3) e^{-x}, 4) x3+1, 5) ln x, 6) $\frac{\sin x}{x}$
39	Бесконечно малыми при являются функции
	1) $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$, 2) $\frac{1}{x}$ при $x \to 0$, 3) $\frac{1}{x-8}$ при $x \to \infty$, 4) sin x при $x \to 0$, 5) tg x при x→0, 6) cos x при x→0, 7) arcctg x при x→0, 8) ln x при x→0
40	Эквивалентными бесконечно малыми являются функции
	1) x и sin x при $x \to 0$, 2) sin x и cos x при $x \to \frac{\pi}{2}$, 3) x и tg x при $x \to 0$, 4) x и arctg x при $x \to 0$, 5) $e^x - 1$ и x при x→0, 6) ln(1+x) и x при x→0, 7) x и sin 3x при x→0

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Предел последовательности. Свойства пределов.

Второй замечательный предел. Число е.

Предел функции в точке и на бесконечности. Свойства пределов.

Первый замечательный предел.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых.

Непрерывность. Точки разрыва и их классификация.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение производной. Геометрический и физический смысл.

Уравнение касательной. Дифференциал функции.

Логарифмическое дифференцирование.

Производная параметрически и неявно заданной функции.

Правило Лопиталя.

Производные высших порядков. Формула Лейбница.

Разложение функций по формуле Тейлора.

Исследование функций на монотонность и экстремумы.

Исследование функций на выпуклость и точки перегиба.

Асимптоты графика функции.

Общая схема исследования функции и построения графика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение математического анализа имеет исключительно важное значение для естественно-математической подготовки современного бакалавра, необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

В результате работы с настоящим пособием студенты осваивают и приобретают:

– основные понятия и факты первых разделов математического анализа;

– навыки решения типовых заданий.

Материал учебно-практического пособия внесет существенный вклад в приобщение будущего бакалавра к исследовательской работе, овладение общими логическими приемами мышления, необходимыми как в профессиональной, так и повседневной деятельности.

Предлагаемое пособие должно помочь студенту рационально организовать свой труд по изучению дисциплины, выполнению контрольных работ и подготовке к экзамену.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шершнев, В. Г. Математический анализ : учебное пособие / В. Г. Шершнев. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 288 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-005488-9.

2. Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях. В 3 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление.: Учебное пособие / Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. – М. :МЦНМО, 2017. - 412 с.: ISBN 978-5-4439-3120-3.

3. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: Учебное пособие / Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И., - 6-е изд., (эл.) – М. :БИНОМ. Лаб. знаний, 2015. - 675 с.: ISBN 978-5-9963-2987-8.

4. Ильин, В. А. Основы математического анализа : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2009. – Ч. I. – 647 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1). – ISBN 978-5-9221-0902-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Введение в анализ. Дифференциальное исчисление

Учебно-практическое пособие

Автор-составитель
КАСТЭН Юлия Александровна

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 30.05.23.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 30 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.