

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

Е.Н. Талицкий

# МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ И ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Учебное пособие  
В 3 частях

Часть 3

Владимир 2006

УДК 621.396.2  
ББК 328.44 – 021.1  
Т16

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ИУ- 4 Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана  
*В.А.Шахнов*

Доктор технических наук,  
профессор Московского авиационного института  
(государственного технического университета)  
*А.В.Назаров*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета.

**Талицкий, Е.Н.** Механические воздействия и защита электронной аппаратуры: Учеб. пособие: В 3 ч. Ч. 3. / Е.Н. Талицкий; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2006г. – 115 с. – ISBN 5-89368-638-1

В первой части дается общая характеристика механических воздействий и способов защиты аппаратуры; рассмотрены вопросы моделирования и расчета конструкций, приводимых к системам с сосредоточенными и распределенными параметрами, во второй части рассмотрены аналитические методы расчета вибраций ячеек электронной аппаратуры.

В третьей части пособия рассмотрены вопросы расчета прочности элементов конструкций электронной аппаратуры, расчета и проектирования систем изоляции вибрации, шума и удара. Кратко рассмотрены также вопросы системного подхода к виброзащите аппаратуры, численные методы анализа конструкций при механических воздействиях. Приводятся теоретические сведения из математической физики и механики, способствующие более глубокому пониманию основного материала пособия.

Предназначено для студентов специальностей 200800 (210201) «Проектирование и технология радиоэлектронных средств», 220500 (210202) «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств», и магистрантов по направлению 551100 «Проектирование и технология электронных средств». Может быть полезно студентам приборостроительных специальностей, а также аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами вибро-, ударозащиты изделий.

Табл. 12 Ил. 52 Библиогр.: 13 назв.

УДК 621.396.2  
ББК 328.44 – 021.1

ISBN 5-89368-638-1

© Владимирский государственный университет, 2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения .....	4
Список сокращений.....	4
Предисловие.....	5
<b>Глава 9. Определение прочности конструкций ЭА при механических воздействиях .....</b>	<b>6</b>
9.1. Расчет прочности конструкций типа балок.....	6
9.2. Расчет прочности конструкций типа пластин.....	11
9.3. Расчет усталостной долговечности выводов ЭРЭ.....	15
<b>Глава 10. Основы расчета и конструирования систем изоляции вибрации, шума и удара.....</b>	<b>25</b>
10.1. Порядок расчета систем виброизоляции и исходные данные [6].....	25
10.3. Статический и динамический расчеты виброизоляторов .....	35
10.4. Конструктивные способы защиты от акустического шума [7] .....	46
<b>Глава 11. Дополнительные сведения о виброзащите электронной аппаратуры.....</b>	<b>57</b>
11.1. Структура системы виброзащиты ЭА .....	57
11.2. Структурно-функциональная схема виброзащиты блока Электронной Аппаратуры.....	60
11.3. Численные методы анализа конструкций Электронной Аппаратуры.....	63
<b>Глава 12. Некоторые сведения из прикладной математики и механики.....</b>	<b>76</b>
12.1. Уравнение колебаний струны [11].....	76
12.2. Дифференциальные уравнения изгиба балок и пластин при статической нагрузке.....	90
12.3. Расчет статически неопределимых систем [13].....	101
Приложение .....	110
Рекомендательный библиографический список .....	114

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$z$  – перемещение (расстояние);  
 $Z$  – амплитуда виброперемещения;  
 $\dot{Z}$  – амплитуда виброускорения;  
 $w(x, y)$  – деформация изгиба в точке с координатами  $x$  и  $y$ ;  
 $u, v$  – продольная деформация вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  
 $a, b, H$  – длина, ширина и толщина платы (пластины) соответственно;  
 $h$  – относительная толщина платы (слоя);  
 $W$  – полная энергия колебаний;  
 $\Pi$  – потенциальная энергия;  
 $T$  – кинетическая энергия;  
 $\Delta W$  – энергия, рассеиваемая за цикл колебаний;  
 $\sigma$  – нормальное напряжение;  
 $\tau$  – касательное напряжение;  
 $k$  – коэффициент жесткости;  
 $\eta$  – коэффициент механических потерь;  
 $\varepsilon$  – относительная продольная деформация;  
 $\omega$  – угловая частота, рад/с;  
 $\omega_0, p$  – собственная частота колебаний, рад/с;  
 $f$  – частота, Гц;  
 $f_0$  – собственная частота колебаний, Гц;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $m$  – масса;  
 $m_3$  – масса элементов;

$E$  – модуль продольной упругости;  
 $G$  – модуль сдвига;  
 $E', G'$  – динамический модуль продольной упругости и динамический модуль сдвига;  
 $A$  – показатель использования ВП материалов в конструкции;  
 $\xi_w(x, y), \xi_w(x, y)$  – показатели уменьшения резонансных амплитуд, виброперемещения и виброускорения в точке платы с координатами  $x$  и  $y$ ;  
 $D$  – цилиндрическая жесткость;  
 $H(j\omega)$  – передаточная функция;  
 $k_x, k_y$  – волновые числа в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  
 $K_i$  – абсолютное значение продольной жесткости  $i$ -го слоя;  
 $k_i$  – относительное значение продольной жесткости  $i$ -го слоя;  
 $\rho_x, \rho_y$  – радиусы кривизны платы в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  
 $K_s$  – абсолютное значение продольной жесткости  $i$ -го слоя;  
 $\varphi_x$  – угол изгиба пластины в направлении оси  $x$ ;  
 $\rho$  – радиус кривизны, плотность;  
 $g$  – ускорение силы тяжести;  
индекс "н" – начальное значение;  
индекс "к" – конечное значение.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЭА – электронная аппаратура;  
АРК – амплитуда резонансных колебаний;  
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;  
ВП – вибропоглощающий;  
ДВ – демпфирующая вставка;  
ДГК – динамический гаситель колебаний;  
ДМУ – динамический модуль упругости;  
ДР – демпфирующее ребро;

ДС – демпфирующий слой;  
КМП – коэффициент механических потерь;  
КП – коэффициент передачи;  
ПД – полимерный демпфер;  
ППУ – пенополиуретан;  
РЭС – радиоэлектронные средства;  
СФК – собственная форма колебаний;  
СЧК – собственная частота колебаний;  
ЭРЭ – электрорадиоэлементы;  
ЭС – электронное средство.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Третья часть пособия включает последние четыре главы учебного пособия.

В гл. 9 «Определение прочности конструкций ЭА при механических воздействиях» рассмотрены вопросы расчета прочности конструкций типа балок и пластин при возникновении у них резонансных колебаний, расчет усталостной долговечности электрических выводов ЭРЭ также в условиях резонансных колебаний.

В гл. 10 «Основы расчета и конструирования систем изоляции вибрации, шума и удара» приводится последовательность расчета систем ВИ и исходные данные для расчета, схемы систем ВИ и типы виброизоляторов, основы статического и динамического расчетов виброизоляторов. Уделено также внимание конструктивным способам защиты от акустического шума.

Гл. 11 «Дополнительные сведения о виброзащите электронной аппаратуры» в определенной степени обобщает материал всего учебного пособия. Приводятся алгоритмы выбора способов виброзащиты. Даются также краткие сведения о численных методах анализа конструкций ЭА.

В гл. 12 «Некоторые сведения из прикладной математики и механики» рассматриваются уравнения колебаний струны, уравнения изгиба балок и пластин при статической нагрузке, расчет статически неопределимых систем. Материал этой главы необходим для более глубокого понимания теоретических вопросов, рассмотренных в учебном пособии. При подготовке этой главы в основном использованы лишь с небольшой корректировкой некоторые материалы хорошо написанных учебных изданий [11 – 13], о чем сделаны соответствующие отметки в тексте пособия.

В этой, 3-й ч. учебного пособия гл. 10,12 рекомендуются студентам, изучающим дисциплину «Механические воздействия и защита ЭА». Материал 3-й ч. пособия в полном объеме рекомендуется магистрантам и аспирантам, занимающимся научной работой в этом направлении.

Автор выражает благодарность магистрам А.В. Венину и А.О. Кондрашкову, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к изданию.

## Глава 9

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ЭА ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 9.1. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

**Гармоническая вибрация.** При воздействии гармонической вибрации наиболее опасно, с точки зрения возможности механического разрушения, возникновение резонансных колебаний балки. Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (9.1)$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение в сечениях балки;

$M_{\max}$  – максимальный изгибающий момент;

$[\sigma]$  – допустимое нормальное напряжение.

Момент сопротивления определяется по формуле

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad (9.2)$$

для круглого сечения и по формуле

$$W = \frac{bH^2}{6} \quad (9.3)$$

для прямоугольного сечения.

Изгибающий момент при изгибе балки

$$M = EJ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \quad (9.4)$$

где  $J$  – момент инерции сечения, определяемый по формуле

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (9.4a)$$

где  $d$  – диаметр для балки круглого сечения и

$$J = \frac{bH^3}{12}, \quad (9.4b)$$

где  $b, h$  – ширина и высота для балки прямоугольного сечения.

Учитывая (4.24, 4.27 ч.1) прогиб балки при резонансе на  $i$ -й гармонике [1]:

$$V_i = V_i(x) = \frac{B_i(x)W_i(x)\ddot{Z}_i}{4\pi^2\eta_i f_{0i}^2}, \quad (9.5)$$

где коэффициент

$$B_i(x) = \int_0^L W_i(x) dx \bigg/ \int_0^L W_i^2(x) dx. \quad (9.6)$$

В этих выражениях:  $f_{0i}$  –  $i$ -я СЧК, определяемая по формуле (4.9);  $\ddot{Z}_i$  – амплитуда виброускорения точек крепления.  $\eta_i$  – КМП, рассчитываемый по формуле

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{f_{0i}}}, \quad (9.6a)$$

где  $f_{0i}$  – первая собственная частота колебаний балки.

Балочная функция и вторая производная в формуле (9.5)

$$W_i(x) = \sin \chi_x + A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x ;$$

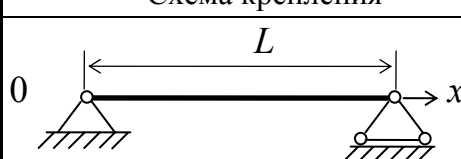
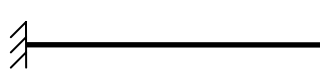

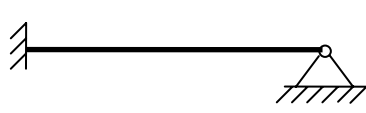
$$W_i''(x) = \left( \frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \left( -\sin \chi_x - A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x \right), \quad (9.7)$$

где  $\chi_x = \lambda_i x/a$ ,  $a$  – длина балки.

Параметр  $\lambda_i$  и коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  выбираются из табл. П.2 в зависимости от номера гармоники и способа крепления концов балки. Значения интегралов в формуле (9.6) приведены в табл. П.3. Координаты наиболее опасных сечений, где  $M=M_{\max}$ , приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Координаты наиболее опасных сечений

Схема крепления	$X$	Схема крепления	$X$
	$L/2$		0
	$L/2$		$3/8 L$

**Пример 9.1.** Определить прочность балки (медного вывода) в условиях первого резонанса, если возбуждение балки кинематическое с амплитудой виброускорения  $10g$ . Размеры балки, материал и способ крепления концов соответствуют примеру 4.1 (ч.1).

**Решение.** Так как балка представляет медный проводник, то по табл. П.1 найдем допустимое напряжение  $[\sigma] = 0,3 \cdot 10^8 - 1,2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

Для круглого сечения по формулам (9.2) и (9.4a) найдем

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(0,5 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 1,23 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3;$$

$$W = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(0,5 \cdot 10^{-3})^4}{64} = 3,1 \cdot 10^{-15} \text{ м}^4.$$

Для балки со свободно опертыми концами с помощью табл. П.3 по формуле (9.6) находим

$$B_i(x) = \int_0^L W_i(x) dx \Big/ \int_0^L W_i^2(x) dx = \frac{0,64}{0,5} = 1,28.$$

Из табл.П.2 выбираем  $\lambda_1=3,14$ ;  $A_1=B_1=C_1=0$ .

Первая собственная частота будет рассчитываться по формуле

$$f_{0i} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}}, \text{ где } F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,96 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2,$$

$$f_{01} = \frac{3,14^2}{2\pi \cdot (2,8 \cdot 10^{-2})^2} \sqrt{\frac{1,27 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-15}}{8,9 \cdot 10^3 \cdot 1,96 \cdot 10^{-7}}} = 945 \text{ Гц},$$

коэффициент механических потерь:  $\eta = \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{945}} = 0,033$ ; а также учитывая,

что максимальный изгибающий момент при  $x=L/2$  (см. табл.9.1), по формулам (9.4) и (9.5) получим

$$|M_{\max}| = 1,27 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-15} \frac{1,28 \cdot 10 \cdot 9,81}{4\pi^2 \cdot 945^2 \cdot 0,033} \left( \frac{3,14}{2 \cdot 10^{-2}} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = 5,34 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}^2.$$

По формуле (9.1)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{5,34 \cdot 10^{-4}}{1,23 \cdot 10^{-11}} = 0,435 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2..$$

Применяя условие прочности (9.1), видим, что  $\sigma_{\max}$  меньше среднего значения допустимого напряжения  $[\sigma_{\text{ср}}]=0,75 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ , т.е. балка не разрушится.

**Случайная вибрация.** Если демпфирование в системе мало, то ее реакция на узкополосное случайное возбуждение представляет узкополосный случайный процесс [2]. Распределение пиковых значений напряжений можно описать законом Релея:

$$P\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \exp\left[-\frac{\sigma_n^2}{2\sigma^2}\right], \quad (9.8)$$

где  $P\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$  – вероятность того, что пиковые значения напряжения пре-

высят среднеквадратическое (СК) значение.



Если принять пиковые значения равными допускаемым  $[\sigma]$ , то получим

$$P\left(\frac{[\sigma]}{\sqrt{\sigma_k^2}}\right) = \exp\left[-\frac{[\sigma]^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (9.9)$$

СК значения напряжения балки на  $k$ -й форме определяются по формуле

$$\tilde{\sigma}_k(x) = B_k \frac{b}{2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \cdot \varphi''(x) \sqrt{\frac{g^2 S(f)}{8\pi\eta_k f_k}}. \quad (9.10)$$

Обозначения параметров здесь соответствуют формуле (4.32, ч.1.).

При действии широкополосной случайной вибрации одновременно возбуждается несколько собственных форм колебаний (СФК). Если реакции балки на каждой из форм независимы, то результирующее СК значение напряжения равно

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}, \quad (9.11)$$

где  $n$  – число одновременно возбуждаемых форм колебаний.

**Ударное воздействие.** В соответствии с (9.1)  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$ , где  $W$  – момент сопротивления, рассчитываемый по формулам (9.2) или (9.3).

Если балку представить в виде модели с сосредоточенной массой и считать, что на нее действует сосредоточенная сила инерции

$$P = m\ddot{V}, \quad (9.12)$$

где  $m$  – сосредоточенная масса;

$\ddot{V}$  – ускорение в точке приведения, то максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$  можно найти по формулам табл. 9.2 [3].

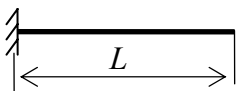

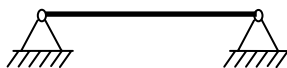
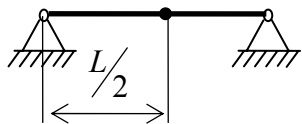
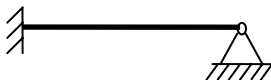
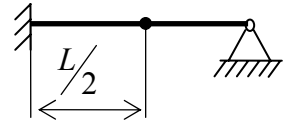
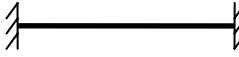
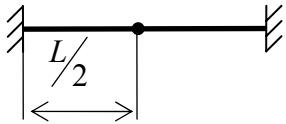
Для расчета силы  $P$  в соответствии с формулой (9.12), необходимо найти приведенную массу  $m$  и ускорение  $\ddot{V}$ .

*Определение приведенной массы.* Будем считать, что приведенная масса эквивалентна расчетной, если не изменяется собственная частота колебаний  $\omega_0$ . Для балки с распределенной массой

$$\omega_0 = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{B}{m}}, \text{ а для балки с сосредоточенной массой } M: \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Таблица 9.2

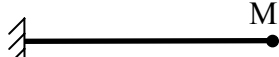
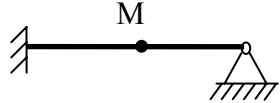
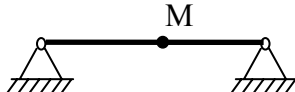
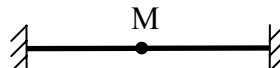
## Способы крепления балок и расчетные формулы

Способ крепления	Расчетная схема	Коэффициент жесткости $k$	Координата наиболее опасного сечения	$M_{\max}$
		$3EJ/L^3$	$PL$	0
		$48EJ/L^3$	$PL/4$	$L/2$
		$110EJ/L^3$	$3PL/16$	$L$
		$148EJ/L^3$	$PL/8$	$L/2$

Приравнивая правые части этих выражений и используя значения  $\alpha$  из табл. 4.1 (ч.1) и формулы табл. 9.2, получим выражения для расчета приведенных масс, сведенные в табл. 9.3. В этой таблице  $m$  – масса балки.

Таблица 9.3

## Приведенные массы

Расчетная схема	$M$	Расчетная схема	$M$
	$0.24m$		$0.46m$
	$0.49m$		$0.37m$

*Расчет ускорений.* Используем формулы, приведенные в гл. 3 (ч.1) и в работе [4].

При действии синусоидального импульса ускорение

$$\ddot{V} = \frac{A\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sqrt{2(1 + \cos \omega\tau)},$$

прямоугольного импульса

$$\ddot{V} = 2A \sin \frac{\omega\tau}{2},$$

где  $A$  – максимальное значение ускорения импульса;

$\tau$  – длительность импульса;

$\omega$  – условная частота возбуждения.

Максимальное ускорение при действии синусоидального импульса

$$\ddot{V}_{\max} = 1,57A,$$

при действии прямоугольного импульса

$$\ddot{V}_{\max} = 2A.$$

## 9.2. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

**Гармоническая вибрация.** При возбуждении колебаний пластины гармонической вибрацией наиболее опасно, с точки зрения возможности механического разрушения, возникновение ее резонансных колебаний.

Условие прочности можно представить в виде выражения (9.1).

Максимальные нормальные напряжения возникают на поверхности пластины и в направлении осей  $X$  и  $Y$  рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6M_y}{H^2}; \\ \sigma_y &= \frac{6M_x}{H^2}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

где  $H$  – толщина пластины.

Изгибающие моменты

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (9.14)$$

где  $V=V(x,y)$  – функция координат  $X$  и  $Y$ ;

$D$  – цилиндрическая жесткость, определяемая по формуле (5.2, ч.2).

Максимальный изгиб на  $k$ -м резонансе с учетом формулы (5.27, ч.2) находится по формуле

$$V_k(x,y) = \frac{\ddot{Z}_0 B_k(x,y) W_k(x,y)}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k}. \quad (9.15)$$

Функция  $W_k(x,y)$ , определяющая собственную форму колебаний, для прямоугольной пластины представляется в виде

$$W_k(x,y) = W_k(x) W_k(y),$$

где балочные функции

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \sin \chi_x + A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x; \\ W_k(y) &= \sin \chi_y + A_j \cos \chi_y + B_j \operatorname{sh} \chi_y + C_j \operatorname{ch} \chi_y; \\ \chi_x &= \frac{\lambda_i x}{a}; \quad \chi_y = \frac{\lambda_j y}{b}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Параметры  $\lambda$  и коэффициенты  $A, B, C$  берутся из табл. П.2 в зависимости от способа крепления краев в направлении осей  $X$  и  $Y$  и номера гармоники.

Коэффициент

$$B_k(x,y) = B_k(x) B_k(y) = \frac{\int_0^a W_k(x) dx}{\int_0^a W_k^2(x) dx} \cdot \frac{\int_0^b W_k(y) dy}{\int_0^b W_k^2(y) dy}. \quad (9.17)$$

Значения интегралов берутся из табл. П.4. Собственная частота колебаний (СЧК)  $f_{0k}$  и коэффициент механических потерь (КМП)  $\eta_k$  находятся соответственно по формулам (5.13, ч.2) и (4.33, ч.1).

Используя выражения (9.15) и (9.17), найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\ddot{Z}_A B_k \lambda_i^2}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k a^2} W_j(y) (-\sin \lambda_x - A_i \cos \lambda_x + B_i \operatorname{sh} \lambda_x + C_i \operatorname{ch} \lambda_x); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\ddot{Z}_A B_k \lambda_j^2}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k b^2} W_i(x) (-\sin \lambda_y - A_j \cos \lambda_y + B_j \operatorname{sh} \lambda_y + C_j \operatorname{ch} \lambda_y). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Для нахождения  $\sigma_{\max}$  можно рассчитать  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , используя компьютерную программу, в нескольких десятках точек и наибольшее из рассчитанных значений принять равным  $\sigma_{\max}$ .

**Случайная вибрация.** Подходы, использованные в п. 9.1 для расчета прочности балок при действии случайной вибрации, справедливы и для пластин.

СК значения напряжений рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_k^2(x) &= \frac{1,5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left( \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}}; \\ \tilde{\sigma}_k^2(y) &= \frac{1,5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left( \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}},\end{aligned}\quad (9.19)$$

где  $W_k = W_k(x, y)$ .

**Пример 9.2.** Рассчитать среднеквадратическое напряжение в точке прямоугольной платы с координатами  $\xi_x = x/a = 0,4$  и  $\xi_y = y/b = 0,4$ . Способ крепления платы показан на рис. 9.1. Параметры платы:  $\rho = 2,47 \cdot 10^3$ ,  $E = 0,33 \cdot 10^{11}$ ,  $\nu = 0,22$ ,  $H = 1,5 \cdot 10^{-3}$ .

**Решение.** Воспользуемся формулами (9.19) и (4.32, ч.1), но вначале проведем предварительные вычисления. По табл. П.3 находим значения интегралов:

$$\begin{aligned}\int_0^a W_1^2(x) dx &= 1,0358a; & \int_0^b W_1^2(y) dy &= 0,5b; \\ \int_0^a W_2^2(x) dx &= 0,9985a; & \int_0^b W_2^2(y) dy &= 0,5b; \\ \int_0^a W_1(x) dx &= 0,8456a; & \int_0^b W_1(y) dy &= 0,6366b; \\ \int_0^a W_2(x) dx &= 0,8594a; & \int_0^b W_2(y) dy &= 0,6366b.\end{aligned}$$

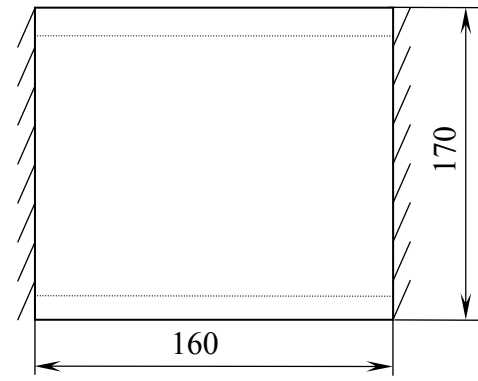


Рис. 9.1. Способ крепления платы

Находим по формуле (9.17) коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{0,8456}{1,0359} \cdot \frac{0,6366}{0,5} = 1,039; \quad B_2 = \frac{0,8594}{0,9985} \cdot \frac{0,6366}{0,5} = 1,096.$$

Функцию  $W_k(x, y)$  для прямоугольной платы найдем по формуле

$$W_k(x, y) = W_i(x) W_j(y).$$

Балочные функции с учетом данных табл. П.2, формул (9.16) и  $\xi_x = 4,73 \cdot 0,4 = 1,89$ ,  $\xi_y = 7,853 \cdot 0,4 = 3,14$  равны

$$W_1(x) = \sin(1,89) - 1,018 \cdot \cos(1,89) - 1 \cdot \operatorname{sh}(1,89) + 1,018 \cdot \operatorname{ch}(1,89) = 1,48; \quad W_1(y) = 0,951;$$

$$W_2(x) = \sin(3,14) - 0,999 \cdot \cos(3,14) - 1 \cdot \operatorname{sh}(3,14) + 0,999 \cdot \operatorname{ch}(3,14) = 1,03; \quad W_2(y) = 0,588.$$

По формулам (9.18) находим

$$\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial x^2} = 0,951 \left( \frac{4,73}{0,16} \right)^2 (-\sin(1,89) - (-1,018)\cos(1,89) - 1 \cdot \operatorname{sh}(1,89) + 1,0178 \cdot \operatorname{ch}(1,89)) = -880,3;$$

$$\frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial x^2} = -1376; \quad \frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial y^2} = -481,3; \quad \frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial y^2} = -830,1.$$

Среднеквадратическое напряжение вдоль осей  $x$  и  $y$  рассчитывается по формулам:

$$\tilde{\sigma}_k^2(x) = \frac{1,5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left( \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}},$$

$$\tilde{\sigma}_k^2(y) = \frac{1,5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left( \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}}.$$

Первые две собственные частоты для данной платы с указанным типом крепления составляют  $f_{01} = 284$  Гц,  $f_{02} = 444$  Гц:

$$\tilde{\sigma}_1^2(x) = \frac{1,5 \cdot 9,753 \cdot 1,039 \cdot 9,81}{\pi \cdot 284 \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2} (-880,3 - 0,22 \cdot 481,3) \sqrt{\frac{0,1}{2\pi \cdot 284 \cdot 0,059}} = 2,255 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tilde{\sigma}_2^2(x) = 2,535 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \tilde{\sigma}_1^2(y) = 1,544 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \tilde{\sigma}_2^2(y) = 1,85 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Окончательно получим

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2(x) + \tilde{\sigma}_2^2(x)} = \sqrt{(2,255 \cdot 10^6)^2 + (2,535 \cdot 10^6)^2} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2(y) + \tilde{\sigma}_2^2(y)} = \sqrt{(1,544 \cdot 10^6)^2 + (1,85 \cdot 10^6)^2} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

**Ударное воздействие.** Проверяется условие прочности в виде (9.1). Расчет напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  производится по формулам (9.13) и (9.14). При действии сосредоточенной силы  $P$  в середине свободно опертой по всем сторонам прямоугольной пластины изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  рассчитываются по формулам [3]:

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ (1+\nu) \text{th} \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right] / m \right\};$$

$$M_y = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ (1+\nu) \text{th} \alpha_m + \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right] / m \right\},$$

где  $m = 1, 3, 5, \dots$ ,  $\alpha_m = \frac{m\pi a}{2b}$ .

Если представить, что масса пластины сосредоточена в ее середине, то при действии ударного импульса сосредоточенная сила равна силе инерции

$$P = M\ddot{V},$$

где  $M$  – сосредоточенная масса;

$\ddot{V}$  – ускорение в точке сосредоточения массы, т.е. в середине пластины.

Для прямоугольной свободно опертой пластины

$$M = m_{\text{пл}}/4,$$

где  $m_{\text{пл}}$  – масса пластины.

При действии синусоидального ударного импульса

$$\ddot{V} = 1,7A,$$

при действии прямоугольного импульса

$$\ddot{V} = 2A,$$

где  $A$  – значение максимального ускорения в импульсе.

### 9.3. РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ВЫВОДОВ ЭРЭ

**Расчет максимальных напряжений.** Максимальные механические напряжения в конструкциях выводов типа рам рассчитываются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} d}{2J}, \quad (9.20)$$

где  $M_{\max}$  – максимальный изгибающий момент;  
 $d$  – диаметр круглого вывода, или большая сторона сечения вывода прямоугольного сечения;

$J$  – момент инерции сечения.

Момент  $J$  определяется по формулам (9.4а) или (9.4б). В табл. 9.4.[5] приведены возможные способы крепления ЭРЭ, действующие силовые факторы, расчетные схемы и формулы изгибающих моментов в наиболее опасных сечениях выводов. Наибольший из расчетных изгибающих моментов в опасных точках принимается  $M_{\max}$ .

Силовые факторы обычно обусловлены резонансными колебаниями ЭРЭ, закрепленными на выводах, резонансными колебаниями самих выводов и печатных плат. Особенно опасен резонанс ПП на первой собственной частоте.

В формулах табл. 9.4  $Q_x$  и  $Q_y$  углы изгиба платы в направлениях осей  $X$  и  $Y$ , определяются по формулам

$$Q_x = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = \frac{B_x B_y \sqrt{f_0} \lambda_x}{4\pi^2 f_0^2 a} (\cos \chi_x - A_i \sin \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x);$$

$$Q_y = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{B_x B_y W(x)}{4\pi^2 b f_0^{1.5}} (\cos \chi_y - A_j \sin \chi_y + B_j \operatorname{ch} \chi_y + C_j \operatorname{sh} \chi_y),$$

где  $\chi_x = \frac{\lambda_x x}{a}$ ;  $\chi_y = \frac{\lambda_y y}{b}$ .

Балочные функции  $W(x)$  и  $W(y)$  рассчитываются по формуле (9.16), а параметры  $B_x$  и  $B_y$  – по формуле (9.17). Параметр  $\lambda$ , коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и интегралы вида  $\int W(x) dx$  и  $\int W(y) dy$ ,  $\int W^2(x) dx$  и  $\int W^2(y) dy$  берутся из табл. П.2 и П.3 в зависимости от способа крепления краев.

В формулах табл.9.4:

$N$  – число выводов ЭРЭ;

$P_i$  – сила инерции;

$a$  – амплитуда виброускорения мест крепления платы;

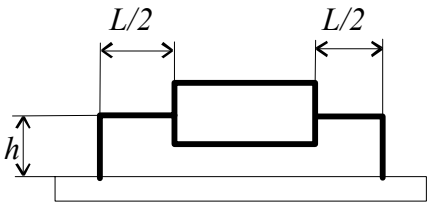
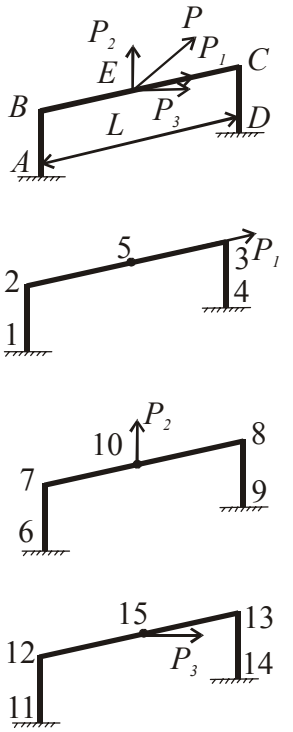
$\gamma$  – удельный вес материала проводника;

$g$  – ускорение силы тяжести;

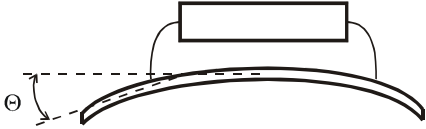
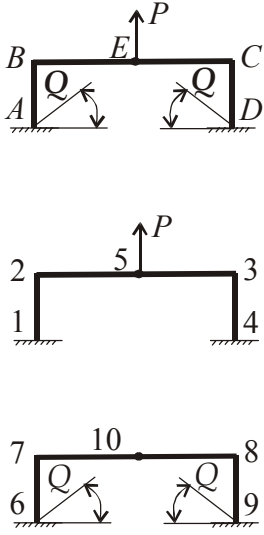
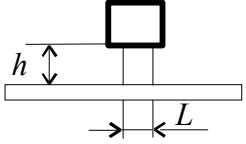
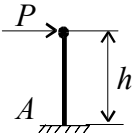
$m$  – масса ЭРЭ.

Таблица 9.4

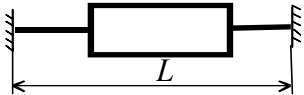
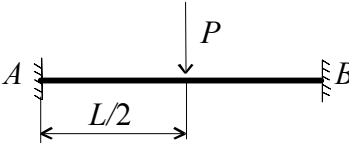
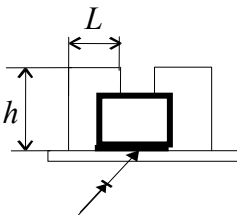
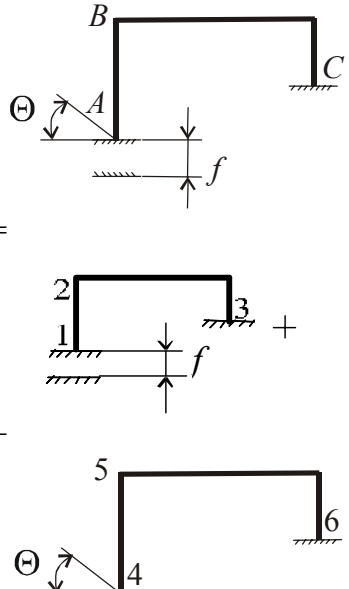
Изгибающие моменты в опасных сечениях вывода

Способ крепления ЭРЭ	Виды ЭРЭ и дополнительные условия	Виды резонанса	Расчетная модель	Расчетные формулы
	<p>1. Резисторы, конденсаторы, диоды, интегральные микросхемы                  2. На ЭРЭ действует сила инерции <math>P</math> с частотой вибрации</p>	<p>Резонанс ЭРЭ</p>		$M_A = M_1 + M_6 + M_{11}$ $M_B = M_2 + M_7 + M_{12}$ $M_E = M_{10} + M_{15}$ $M_C = M_B; M_D = M_A$ $M_1 = M_4 = \frac{P_1 h (1 + 3k)}{2(1 + 6k)}$ $M_2 = M_3 = \frac{1,5 P_1 k h}{1 + 6k}$ $+ M_6 = M_9 = \frac{P_2 L}{8(2 + k)}$ $+ M_7 = M_8 = \frac{P_2 L}{4(2 + k)}$ $M_{10} = \frac{P_2 L (k + 1)}{4(k + 2)}$ $M_{11} = M_{14} = \frac{P_3 h}{2}$ $M_{12} = M_{13} = \frac{P_3 L^2}{8(Eh + LG)}$ $M_{15} = \frac{P_3 L}{4} \left( 1 - \frac{L}{\frac{2Eh}{G} + 2L} \right)$



	<p>3. Ось ЭРЭ совпадает с направлением изгиба</p>	<p>Резонанс платы</p>		$M_A = M_1 + M_6$ $M_B = M_2 + M_7$ $M_E = M_5 + M_{10}$ $M_C = M_B; M_D = M_A$ $M_1 = \frac{PL}{8k + 16}$ $M_2 = \frac{PL}{4k + 8}$ $M_5 = \frac{PL(k + 1)}{4k + 8}$ $M_6 = \frac{2QEJ}{h} \left( \frac{3 + 2k}{2 + k} \right)$ $k = \frac{h}{L}$
 <p>количество выводов – <math>N</math></p>	<p>4. Конденсаторы, транзисторы, интегральные микросхемы 2. На ЭРЭ действует сила инерции с частотой вибрации</p>	<p>Резонанс ЭРЭ</p>		$M_A = \frac{Ph}{N}$ $P = ma \cdot \sqrt{f_0}$

Способ крепления ЭРЭ	Виды ЭРЭ и дополнительные условия	Виды резонанса	Расчетная модель	Расчетные формулы
	<p>5. Резисторы, конденсаторы, диоды, интегральные микросхемы 6. Корпус ЭРЭ жестко соединен с платой</p>	<p>Резонанс платы</p>		$M_A = M_1 + M_4$ $M_B = M_2 + M_5$ $M_C = M_3 + M_6$ $M_1 = \frac{3fEJ}{(1+k)hL}$ $M_2 = \frac{6fEJ}{(1+k)hL}$ $M_3 = \frac{3(1+2k)fEJ}{(1+k)h^2}$ $M_4 = \frac{(3+4k)QEJ}{(1+k)h}$ $M_5 = \frac{2EJQ}{(1+k)L}$ $M_6 = \frac{EJQ}{(1+k)L}$

	<p>7. Резисторы, конденсаторы 8. На ЭРЭ действует сила инерции <math>P</math> с частотой вибрации</p>	<p>Резонанс ЭРЭ</p>		$M_A = \dot{I}_a = \frac{1}{2} PL$ $P = ma \cdot \sqrt{f_0}$
	<p>9. Транзисторы 10. Корпус ЭРЭ жестко связан с платой 11. Плоскость, в которой расположен вывод, совпадает с направлением изгиба платы</p>	<p>Резонанс платы</p>		$M_A = M_1 + M_4;$ $M_B = M_2 + M_5 \quad M_C = M_3 + M_6$ $M_1 = \frac{6(2+3k)}{4+3k} \cdot \frac{EJf}{h^2}$ $M_2 = \frac{18EJf}{(4+3k)hL}$ $M_3 = \frac{3EJ(1+2k)f}{h^2}$ $M_4 = \frac{12(1+k)}{4+2k} \cdot \frac{EJQ}{h}$ $M_5 = \frac{6EJQ}{(4+3k)L}$ $M_6 = \frac{EJQ}{(1+k)L}$

**Расчет собственных частот колебаний.** Типы крепления ЭРЭ, расчетные схемы в виде рам и расчетные формулы приведены в табл. 9.5.

В формулах табл. 9.5:

$$B = EJ; \quad k = h/l;$$

$E, G$  – модуль продольной упругости и модуль сдвига материала вывода;

$d$  – диаметр вывода;

$m$  – масса;

$J$  – момент инерции сечения вывода, определяемый по формулам (9.4а) или (9.4б).

**Определение времени до разрушения.** Время до разрушения выводов ЭРЭ при действии гармонических вибраций определяется по формуле

$$t_p = \frac{N_p}{f_0}, \quad (9.21)$$

где  $N_p$  – число циклов до разрушения;

$f_0$  – первая собственная частота колебаний платы, ЭРЭ или вывода.

Число циклов  $N_p$  рассчитывается по формуле  $N_p = \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} \right)^n N_\delta$ ,

где  $N_\delta$  – базовое число циклов, принимаемое равным  $5 \cdot 10^7$ .

$\sigma_r$  – предел усталости материала вывода (табл. П.1).

$n$  – параметр, зависящий от материала, размеров, формы вывода и некоторых других факторов ( $n = 5 - 10$ ).

$\sigma_{\max}$  – максимальное напряжение в сечениях вывода, определяемое с помощью формул, приведенных в табл. 9.4.

**Пример 9.3.** Определить долговечность выводов резистора ОМЛТ при резонансных колебаниях на первой собственной частоте. Резистор закреплен на плате, как показано на рис. 2.3, а, (ч.1), расчетная модель соответствует рис. 2.3, б. Масса резистора  $3 \cdot 10^{-3}$  кг, размеры выводов  $d=1 \cdot 10^{-3}$  м,  $l=L/2=2 \cdot 10^{-3}$  м,  $h=5,3 \cdot 10^{-3}$  м. Выводы выполнены из холодотянутой медной проволоки с модулем упругости  $E=1,23 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>.

Ускорение вибровозбуждения  $\xi = 10g$ .

**Решение.** Находим

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (10^{-3})^4}{64} = 4,91 \cdot 10^{-14} \text{ м}; \quad k = \frac{h}{l} = \frac{5,3}{4} = 1,325;$$

$$B = EJ = 1,23 \cdot 10^{11} \cdot 4,91 \cdot 10^{-14} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$$

По формуле табл.9.4 находим первую собственную частоту колебаний

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{24 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3 \cdot 10^{-3} \cdot (5,3 \cdot 10^{-3})^3 \left( \frac{3}{6 \cdot 1,325 + 1} + 1 \right)}} = 7771 \text{ Гц.}$$

Определяем логарифмический декремент колебаний по формуле [5]

$$\Lambda = \frac{\pi}{\sqrt{f_1}} = \frac{\pi}{\sqrt{7771}} = 0,036$$

и коэффициент передачи при резонансе

$$\mu = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{0,036} = 88,151.$$

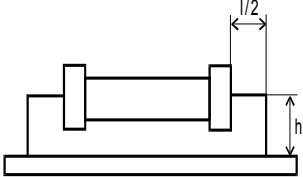
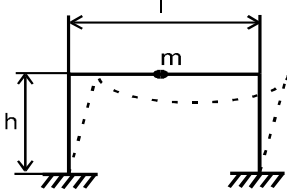
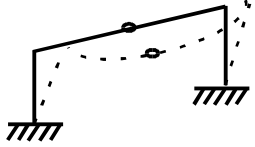
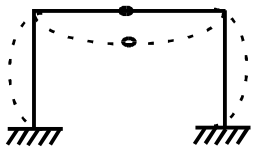
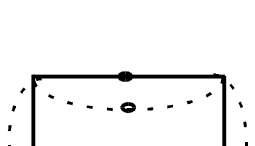
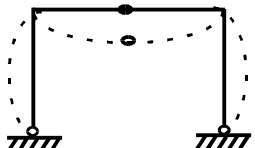
Находим инерционную силу

$$P = \mu m \xi = 88,151 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10g = 25,24 \text{ Н.}$$

Используя табл. 9.5, находим изгибающие моменты для характерных точек

Т а б л и ц а 9.5

Собственная частота колебаний

Тип крепления	Расчетная схема и вид деформации	Собственная частота
		$f = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{24Bg}{mh^3 \left(1 + \frac{3}{6k+1}\right)} \right]^{0,5}$
		$f = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\frac{2g}{m}}{\left[ \frac{l^3}{24B} + \frac{h^3}{3B} \right]} \right\}$
		$\dots \left[ \frac{l^4 GJ}{32B(2hB + lGJ)} \right]^{0,5}$
		$f = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{48Bg}{ml^3 \left(1 - \frac{3}{2k+4}\right)} \right]^{0,5}$
		$f = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{48Bg}{ml^3 \left(1 - \frac{9}{4(2k+3)}\right)} \right]^{0,5}$

$$M_A = M_D = \frac{1+3k}{2(1+6k)} hP = \frac{(1+3 \cdot 1,325)}{2(1+6 \cdot 1,325)} 5,3 \cdot 10^{-3} \cdot 25,24 = 0,038 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_B = M_C = \frac{3 khP}{2(1+6k)} = \frac{3 \cdot 1,325 \cdot 5,3 \cdot 10^{-3} \cdot 25,24}{2(1+6 \cdot 1,325)} = 0,031 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Так как при рассматриваемой схеме нагружения напряжения от продольных сил в стержнях отсутствуют, находим

$$\sigma_A = \sigma_D = \frac{M_A d}{2J} = \frac{0,038 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_B = \sigma_C = \frac{M_B d}{2J} = \frac{0,031 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 3,11 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

Таким образом, в точках пайки выводов к плате  $\sigma_{\max} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ . По кривой усталости для медной холоднокатаной проволоки, показанной на рис.9.3, находим число циклов до разрушения  $N_p = 10^4$ .

Время работы до отказа находим по (9.21)

$$t_p = \frac{N_p}{f_0} = \frac{10^4}{7771} = 1,287 \text{ с}.$$

**Пример 9.4.** Используя условия предыдущего примера, рассчитать долговечность выводов резистора ОМЛТ, приклеенного в центре платы, показанной на рис. 9.2 и имеющей размеры  $H=1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $a=1 \cdot 10^{-1} \text{ м}$ ,  $b=5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Материал платы стеклотекстолит с модулем упругости  $E=3,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , коэффициентом Пуассона  $\nu=0,22$ , плотностью  $\rho=2,05 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$ . Плата возбуждается вибрациями с амплитудой  $Z_0=0,13 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , передаваемыми от мест крепления, и находится в условии резонанса на первой собственной частоте. При таких условиях напряжения в выводах обусловлены изгибающими моментами, действующими на эти выводы при поперечных колебаниях платы.

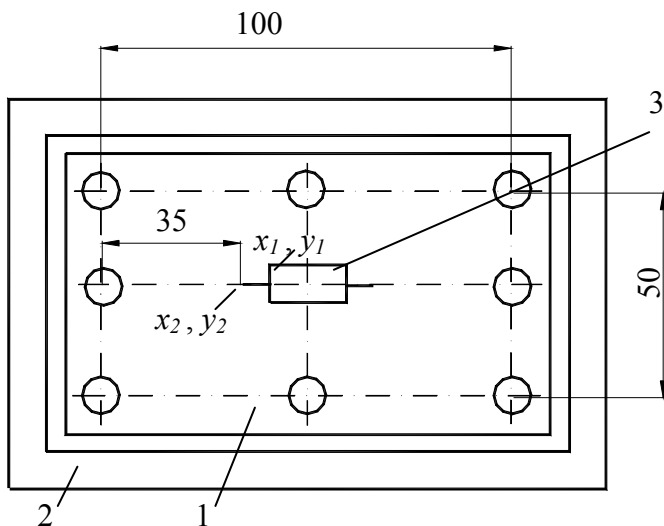


Рис.9.2. Схема крепления платы.  
1 – плата; 2 – рамка; 3 – резистор.

**Решение.** При схеме крепления платы, показанной на рис. 9.2, ее можно считать свободно опертой на всех краях. Тогда форму колебаний в направлении оси  $X$  можно представить в виде

$$w(x) = W_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

и угол  $\Theta$  при  $x = 0,035$

$$\Theta = \frac{dw}{dx} = W_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} =$$

$$= W_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{0,035\pi}{0,1} = 0,454 \frac{\pi W_0}{a}.$$

Определим собственную частоту колебаний

$$f_1 = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{EH^2}{12\rho(1-\sigma^2)}} = \frac{49,35}{2\pi \cdot 0,1^2} \sqrt{\frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (10^{-3})^2}{12 \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot (1-0,22^2)}} = 892 \text{ Гц,}$$

коэффициент механических потерь

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{f_1}} = \frac{1}{\sqrt{892}} = 0,033$$

и, используя табл. П.5 (ч.2), параметр формы колебаний

$$K_1(0,5;0,5) = K_1(0,5) \cdot K_1(0,5) = 1,273^2 = 1,621.$$

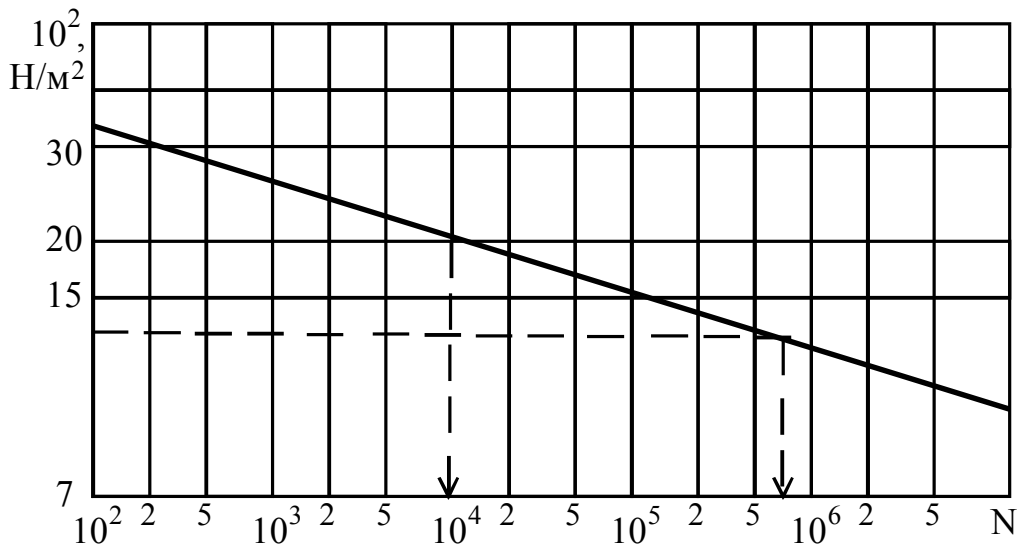


Рис.9.3. Кривая усталости

Определим прогиб в центре платы

$$W_0 = \frac{K_1(0,5;0,5)}{\eta} Z_0 = \frac{1,621}{0,033} 0,13 \cdot 10^{-5} = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

и угол

$$\Theta = W_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 6,3 \cdot 10^{-5} \frac{\pi}{0,1} \cos\left(\frac{0,035\pi}{0,1}\right) = 2,86 \cdot 10^{-4} \pi \text{ рад.}$$

Используя табл.9.5, находим изгибающие моменты в характерных точках *A, B, C*. Деформация  $f = w_1(x) - w_2(x)$ . Так как при резонансе

$$w(x) = \frac{K(\xi_x, \xi_y)}{\eta} Z_0,$$

получим

$$f = \frac{Z_0}{[K_1(\xi_x, \xi_y) - K_2(\xi_x, \xi_y)]}.$$

Относительные координаты для точек *X* и *Y* равны соответственно

$$\xi_{x_1} = \frac{37}{100} = 0,37 \text{ и } \xi_{y_1} = \frac{25}{50} = 0,5; \xi_{x_2} = \frac{35}{100} = 0,35 \text{ и } \xi_{y_2} = 0,5.$$

По табл. П.5 для случая свободно опертых краев, используя интерполирование, находим  $K(0,35) = 1,120$ ;  $K(0,37) = 1,156$ ;  $K(0,5) = 1,273$ .

$$\text{Прогиб } w = \frac{0,13 \cdot 10^{-5}}{0,033} (1,156 - 1,120) \cdot 1,273 = 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

По формулам табл.9.5 найдем изгибающие моменты:

$$M_A = \frac{3wEJ}{(1+k)hl} + \frac{(3+4k)\Theta EJ}{(1+k)h} = 4,64 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_B = \frac{6wEJ}{(1+k)hl} + \frac{2\Theta EJ}{(1+k)h} = 3,15 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_C = \frac{3(1+2k)wEJ}{(1+k)h^2l} + \frac{\Theta EJ}{(1+k)h} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для наибольшего изгибающего момента в точке  $A$

$$\sigma_A = \frac{M_A d}{2J} = \frac{4,64 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 4,73 \cdot 10^7 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-2}.$$

По кривой усталости на рис 9.3 находим число циклов до разрушения  $N_p = 10^6$  и долговечность выводов  $t_p = 10^6 / 892 = 1121 \text{ с} = 18,6 \text{ мин.}$

## Контрольные вопросы

1. Напишите условие прочности для балок.
2. Что понимается под моментом сопротивления балки?
3. Как определяется распределение пиковых значений напряжений при случайном возбуждении?
4. Что понимается под спектральной плотностью процесса?
5. Расскажите о методике расчета прочности балок при ударном воздействии.
6. Каковы особенности расчета прочности для пластин при гармонической вибрации?
7. В чем заключается методика расчета прочности при ударном воздействии.
8. Что понимается под усталостной долговечностью конструкции?
9. Что определяет кривая усталости?
10. Расскажите о методике расчета усталостной долговечности.



## Глава 10

# ОСНОВЫ РАСЧЕТА И КОНСТРУИРОВАНИЯ СИСТЕМ ИЗОЛЯЦИИ ВИБРАЦИИ, ШУМА И УДАРА

### 10.1. ПОРЯДОК РАСЧЕТА СИСТЕМ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ [6]

Конструирование системы виброизоляции РЭА обычно начинают с выбора типа виброизоляторов и схемы их расположения. При выборе виброизоляторов учитывают допустимые нагрузки и предельные значения параметров, характеризующих условия эксплуатации. Принципиальная схема системы виброизоляции зависит в основном от особенностей расположения аппаратуры на носителе и условий динамического воздействия (некоторые рекомендации по выбору схем виброизоляции даны ниже). После того как тип виброизоляторов и схема системы виброизоляции выбраны, переходят к расчету статических нагрузок на виброизоляторы, а также параметров собственных и вынужденных колебаний виброизолируемой аппаратуры. На основании данных расчета выбирают типоразмер виброизоляторов, устанавливают которые в соответствующих точках системы виброизоляции. При необходимости по результатам расчета можно уточнять схему расположения виброизоляторов.

В результате вибрационного расчета должны быть известны частоты собственных колебаний виброизолируемой аппаратуры, амплитуды перемещения или ускорения вынужденных колебаний, а также эффективность виброизоляции. При расчете на ударное воздействие надо оценить поведение системы в момент удара, будет ли виброизоляция ослаблять или, наоборот, усиливать удар и в какой степени.

При расчете реальная конструкция виброизолируемой аппаратуры должна быть заменена эквивалентной системой с одной или несколькими степенями свободы в зависимости от сложности схемы виброизоляции и требуемой точности расчета.

Чтобы выбрать и рассчитать систему виброизоляции, должны быть известны следующие исходные данные.

1. Параметры внешних динамических воздействий:
  - диапазон частот возбуждающих колебаний;
  - амплитуды перемещения или ускорения и направления действия возбуждающих колебаний;
  - продолжительность действия возбуждающих колебаний;
  - величины и направления действия линейных ускорений, а также продолжительность их действия;

- максимальные ударные ускорения и длительность ударных импульсов, как одиночных, так и многократных;
  - число многократных ударов;
  - высота возможного падения при транспортировании.
2. Параметры внешней окружающей среды:
    - интервал рабочих температур;
    - максимальная относительная влажность;
    - атмосферное давление;
    - сроки эксплуатации и хранения виброизоляторов в составе аппаратуры;
    - условия транспортирования виброизолированной аппаратуры.
  3. Кинетические параметры и габариты виброизолируемой аппаратуры:
    - масса и положение центра тяжести аппаратуры;
    - осевые и центробежные моменты инерции;
    - основные габаритные и присоединительные размеры.
  4. Допустимые величины динамических воздействий на виброизолируемую аппаратуру в заданном диапазоне частот:
    - амплитуды перемещения и ускорения;
    - коэффициенты динамичности в заданном диапазоне частот.
  5. Статические и динамические силовые характеристики виброизоляторов.

На практике не все из перечисленных параметров бывают необходимы или могут быть известны. Число их определяется в зависимости от условий конкретной задачи.

Обычно применяют следующий порядок проектирования систем виброизоляции (СВИ).

1. Подготовительный этап, включающий определение массы и центра тяжести ЭА, расчет ее осевых и центробежных моментов инерции, выбор схемы системы виброизоляции и типа виброизоляторов, определение центра жесткости СВИ, удовлетворение требований рационального монтажа виброизоляторов, под которым понимается выполнение следующих действий:

- общая грузоподъемность всех виброизоляторов должна равняться весу виброизолируемой аппаратуры;
- координаты центра тяжести аппаратуры должны совпадать с её центром тяжести.

2. Статический расчет включает определение статических нагрузок на виброизоляторы и выбор их типоразмеров, предельные толщины компенсирующих прокладок для выравнивания блока, установленного на виброизоляторы.

3. Динамический расчет имеет целью определение собственных частот и амплитуд колебаний аппаратуры на виброизоляторах, расчет на воздействие ударных нагрузок и линейных ускорений, оценку эффективности СВИ.

## 10.2. СХЕМЫ СИСТЕМ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ И ТИПЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ [6]

**Определение кинетических параметров блока и центра жесткости СВИ.** Центр тяжести блока можно определить экспериментальным и расчетным путем. Экспериментальные методики включают: уравнивание на опоре, на подвесе, на динамометрах [6]. Расчет координат центра тяжести проводится по формулам

$$x_u = \frac{\sum_{i=1}^n x_{iu} P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}; \quad y_u = \frac{\sum_{i=1}^n y_{iu} P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}; \quad z_u = \frac{\sum_{i=1}^n z_{iu} P_i}{\sum_{i=1}^n P_i},$$

где  $x_{iu}, y_{iu}, z_{iu}$  – координаты центра тяжести  $i$ -го узла,  $P_i$  – вес  $i$ -го узла.

Осевые моменты инерции экспериментально определяются методами маятниковых или крутильных колебаний, методом прокачки на тросах [6]. Для однородных блоков простейшей формы формулы моментов инерции приведены в табл. 10.1.

Координаты центра жесткости определяются по формулам

$$x_{жс} = \frac{\sum_{i=1}^n k_{xi} x_i}{\sum_{i=1}^n k_{xi}}; \quad y_{жс} = \frac{\sum_{i=1}^n k_{yi} y_i}{\sum_{i=1}^n k_{yi}}; \quad z_{жс} = \frac{\sum_{i=1}^n k_{zi} z_i}{\sum_{i=1}^n k_{zi}},$$

где  $x_i, y_i, z_i$  – координаты расположения ВИ;

$k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}$  – коэффициенты жесткости ВИ в направлении осей  $x, y, z$ .

**Схемы систем виброизоляции.** Схемы расположения виброизоляторов относительно центра тяжести аппаратуры могут быть самые разнообразные. В зависимости от конкретных условий монтажа конструктор выбирает ту или иную схему с учетом эксплуатационных режимов и зазоров между аппаратурой и смежными конструкциями носителя.

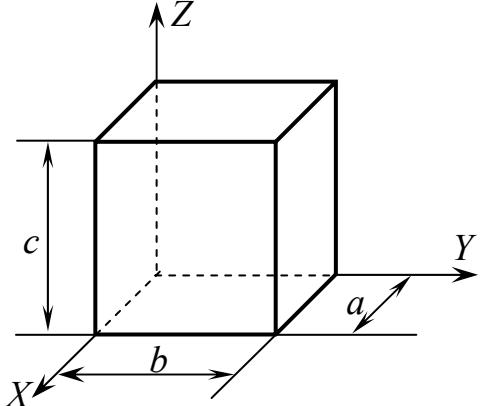
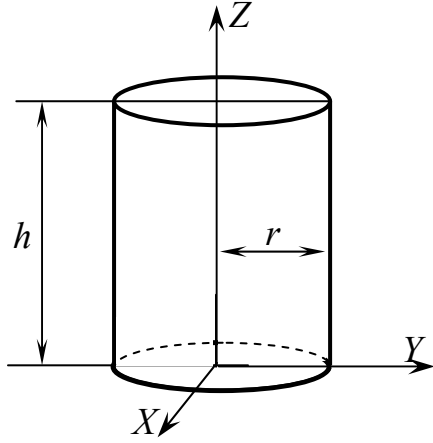
Каждая схема (рис.10.1) имеет свои преимущества и недостатки.

Схема нижнего монтажа (рис.10.1,а) – наиболее простая схема, и часто ее выбирают по привычке без учета недостатков. Главный из них заключается в том, что при боковых нагрузках для исключения соударения необходимо предусматривать достаточный зазор между виброизолируе-

мым блоком и смежными конструкциями. Такие же последствия вызывает несовпадение центра жесткости системы виброизоляции с центром тяжести аппаратуры. Поэтому схема (рис.10.1,*a*) применяется главным образом в обычной самолетной аппаратуре.

Таблица 10.1

Кинетические параметры простейших тел

Форма тела	Масса и координаты центра тяжести	Моменты инерции относительно центральных осей
	$m = abc\rho$ $x_c = \frac{a}{2}; \quad y_c = \frac{b}{2};$ $z_c = \frac{c}{2}$	$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
	$m = \pi r^2 h \rho$ $x_c = 0; \quad y_c = 0;$ $z_c = \frac{h}{2}$	$J_x = J_y = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$ $J_z = \frac{mr^2}{2}$

Схему, в которой виброизоляторы расположены в плоскости, проходящей через центр тяжести (рис.10.1,*б*), целесообразно использовать в условиях пространственного нагружения на реактивных самолетах и ракетах. Такая схема позволяет уменьшить колебания по горизонтальным осям, развязывая колебания в соответствии с осями симметрии. Наиболее выгодное расположение виброизоляторов такое, при котором их расстояние от центра тяжести блока равно радиусу инерции.

Однако не всегда удается выдержать расстояния между сторонами блока и его центром тяжести, равным радиусу инерции, так как это связано с увеличением габаритных размеров.

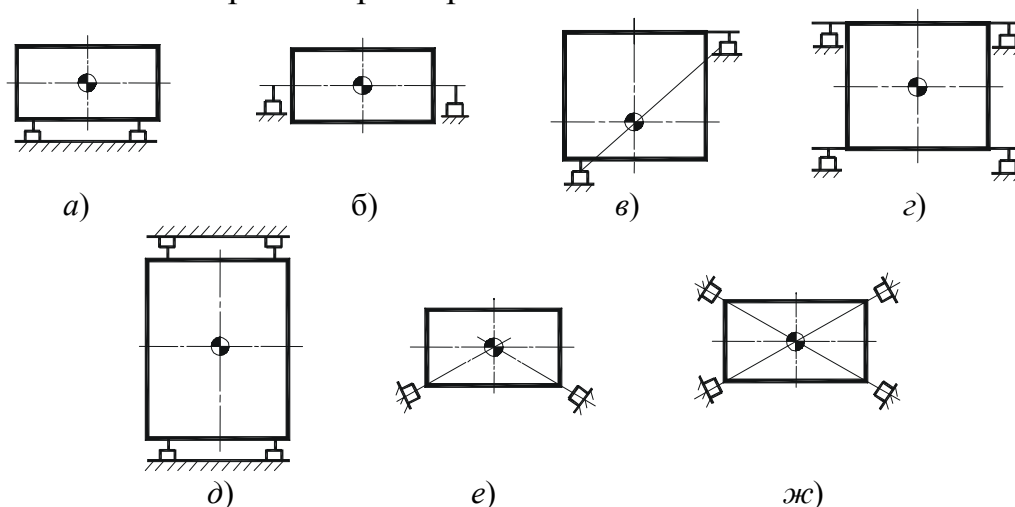


Рис. 10.1. Схемы монтажа виброизоляторов:

*а* – нижний монтаж; *б* – монтаж в плоскости центра тяжести; *в* – монтаж в диагональной плоскости, проходящей через центр тяжести; *г* – монтаж в двух горизонтальных плоскостях; *д* – двусторонний монтаж; *е* – монтаж под углом, односторонний; *ж* – монтаж под углом, двусторонний

Виброизоляторы не обязательно располагать в горизонтальной плоскости, проходящей через центр тяжести аппаратуры. Эффективность их не ухудшится при установке на наклонной плоскости, проходящей через центр тяжести, на расстояниях, равных радиусу инерции (рис.10.1,в). Для такого монтажа требуется несколько больше места, чем для аппаратуры таких же размеров, установленной по схеме нижнего монтажа, но это компенсируется тем, что благодаря большей устойчивости системы виброизоляции требуется меньший зазор между виброизолируемым блоком РЭА и окружающими его конструкциями. Если установить аппаратуру таким образом не удастся, то в системе виброизоляции будут возбуждаться вращательные колебания с частотами, приблизительно равными частотам поступательных колебаний.

Монтаж виброизоляторов в двух горизонтальных плоскостях (рис.10.1,г) обычно используется при защите блоков РЭА, у которых отношение высоты к ширине больше двух. Установка виброизоляторов в верхней плоскости обеспечивает дополнительные точки опоры. Если виброизоляторы расположены несимметрично относительно центра тяжести, то все режимы собственных колебаний будут связаны.

Схема монтажа, в которой виброизоляторы расположены навстречу один другому, называется двусторонней (рис.10.1,д). Она обеспечивает защиту от воздействия внешних сил, действующих во всех направлениях.

Виброизоляторы предварительно нагружены так, что каждому из виброизоляторов, расположенному внизу системы соответствует виброизолятор в верхней части. Предварительное поджатие делает систему более жесткой, сдвигает ее собственную частоту в область более высоких частот.

Схема монтажа виброизоляторов под углом к осям симметрии блока (рис.10.1,е) является наиболее пригодной для изоляции пространственных вибраций, но вместе с тем она и наиболее сложная, так как при небольшом нарушении симметрии в системе возникают все шесть связанных видов собственных колебаний.

Если же центр жесткости совпадает с центром тяжести блока, то все действующие силы будут уравновешены, вращательные колебания будут невелики. Этому условию удовлетворяет схема монтажа виброизоляторов, расположенных под углом внизу и сверху блока (рис.10.1,ж). В такой схеме все внешние силы уравновешиваются в направлении центра тяжести, что снижает влияние вращательных колебаний. Поскольку характеристики системы виброизоляции во всех положениях блока одинаковы, то характер движения объекта установки может быть любым.

**Типы виброизоляторов.** При выборе типа виброизоляторов учитываются следующие факторы:

- климатические условия, определяющие в основном вид упругого элемента;
- масса виброизолируемого аппарата, определяющая диапазон характеристик виброизолятора по грузоподъемности;
- заданный срок службы, определяющий характеристики виброизолятора по надежности;
- направленность воздействующих нагрузок, определяющую характер нагружения виброизоляторов;
- эксплуатационный диапазон возбуждающих частот, определяющий группу виброизолятора по собственным частотам.

В настоящее время существует большое количество различных типов виброизоляторов, которые отличаются как по виду упругого элемента, так и по конструктивному оформлению. Это является следствием широкого диапазона эксплуатационных условий и допустимых уровней перегрузки элементов аппаратуры. В этих условиях создание универсальных защитных устройств, пригодных для всех возможных случаев, становится чрезвычайно сложным. В данном случае конструктор сталкивается с задачей выбора виброизоляторов, наилучшим образом удовлетворяющих техническим требованиям, которые разделяются на три группы: динамические, климатические и конструктивные.

Динамические – обеспечивают надежную виброизоляцию аппарата по всем координатным осям в заданном диапазоне частот, а также защиту

от ударов. Для уменьшения амплитуды колебаний в случае возникновения резонансных режимов и быстрого гашения колебаний при толчках виброизоляторы должны иметь достаточное демпфирование. Для перекрытия всего диапазона рабочих частот виброизоляторы выполняются с различными частотными характеристиками. Частота собственных колебаний нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора<sup>1)</sup> (вдоль основной оси) составляет 3 – 4 Гц для низкочастотных, 8 – 10 Гц для среднечастотных и 20 – 25 Гц для высокочастотных виброизоляторов.

Климатические – сохранить работоспособность в различных эксплуатационных условиях. Виброизоляторы должны обеспечивать защиту аппаратуры при температуре окружающей среды от +60 до –60°С, относительной влажности до 98%, атмосферном давлении 5 ГПа, при действии морского тумана, инея, росы, пыли, плесневых грибков и паров горючесмазочных материалов.

Конструктивные – нормально работать при любой схеме нагружения, быть удобными в монтаже и креплении оборудования и удовлетворять условиям взаимозаменяемости, иметь малые массу и габаритные размеры, быть простыми в изготовлении. Они должны выдерживать воздействия вибрации, ударов и линейных нагрузок в соответствии с техническими условиями и иметь срок непрерывной работы не менее 2000 ч [4].

Конструкции виброизоляторов обязательно включают упругий элемент (или упругие элементы) определенной жесткости, обеспечивающий выполнение условия  $\nu > \sqrt{2}$ , и детали внешнего оформления, необходимые для крепления виброизолятора. В конструкцию виброизолятора входят детали или узлы, обеспечивающие демпфирование.

Упругий элемент выполняется обычно из резины или другого эластичного материала либо из пружинной стали или бериллиевой бронзы. Форма упругого элемента из резины может быть различной, а металлические упругие элементы выполняются в виде пружины (цилиндрической, конической, экспоненциальной), лепестков, троса, металлической структуры типа плетенки (путанки). Упругие элементы из резины работают на все виды деформаций, а металлические – на изгиб (лепестковые виброизоляторы), растяжение–сжатие (пружинные виброизоляторы), изгиб и кручение (тросовые виброизоляторы).

Рассеяние колебательной энергии (демпфирование) в виброизоляторах происходит за счет «внутреннего трения» в материале при деформации упругого элемента или специальных устройств, обеспечивающих воздуш-

---

<sup>1)</sup> Под номинальной нагрузкой виброизолятора подразумевается такая нагрузка, при которой статическая деформация упругого элемента находится в пределах рекомендуемых значений. Эта нагрузка является одной из основных характеристик виброизолятора [4].

ное (вязкое) или фрикционное (сухое) трение. При использовании демпфирующих устройств рассеяние колебательной энергии значительно больше, но конструкция прибора в целом при этом сложнее. Перспективны виброизоляторы, использующие в качестве упругого элемента полимеры с большим «внутренним трением».

В зависимости от типа упругого элемента и способа демпфирования виброизоляторы можно разделить на следующие четыре группы: резино-металлические; пружинные с воздушным демпфированием; пружинные с фрикционным демпфированием; цельнометаллические со структурным демпфированием.

К первой группе относятся виброизоляторы типа АП, АЧ, АР, АН, АКСС, ко второй – АД, к третьей – АФД, АПН, АПНМ, к четвертой – ДК, АРМ, АЦП, характеристики которых подробно описаны в [4; 6].

В качестве примера ниже рассмотрены виброизоляторы, относящиеся к каждой из перечисленных групп.

Отметим, что виброизоляторы с упругим элементом из резины, как правило, конструктивно более просты, могут работать при всех видах деформаций, но обладают меньшей прочностью, подвержены старению, их характеристики существенно зависят от температуры. Виброизоляторы с упругим пружинным элементом имеют сложную конструкцию, более прочны и долговечны, обладают большей стабильностью при действии климатических факторов. Дадим краткую характеристику основных групп виброизоляторов.

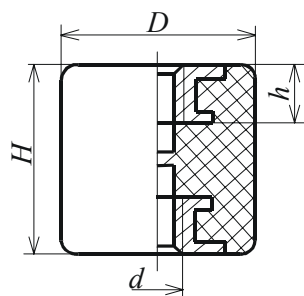


Рис. 10.2. Виброизолятор АН.

Виброизоляторы АН («ножка») (рис. 10.2) работают на изгиб и на сжатие. Номинальная нагрузка на сжатие от 60 до 500 Н, на изгиб – вчетверо меньше. Собственная частота номинально нагруженного виброизолятора: в осевом направлении 11 ... 13 Гц, в поперечном 6 ... 8 Гц. Диапазон рабочих температур  $-45 \dots +80$  °С. Виброзащита начинается с частоты 15 Гц при комнатной температуре и с частоты 40 Гц при температуре 10 °С и амплитуде вибрации 0,5 м. Основной недостаток виброизоляторов – их низкая вибропрочность.

Виброизолятор АД (рис. 10.3) имеет в качестве упругого элемента пружину экспоненциального профиля, обеспечивающую равночастотность<sup>2)</sup>. Для демпфирования колебаний используется резиновый баллончик, скрепленный с фланцем, имеющим калиброванное отверстие. При деформации пружины воздух проходит через это отверстие, создавая сопро-

<sup>2)</sup> При действии статической нагрузки вдоль главной оси виброизолятора.



тивление, примерно пропорциональное скорости движения. При низких температурах и малом давлении воздуха демпфирование осуществляется за счет сопротивления резины изгибу.

Виброизоляторы АД предназначены для нагрузок, от 0,3 до 15 кг, действующих вдоль оси пружины. Собственная частота нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора 8 – 10 Гц. Виброзащита при нормальных условиях начинается с частоты 12 Гц при амплитуде вибрации до 0,5 – 1,5 мм (в зависимости от номера серии виброизолятора). Интервал рабочих температур – 60 ... +70 °С. Коэффициент демпфирования  $\beta=0,06 - 0,12$  при  $\beta=20^\circ\text{C}$  и достигает 0,5 при  $t = -60^\circ\text{C}$ . Виброизоляторы АД удовлетворительно работают при ударных нагрузках.

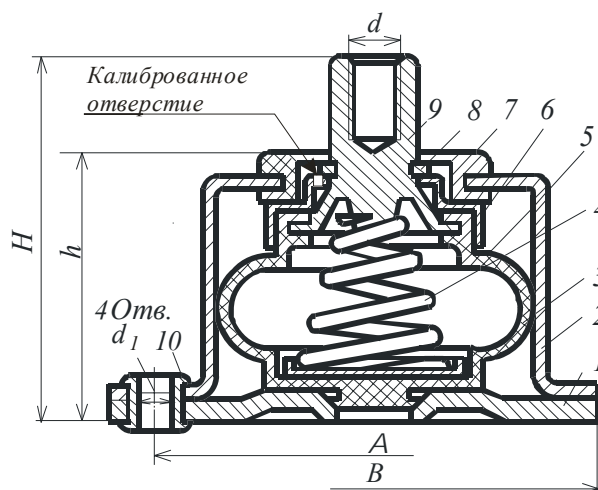


Рис.10.3. Виброизолятор АД:

- 1 – основание; 2 – корпус; 3 – подкладка; 4 – пружина; 5 – баллон; 6 – крышка; 7 – резиновое кольцо; 8 – стопорное кольцо; 9 – бобышка; 10 – поршень

Виброизоляторы АПН (пространственного нагружения) (рис.10.4) предназначены для работы при нагрузках,

действующих как вдоль оси виброизолятора, так и в поперечном направлении или под углом. Упругий элемент виброизолятора состоит из двух конических пружин одинаковой жесткости и, следовательно, имеет симметричную характеристику. Профиль пружин обеспечивает равночастотность виброизолятора. Под нижней пружинной установлена сетчатая подушка – ограничитель ударных нагрузок. Демпфирование колебаний осуществляется с помощью фрикционного демпфера. Продольные колебания демпфируются за счет трения сухарей демпфера о стенки корпуса виброизолятора, поперечные – за счет их трения об опорные шайбы. Максимальное демпфирование наблюдается на резонансных частотах (10 – 20 Гц) и соответствует значению  $\beta= 0,4 - 0,5$ . С увеличением частоты коэффициент демпфирования снижается, что благоприятно сказывается на виброизоляции в резонансной области (рис. 10.5). Виброизоляторы АПН рассчитаны на нагрузки 10 – 15 Н, вибрацию любого направления в диапазоне частот 30 – 200 Гц при максимальном ускорении до 15g, ударных ускорениях до 12g и линейном ускорении вдоль оси виброизолятора до 15g,  $t = - 60 \dots +150^\circ\text{C}$ .

Цельнометаллические сетчатые виброизоляторы. Упругим элементом сетчатого виброизолятора АЦП является подушка, отформованная штамповкой из тонкой стальной спирали. Для навивки спирали ис-

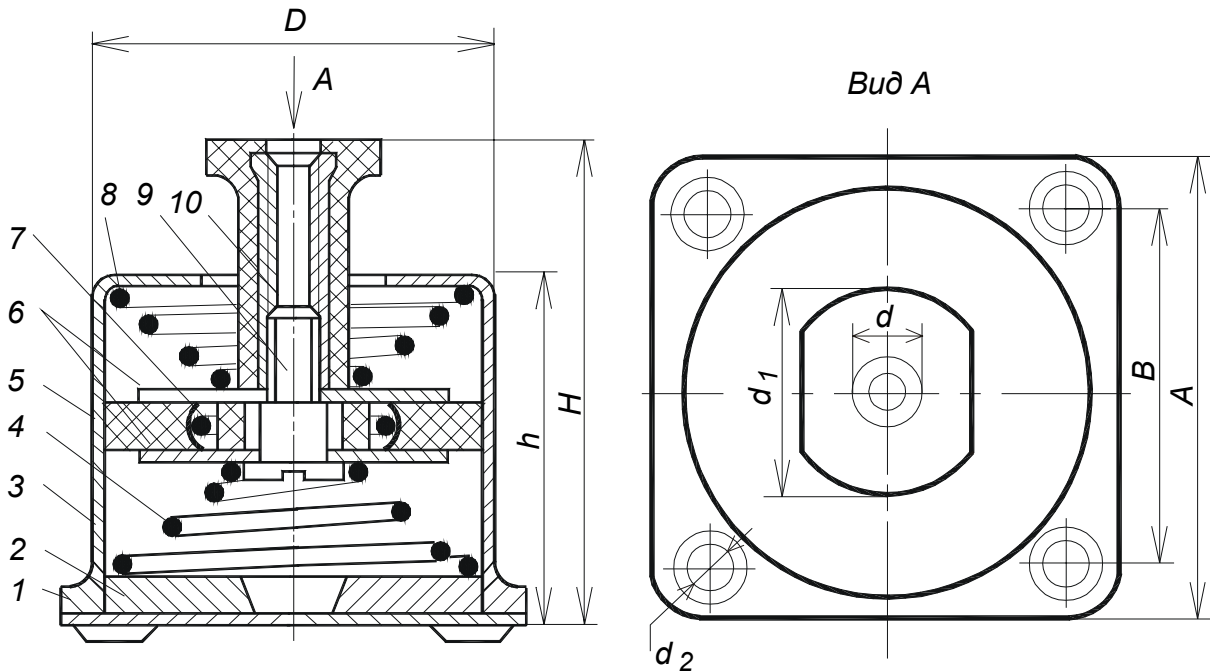


Рис. 10.4. Виброизолятор АЦП:

1 – основание; 2 – ограничитель; 3 – корпус; 4, 8 – пружины; 5 – фрикционные сухари; 6 – шайбы; 7 – распорное кольцо; 9 – винт; 10 – втулка

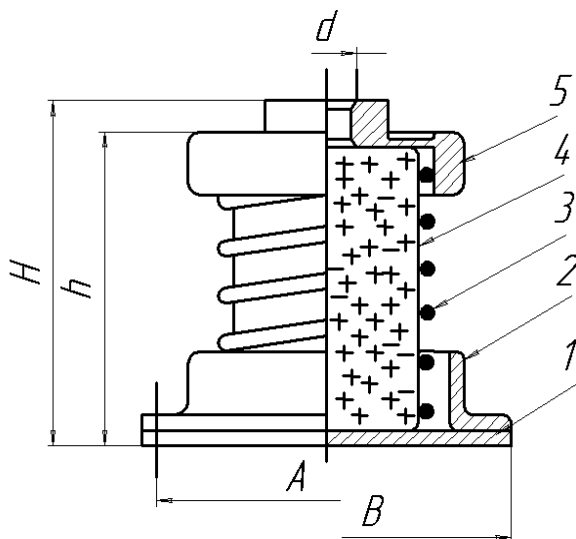


Рис. 10.5. Амортизатор пружинно - сеточный АЦП: 1 – основание; 2 – направляющая; 3 – пружина; 4 – сетчатая подушка; 5 – крышка. (поэтому материал получил условное наименование МР – металлическая резина). Виброизоляторы из МР имеют достаточно высокую ударную

пользуют легированную сталь (типа ЭИ 708 или 1Х18Н9Т) или бериллиевую бронзу, что обеспечивает работу виброизолятора в широком диапазоне температур и в условиях агрессивных сред. Конструкция виброизолятора зависит от формы упругого элемента [4].

Упругий элемент из сетки благодаря трению между проволочками при деформации обладает высокими демпфирующими свойствами, близкими к свойствам резины

прочность. Основным недостатком виброизоляторов из МР является низкая стабильность характеристик вследствие усадки сетчатого элемента под нагрузкой.

В связи с этим более рациональным считаются пружинно-сетчатые виброизоляторы (см. рис.10.5), у которых основным несущим элементом является пружина, а сетчатая подушка – демпфирующим элементом.

В табл. 10.2 приведены условия эксплуатации некоторых типов виброизоляторов, а в табл. 10.3 – технические характеристики.

### 10.3. СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

**Статический расчет виброизоляторов.** Включает задачи определения типоразмера виброизоляторов, их статической осадки и размеров нивелирующих прокладок.

Типоразмер виброизолятора определяется по его статической нагрузке. При заданной схеме расположения виброизоляторов их реакции на статическую весовую нагрузку находятся из условий статики. В системе с однонаправленным нагружением, например, вдоль оси, эти условия суть следующие:

$$\sum_{i=1}^n P_i = G; \quad \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_i y_i = 0, \quad (10.1)$$

где  $G$  – вес аппарата;  $P_i$  – реакция  $i$ -го виброизолятора  $n$  – число виброизоляторов;  $x_i, y_i$  – координаты точек их крепления.

При числе виброизоляторов больше трех система становится статически неопределимой, и для определения опорных реакций на них должны быть наложены  $(n-3)$  дополнительных условий. Одним из таких условий обычно является следующее:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i y_i = 0. \quad (10.2)$$

Это условие выражает равенство нулю центробежных моментов опорных реакций.

Могут быть также произвольно заданы  $(n-3)$  опорных реакций, после чего остальные реакции находят из статического расчета (из уравнений (10.1)). Если значения всех реакций получаются положительными, то система виброизоляции рассчитана правильно.

В пространственных схемах нагружения должны быть определены составляющие опорных реакций  $P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}$ . Они должны удовлетворять шести уравнениям статики:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = G_x; \sum_{i=1}^n P_{iy} = G_y; \sum_{i=1}^n P_{iz} = G_z; \quad (10.3)$$

$$\sum_{i=1}^n (P_{ix}y_i - P_{iy}x_i); \sum_{i=1}^n (P_{iy}z_i - P_{iz}y_i); \sum_{i=1}^n (P_{iz}x_i - P_{ix}z_i).$$

В статически неопределимых системах для нахождения реакций должны быть наложены  $(3n - 6)$  дополнительных условий. В системах, имеющих плоскости симметрии, такими условиями будут равенства реакций симметрично расположенных виброизоляторов. В табл. 10.4 приведены формулы расчета статических нагрузок для некоторых схем виброизоляции.

После определения опорных реакций выбирается типоразмер каждого из виброизоляторов и находится его статическая осадка по формуле  $\delta_{\text{но.}} = P_i/k_i$ . Если осадка разных виброизоляторов получается различной, то аппарат выравняется с помощью компенсирующих прокладок. При этом хотя бы один из виброизоляторов устанавливают без прокладки. Толщину прокладки определяют по формуле

$$\Delta_i = \delta_i - \delta_1 + \Delta h_{1-i}, \quad (10.4)$$

где  $\delta_1$  – деформация ВИ без прокладки,  $\delta_i$  – деформация  $i$ -го ВИ, под который устанавливается прокладка,  $\Delta h_{1-i}$  – разность высоты ВИ различного типоразмера

В схемах с пространственным нагружением выравнивание производится в отношении каждой из трех осей каждого виброизолятора. При этом компенсация разности деформаций виброизоляторов в направлении их главной оси осуществляется с помощью прокладок, а в плоскости, перпендикулярной главной оси, – посредством соответствующего смещения виброизоляторов в этой плоскости.

Как отмечалось выше, наиболее часто применяется установка аппаратов на виброизоляторах, расположенных на днище корпуса (или каркаса). При этом по соображениям прочности и жесткости корпуса виброизоляторы размещаются преимущественно симметрично, по углам днища, и их общий центр жесткости совпадает с геометрическим центром (в плане). Блоки небольшой массы могут монтироваться без специального корпуса на общей виброизоляционной платформе (раме), снабженной опорными виброизоляторами [4].

Таблица 10.2

## Условия эксплуатации виброизоляторов

Тип виброизолятора	Предельные параметры ударного импульса		Условия эксплуатации			Срок эксплуатации, год	Срок хранения, год
	Амплитуда, g	Длительность, сек	Диапазон рабочих температур, °С	Атмосферное давление, мм.рт.ст.	Относительная влажность при 40°С, %		
АП, АУ	150	0,0005	от -40 до +80	не ограничено	до 98	0,66	3
АКСС	–	–	от -5 до +70	не ограничено	до 98	3	1
АН	50	0,0015	от -40 до +50	не ограничено	до 98	–	6
АР	50	0,001	от -45 до +50	не ограничено	до 98	от 0,5 до 1	3
АД	50	0,0005	от -60 до +70	не ограничено	до 98	300 ч	1
АФД	10	0,01	от -60 до +150	не ограничено	до 98	500 ч	3
АПН	13	0,01	от -60 до +150	не менее 5	до 100	–	–

Таблица 10.3

Технические характеристики некоторых виброизоляторов

Тип виброизо- лятора	Номиналь- ная нагруз- ка, Н	Прогиб, мм	Коэффициент жест- кости, Н/мм		Масса, кг
			$K_y$	$K_x$	
Резинометаллические стержневые					
АН-6	60		40	9,3	0,012
АН-10	100	1,6-0,4	65	15	0,012
АН-15	150	(для всех	95	25	0,038
АН-30	300	видов)	185	46	0,038
АН-50	500		310	80	0,046
Резинометаллические пластинчатые					
АП-1-0.45	4.5	–	2,5	10	от 0,007 до 0,008
АП-1-1.80	18	–	11,5	22.8	-
АП-2-2.70	27	–	17,2	34.2	от 0,007 до 0,008
АП-2-4.50	45	–	28,6	60	-
АП-3-9	90	–	57	140	от 0,007 до 0,008
АП-3-11.35	112.5	–	70	160	-
Резинометаллические судовые со страховкой					
АКСС-10	100	0,8	120	110	0,172
АКСС-15	150	0,8	170	150	0,213
АКСС-25	250	0,9	280	250	0,213
АКСС-30	600	1,1	430	380	0,702
АКСС-85	850	1,4	610	540	1,155
АКСС-120	1200	1,3	920	830	1,57
Пружинные с воздушным демпфированием					
АД-0.6	3,0-6,12	2,5-5,5	1,2	–	–
АД-1.5	10,2-15,3	5,5-7,5	2	–	–
АД-3	15,3-30,6	4,0-7,0	4	–	–
АД-5	30,6-51,0	5,0-7,5	7	–	–
АД-10	71,4-102	5,5-7,5	12	–	–
АД-15	102-152	5,5-8,0	19	–	–
Пружинные с фрикционным демпфированием					
АПН-1	5-10	–	6,8	–	0,041
АПН-2	9,8-24,5	–	13,7	–	0,074
АПН-3	19,6-49	–	22,5	–	0,079
АПН-4	39,2-68,7	–	32,3	–	0,126
АПН-5	58,9-98,1	–	49	–	0,135
АПН-6	88,3-147,2	–	58,8	–	0,225

При произвольном размещении блоков внутри аппарата (или на виброизоляционной платформе) их общий центр масс в общем случае может не совпадать с вертикалью, проведенной через центр жесткости виброизоляторов. В таком случае нагрузки на отдельные виброизоляторы окажутся различными, а при возбуждении колебаний аппарата вдоль оси  $z$  будут возникать сложные пространственные формы колебаний, что ухудшает работу виброизоляторов.

Этот недостаток может быть устранен или ослаблен посредством рационального (с точки зрения механики) размещения блоков в аппарате или на виброизоляционной платформе. Условием такого размещения является минимальное отклонение проекции центра масс аппарата от точки, соответствующей центру жесткости виброизоляторов (рис. 10.6).

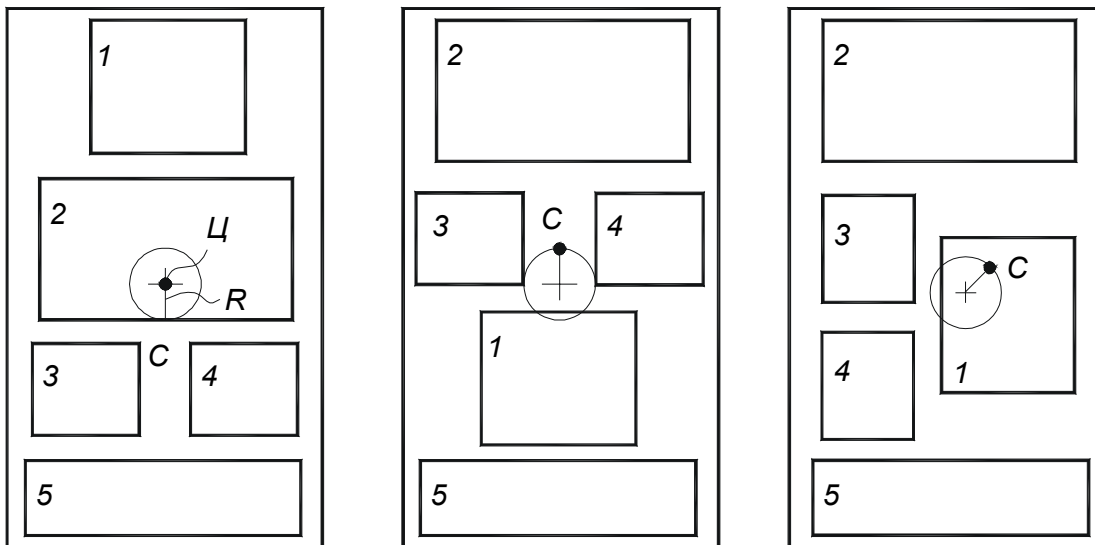


Рис. 10.6. Варианты размещения блоков в аппарате

Это условие может быть выражено уравнением

$$(x_u - x_0)^2 + (y_u - y_0)^2 = R^2, \quad (10.5)$$

где  $x_0, y_0$ —координаты центра масс аппарата;  $x_{ц}, y_{ц}$  — координаты центра жесткости;  $R$ —минимально допустимое отклонение центра масс (в плане) от центра жесткости. Координаты центра масс определяются из уравнений статических моментов масс блоков относительно выбранных осей координат:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_u; \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_u, \quad (10.6)$$

где  $n$  — число блоков;  $m_i$  — масса  $i$ -го блока;  $x_i, y_i$  — координаты центра масс  $i$ -го блока;  $m$  — общая масса всех блоков.

После определения центра масс все варианты размещения блоков сравниваются между собой с помощью (10.5). Наилучшим будет тот вари-

ант, в котором отклонение  $R$  окажется наименьшим, лучше всего – близким к нулю.

При большом числе блоков и возможных вариантов их расположения задача может быть легко запрограммирована для решения на ЭВМ.

**Динамический расчет виброизоляторов.** Включает определение собственных частот, максимальных смещений и ускорений виброизоляторов блока и оценку качества его виброизоляции в целом.

Собственные частоты определяются из системы уравнений (3.60, ч.1) с учетом упрощений, вносимых рациональной схемой размещения виброизоляторов. Блок на виброизоляторах может иметь одну, две или три плоскости симметрии.

*Одна плоскость симметрии.* Если система имеет хотя бы одну плоскость симметрии, то связанные формы колебаний распадаются на две несвязанные группы: симметричные (центр тяжести системы перемещается в плоскости симметрии) и несимметричные (движение происходит перпендикулярно этой плоскости). В соответствии с этим собственные частоты такой системы будут определяться из двух независимых групп уравнений, и вычисление их значительно упрощается.

Уравнения частот особенно просты в случае, если оси  $X, Y, Z$  являются главными и центральными осями инерции изолируемого объекта. Например, система (рис.10.7) имеет одну плоскость симметрии  $XOZ$ , и если

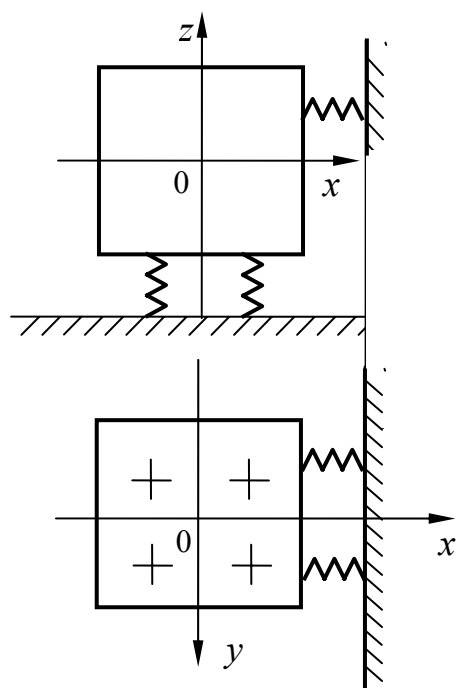


Рис. 10.7. Система виброизоляции с одной плоскостью симметрии

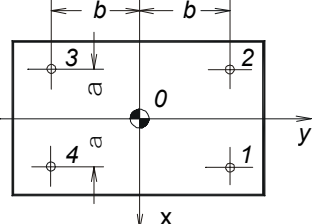
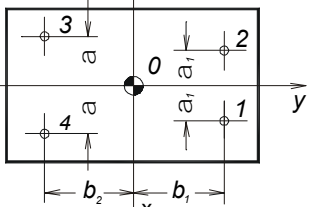
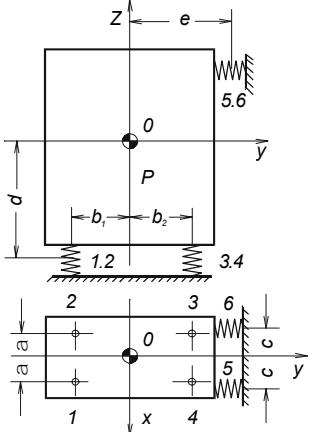
оси  $X, Y, Z$  – главные и центральные оси инерции, то симметричными формами колебаний будут  $\delta_1, \delta_3, \varphi_2$ , т.е. два поступательных перемещения по осям  $X$  и  $Z$  и одно вращение вокруг оси  $Y$ . Несимметричными формами колебаний будут оставшиеся три –  $\delta_2, \varphi_1$  и  $\varphi_3$ , т.е. одно поступательное перемещение по оси  $Y$  и два вращения вокруг осей  $X$  и  $Z$ . Таким образом, уравнение с учетом  $\alpha_{45} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$  распадается две независимые группы уравнений, из которых можно найти все шесть собственных частот. Для симметричных колебаний:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{55}\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$



Таблица 10.4

Формулы для расчета статических нагрузок

Схема нагружения	Расположение точек крепления (в плане)	Дополнительные условия	Расчетные формулы для определения реакций
Однонаправленная		$P_1 - P_2 = P_3 - P_4$	$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{P}{4}$
		$P_1 = P_2;$ $P_3 = P_4$	$P_1 = P_2 = P \frac{b_2}{2(b_1 + b_2)};$ $P_3 = P_4 = P \frac{b_1}{2(b_1 + b_2)}$
		$P_{1x} = P_{2x} = P_{3x} = P_{4x} =$ $= P_{5x} = P_{6x} = 0;$ $P_{1y} = P_{2y} = P_{3y} = P_{4y} =$ $= P_{5y} = P_{6y} = 0;$ $P_{1z} = P_{2z} = P_{3z} = P_{4z};$ $P_{5z} = P_{6z} = KP_{4z}$	$P_{1z} = P_{2z} = \frac{P(b_2 + Ke)}{2[b_1 + b_1 + K(b_1 + e)]};$ $P_{3z} = P_{3z} = \frac{Pb_1}{2[b_1 + b_1 + K(b_1 + e)]};$ $P_{5z} = P_{6z} = \frac{Pb_1K}{2[b_1 + b_1 + K(b_1 + e)]}$

Для несимметричных колебаний:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= 0; \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{46}\varphi_3 &= 0; \\ \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Подставляя решения в виде уравнений (3.60, ч.1), получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2)\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 &= 0; \\ (\alpha_{33} - \beta_{11}\omega^2)\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0; \\ (\alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2)\varphi_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 &= 0, \end{aligned} \quad (10.9)$$

решение которой позволяет найти три собственных частоты колебаний, соответствующие колебаниям блока в плоскости симметрии.

Три другие собственные частоты находятся из уравнений (10.9), решение которых приводит к системе:

$$\begin{cases} (\alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2)\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 = 0; \\ (\alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2)\varphi_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_3 = 0; \\ (\alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2)\varphi_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 = 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

Решая эту систему уравнений найдем три другие собственные частоты, соответствующие несимметричным колебаниям.

*Две плоскости симметрии.* Если блок имеет плоскости симметрии  $ZX$  и  $XY$ , а оси  $XYZ$  являются главными центральными осями инерции (рис. 10.8), то

$$\begin{aligned} \alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = \\ = \alpha_{46} = \alpha_{56} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0. \end{aligned}$$

Системы дифференциальных уравнений (10.9 и 10.10) в этом случае распадаются на четыре самостоятельные группы уравнений (10.11):

$$\text{I. } \begin{cases} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 = 0; \end{cases} \quad (10.11a)$$

$$\text{II. } \begin{cases} \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{44}\varphi_1 = 0; \end{cases} \quad (10.11б)$$

$$\text{III. } \begin{cases} \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 = 0; \\ \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{55}\varphi_2 = 0; \end{cases} \quad (10.11в)$$

$$\text{IV. } \begin{cases} \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{26}\varphi_3 = 0; \\ \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{66}\varphi_3 = 0, \end{cases} \quad (10.11г)$$

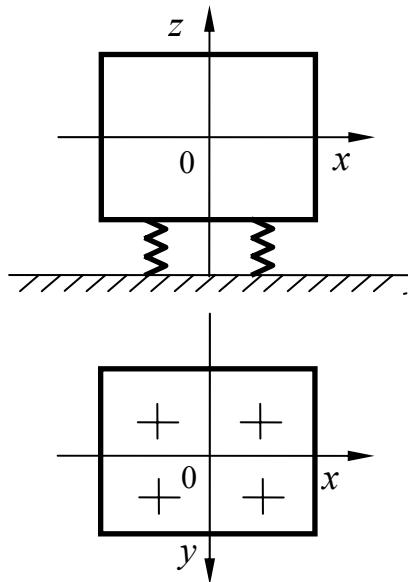


Рис. 10.8. Система виброизоляции с двумя плоскостями симметрии

где первое уравнение соответствует колебаниям вдоль оси  $X$ , второе – вокруг этой оси, а третье и четвертое уравнения взаимосвязаны и соответствуют сложным симметричным колебаниям в плоскости  $XZ$ . Пятое и шестое уравнения тоже взаимосвязаны и соответствуют сложным симметричным колебаниям в плоскости  $XY$ .

Из первого уравнения находится частота собственных поступательных колебаний вдоль оси  $X$

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha_{11}/\beta_{11}} = \sqrt{\sum k_x/m}.$$

Второе – определяет собственную частоту вращательных колебаний вокруг оси  $X$

$$\omega_2 = \sqrt{\alpha_{44}/\beta_{44}} = \sqrt{\sum (k_z y^2 + k_y z^2)/I_x}.$$

Интегрирование третьего и четвертого уравнений приводит к уравнению частот

$$\beta_{11}\beta_{55}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{55} + \beta_{55}\alpha_{33})\omega^2 + \alpha_{33}\alpha_{55} - \alpha_{35}^2 = 0,$$

из которого находят частоты  $\omega_3$  и  $\omega_4$  сложных колебаний в плоскости  $XZ$ . Интегрируя пятое и шестое уравнения, получаем

$$\beta_{11}\beta_{66}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{66} + \beta_{66}\alpha_{22})\omega^2 + \alpha_{22}\alpha_{66} - \alpha_{26}^2 = 0,$$

из которого находят частоты  $\omega_5$  и  $\omega_6$  сложных колебаний в плоскости  $XY$ .

*Три плоскости симметрии.* При симметричной схеме крепления изделия на виброизоляторах (рис. 10.9) система имеет три плоскости симметрии  $ZX$ ,  $XY$  и  $YZ$ , а оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  должны быть главными центральными осями инерции. Все формы колебаний  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , соответствующие смещениям вдоль осей  $X, Y, Z$  и поворотам вокруг этих осей, в этом случае не зависят друг от друга и являются симметричными.

Если, кроме того,

$$\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{24} = \alpha_{26} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = \alpha_{56} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0,$$

то система дифференциальных уравнений (10.11) распадается на шесть независимых уравнений

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 &= 0; & \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 &= 0; & \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{44}\varphi_1 &= 0; \\ \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{55}\varphi_2 &= 0; & \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения можно найти частоту собственных поступательных колебаний вдоль оси  $X$

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha_{11}/\beta_{11}} = \sqrt{\sum k_x/m},$$

из второго – частоту собственных поступательных колебаний вдоль оси  $Y$

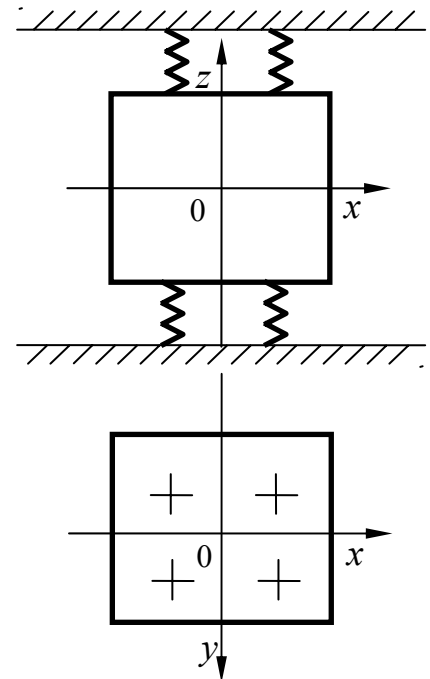


Рис. 10.9. Система виброизоляции с тремя плоскостями симметрии

$$\omega_2 = \sqrt{\alpha_{22}/\beta_{11}} = \sqrt{\sum k_y/m},$$

из третьего – частоту собственных поступательных колебаний вдоль оси  $Z$

$$\omega_3 = \sqrt{\alpha_{33}/\beta_{11}} = \sqrt{\sum k_z/m}.$$

Из четвертого, пятого и шестого уравнений можно определить частоты собственных колебаний вокруг осей  $X, Y, Z$  соответственно:

$$\omega_4 = \sqrt{\alpha_{44}/\beta_{44}} = \sqrt{\sum (k_z y^2 + k_y z^2)/I_x};$$

$$\omega_5 = \sqrt{\alpha_{55}/\beta_{55}} = \sqrt{\sum (k_x z^2 + k_z x^2)/I_x};$$

$$\omega_6 = \sqrt{\alpha_{66}/\beta_{66}} = \sqrt{\sum (k_x y^2 + k_y x^2)/I_x}.$$

Максимальные смещения ускорения определяются через соответствующие коэффициенты передачи при виброизоляции. Для определения возможных смещений и ускорений аппарата во всем диапазоне эксплуатационных частот необходимо построить соответствующие резонансные кривые. На основании анализа резонансных кривых делается вывод о качестве виброизоляции аппарата с помощью выбранной системы виброизоляции.

**Пример 10.1.** Подобрать виброизоляторы для аппарата со следующими данными: вес аппарата  $G=250$  Н; габаритные размеры  $A \times B \times H=40 \times 60 \times 50$  см; диапазон возбуждающих частот  $f=20 - 400$  Гц; виброускорение  $a_0 = 10g$ ; диапазон температур  $t=60...+80$  °С, влажность  $V=98$  % при  $t=40$  °С в течение 48 ч.

**Решение.** Определим предварительно максимальную амплитуду возбуждающей вибрации по формуле (2.6, ч.1). Получим  $S_0 = \frac{250n_B}{f^2} = \frac{250 \cdot 10}{20^2} = 6,25$  мм.

Учитывая условия эксплуатации и амплитуду вибрации, выбираем виброизоляторы типа АПН. Исходя из конструктивных соображений, принимаем плоскую схему расположения с четырьмя виброизоляторами, с координатами в плане (см. рис.10.10):

$x_1 = -x_2 = 25$  см;  $y_1 = y_2 = 15$  см;  $x_3 = -x_4 = 20$  см,  $-y_3 = -y_4 = 12$  см.

Статические нагрузки на виброизоляторы определим из уравнений

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = G;$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 = 0;$$

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = 0.$$

Дополнительным условием будет симметричное размещение виброизоляторов относительно плоскости  $YOZ$ , вследствие чего  $P_1 = P_2, P_3 = P_4$ . В результате получим два уравнения

$$2P_1 + 2P_3 = G; P_1 y_1 - P_3 y_3 = 0,$$

откуда находим  $P_1 = P_2 = 55,6$  Н,  $P_3 = P_4 = 69,4$  Н.

По этим данным выбираем типоразмер виброизолятора АПН==4, его жесткость  $k_z = 33$  Н/мм. Определим статические осадки виброизоляторов

$$z_{1cm} = z_{2cm} = P_1/k_z = 1,68 \text{ мм}, z_{3cm} = z_{4cm} = P_3/k_z = 2,1 \text{ мм}.$$

$$\text{Толщина нивелирующих прокладок } z_{3cm} = z_{1cm} = 0,42 \text{ мм}.$$

Собственная частота колебаний аппарата на виброизоляторах вдоль оси  $z$  (приближенно)

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k_z}{m}} = \frac{1}{6.28} \sqrt{\frac{4 \cdot 3,3 \cdot 10^4}{25}} = 11,5 \text{ Гц}$$

(для точного определения частоты  $f_3$  необходимо учесть вращательное движение аппарата – относительно оси  $x$ ).

Максимальную амплитуду колебаний аппарата (на низкочастотном участке эксплуатационного диапазона частот) найдем по формуле  $S_c = \mu S_a$ , где

$$\mu = \sqrt{1 + \eta^2 v^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}.$$

Рассчитав  $v = f/f_3 = 30/11,5 = 2,6$  и приняв  $\eta=0,5$ , находим  $\mu=0,28$ ,  $S_c=1,75$  мм.

Максимальное ускорение  $a_{\max}=a_0\mu=10g \cdot 0,28=2,8g$ . Это ускорение будет действовать на электрорадиоэлементы внутри аппарата.

Для определения качества виброизоляции на всем диапазоне эксплуатационных частот построим график зависимости  $\mu=\mu(v)$ , для чего рассчитаем ряд точек:

$v$	0	0,5	0,8	1,0	1,41	2	3	4
$\mu$	1,0	1,30	2,0	2,24	1,0	0,45	0,22	0,16

Из графика рис. 10.11 видно, что виброизоляция достигается во всем диапазоне эксплуатационных частот. На низкочастотном участке диапазона эффективность виброизоляции составляет  $\mathcal{E}=(1-\mu) \cdot 100=72\%$ , что в большинстве случаев может быть признано достаточным. Для обеспечения лучшей виброизоляции в области низких частот следует применить более мягкие виброизоляторы.

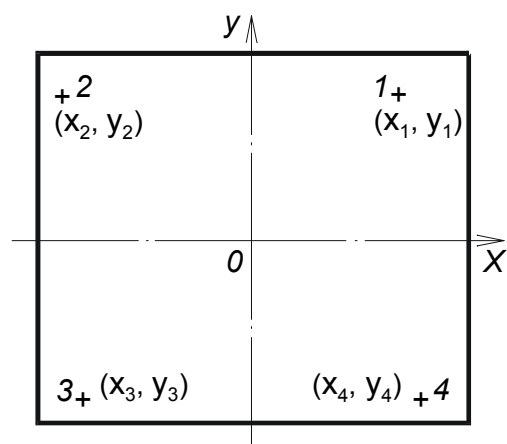


Рис. 10.10. Схема расположения виброизоляторов (в плане)

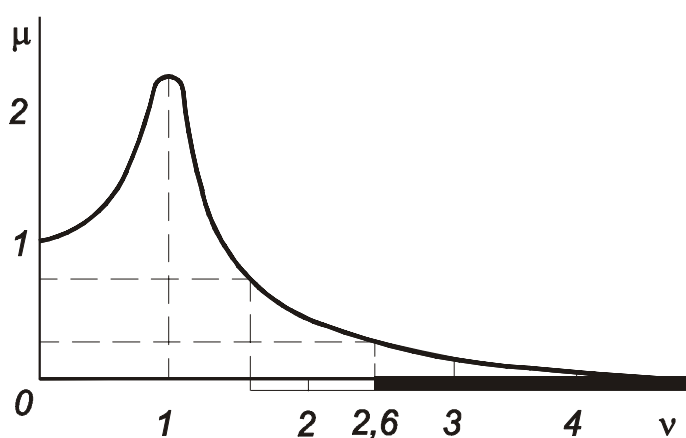


Рис. 10.11. К расчету виброизоляции

Проверим выбранные виброизоляторы на действие ударной нагрузки. Пусть на систему действует синусоидальный ударный импульс с амплитудой  $H=10g$  и длительностью  $\tau=20$  мс.

Подсчитаем максимальные значения смещения и ускорения аппарата. Собственная частота аппарата  $\omega_3 = 2\pi f_3 = 72,6 \text{ с}^{-1}$ ; условная частота импульса  $\omega = \pi/\tau = 157 \text{ с}^{-1}$ ; частотное отношение  $\omega/\omega_3=2,16$ . Коэффициент ударной перегрузки (3.38, ч.1)

$$\mu_{vд} = \frac{2v}{v^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2v} = \frac{2 \cdot 2,16}{2,16^2 - 1} \cos \frac{\pi}{4,32} = 0,88.$$

Амплитуда ускорения аппарата

$$S_{\max} H \mu_{vд} = 10g \cdot 0,88 = 8,8g.$$

Амплитуда смещения

$$z_{\max} = \frac{H \mu_{vд}}{\omega_3^2} = \frac{8,8 \cdot 9,81 \cdot 10^3}{72,6^2} = 16,35 \text{ мм.}$$

Из этих данных видно, что амплитуда смещения превышает конструктивный ход виброизолятора. В результате в конце движения произойдет удар штока виброизолятора об ограничитель хода, и виброизоляция удара аппарата достигнута не будет. Расчет виброизолятора на удар длительностью  $\tau=10$  мс показывает, что в этом случае цель будет достигнута: максимальное ускорение не превысит  $4,5g$  при максимальном смещении около 8 мм.

Для того чтобы достичь двукратного уменьшения ударного ускорения при длительности импульса  $\tau=20$  мс, потребуются виброизоляторы с жесткостью менее  $10\text{Н/мм}$ . При этом «просадка» виброизолятора при ударе составит около 35 мм. Это условие накладывает ограничение на выбор типа виброизолятора (могут быть выбраны, например, тросовые виброизоляторы). В компоновке аппарата на объекте должны быть предусмотрены меры, обеспечивающие возможные смещения.

#### 10.4. КОНСТРУКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ЗАЩИТЫ ОТ АКУСТИЧЕСКОГО ШУМА [7]

**Изоляция структурного звука.** Входная полная проводимость детали, на которую действует возбуждающая сила, оказывает влияние на передачу структурного шума. Эта проводимость определяется массой и изгибной жесткостью детали в месте ее возбуждения. Для минимизации возбуждения необходимо всю деталь или, по меньшей мере, в области приложения возбуждающей силы, выполнить массивной и жесткой на изгиб, то есть снизить акустическую проницаемость детали. Этого можно достичь установкой дополнительной массы и ребер жесткости в месте возбуждения. Требования, касающиеся уменьшения акустической проницаемости, можно учесть еще на этапе разработки конструктивного элемента путем выбора соответствующей формы.

Кроме возбуждения шума под воздействием силы, причиной шумообразования может быть также и скорость. Эта причина проявляется в случае связи конструктивных элементов, имеющих существенно различные массы.

При этом небольшие колебания детали большой массы вызывают значительные колебания деталей с меньшей массой. Для снижения возникающего здесь корпусного шума можно использовать мягкие или упругие элементы, устанавливаемые в местах соединений обеих деталей. Кроме того, можно увеличить массу более легкой детали (рис. 10.12).

От места возбуждения структурный звук распространяется по поверхности, на которой он преобразуется в воздушный. При этом изоляция структурного звука может быть осуществлена посредством превращения его энергии в теплоту за счет ослабления и отражения на неомогенностях за счет поглощения. Ослабление может быть обеспечено при использовании материалов с большим коэффициентом потерь (например, многослойных плит, пластмасс), а также с помощью конструкций, соединения в которых выполнены с силовым замыканием (то есть при большом внутреннем трении и трении в местах соединений). Кроме снижения амплитуды колебаний структурного звука, демпфирование приводит к сглаживанию пиков частотной характеристики детали, обусловленных резонансными явлениями, и уменьшению времени реверберации.

Примеры звукоизоляторов, выполненных по этому принципу, показаны на рисунке 10.13. Эффективность изоляторов структурного звука тем больше, чем меньше акустическая проводимость источника этого звука и контактирующих с ним элементов по сравнению с проводимостью прокладки, то есть чем эта прокладка мягче. Кроме обеспечения достаточной прочности, при выборе размеров прокладки необходимо обращать внимание также на то, чтобы резонансная частота всей колебательной системы вместе с прокладкой была ниже рабочей частоты. В табл. 10.5 приведены способы изоляции структурного звука.

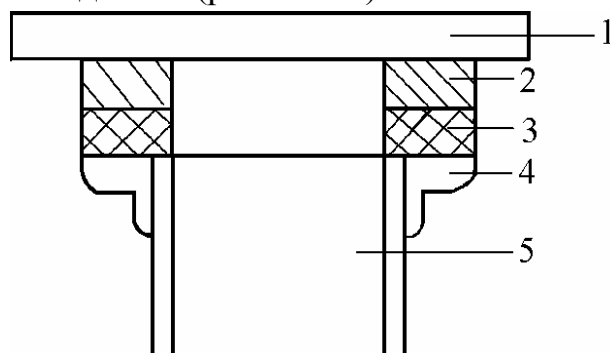


Рис. 10.12. Изоляция корпусного шума при возбуждении его за счет передачи колебаний от детали большей массы к детали меньшей массы:

- 1 – крышка; 2 – дополнительная масса;
- 3 – упругая прокладка, приклеенная к деталям 2 и 4; 4 – крепежный уголок;
- 5 – шумоизлучающий узел.

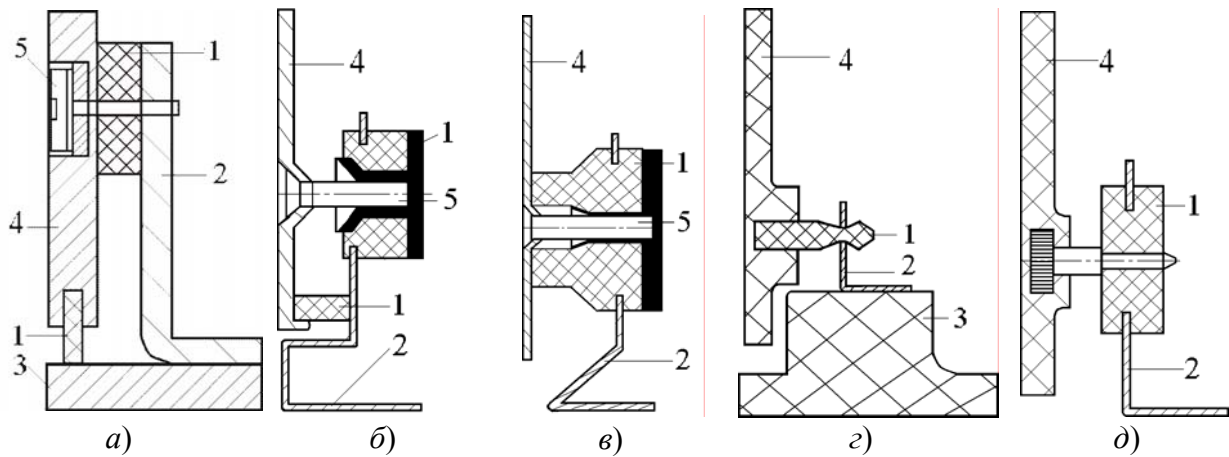


Рис.10.13. Примеры звукоизоляторов в местах крепления боковой стенки корпуса к основанию:

- a* – массивные стенка и основание из листового металла большой толщины;  
*б, в* – тонколистовая стенка; *з, д* – пластмассовая или металлическая литая стенка;  
 1 – прокладка или формованная деталь из упругого материала;  
 2 – крепежный угольник; 3 – основание; 4 – стенка корпуса; 5 – крепежный винт.

**Изоляция воздушного звука.** Звуковая мощность  $P$ , излучаемая конструктивным элементом, кроме коэффициента излучения  $\sigma$ , зависит от площади  $A$  поверхности элемента и средней частоты колебаний  $\nu$  этой поверхности:

$$P \approx \sigma A \tilde{\nu}^{-2}.$$

Колебательную скорость можно варьировать посредством изменения массы и жесткости конструктивного элемента. Для большинства конструктивных элементов приборов при оценке изменения массы и жесткости элемента можно руководствоваться ориентировочными значениями, приведенными в табл.10.6. Как видно из табл. 10.6, излучение воздушного звука можно снизить увеличением массы и уменьшением жесткости плоских конструктивных элементов. Среднюю колебательную скорость можно снизить также с помощью звукоизоляционных покрытий и многослойных конструкций. Но такое решение целесообразно лишь для конструктивных элементов с низким внутренним демпфированием, например, для толстостенных литых деталей, сварных конструкций, конструктивных элементов, испытывающих ударные нагрузки и т. д. Коэффициент излучения характеризует полноту преобразования структурного звука, обусловленного изгибными колебаниями конструктивного элемента, в воздушный. Следует учитывать, что излучение воздушного звука конструктивным элементом будет интенсивным только тогда, когда длина волны изгибных колебаний элемента больше длины волны воздушного звука. В иных случаях между соседними колеблющимися частицами воздуха может установиться равновесие (гидродинамическое короткое замыкание).



Таблица 10.5

Способы снижения структурного звука

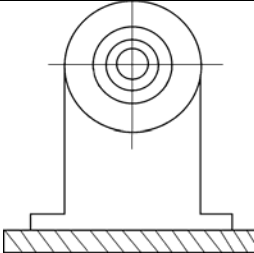
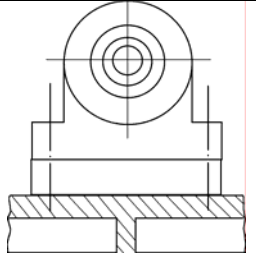
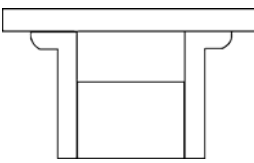
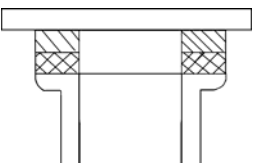
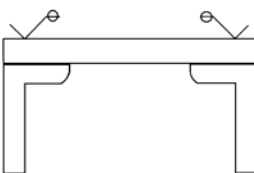
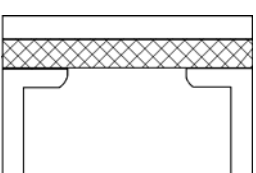
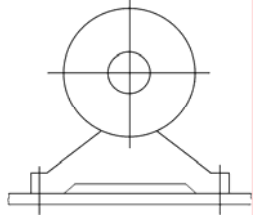
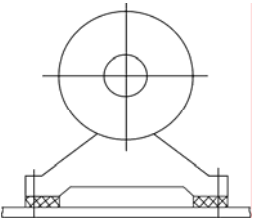
Способы изоляции	Неправильно	Правильно
<p>Элементы конструкции, на которые воздействуют возбуждающие силы, должны иметь минимальную акустическую проницаемость, что может быть обеспечено повышением жесткости или увеличением массы</p>		
<p>Легкие, имеющие большую плотность детали, следует отделять от массивных проводящих структурный звук деталей с помощью упругих или мягких прокладок, а также закреплять на них дополнительные массы</p>		
<p>Распространение структурного звука следует предотвращать с помощью покрытия деталей демпфирующим материалом, а также с помощью соединений с силовым замыканием (за счет чего используется внутреннее трение в месте соединения)</p>		
<p>Мощные источники структурного звука, такие как двигатели и редукторы, следует устанавливать на упругие прокладки</p>		

Таблица 10.6

Влияние изменения массы и жесткости конструктивного элемента на излучение им воздушного звука

Способ воздействия на излучатель воздушного звука	Возбуждение воздушного звука	
	с помощью приложения силы	за счет передачи колебаний от более тяжелой к более легкой детали
Удвоение массы	Ослабление звука на 7,5 дБ	Ослабление звука на 4,5 дБ
Удвоение жесткости	Усиление звука на 1,5 дБ	Усиление звука на 4,5 дБ

Вследствие зависимости скорости распространения изгибных волн от частоты, в то время как скорость распространения воздушного звука по-

стоянна, гидродинамическое короткое замыкание наступает на частотах ниже граничной частоты. Граничная частота, зависящая от свойств конструктивного элемента, для тонкостенных элементов (с толщиной стенки  $s=1-3$  мм) составляет примерно  $5-10$  кГц, благодаря чему доминирующие в приборах частоты, лежащие в диапазоне  $0,5-5$  кГц, излучаются менее интенсивно. В случае деталей большой толщины и с большими поверхностями гидродинамическое замыкание можно получить искусственно с помощью отверстий, позволяющих обеспечить равенство давлений. Площадь отверстий должна составлять, по меньшей мере, 20% общей площади. Однако зачастую такая мера приводит к потере эффекта гашения воздушного звука, что может наблюдаться, например, при перфорации корпусов, крышек, защитных кожухов приборов и т. д.

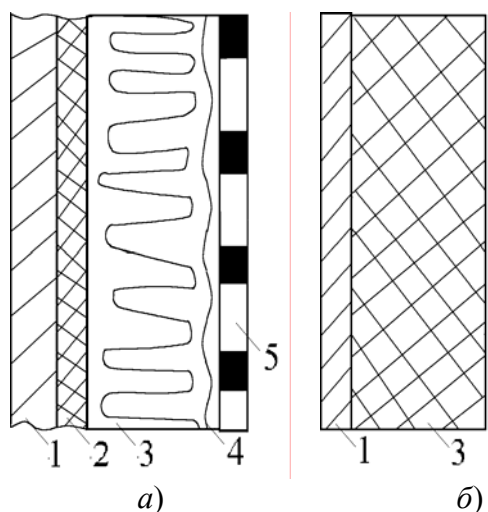


Рис. 10.14. Примеры стенок герметичных корпусов, обеспечивающих полную защиту от механических и климатических воздействий (а), и упрощенной конструкции, достаточной для большинства приборов (б):

1 – наружная обшивка (например, стальной лист);  
 2 – звукоизоляционный слой; 3 – слой звукопоглощающего материала (пенопласт, минеральная вата и т. п.); 4 – слабо натянутая пластмассовая пленка для защиты от пыли и влаги; 5 – перфорированный лист, решетка с ромбическими отверстиями, полученная растяжением перфорированного листа, используемые для механической защиты.

ма составляет всего 20дБ по сравнению с 30дБ при полной герметизации. Поэтому отверстия в приборах с интенсивными источниками шума необходимо тщательно уплотнять (рис. 10.15). Как показали исследования, для

Геометрия такого конструктивного элемента зависит, следовательно, от того, излучается ли воздушный звук им самим (и тогда справедливо сказанное выше) или источником звука является другой конструктивный элемент внутри прибора. В последнем случае размеры корпуса определяются условиями максимальной изоляции воздушного звука толстым слоем поглощающего материала (минеральная вата, не упрочненное нетканое полотно и т.п.). Очень хорошие результаты (ослабление шума до 30 дБ) можно получить посредством герметизации прибора (рис. 10.14). Однако вследствие необходимости в различных вводах и выводах такое решение может быть реализовано с большим трудом, так как даже мельчайшие отверстия значительно снижают эффективность звукоизоляции. Например, при площади отверстий, соответствующей 1% общей площади корпуса, ослабление шума составляет всего 20дБ по сравнению с 30дБ при полной герметизации.

этого особенно удобно применение губчатой резины. Использование пенополиуретана или пенорезины, если они являются закрытопористыми.

**Звукоизоляция конструктивных элементов аппаратуры.** Способы борьбы с шумом: уменьшение масс и скоростей соударяющихся тел; применение упругих материалов с большим внутренним демпфированием (с учетом возможного износа); предотвращение отскоков и резонанса; повышение полного механического сопротивления с помощью установки дополнительных масс и повышения жесткости конструкции; замена механического принципа действия немеханическим, например, электрическим.

Причиной шума конструктивных элементов большой площади (например, корпуса, крышки, печатные платы, кожухи) является излучение воздушного звука вследствие возбуждения корпусного звука в зависимости от собственной частоты и способа крепления элемента

Способы борьбы с шумом: выбор собственной частоты вне диапазона звуковых частот; выравнивание давлений на обеих сторонах колеблющихся деталей с помощью отверстий (площадь отверстий должна составлять не менее 20 % общей площади детали); использование материалов с высоким демпфированием, например, многослойных плит; повышение демпфирования с помощью соответствующего крепления детали (например, сварку можно заменить резьбовым соединением).

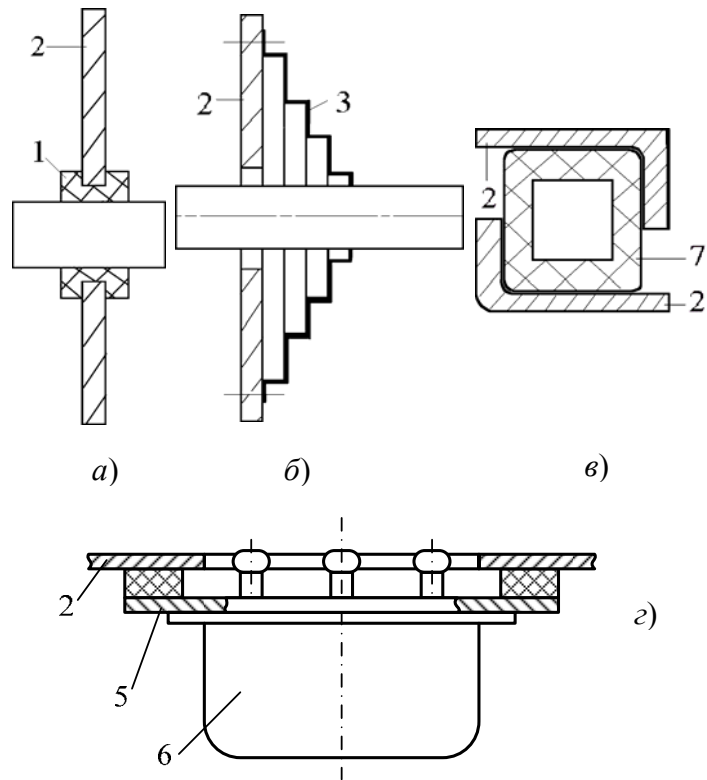



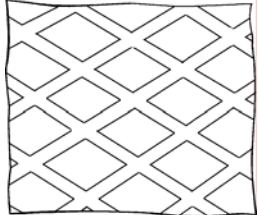
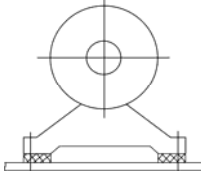
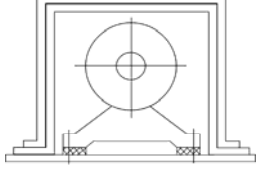
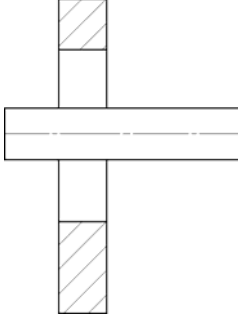
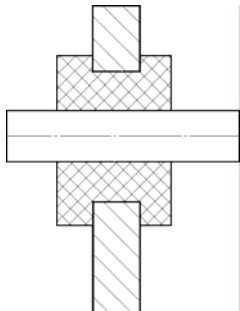


Рис. 10.15. Варианты герметизации отверстий для вывода вращающегося (а) и совершающего возвратно-поступательные движения (б) валов, а также отверстий, образующихся при стыке стенок (в) и крепления на корпусе какого-либо узла (г):

- 1 – резиновое или пластмассовое уплотняющее кольцо;
- 2 – стенка корпуса;
- 3 – резиновая манжета;
- 4 – прокладка из губчатой резины; 5 – пластина для крепления узла б;
- 6 – функциональный узел прибора;
- 7 – резиновая трубка.

Таблица 10.7

Способы снижения излучения воздушного шума

Способы снижения	Неправильно	Правильно
Излучающие поверхности большой площади (в частности, листовые детали) необходимо выполнять многослойными		
В излучающих поверхностях большой площади следует предусматривать отверстия площадью не менее 20% общей площади детали (при использовании, например, решетки с ромбическими отверстиями, полученной растяжением перфорированного листа)		
Интенсивные источники звука должны быть полностью или частично герметизированы		
Отверстия в корпусе необходимо тщательно уплотнять		

**Звукоизоляция с помощью гашения колебаний (антизвук).** Принцип антизвука состоит в интерференции двух звуковых волн одной и той же частоты и одинаковой амплитуды, которые распространяются в одном направлении, но сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ . При этом на исходную звуковую волну накладывается вторая, сформированная с помощью электронной аппаратуры и сдвинутая по фазе на  $180^\circ$  антизвуковая волна, излучаемая громкоговорителем. Но так как на практике источник звука не является точечным, а излучаемые им волны не синусоидальны и, кроме того, оба источника располагаются в различных точках, абсолютное гашение обеих волн во всех направлениях не происходит. Однако при определенных условиях таким способом можно обеспечить снижение уровня звукового давления в определенных направлениях или определенных точках. Правда, это в большинстве случаев связано с разработкой сложной электронной аппаратуры (с несколькими микрофонами, микропроцессорами и

т.д.). Поэтому для борьбы с шумом этот способ используется только в особых случаях.

**Расчет эффективности звукоизолирующих перегородок [8].** Выбор метода расчета эффективности звукоизолирующих перегородок, в качестве которых могут служить и стенки корпуса блока, зависит от характера воздействующего акустического поля, соответствует оно нормальному или диффузному падению звуковых волн. Звукоизолирующая способность перегородки характеризуется коэффициентом звукопроницаемости  $n$ , определяемым как отношение величины звуковой энергии, прошедшей через перегородку, к величине энергии, падающей на нее. Если обозначить через  $I_1$  интенсивность звука до перегородки, а через  $I_2$  – после нее, то  $n = I_2 / I_1$ .

Величину  $R = 10 \lg \frac{1}{n}$  обычно называют звукоизоляцией или потерями на прохождение. Для плоских звуковых волн и при одинаковых средах по обе стороны перегородки справедливы следующие соотношения:

$$n = \left| \frac{P_2}{P_1} \right|^2 ; R = 10 \lg \left| \frac{P_2}{P_1} \right|^2 ,$$

где:  $P_1$  – звуковое давление в падающей волне;

$P_2$  – звуковое давление в волне после перегородки.

Оценка звукоизолирующей способности перегородки для случая падения звуковой волны под углом  $\theta$  производится следующим образом.

1. Определяются характерные частоты перегородки:

а) первая собственная частота перегородки (пластины)  $f_0$ ;

б) частота волнового совпадения  $f_c = \frac{f_{кр}}{\sin^2 \theta}$ ,

где:  $f_{кр} = \frac{c_0^2}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot h}{D}}$ ;

$\theta$  – угол падения звуковой волны;

$c_0$  – скорость звука в среде;

$h$  – толщина перегородки;

$\rho$  – плотность материала перегородки.

Для некоторых материалов величину критической частоты волнового совпадения можно определить по номограмме, представленной на рис. 10.16.

2. Частотный диапазон разбивается на 4 характерные области:

- упругости, если  $f < 0,5f_0$ ;
- резонанса, если  $0,5f_0 < f < 2f_0$ ;
- закона масс, если  $2f_0 < f < 0,5f_c$ ;
- волнового совпадения, если  $f > 0,5f_c$ .

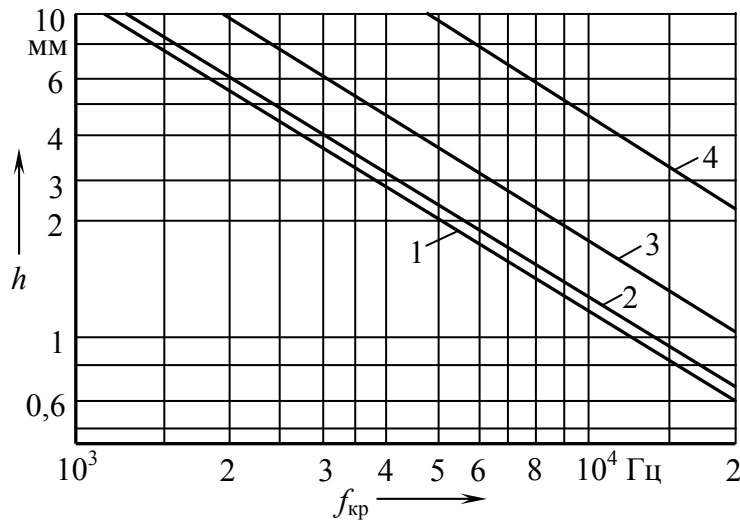


Рис.10.16. Номограмма для определения величины критической частоты волнового совпадения:

- 1 – сталь;
- 2 – дюралюминий;
- 3 – стеклопластик;
- 4 – органическое стекло.

3. Звукоизоляция в каждой из этих областей определяется следующими формулами.

Для области упругости:

$$R_{\theta} = 10 \lg \left( 1 + \left( \frac{\omega_0^2 \cdot m \cdot \cos \theta}{2 \cdot \rho_0 c_0 \omega} \right)^2 \right),$$

где  $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ ;

$\omega = 2\pi \cdot f$ ;

$m = \rho \cdot h$  – распределенная масса перегородки;

$\rho_0 \cdot c_0$  – волновое сопротивление среды;

$h$  – толщина перегородки;

$\rho$  – плотность материала перегородки.

В этой области величина снижения звукоизоляции с ростом частоты составляет 6 дБ/октаву.

Для резонансной области:

$$R_{\theta} = 20 \lg \left( 1 + \frac{\omega_0 \cdot m \cdot \eta \cdot \cos \theta}{2 \cdot \rho_0 c_0} \right),$$

где:  $\eta$  – коэффициент потерь (диссипации).

Для области закона масс:

$$R_{\theta} = 10 \lg \left( 1 + \left( \frac{\omega \cdot m \cdot \cos \theta}{2 \cdot \rho_0 c_0} \right)^2 \right).$$

В этом диапазоне частот с ростом частоты звукоизоляция увеличивается на 6 дБ/октаву.

Для области волнового совпадения:

$$R_{\theta} = 20 \lg \left( 1 + \frac{\omega_c \cdot m \cdot \eta \cdot \cos \theta}{2 \cdot \rho_0 c_0} \right).$$

График зависимости звукоизоляции  $R$  одностенной перегородки с учетом ее упругости и диссипации представлен на рис.10.17. Из графика следует, что минимальное значение звукоизоляции наблюдается при резонансных колебаниях перегородки, и в области резонанса существенное влияние на величину  $R$  оказывает диссипация.

Если известна распределенная масса перегородки, то в области действия закона масс ( $2f_0 < f < 0,5f_c$ ) ее звукоизолирующая способность при нормальном или диффузном падении звуковой волны может быть найдена по графикам, представленным на рис.10.18. Из приведенных графиков следует, что в данном случае с ростом частоты звукоизоляция будет увеличиваться на 6 дБ/октаву, т.е., например, на частоте 2000 Гц звукоизоляция перегородки на 6 дБ выше, чем на частоте 1000 Гц. К увеличению звукоизоляции приводят многостенные перегородки с различным заполнением пространства между стенками или с промежуточными опорами.

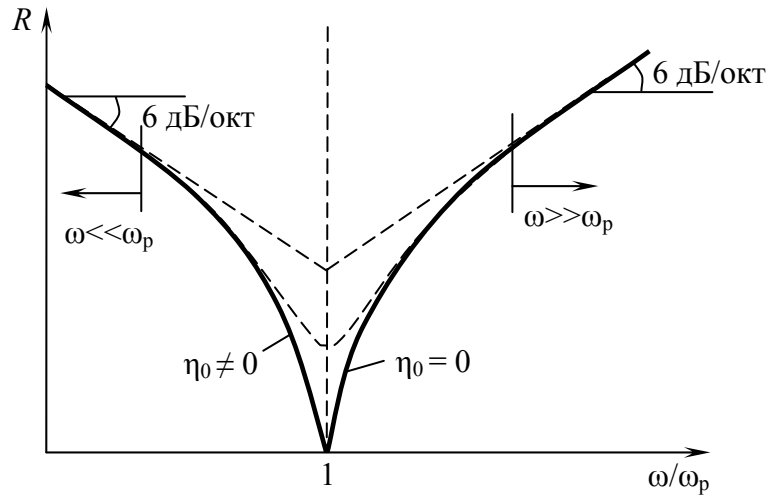


Рис. 10.17. Частотная зависимость звукоизоляции одностенной перегородки с учетом упругости и диссипации.

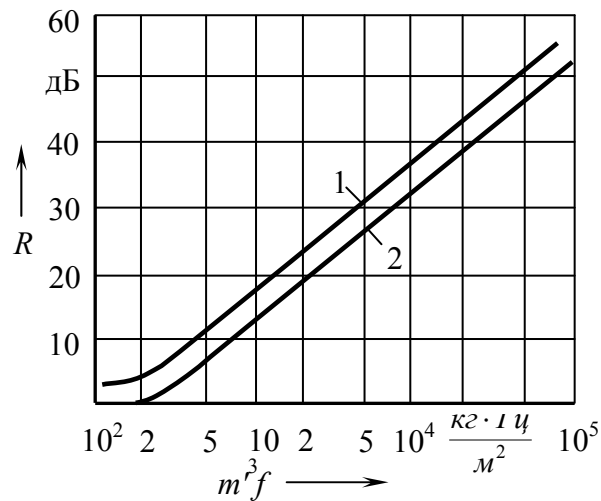


Рис. 10.18. Звукоизоляция одиночной перегородки по закону масс при нормальном (1) и случайном (2) характере падения звука.

Вопросы оценки эффективности использования демпфирования для ограничения колебаний рассмотрены во 2-й части пособия.

### **Контрольные вопросы**

1. Расскажите о последовательности этапов проектирования систем ВИ.
2. Из каких соображений выбираются виброизоляторы?
3. Какие задачи решаются при статическом расчете СВИ?
4. В чем заключаются цели динамического расчета СВИ?
5. Какие основные группы виброизоляторов применяются?
6. Какие достоинства и недостатки у резинометаллических виброизоляторов?
7. Какие преимущества у металлопружинных по сравнению с резинометаллическими виброизоляторами?
8. Что является условием эффективной виброизоляции?
9. Расскажите об особенностях распространения структурного звука.
10. Какие применяются способы снижения структурного звука?
11. От чего зависит звуковая мощность, излучаемая конструкцией?
12. Какие способы применяются для защиты от воздушного звука?
13. Что понимается под антизвуком?
14. От чего зависит эффективность звукоизолирующих перегородок?



## Глава 11

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВИБРОЗАЩИТЕ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

### 11.1. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ВИБРОЗАЩИТЫ ЭА

Рассмотрим виброзащиту (ВЗ) ЭА с позиций системного подхода. В самом общем виде система виброзащиты представлена на рис. 11.1. Целью системы ВЗ является обеспечение вибрационной надежности ЭА, управляемость достигается путем введения обратной связи, под которой понимается применение одного или нескольких способов виброзащиты. Входом являются вибрации, которые могут быть периодическими или случайными. Процесс предполагает преобразование параметров воздействующей вибрации как количественно (увеличиваются амплитуды колебаний и т.д.), так и качественно (возникают механические напряжения в материалах, изменяются параметры полупроводниковых и магнитных материалов и т.п.). Под выходом будем понимать показатели надежности или устойчивости ЭА, например среднюю наработку до отказа, или другие показатели. На процесс будут влиять внешние воздействия – повышенная и пониженная температуры, линейные ускорения и т.д. Если рассчитанные показатели надежности окажутся ниже заданных, “в работу” должна вступить обратная связь, цель которой воздействовать на процесс с целью увеличения надежности и устойчивости ЭА. Это воздействие можно реализовать за счет повышения жесткости конструкции, виброизоляции, увеличения демпфирования и других способов виброзащиты.

С учетом вышесказанного, а также учитывая, что дестабилизирующее действие вибраций обусловлено преимущественно возникновением резонансных колебаний печатных плат и других элементов конструкций, схему на рис. 11.1 можно представить более подробно в виде структурной схемы, представленной на рис 11.2 [9].

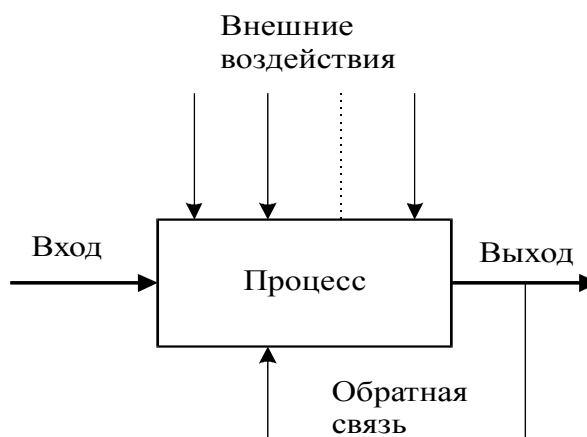


Рис. 11.1. Обобщенная схема структуры виброзащиты ЭА

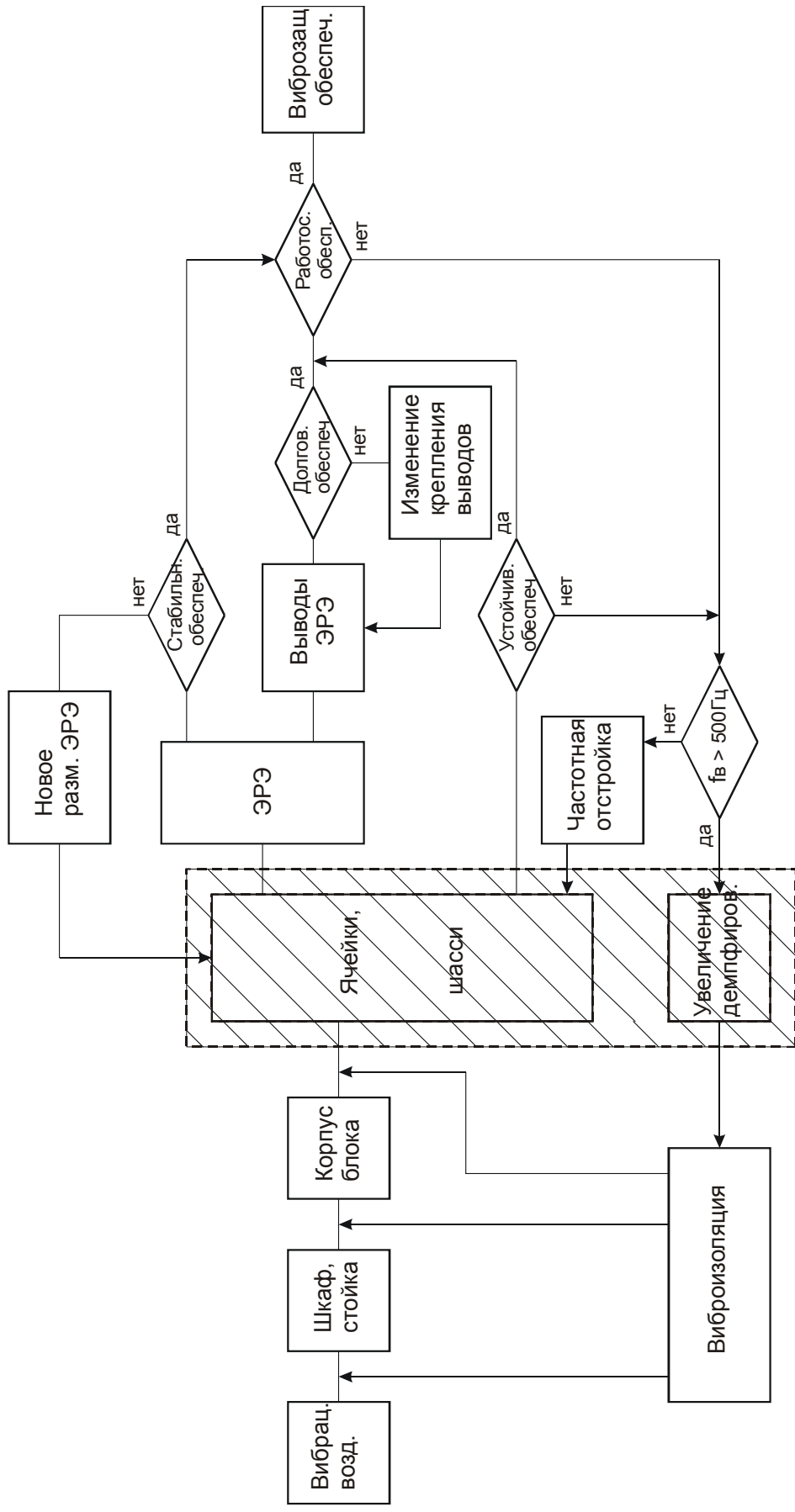


Рис. 11.2. Структура виброзащиты ЭС – структурная схема  
 ▨ – область применения полимерных демпферов

Вибрационное воздействие передается к точкам крепления шасси или функциональных ячеек через корпуса ЭА (шкафов, стоек), корпуса блоков в виде волновых процессов. Характеристики вибрации мест крепления ячеек могут быть определены с использованием методов конечных разностей или конечных элементов. Действие печатной платы ячейки на ЭРЭ прежде всего обусловлено возможными резонансными колебаниями платы. При этом виброперемещения и виброускорения в точках крепления могут возрасти в пучностях колебаний в десятки раз. Определить амплитуды можно при помощи аналитических методов, если плата рассматривается в виде прямоугольной пластины с простейшими способами крепления краев в виде свободного опирания, жесткого защемления и т.д. В других случаях наиболее часто используются методы конечных разностей и конечных элементов. Следует учитывать, что затраты машинного времени при этом резко возрастают.

Колебания ячеек ЭА и прежде всего резонансные колебания могут привести к трем отрицательным явлениям. Первое – амплитуды виброускорения в одной или нескольких точках платы превысят допустимые значения, указанные в ТУ на ЭРЭ, то есть не будет обеспечена устойчивость работы ЭА. Второе – резонансные колебания ячеек приведут к усталостным явлениям в электрических выводах ЭРЭ и, как следствие, к уменьшению долговечности выводов ЭРЭ и ЭА в целом. Эти вопросы подробно рассмотрены в работе [5]. Третье – большие ускорения при резонансе ячеек приводят вследствие изменения характеристик ЭРЭ за счет проявления тензорезистивного эффекта в полупроводниковых материалах, изменения магнитной проницаемости ферритов и т.д. к изменению параметров сигналов ЭА, то есть возникновению нестабильности за счет появления виброшумов. Эти явления подробно рассмотрены на основе обобщения литературных данных в гл.1 (ч.1).

Если виброустойчивость, стабильность или долговечность выводов ниже нормы, необходимо применить меры виброзащиты. Это может быть изменение способов крепления ЭРЭ, новая компоновка ЭРЭ на плате и тому подобное. Наиболее эффективными способами являются частотная отстройка, увеличение демпфирующих свойств и виброизоляция. Практика и исследования показали, что при действии вибрации в диапазоне частот до 500 Гц и выше, что характерно для самолетной, ракетной и космической аппаратуры, наиболее эффективным является увеличение демпфирующих свойств конструкций.

Если ни один из упомянутых способов не обеспечивает необходимую виброзащиту, можно применить виброизоляцию или применить эти способы совместно.

Ниже рассмотрен вариант структурно-функциональной схемы создания виброзащиты на уровне блока ЭА.

## 11.2. СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА ВИБРОЗАЩИТЫ БЛОКА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Конструкции ЭА могут быть разделены на четыре иерархических уровня.

Электрорадиоэлементы (ЭРЭ) составляют нулевой уровень. Они входят в радиоэлектронные ячейки или кассеты, выполненные на основе несущей конструкции первого уровня (НК1). Ячейки и кассеты, а также отдельные ЭРЭ входят в состав блоков или рам, выполненных на несущих конструкциях второго уровня (НК2). Блоки или рамы, а также ячейки (кассеты) на несущих конструкциях третьего уровня образуют шкаф, пульт или стойку. Результаты анализа отказов ЭА в условиях воздействия вибраций в широком диапазоне частот (до 500 Гц и выше) показывают, что наиболее часто отказывают ЭРЭ из-за недопустимо больших виброускорений и виброперемещений, возникающих при резонансных колебаниях ячеек. Таким образом, ячейки ЭА являются наиболее «слабым звеном». Появление резонансных колебаний ячеек обусловлено двумя причинами:

1. Небольшой изгибной жесткостью ячеек, выполняемых обычно на подложках из стеклотекстолита малой толщины (1–3 мм), а следовательно имеющих низкие значения СЧК (<200–300 Гц).
2. Широким диапазоном частот воздействующей вибрации (до 500 Гц и выше).

Поэтому первой, а часто основной, задачей при обеспечении виброзащиты ЭА является устранение или уменьшение до допустимого уровня АРК ячеек.

Рассмотрим один из возможных вариантов схем проектирования, показанный на рис. 11.3 [9].

Исходными данными (блок 1) являются диапазон частот и амплитуда действующей на РЭА вибрации, допустимые ускорения на ЭРЭ, конструктивные параметры блока и узлов – размеры, модули упругости материалов и т.д., условия эксплуатации, температурный диапазон и другие условия.

В блоке 2 проводится расчет собственных частот колебаний ячеек и ЭРЭ. Расчет может проводиться на основе аналитических или сеточных моделей в зависимости от сложности конструкций. Если ячейки имеют прямоугольную форму и закреплены только по краям одним из "классических" способов, однородны, то предпочтение следует отдать аналитическим методам моделирования.

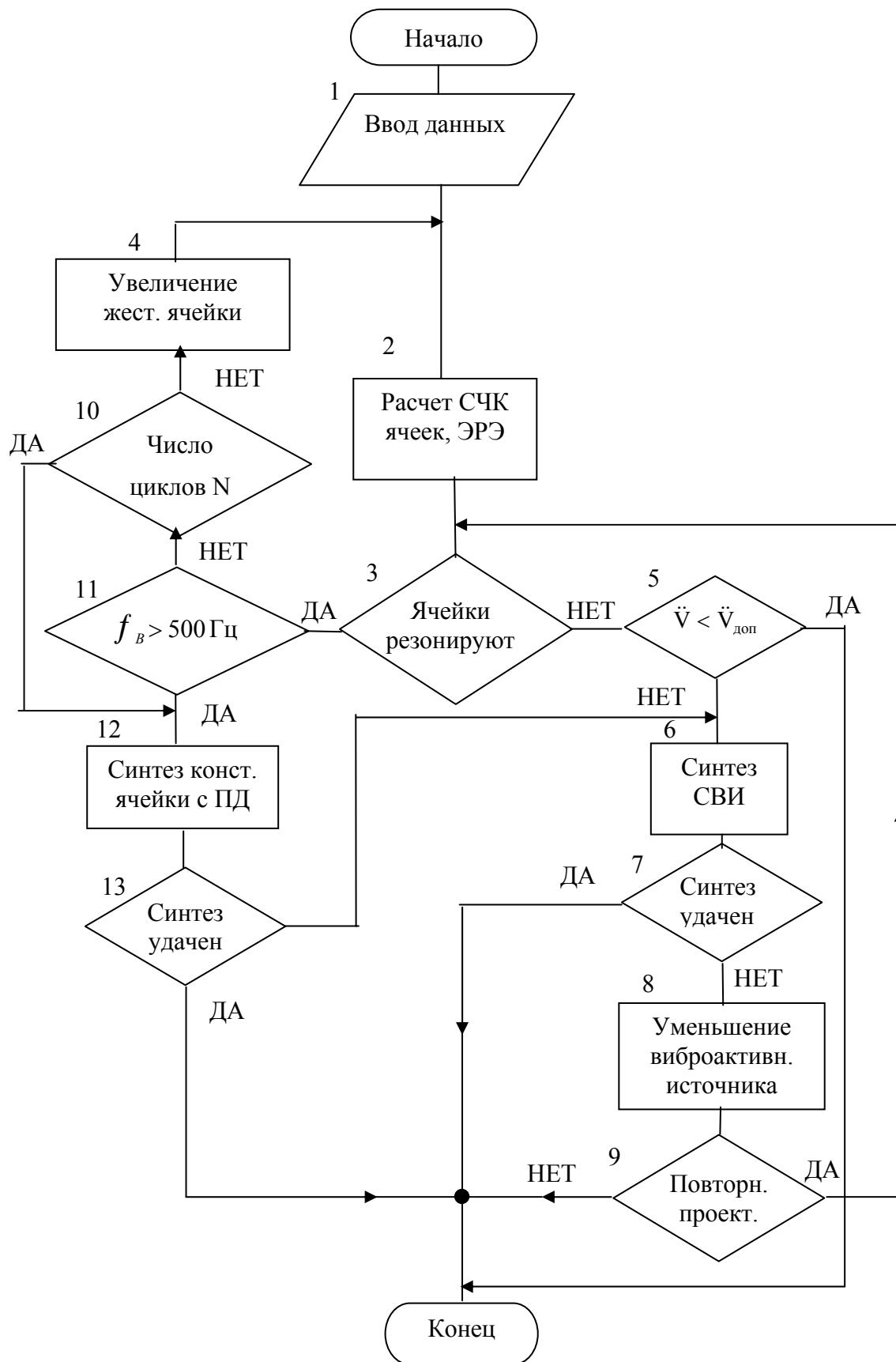


Рис. 11.3. Структурно-функциональная схема виброзащиты блока ЭС

В блоке 3 проверяется возможность возникновения резонансных колебаний ячеек и ЭРЭ путем сравнения диапазона частот вибраций с собственными частотами колебаний элементов конструкций.

Если резонансные колебания отсутствуют, то необходимо определить, не превышают ли виброускорения, действующие на ЭРЭ и заданные в ТЗ, допустимые виброускорения для ЭРЭ (блок 5). Если не превышают, то никаких мер по виброзащите применять не нужно. В противном случае необходима виброизоляция с целью уменьшения виброускорений, действующих на РЭА.

В блоке 6 проводится синтез системы виброизоляции. Он включает определение центра тяжести блока, расчет моментов инерции, выбор схемы расположения виброизоляторов и их статический расчет, выбор типа изоляторов, определение собственных частот блока на виброизоляторах и оценку эффективности системы виброизоляции. Могут проводиться также расчеты на ударное воздействие и воздействие линейного ускорения. Если синтез удачен, т.е. удалось уменьшить виброускорения до допустимого уровня, то дальнейшие шаги по виброзащите не предпринимаются (блок 7). Если синтез неудачен, что может произойти из-за жестких ограничений на размеры системы виброизоляции и очень низкой наименьшей частоты действующих вибраций (меньше 5 Гц), то необходимо уменьшить вибрацию системы, в которых применяется РЭА. Если заказчик согласен на это и соответствующую корректировку ТЗ (блок 8), то может проводиться повторное проектирование виброзащиты с учетом проведенной корректировки или использовано уже найденное решение СВИ (блок 9).

Если проверка на наличие резонансных колебаний показывает, что ячейки или другие элементы будут резонировать (блок 3), то необходимо применить частотную отстройку или увеличить демпфирующие свойства системы. Выбор одного из этих способов определяется двумя факторами. Во первых, тем, что частотная отстройка, как правило, конструктивно-технологически выполняется проще, во вторых, при частотах возбуждения больше 500 Гц она приводит к значительному часто недопустимому увеличению массы и габаритных размеров конструкции. Поэтому в блоке 11 проверяется, превышает ли верхняя частота возбуждения частоту, равную 500 Гц. Если нет, то для устранения резонансных колебаний целесообразнее применить частотную отстройку (блок 4). Для этого можно увеличить толщину конструкции, уменьшить площадь подложки, изменить способ крепления, применить ребро жесткости. В программе может быть заложено несколько десятков различных вариантов частотной отстройки. Выбор того или иного варианта должен проводиться по различным критериям – стоимости, массе, габаритам и другим. После применения каждого варианта ведется расчет и проверяется условие отсутствия резонансных колебаний. Если за определенное число циклов частотную отстройку провести не

удается (блок 10), то необходимо увеличивать демпфирующие свойства конструкции (блок 12).

Демпфирующие свойства обычно повышаются за счет применения полимерных демпферов в виде демпфирующих слоев, демпфирующих ребер (ДР), демпфирующих вставок (ДВ). Выбор вида полимерного демпфера в настоящее время базируется на знаниях и опыте специалистов. Методы оптимального выбора не разработаны. Если синтез удачен (блок 13), т.е. удалось уменьшить амплитуды резонансных колебаний до допустимого уровня, то задача виброзащиты считается выполненной. Если неудачен, то можно применить различные виды полимерных демпферов, например ДВ и ДР, или совместить полимерный демпфер с ребром жесткости и т.д. При неудачном итоге, можно дополнительно применить виброизоляцию (блок 7).

### **11.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ**

**Необходимость применения численных методов.** При определении динамических характеристик конструкций электронной аппаратуры возникает необходимость в решении двух основных задач динамики: в первой находятся собственные частоты и собственные формы колебаний конструкции, во второй – определяют амплитуды вынужденных колебаний элементов в различных точках конструкции при заданных параметрах внешнего вибрационного воздействия. Далее могут быть определены механические напряжения и запасы прочности конструктивных элементов, а также оценена вероятность безотказной работы устройства при вибрации.

Практическое применение аналитических методов для решения задач динамики конструкций сопряжено с рядом трудностей. Конструкции современной аппаратуры представляют собой сложные механические системы с множеством упругих и жёстких связей, с неклассическими для строительной механики способами крепления отдельных конструктивных элементов. Для такой механической системы сложно построить расчётную модель, достаточно простую и в то же время хорошо отражающую физические и динамические свойства, тем более, что конструкция содержит множество неконтролируемых параметров, например усилия затяжки соединений при сборке плат в пакет, коэффициенты механических потерь материалов элементов. При составлении и решении уравнений движения конструкции возникает ряд математических трудностей.

Эти причины способствовали быстрому развитию численных методов, которые и получили в настоящее время широкое распространение с внедрением в практику инженерных расчётов цифровых ЭВМ. Основу численных методов расчётов динамических параметров конструкции со-

ставляют: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и различные вариационные методы, в том числе и энергетический метод [1].

**Метод конечных разностей.** Для расчёта конструкции аппарата с помощью метода конечных разностей строится его упрощенная модель-сетка. В этой модели детали с непрерывно распределенной массой заменяются набором дискретных элементов с сосредоточенными массами. Точки сосредоточения массы элементов называют узлами. Соседние узлы соединяются друг с другом невесомыми упругими связями.

Таким образом, модель стержня будет представлять собой одномерную структуру в виде цепочки узлов (рис.11.4,*а*), модель платы или панели – плоскую сетку (рис.11.4,*б*), модель монолитного блока – пространственную трёхмерную сетку (рис.11.4,*в*).

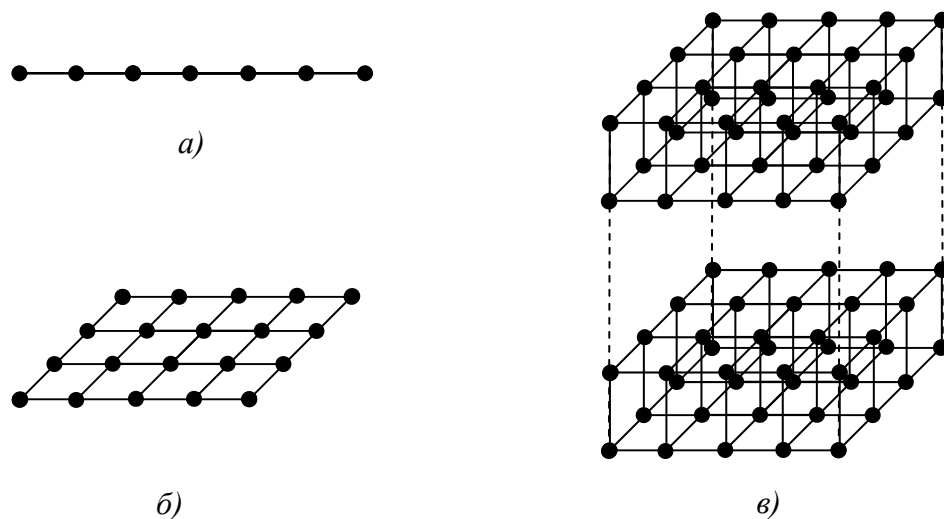


Рис. 11.4. Дискретные модели элементов конструкции РЭА  
а) одномерные; б) двумерные; в) трехмерные

Расчёт модели ведётся с помощью конечно-разностных уравнений. Эти уравнения образуют из дифференциальных уравнений посредством замены в них частных и обычных производных отношениями конечных приращений рассматриваемых переменных. Так, например, производная  $f'(x) = df(x)/dx$  заменяется отношением конечных приращений  $\Delta f(x)$  и  $\Delta x$  (рис. 11.5).

Приращение аргумента – шаг  $\Delta x = h$  берут обычно одинаковым во всём интервале изменения функции  $f(x)$ :

$$h = (X_b - X_a)/n.$$



Приращение функции вычисляется с помощью одного из разностных операторов  $\Delta$ ,  $\nabla$  или  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ \nabla f(x) &= f(x) - f(x-h) \\ \delta f(x) &= f(x+0,5h) - f(x-0,5h) \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

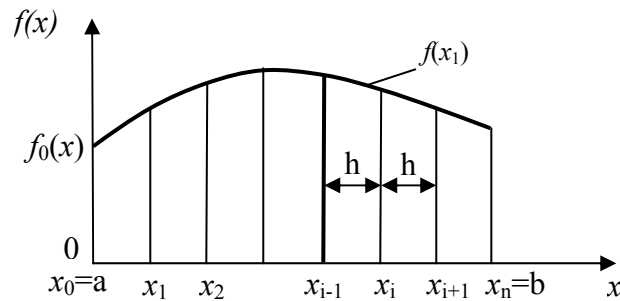


Рис. 11.5. К определению конечных разностей в одномерной задаче

В соответствии с этим в любой точке  $x=x_i$  могут быть вычислены:

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i && \text{- разность, взятая вперед;} \\ \nabla f_i &= f_i - f_{i-1} && \text{- разность, взятая назад;} \\ \delta f_i &= f_{i+1/2} - f_{i-1/2} && \text{- центральная разность.} \end{aligned}$$

По этой же схеме вычисляются и разности высших порядков, например:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i. \quad (11.2)$$

Используя эти выражения, можно получить формулы для приближенного вычисления производных в точке  $x=x_i$ , (табл.11.1).

Применение МКР к расчету колебаний балок рассмотрим на примере.

**Пример 11.1.** Рассчитать собственные частоты колебаний балки с шарнирно-закрепленными концами, показанной на рис.11.6.

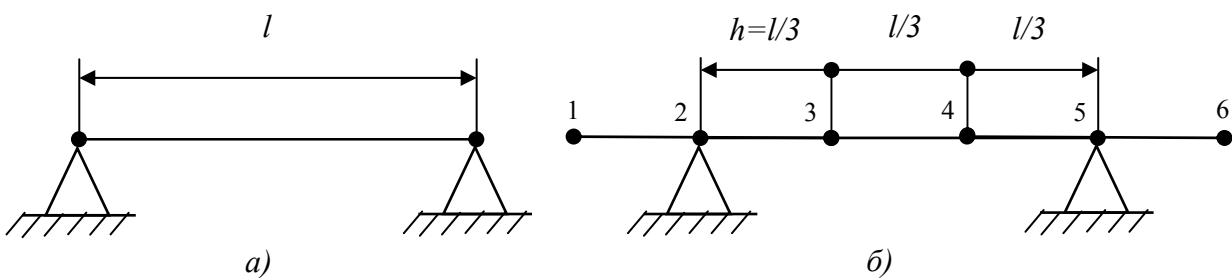


Рис.11.6. Балка (а) и ее расчетная модель (б)

Уравнение свободных колебаний балки имеет вид

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0. \quad (11.3.)$$

Определение собственных частот колебаний балок аналитическим методом подробно рассмотрено в п. 4.1. (ч.1) Для сравнения сделаем расчет МКР. Для этого, считая массу балки сосредоточенной в узлах 3,4, напишем уравнения их движения в конечных разностях. Полагая, что свободные колебания балки происходят по гармоническому закону  $W(x,t)=W(x)e^{i\omega t}$ , уравнение (11.3) преобразуем к виду

$$-m\omega_0^2 W + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0. \quad (11.3,a)$$

Подставляя в него вместо частной производной выражение в конечных разностях, для точки 3 получим

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right)_3 = \frac{W_5 - 4W_4 + 6W_3 - 4W_2 + W_1}{h^4},$$

где  $h=l/3$ , или после подстановки в 11.3,a,

$$W_5 - 4W_4 + 6W_3 - 4W_2 + W_1 = \beta W_3,$$

где

$$\beta = \frac{m\omega_0^2 h^4}{EJ}. \quad (11.4)$$

У рассматриваемой балки прогибы в точках 2 и 5 равны 0, т.е.  $W_2=W_5=0$ . Отсюда получим

$$-4W_4 + 6W_3 + W_1 = \beta W_3. \quad (11.5)$$

Рассуждая аналогично, для точки 4 получим

$$W_6 + 6W_4 - 4W_3 = \beta W_4. \quad (11.6)$$

В уравнениях (11.5) и (11.6) присутствуют прогибы в условных точках 1 и 6. Они могут быть найдены на основе разложения функции в этих точках в ряд Тейлора

$$W(x-h) = W(x) - \frac{h}{1!} W'(x) + \frac{h^2}{2!} W''(x) - \dots$$

Пренебрегая всеми членами разложения, начиная с третьего члена, ввиду их малости, для точки 1 получим

$$W_1 = W_2 - \left( \frac{\partial W_2}{\partial x} \right)_2 \cdot h = \frac{(W_3 - W_1)h}{2h} + W_2 = \frac{W_3 - W_1}{2};$$

Так как  $W_2 = 0$ , окончательно получим  $W_1 = -W_3$ . Для точки 6 запишем  $W_6 = W_5 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_5 h = \frac{W_6 - W_4}{2}$  и окончательно  $W_6 = -W_4$ .

Подставляя найденные значения для  $W_1$  и  $W_6$  в уравнения (11.5) и (11.6), получим

$$\begin{cases} (5-\beta)W_3 - 4W_4 = 0; \\ -4W_3 + (5-\beta)W_4 = 0. \end{cases}$$

Таблица конечных разностей

Производная	Схема расположения узлов	Приближённая формула
$\frac{dt}{dx}$		$h \left( \frac{dt}{dx} \right)_i = t_{i+1} - t_i$ $2h \left( \frac{dt}{dx} \right)_i = t_{i+1} - t_{i-1}$ $h \left( \frac{dt}{dx} \right)_i = t_i - t_{i-1}$
$\frac{d^2t}{dx^2}$		$h^2 \left( \frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_i - 2t_{i+1} + t_{i+2}$ $h^2 \left( \frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}$ $h^2 \left( \frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_i - 2t_{i-1} + t_{i-2}$
$\frac{d^3t}{dx^3}$		$h^3 \left( \frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_i - 3t_{i+1} + 3t_{i+2} - t_{i+3}$ $h^3 \left( \frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_{i+1} - 3t_i + 3t_{i-1} - t_{i-2}$ $h^3 \left( \frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_i - 3t_{i-1} + 3t_{i-2} - t_{i-3}$
$\frac{d^4t}{dx^4}$		$h^4 \left( \frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_i - 4t_{i+1} + 6t_{i+2} - 4t_{i+3} + t_{i+4}$ $h^4 \left( \frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_{i-2} - 4t_{i-1} + 6t_i - 4t_{i+1} + t_{i+2}$ $h^4 \left( \frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_i - 4t_{i-1} + 6t_{i-2} - 4t_{i-3} + t_{i-4}$

Для решения этой системы уравнений составим определитель

$$\begin{vmatrix} 5-\beta & -4 \\ -4 & 5-\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая его, получим уравнение  $(5-\beta)^2 - 16 = 0$ . Откуда найдем  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_2 = 9$ . Преобразуем выражение (11.4) к виду

$$\omega_{0i} = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

найдем  $\omega_{01} = \frac{9}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$  и  $\omega_{02} = \frac{27}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ .

Для сравнения точный расчет аналитическим методом дает вместо 9 и 27, значения 9,86 и 39,4. Такое большое расхождение, особенно по второй частоте, можно объяснить разбиением балки всего на три участка. Обычно рекомендуется не меньше десяти.

Составление конечно-разностных уравнений конструкций типа пластин. Уравнение свободных колебаний пластины имеет вид (4.35, ч.1)

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (11.7)$$

Представляя решение в виде  $W = W(x, y, t) = W(x, y) e^{j\omega_0 t}$  и используя данные таблицы 11.1, слагаемые уравнения (11.7) для некоторой точки  $i$  на рис. 11.7 представим в виде

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -m\omega_0^2 W;$$

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right)_i = \frac{W_S - 4W_K + 6W_i - 4W_l + W_t}{\Delta x^4};$$

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right)_i = \frac{W_u - 4W_m + 6W_i - 4W_n + W_V}{\Delta y^4};$$

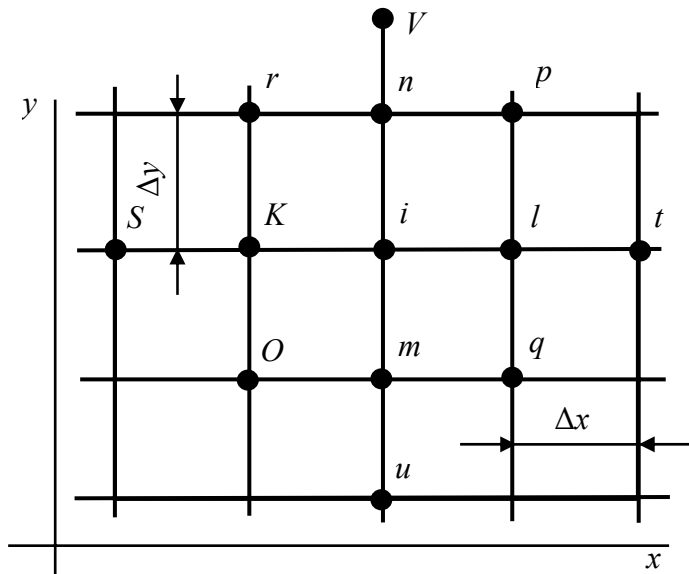


Рис. 11.7. Фрагмент сетки

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_i = \frac{4W_i - 2(W_K + W_l - W_m + W_n) + W_O + W_p + W_r + W_q}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение свободных колебаний и считая  $\Delta x = \Delta y$ , получим уравнение

$$20W_i - 8(W_K + W_l + W_m + W_n) + 2(W_O + W_t + W_u + W_r) + W_S + W_t + W_u + W_V = m\omega^2 W_i \Delta x^4. \quad (11.8)$$

Для прямоугольной пластины, жестко заземленной по контуру, уравнение типа (11.8) справедливо для точек 17,18,19,24 – 36,31 – 33, указанных на рис.11.8.

В остальных точках появляются известные контурные значения прогиба (они равны нулю) и законтурные неизвестные значения, что приводит к уравнениям, отличным от (11.8).

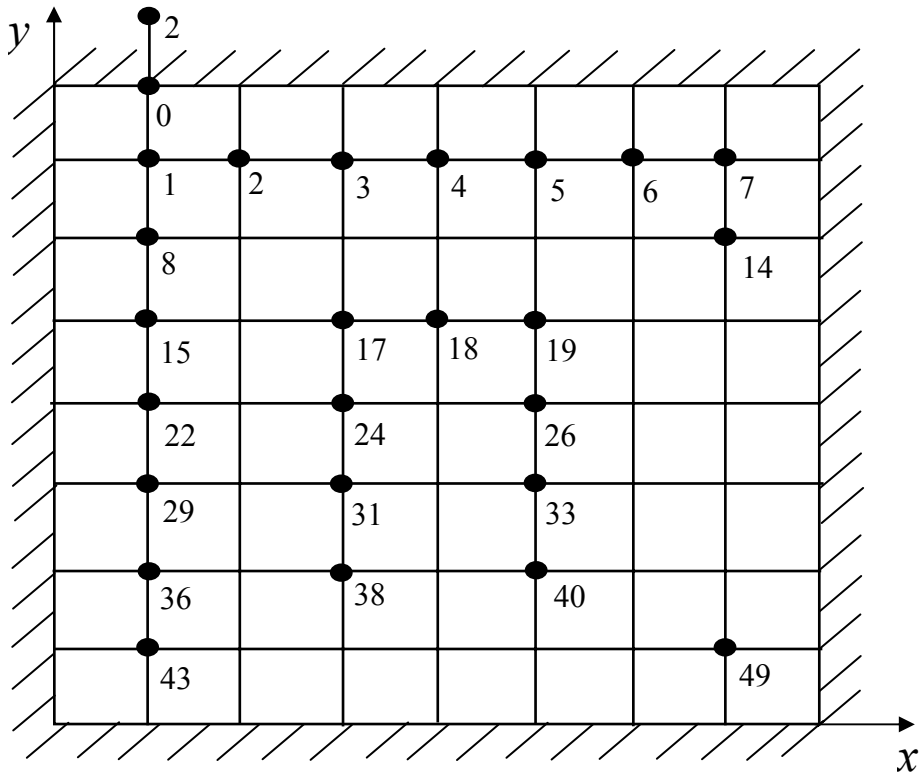


Рис.11.8. Плата ячейки, заземленная по контуру

Применяя разложение функции в ряд Тейлора, для точки  $O$  получим:

$$W_2 = W_0 + h = W_0 + h \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \dots$$

Используя разностные представления

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2} (W_1 - 2W_0 + W_2); \\ \left( \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right) &= \frac{1}{h^3} (W_2 - 3W_0 + 3W_1 - W_8), \end{aligned} \quad (11.9)$$

и замечая, что для пластины, жестко закрепленной по контуру, граничные условия  $W$  и  $\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)$  равны нулю, из уравнения (11.9) получим

$$W_2 = \frac{1}{2} (W_1 + W_2) + \frac{1}{6} (W_2 + 3W_1 - W_8).$$

Отсюда  $W_2 = 3W_1 - 0,5W_8$ . Полученную зависимость можно использовать для исключения лишних неизвестных при записи разностных уравнений. Например, для узла 15 получим

$$W_1 - 8W_8 + 2W_9 + 29W_{15} - 10W_{16} + W_{17} - \\ - 8W_{22} + 2W_{33} + W_{29} = \frac{mW^2}{D} h^4 W_{15}.$$

Таким образом, получим систему из 49 алгебраических уравнений, которая может быть решена различными методами. Наиболее часто применяется метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения переменных.

Рассмотренная схема решения является неявной. Может применяться и явная схема, когда частная производная  $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$  заменяется также конечными разностями, а затем решение идет на каждом шаге с интервалом  $\Delta t$ .

Недостатком МКР является большая трудоемкость составления конечно-разностных уравнений при подготовке задачи к решению на ЭВМ. Наиболее известным программным комплексом, реализованным на использовании МКР, является “Асоника”. При наличии сложного контура ступенчатого изменения жесткости решение задач динамики конструкции при помощи МКР встречает большие трудности. В этом случае рекомендуется применять метод конечных элементов.

**<sup>3</sup>Метод конечных элементов.** В МКЭ исходная область определения функции разбивается сеткой, в общем случае, в отличие от МКР неравномерной, на отдельные участки – конечные элементы [10]. Искомая непрерывная функция заменяется кусочно-непрерывной, определенной для множества конечных элементов. Чаще всего для этого используются полиномы, обеспечивающие непрерывность искомой формы колебаний в узлах на границах элементов. Для одномерных функций конечными элементами являются отрезки прямой, для двумерных областей наиболее часто конечные элементы представляются в виде треугольников и четырехугольников, для трехмерных – в виде тетраэдра или параллелепипеда.

Алгоритм МКЭ включает четыре этапа.

1. Разбиение заданной области, например площади ячейки, на конечные элементы.
2. Выбор аппроксимирующей функции в виде полинома для каждого элемента.
3. Объединение полученных полиномиальных функций в систему алгебраических уравнений.
4. Решение полученной системы уравнений и определение вектора узловых значений функции (перемещений, ускорений).

---

<sup>3</sup> Написана В.В. Евграфовым.

Подробное рассмотрение МКЭ выходит за пределы учебного пособия. Отметим, что наиболее сложным этапом является четвертый, требующий глубоких знаний в области механики сплошной среды. Для более глубокого ознакомления с МКЭ автор рекомендует книгу [10]. В настоящее время разработан ряд программных комплексов на основе МКЭ, позволяющих успешно их использовать инженерам-конструкторам электронных средств для анализа динамического поведения сложных конструкций.

*Программные реализации метода конечных элементов.* Системы конечноэлементного анализа (FEA) в зависимости от возможностей подразделяются на системы среднего уровня (NASTRAN, PATRAN, COSMOS и др.) и так называемые “тяжелые” САПР (MARC, ANSYS). Однако вне зависимости от назначения построение конечноэлементных систем выполняется по традиционной схеме, показанной на рис.11.9.

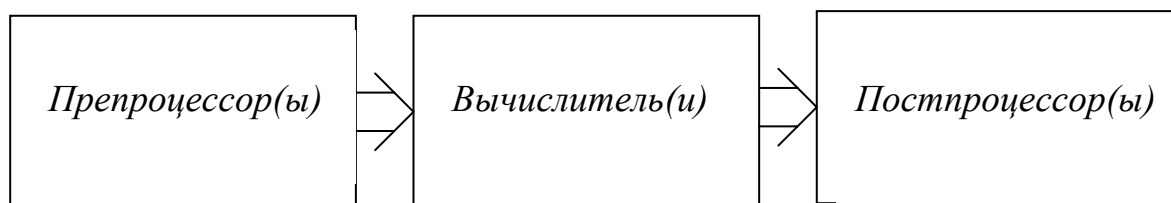


Рис.11.9. Типовая структура конечноэлементных систем

Препроцессор (один или несколько) выполняет построение геометрии модели, задание свойств материалов и разбиение модели на конечные элементы, т.е. производит подготовку задачи к решению. При этом препроцессоры современных систем позволяют импортировать геометрию модели из конструкторских САПР (AutoCAD, SolidWork и т.д.). Подготовленная конечноэлементная модель обрабатывается вычислителем (решателем) в соответствии с необходимым видом анализа. На заключительном этапе производится визуализация расчетных данных с помощью постпроцессора.

Конечноэлементные вычислители (NASTRAN, MARC, COSMOS, ANSYS) позволяют проводить линейный и нелинейный динамический анализ при гармонических и случайных воздействиях на объект исследований представленный конечноэлементной моделью. В расчетах учитываются основные характеристики материалов, включая различные типы демпфирования:

- конструкционное демпфирование;
- внутреннее демпфирование в материалах;

– вязкоупругое демпфирование дискретных элементов;  
в различных представлениях:

- эквивалентное вязкоупругое;
- часть от критического;
- качественный показатель.

Для эффективной эксплуатации современных систем конечноэлементного анализа на IBM-совместимых персональных компьютерах предъявляются следующие обобщенные требования к оборудованию и системному программному обеспечению:

- свободное дисковое пространство не менее 200 мегабайт;
- тип процессора - Pentium;
- оперативная память не менее 32 мегабайт;
- наличие CD-ROM;
- операционная система - Windows NT/9X.

Одним из мировых лидеров конечноэлементного анализа является корпорация MacNeal Schwendler Corporation (США), выпускающая программные продукты: MSC/MARC, MSC/NASTRAN, MSC/PATRAN, MSC/InCheck и др.

**MSC/MARC** представляет собой универсальную конечноэлементную программу для проведения углубленного анализа высоконелинейного поведения конструкций и решения задач теплопередачи. Дополняя нелинейные функции продуктов MSC/NASTRAN и MSC/DYTRAN, MSC/MARC проводит комплексный анализ задач, по условиям которых конструкции подвергаются большим перемещениям и поворотам, имеют высоконелинейные свойства материалов или свойства, зависящие от истории нагружения, а также анализ контактного взаимодействия конструкций. Применение современных формулировок и вычислительных методов обеспечивает надежность проектов и сокращает объем физического макетирования. MSC/MARC обладает широкими возможностями в области решения сложных нелинейных задач. MSC/MARC может работать на различных компьютерных платформах от рабочих станций до суперкомпьютеров. С помощью MARC, в частности, можно проводить динамический анализ, анализ разрушений, акустический анализ.

**MSC/NASTRAN** обеспечивает полный набор расчетов, включая расчеты собственных частот и форм колебаний, установившихся и неустано-



вившихся процессов, акустики, частотных характеристик при воздействии случайных нагрузок, спектрального анализа.

Предусмотрена возможность моделирования практически всех видов материалов, в том числе композитных и гиперупругих. Расширенные функции включают технологию суперэлементов (подконструкций), модальный синтез и макроязык DMAP для создания пользовательских приложений. Наряду с расчетом конструкций MSC/NASTRAN может использоваться и для *оптимизации проектов*. Оптимизацию можно проводить для решения задач статики, устойчивости, установившихся и неустановившихся переходных процессов, собственных частот и форм колебаний, акустики. Вес, напряжения, перемещения, собственные частоты и многие другие характеристики могут рассматриваться либо в качестве целевых функций проекта (в этом случае их можно минимизировать или максимизировать), либо в качестве ограничений. Алгоритмы анализа чувствительности позволяют исследовать влияние различных параметров на поведение целевой функции и управлять процессом поиска оптимального решения.

(NASTRAN выпускается и другими производителями программного обеспечения; в частности, система UAI/ NASTRAN разработана американской компанией Universal Analytics, Inc (UAI).)

**COSMOS/M DESIGNER II** предназначена для расчетов прочности, теплоотдачи, устойчивости на основе метода конечных элементов. COSMOS/M DESIGNER II полностью интегрирована с MicroStation и MicroStation Modeler. Исходная модель строится непосредственно в MicroStation Modeler или импортируется из файлов форматов DXF, DWG, SAT, STEP. Расчетная модель (свойства материалов, нагрузки, расчетная сетка и т.д. ) создается полуавтоматически прямо в среде MicroStation Modeler и ассоциирована с геометрической моделью. Результаты анализа представляются в виде графиков, диаграмм; с возможностью наложения карты распределения параметра прямо на модель, создание мультипликации деформации детали и т.д. Особенность этой системы заключается в наличии блока быстрого расчета (Fast Finite Element, EFE), позволяющего резко сократить в 100 раз время расчета по сравнению с базовыми продуктами конечноэлементного анализа и совместить этапы проектирования и оптимизации модели без значительного увеличения рабочего времени. Возможно также использовать расчетные блоки систем ANSYS и NASTRAN.

**COSMOS/Works** представляет собой систему инженерных расчётов, созданную специально для совместного использования с системой твёрдо-

тельного параметрического моделирования SolidWorks. Система COSMOS/Works разработана американской компанией Structural Research & Analysis Corporation и поставляется в трёх вариантах конфигурации: базовой (Basic), промежуточной (Intermediate) и расширенной (Advanced); выполняющих следующие виды расчётов:

- статический расчёт напряжений и деформаций;
- расчёт продольного изгиба для определения критической нагрузки;
- частотный анализ для определения собственных частот и форм колебаний;
- линейный динамический анализ с использованием результатов частотного анализа;
- статический и динамический нелинейный структурный анализ.

COSMOS/Works позволяет передавать результаты вычислений в системы ANSYS и MSC/NASTRAN. Кроме того, пользователь может сохранять результаты расчёта в формате VRML, а также создавать AVI-файлы на основе анимационного представления нагружения детали.

ANSYS включает в себя следующие программы анализа поведения механических конструкций:

- **ANSYS/Multiphysics** – самый мощный, многоцелевой продукт компании, представляет собой программное средство анализа для широкого круга инженерных дисциплин, которое позволяет проводить расчетные исследования не только в таких отдельных областях знания, как прочность, распространение тепла, механика жидкостей и газов или электромагнетизм, но и решать связанные задачи. Эта программа обеспечивает оптимизацию проектных разработок на уровне, позволяющем моделировать инженерные проблемы в наиболее полной постановке.
- **ANSYS/Mechanical** предназначен для выполнения проектных разработок, анализа и оптимизации: решения сложных задач прочности конструкций, теплопередачи и акустики. Эта программа, обеспечивающая проверку правильности проектных работ, является мощным инструментом для определения перемещений, напряжений, усилий, температур и давлений, а также других важных параметров.
- **ANSYS/Structural** выполняет сложный прочностной анализ конструкций с учетом разнообразных нелинейностей, среди которых гео-

метрическая и физическая нелинейности, нелинейное поведение конечных элементов и потеря устойчивости. Используется для точного моделирования поведения больших и сложных расчетных моделей.

- **ANSYS/ED** представляет собой программу, обладающую возможностью расчетного кода ANSYS/Multiphysics, но имеющую ограничения по размерам расчетной модели. Этот доступный пакет является идеальным для обучения и подготовки персонала.

**FEMAP.** В настоящий момент широкое распространение приобретает система FEMAP, рекомендованная производителями международной космической станции “Альфа” в качестве основного *пре-постпроцессора* для подготовки и визуализации расчетных данных в системах конечноэлементного анализа.

### Контрольные вопросы

1. Что понимается под входом, выходом, процессом и обратной связью в системе ВЗ электронных средств?
2. К каким отрицательным явлениям могут привести вибрации ячеек ЭС?
3. Почему ячейки ЭС являются наиболее «слабым местом» при механических воздействиях?
4. Нарисуйте структурно-функциональную схему виброзащиты блока ЭС.
5. На какие иерархические уровни можно разделить конструкции ЭС?
6. Какие способы ВЗ применяются для ЭРЭ, ячеек, блоков, стоек?
7. Как составляются конечно-разностные уравнения?
8. Приведите примеры замены производных конечными разностями.
9. Как находятся прогибы в условных точках (за границами определения функций)?
10. В чем заключается основная идея метода конечных элементов?
11. Какие известны программные комплексы, основанные на МКЭ?
12. Что общего и чем различаются МКЭ и МКР.

## Глава 12

# НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

### 12.1. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ [11]

**Вывод уравнения колебаний струны.** Пусть конечные точки струны закреплены, а сама струна туго натянута. Если вывести струну из положения равновесия (например, оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия (поперечные колебания), причем в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Возьмем в этой плоскости систему прямоугольных координат  $xOz$ . Тогда, если в начальный момент времени струна располагалась вдоль оси  $Ox$  то  $z$  будет означать отклонение струны от положения равновесия. В процессе колебания величина отклонения  $z$  будет зависеть от абсциссы

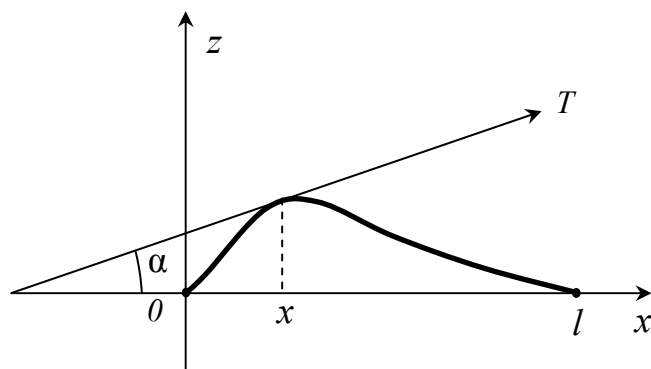


Рис.12.1. Форма колеблющейся струны в момент времени  $t$

точки струны  $x$  и от времени  $t$ . Таким образом, чтобы знать положение любой точки струны в произвольный момент времени, нам надо найти зависимость  $z$  от  $x$  и  $t$ , т. е. найти функцию  $z(x, t)$ . При каждом фиксированном значении  $t$  график функции  $z(x, t)$  представляет форму колеблющейся струны в момент времени  $t$  (рис.12.1), частная

производная  $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x(x, t)$  дает при этом угловой коэффициент касательной

в точке с абсциссой  $x$ . При изменении  $t$  форма струны, очевидно, изменяется, и, чтобы представить себе процесс колебаний, мы должны построить несколько графиков функции  $z(x, t)$  при различных значениях  $t$ , т.е. сделать несколько мгновенных снимков колеблющейся струны. При постоянном значении  $x$  функция  $z(x, t)$  дает закон движения точки с абсциссой  $x$  вдоль

прямой, параллельной оси  $Oz$ , производная  $\frac{\partial z}{\partial t} = z_t'(x, t)$  – скорость это-

го движения, а вторая производная  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  – ускорение.

Наша задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция  $z(x, t)$ . Для этого сделаем предварительно несколько упрощающих предположений. Будем считать струну *абсолютно гибкой*, т.е. не сопротивляющейся изгибу; это означает, что если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения  $T$ , заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне (см. рис.12.1). Струна предполагается *упругой* и подчиняющейся закону Гука; изменение величины силы натяжения при этом пропорционально изменению длины струны. Примем, что струна *однородна*; линейную плотность ее обозначим буквой  $\rho$  ( $\rho$ —масса единицы длины струны).

Предположим далее, что на струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные оси  $Oz$ , которые могут меняться вдоль струны и со временем. Силы эти будем считать непрерывно распределенными вдоль струны; величину силы, направленной вверх, условимся считать положительной, а вниз — отрицательной. Плотность распределения этих сил вдоль струны<sup>4</sup> является функцией абсциссы  $x$  и времени  $t$ ; обозначим ее через  $g(x, t)$ . Если, в частности, единственной внешней силой является вес струны, то  $g(x, t) = -\rho g$ , где  $\rho$  — плотность струны, а  $g$  — ускорение силы тяжести.

Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, мы пока пренебрегаем.

Мы будем изучать только малые колебания струны. Если обозначить через  $\alpha(x, t)$  острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ , то условие малости колебаний заключается в том, что величиной  $\alpha^2(x, t)$  можно пренебрегать:

$$\alpha^2 \approx 0. \quad (12.1)$$

Поскольку разложение функции  $\sin \alpha$  в ряд Маклорена имеет вид

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots,$$

то в силу условия (12.1) можно считать, что

$$\sin \alpha \approx \alpha. \quad (12.2)$$

Далее,  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2}$ , и, следовательно,

$$\cos \alpha \approx 1. \quad (12.3)$$

---

<sup>4</sup>) Плотность распределения параллельных сил, изменяющихся вдоль линии, определяется как предел отношения величины равнодействующей этих сил, приложенных к малому участку, к длине участка при условии, что участок стягивается в точку. Это определение совершенно аналогично определению обычной плотности.

И, наконец,  $tg\alpha - \sin\alpha = tg\alpha(1 - \cos\alpha) \approx 0$  и

$$tg\alpha \approx \sin\alpha. \quad (12.4)$$

Так как  $\frac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$ , то в силу полученных условий заключаем, что и

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \approx 0. \quad (12.5)$$

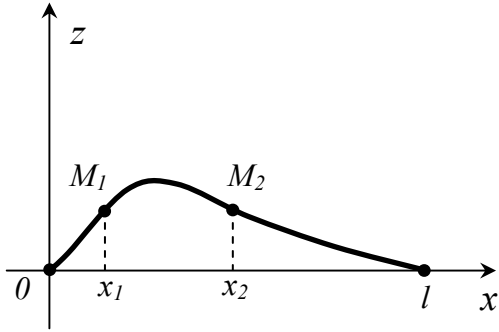


Рис.12.2. Предполагаемая форма колебаний струны

Отсюда сразу следует, что в процессе колебания мы можем пренебречь изменением длины любого участка струны.

Действительно, длина участка  $M_1M_2$  в момент времени  $t$  (рис.12.2) равна

$$M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (12.6)$$

Согласно (12.5) заключаем, что

$$M_1M_2 \approx x_2 - x_1. \quad (12.7)$$

Покажем теперь, что при наших предположениях *величину силы натяжения  $T$  можно считать постоянной, не зависящей ни от точки ее приложения, ни от времени  $t$* . Возьмем для этого какой-либо участок струны  $M_1M_2$  (рис.12.3) в момент времени  $t$  и заменим действие отброшенных участков силами натяжения  $T_1$  и  $T_2$ . Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси  $Oz$  и внешние силы также параллельны этой оси, то сумма проекций сил натяжения на ось  $Ox$  должна равняться нулю:

$$-T_1 \cos\alpha_1 + T_2 \cos\alpha_2 = 0. \quad (12.8)$$

Отсюда в силу (12.3) заключаем, что  $T_1 = T_2$ . Так как точки  $M_1$  и  $M_2$  выбраны произвольно, то это и доказывает, что в данный момент времени силы натяжения во всех точках равны между собой.

Поскольку мы пренебрегаем изменением длины любого участка струны, то в силу закона Гука неизменным остается и натяжение струны.

Итак, мы показали, что в пределах выбранной точности  $T$  есть величина постоянная:

$$T = T_0. \quad (12.9)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения колебаний струны. Выделим бесконечно малый участок струны  $M_1M_2$ , проектирующийся в интервал  $[x, x+dx]$  оси абсцисс (рис.12.4). На него действуют силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$ , заменяющие влияние отброшенных частей струны. Как уже отмечалось

выше, силы  $T_1$  и  $T_2$  направлены по касательным к струне в точках  $M_1$  и  $M_2$  величина этих сил постоянно равна  $T_0$ . Согласно равенству (12.8) сумма

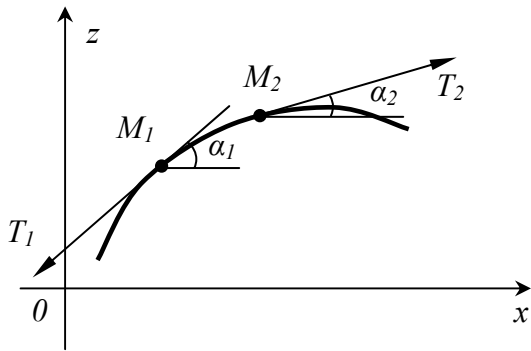


Рис.12.3.

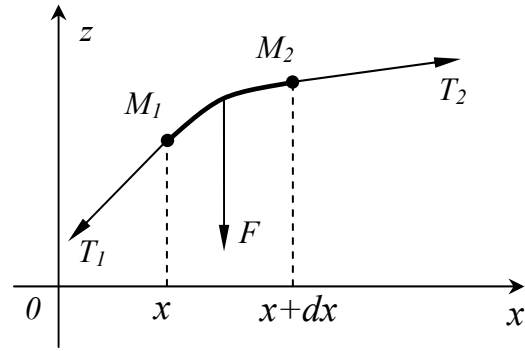


Рис.12.4.

проекций сил  $T_1$  и  $T_2$  на ось  $Ox$  равна нулю. Вычислим сумму проекций этих же сил на ось  $Oz$ :

$$-T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

В силу (12.4) можно, записать, что

$$\sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = z_x(x+dx, t), \quad \sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = z_x'(x, t).$$

Следовательно,

$$T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0 [z_x'(x+dx, t) - z_x'(x, t)] = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx. \quad (12.10)$$

Здесь мы заменили частное приращение производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$  при переходе от аргументов  $(x, t)$  к аргументам  $(x+dx, t)$  ее частным дифференциалом, т. е.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$ .

**Примечание.** Если бы участок струны  $M_1M_2$  располагался, как на рис.12.2, то сумма проекций сил  $T_1$  и  $T_2$  равнялась бы  $T_0(-\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$ ; но теперь  $\sin \alpha_2 = -z_x'(x+dx, t)$ , и в результате мы снова получили бы формулу (12.10).

Равнодействующую внешних сил, приложенных к участку  $M_1M_2$  в момент времени  $t$ , обозначим через  $F$ . Согласно определению функции  $g(x, t)$  и приближенному равенству (12.7) можно считать, что

$$F \approx g(x, t)M_1M_2 \approx g(x, t)dx. \quad (12.11)$$

Направление равнодействующей  $F$  определится знаком функции  $g(x, t)$  (направление  $F$  на рис.12.4 соответствует случаю  $g(x, t) < 0$ ).

После того как найдены все силы, действующие на участок  $M_1M_2$ , применим к нему второй закон Ньютона, согласно которому произведение

массы на ускорение равно сумме всех действующих сил (в силу малости участка  $M_1M_2$  мы рассматриваем его просто как материальную точку).

Так как масса участка  $M_1M_2$  струны равна  $\rho M_1M_2 = \rho dx$ , то, используя формулы (12.10) и (12.11), получим:

$$\rho dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{dx^2} dx + g(x, t) dx.$$

Сократив на  $dx$  и разделив все члены равенства на  $\rho$ , приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t). \quad (12.12)$$

( $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$  – положительная постоянная величина).

В результате мы получили линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (12.12) называется *уравнением колебаний струны*, или *одномерным волновым уравнением*. Это одно из простейших и в то же время важнейших дифференциальных уравнений математической физики. Как мы позже увидим, к нему сводится не только рассматриваемая задача, но и многие другие.

Если  $g(x, t) \equiv 0$ , то уравнение (12.12) называется *однородным*; оно описывает *свободные* колебания струны без воздействия внешних усилий.

Если  $g(x, t)$  не тождественно равно нулю, то уравнение называется *неоднородным*; в этом случае рассматриваются вынужденные колебания струны. Когда на струну действуют только силы тяжести, а натяжение струны  $T_0$  велико, мы вправе пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения струны по сравнению с первым и рассматривать, таким образом, колебания струны как свободные.

Вывод уравнения колебаний струны (12.12) сопровождался целым рядом допущений как механического, так и геометрического порядков. Такое же положение, разумеется, имеет место и при выводе дифференциальных уравнений (как в частных производных, так и обыкновенных) других задач математической физики. Вопрос о том, насколько точно уравнение описывает физический процесс, может быть решен только сравнением результатов, полученных при решении уравнения и экспериментальным путем.

**Начальные и краевые условия.** Как уже отмечалось во введении, дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка имеют бесчисленное множество решений, зависящих от двух произвольных функций. Чтобы определить эти произвольные функции, или, иначе говоря, выделить необходимое нам частное решение, нужно на искомую



функцию  $z(x, t)$  наложить дополнительные условия. С аналогичным явлением читатель встречался уже при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, когда выделение частного решения из общего заключалось в процессе отыскания произвольных постоянных по заданным начальным условиям.

При рассмотрении задачи о колебаниях струны дополнительные условия могут быть двух видов: *начальные* и *краевые* (или *граничные*).

Начальные условия показывают, в каком состоянии находилась струна в момент начала колебания. Удобнее всего считать, что струна начала колебаться в момент времени  $t=0$ . Начальное положение точек струны задается условием

$$z|_{t=0} = f(x), \quad (12.13)$$

а начальная скорость

$$\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = F(x), \quad (12.14)$$

где  $f(x)$  и  $F(x)$  – заданные функции.

Запись  $z|_{t=0}$  означает, что функция  $z(x, t)$  взята при произвольном значении  $x$  и при  $t = 0$ , т.е.  $z|_{t=0} = z(x, 0)$ ; аналогично  $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = z_1'(x, 0)$ .

Такая форма записи постоянно применяется в дальнейшем; так, например,  $z|_{x=0} = z(0, t)$  и т. д.

Условия (12.13) и (12.14) аналогичны начальным условиям в простейшей задаче динамики материальной точки. Там для определения закона движения точки, помимо дифференциального уравнения, нужно знать начальное положение точки и ее начальную скорость.

Иной характер имеют краевые условия. Они показывают, что происходит на концах струны во все время колебаний. В простейшем случае, когда концы струны закреплены (начало струны – в начале координат, а конец – в точке  $(l, 0)$ ), функция  $z(x, t)$  будет подчиняться условиям

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0. \quad (12.15)$$

Такие же точно условия принимаются в курсе сопротивления материалов при изучении изгиба балки, лежащей на двух опорах, под действием статической нагрузки.

Физический смысл того факта, что задание начальных и краевых условий полностью определяет процесс, проще всего проследить для случая свободных колебаний струны.

Пусть, например, струну, закрепленную на концах, как-то оттянули, т.е. задали функцию  $f(x)$  – уравнение начальной формы струны, и отпустили без начальной скорости (это значит, что  $F(x) = 0$ ). Ясно, что этим

самым дальнейший характер колебаний будет полностью определен и мы найдем единственную функцию  $z(x, t)$ , решая однородное уравнение при соответствующих условиях. Можно заставить струну колебаться и иначе, а именно придав точкам струны некоторую начальную скорость. Физически ясно, что и в этом случае дальнейший процесс колебаний будет вполне определен. Придание точкам струны начальной скорости может быть осуществлено при помощи удара по струне (как это имеет место при игре на рояле); первый способ возбуждения струны применяется при игре на щипковых инструментах (например гитаре).

Сформулируем теперь окончательно математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, закрепленной на обоих концах.

Требуется решить однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (12.16)$$

при начальных условиях

$$z|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = F(x) \quad (12.17)$$

и краевых условиях

$$z|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad z|_{x=l} = 0. \quad (12.18)$$

Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на интервале  $[0, l]$  и, как это следует из первого условия (12.17) и условий (12.18),  $f(0) = f(l) = 0$ .

Можно доказать, не опираясь на физические представления, что при некоторых ограничениях, наложенных на функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , эта задача имеет единственное решение.

**Примечание.** Решение поставленной математической задачи будет отражать реальный характер процесса колебаний лишь в том случае, когда начальное смещение и начальные скорости точек струны настолько малы, что соблюдаются все высказанные ранее предположения. Имея в виду в дальнейшем главным образом математическую сторону вопроса, мы при решении конкретных примеров обращать на это внимания не будем.

**Решение уравнения колебаний.** Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах. Задача сводится к решению однородного уравнения струны (12.16) при начальных условиях (12.17) и краевых условиях (12.18).

Применим *метод Фурье* (или, как его еще называют, *метод разделения переменных*) принадлежит к числу важнейших методов решения уравнений математической физики. Мы с ним будем в дальнейшем неоднократно встречаться.

Первая часть метода Фурье состоит в том, что мы *отыскиваем частные решения уравнения* (12.16), удовлетворяющие краевым условиям (12.18), вида

$$z(x, t) = X(x)T(t). \quad (12.19)$$

Каждое из искомым частных решений, таким образом, представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая – только от  $t$ .

Дифференцируя дважды выражение (12.19) по  $x$  и по  $t$ , получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = X''T, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = XT''.$$

(Для сокращения записи мы не пишем аргументов функций  $X(x)$  и  $T(t)$ )

Подставляя выражения для производных в уравнение (12.16), получим

$$XT'' = a^2 X''T,$$

или, деля обе части равенства на произведение  $a^2 XT$ ,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (12.20)$$

Чтобы функция  $z(x, t) = X(x)T(t)$  была решением уравнения (12.16), равенство (12.20) должно соблюдаться при всех значениях  $x$  и  $t$ . Левая часть этого равенства зависит только от переменной  $t$  и не может изменяться при изменении  $x$ . Поэтому, если зафиксировать  $t$  и менять  $x$ , левая часть, а следовательно и правая, будет сохранять постоянное значение. Рассуждая аналогично, установим, что правая часть, а следовательно и левая, не может изменяться и при изменении  $t$ . Это будет справедливо только в том случае, когда обе части равенства (12.20) вообще не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. ко-

гда оба отношения  $\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}$  и  $\frac{X''}{X}$  являются величинами постоянными:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const. \quad (12.21)$$

Отсюда следует, что функции  $T$  и  $X$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$X''(x) - cX(x) = 0 \quad \text{и} \quad T''(t) - ca^2T(t) = 0. \quad (12.22)$$

Поскольку мы ищем частные решения, удовлетворяющие краевым условиям (12.18), то при любом значении  $t$  должны соблюдаться равенства

$$z|_{x=0} = X(0)T(t) = 0, \quad z|_{x=l} = X(l)T(t) = 0.$$

Если бы обращался в нуль второй множитель, то решение  $z(x, t)$  равнялось бы нулю при всех значениях  $x$  и  $t$ . Поэтому, чтобы отыскать решения, не тождественно равные нулю (а только такие нас и интере-

суют), мы должны считать, что  $X(0) = 0$  и  $X(l) = 0$ .

В результате для отыскания функции  $X(x)$  мы пришли к следующей задаче: *найти решения линейного дифференциального уравнения второго порядка*

$$X''(x) - cX(x) = 0 \quad (12.23)$$

при условиях

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (12.24)$$

Разумеется, эта задача при любом  $c$  имеет решение, тождественно равное нулю:  $X(x) \equiv 0$ . Оказывается, однако, что при некоторых значениях постоянной  $c$  эта задача имеет и другие решения.

Заметим, что в этом состоит существенное отличие решения рассматриваемой задачи от решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, когда для определения частного решения задаются значения функции и ее производной в некоторой начальной точке. Как известно, последняя задача имеет единственное решение.

Полагая  $X(x) = e^{rx}$ , составим для уравнения (12.23) характеристическое уравнение  $r^2 - c = 0$  и рассмотрим различные случаи.

1) Пусть  $c = \lambda^2 > 0$ . Тогда корни характеристического уравнения действительны,  $r = \pm\lambda$ , и общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Чтобы соблюдались условия (12.24), мы должны считать

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}.$$

Так как определитель этой однородной системы не равен нулю, то система имеет единственное решение

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Таким образом, в этом случае решений, отличных от тождественного нуля, не существует.

2) Пусть  $c = 0$ . Тогда оба корня характеристического уравнения равны нулю и  $X(x) = C_1 + C_2 x$ .

Подставляя в условия (12.24), получим  $C_1 = 0$ ,  $C_1 + C_2 l = 0$ , т. е. опять-таки  $C_1 = C_2 = 0$ .

3) Пусть, наконец,  $c = -\lambda^2 < 0$ .

Корни характеристического уравнения чисто мнимые,  $r = \pm i\lambda$ , и решение будет содержать тригонометрические функции:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

При  $x = 0$  должно быть  $X(0) = C_1 = 0$ , а при  $x = l$

$$X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Последнее равенство возможно, когда  $C_2 \neq 0$ , именно оно будет удовлетворяться при  $\sin \lambda l = 0$ , т. е. при  $\lambda l = k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ( $k$  не равно нулю, так как по условию  $\lambda \neq 0$ ).

Итак, если

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}, \quad \text{т. е.} \quad c = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

то существуют решения уравнения (12.23), не равные тождественно нулю.

Решение, отвечающее некоторому фиксированному  $k$ , обозначим через  $X_k(x)$ . Оно имеет вид

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (12.25)$$

где  $A_k$  – произвольная постоянная. Мы вправе в дальнейшем придавать  $k$  только положительные значения:  $k = 1, 2, \dots$ , поскольку при отрицательных  $k$  будут получаться решения того же вида (ведь  $A_k$  – произвольные постоянные, которые могут иметь любые знаки).

Как мы видим, каждому значению  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$  соответствует бесчисленное множество решений (12.25), отличающихся друг от друга постоянным множителем.

Величины  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$  называют *собственными числами*, а функции  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  – *собственными функциями* дифференциального уравнения (12.23) с краевыми условиями (12.24).

Напомним, что система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

называется ортогональной в интервале  $[a; b]$ , если интеграл от произведения любых двух различных функций системы равен нулю:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0,$$

если  $n \neq m$ .

Легко установить, что найденные собственные функции ортогональны на интервале  $[0, l]$ . Действительно, при  $n \neq m$ :

$$\int_0^l \sin \frac{\pi mx}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} dx = \frac{l}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(m-n)x}{l}}{m-n} - \frac{\sin \frac{\pi(m+n)x}{l}}{m+n} \right] \Big|_0^l = 0.$$

Теперь обратимся к отысканию функций  $T(t)$ . Каждому собственному числу  $\lambda_k$  будет соответствовать своя функция  $T_k(t)$ , определяемая вторым из уравнений (12.22) (напоминаем, что  $c = -\lambda^2$ ):

$$T_k''(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l}, \quad (12.26)$$

где  $B_k$  и  $D_k$  – произвольные постоянные.

Подставляя выражения (12.25) и (12.26) в формулу (12.19), найдем частные решения уравнения (12.16), удовлетворяющие краевым условиям (12.18). При этом каждому значению  $k = 1, 2, \dots$  будет отвечать решение

$$z_k(x, t) = \left( B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Внося множитель  $A_k$  в скобку и вводя обозначения  $A_k B_k = a_k$  и  $A_k D_k = b_k$  запишем  $z_k(x, t)$  в виде

$$z_k(x, t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (12.27)$$

Решения  $z_k(x, t)$  называются *собственными функциями* задачи; соответствующие им колебания струны называются *собственными колебаниями*.

Физический смысл решений (12.27) мы рассмотрим несколько позже, а сейчас перейдем ко второй части метода Фурье и при помощи собственных функций построим решение, удовлетворяющее начальным условиям (12.17).

Для этого возьмем сумму решений (12.27), которая в силу линейности и однородности уравнения (12.16) также будет являться его решением:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (12.28)$$

Поскольку мы составили бесконечный ряд, то, разумеется, нужно, чтобы он был сходящимся. Предположим также, что его можно дважды почленно дифференцировать. Ясно, что функция  $z(x, t)$  удовлетворяет краевым условиям (12.18), так как им удовлетворяет каждая из функций  $z_k(x, t)$ .

Будем теперь подбирать произвольные постоянные  $a_k$  и  $b_k$  так, чтобы функция (12.18) удовлетворяла начальным условиям. Подставляя значение  $t = 0$ , получим

$$z|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi at}{l} = f(x). \quad (12.29)$$

Дифференцируя ряд (12.28) по  $t$ :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

и, подставляя  $t = 0$ , удовлетворим второму начальному условию:

$$\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x). \quad (12.30)$$

Формулы (12.29) и (12.30) показывают, что величины  $a_k$  и  $\frac{k\pi a}{l} b_k$  являются коэффициентами разложения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$ . Вспоминая формулы для коэффициентов этого разложения, найдем  $a_k$ :

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (12.31)$$

Так как  $\frac{k\pi a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$ , то

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (12.32)$$

Подставляя выражения для коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ , в ряд (12.28), окончательно найдем решение поставленной задачи.

Мы не останавливаемся на условиях, которые надо наложить на функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , чтобы было оправдано сделанное допущение о возможности почленного дифференцирования ряда (12.28). Обычно в физических задачах эти условия соблюдаются. Формула (12.28) показывает, что в моменты времени  $t = \frac{2l}{a}$ ,  $t = \frac{4l}{a}$ , ... струна возвращается в свое первоначальное состояние; это означает, что колебания струны незатухающие и периодически повторяющиеся, с периодом  $T = \frac{2l}{a}$ .

Так происходит потому, что мы пренебрегли силами трения. При учете их получились бы затухающие колебания, аналогично тому, как это имеет место в случае обыкновенных гармонических колебаний точки.

**Стоячие волны.** Прежде чем перейти к примерам, выясним физический смысл собственных функций  $z_k(x, t)$ , определенных формулой (12.27). Перепишем ее в виде

$$z_k(x, t) = F_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \left( \frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right) \quad (12.33)$$

где:  $F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  и  $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$ .

Из формулы (12.33) видно, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же частотой  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$  и фазой  $\varphi_k$ .

Амплитуда колебания зависит от абсциссы  $x$  точки струны и равна

$$F_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

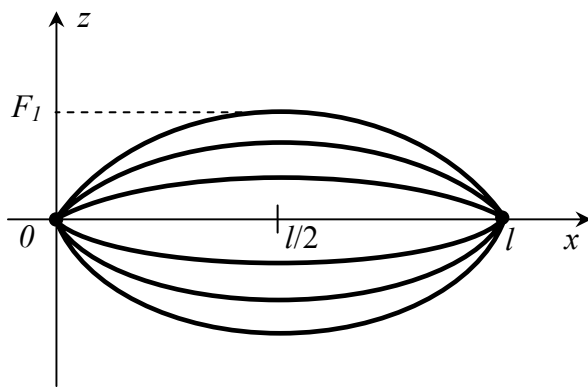


Рис.12.5. Стоячие волны ( $k=1$ )

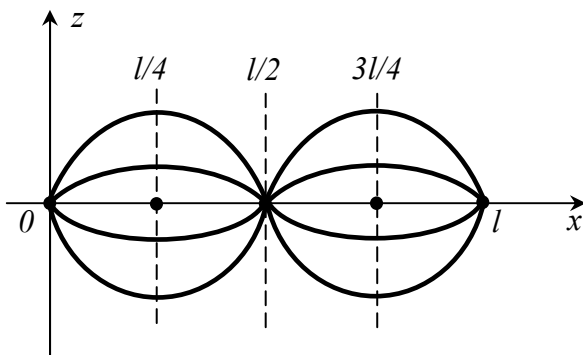


Рис.12.6. Стоячие волны ( $k=2$ )

При таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или иную сторону и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания струны называются *стоячими волнами*.

На рис.12.5 показана форма струны в различные моменты времени для случая  $k=1$ ; при этом неподвижными остаются только концы струны, а наибольшего отклонения  $F_1$  достигает только точка

$x = \frac{l}{2}$ . При  $k=2$  неподвижных точек будет уже три: концы и середина струны  $\left( \sin \frac{2\pi l}{l} = \sin \pi = 0 \right)$ , а

точек, в которых отклонения будут достигать наибольшего значения – две:  $x = \frac{l}{4}$  и  $x = \frac{3l}{4}$  (рис.12.6).

Вообще, стоячая волна  $z_k(x, t)$ , будет иметь столько неподвижных то-



чек, сколько корней имеет уравнение  $\sin \frac{k\pi x}{l} = 0$  в интервале  $[0, l]$ .

Таких точек будет  $k + 1$ ; их абсциссы:  $0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{(k-1)l}{k}, l$ .

Неподвижные точки называются узлами стоячей волны. Посередине между узлами располагаются точки, в которых отклонения достигают максимума; такие точки называются пучностями. Каждая струна может иметь собственные колебания лишь строго определенных частот  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ . Эти частоты называются собственными частотами струны.

Наименьшей собственной частотой будет

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad (12.34)$$

где  $T_0$  – натяжение, а  $\rho$  – плотность струны.

Когда струна колеблется, она издает звук, высота которого возрастает вместе с частотой колебаний. Если струна совершает собственные колебания, то самый низкий тон будет, когда частота равна  $\omega_1$ . Из формулы (12.34) видно, что при этом звук тем выше, чем больше натяжение  $T_0$  и чем короче и легче струна (т.е. чем меньше  $l$  и  $\rho$ ). Остальные тона, соответствующие частотам  $\omega_k$ , называются обертонами или гармониками. Если струна совершает свободные колебания, определяемые начальными условиями, то функция  $z(x, t)$  представляется, как это видно из формулы (12.28), в виде суммы отдельных гармоник. При этом характер звучания струны (тон, сила звука, тембр) будет зависеть от соотношения между амплитудами отдельных гармоник.

Основное назначение решения (12.28) как раз и заключается в том, что оно позволяет произвести сравнение этих амплитуд.

**Пример 12.1.** Найти колебания струны с закрепленными концами  $x=0$  и  $x=l$ , если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальная форма струны задается функцией  $f(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$ , где  $n$  – целое число, а начальные скорости равны нулю.

В этом случае начальное положение струны совпадает с графиком одной из собственных функций и решение особенно просто. Помимо всех коэффициентов  $b_k$ , обращаются в нуль и все  $a_k$  при  $k \neq n$ , так как собственные функции ортогональны.

Найдем коэффициент  $a_n$ :

$$a_n = A \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = A,$$

и, следовательно,

$$z(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi a t}{l}.$$

Таким образом, струна совершает стоячее колебание.

## 12.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА БАЛОК И ПЛАСТИН ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

**Уравнение изгиба балки.** Пусть балка, показанная на рис.12.7а, нагружена статической нагрузкой  $q(x)$ . В соответствии с гипотезой Бернулли, сечения, плоские и нормальные к оси балки, до изгиба остаются плоскими и нормальными (перпендикулярными) к нейтральному слою балки (рис.12.7б) и после изгиба. Под нейтральным понимается слой, в котором при изгибе балки продольные деформации отсутствуют. У однородной балки нейтральный слой совпадает со средним слоем АА (рис.12.7б).

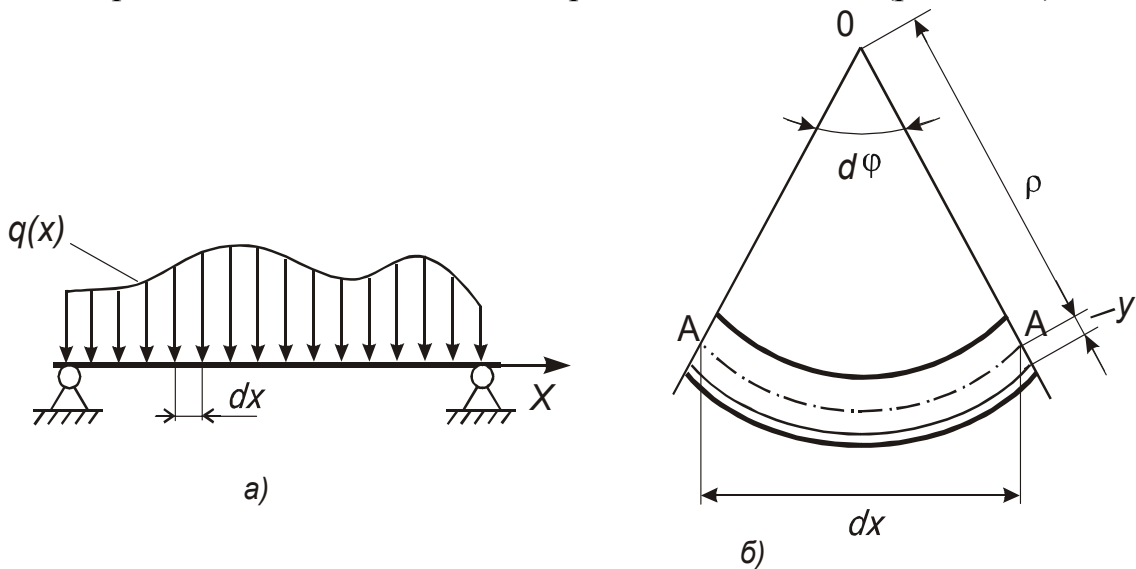


Рис.12.7. Балка при статической нагрузке:

а - схема нагружения; б - изгиб элемента балки:

$\rho$  - радиус изгиба,  $d\varphi$  - угол изгиба, точка О - центр изгиба

Из простых геометрических соображений можем записать

$$dx = \rho \operatorname{tg}(d\varphi).$$

Так как угол  $d\varphi$  малый, то  $\operatorname{tg}(d\varphi) \approx d\varphi$  и  $dx = \rho d\varphi$ .

Последнее выражение можем записать

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (12.35)$$

Величину  $\frac{1}{\rho}$  часто называют *кривизной* балки.

Для слоя, отстоящего от нейтрального слоя на величину  $y$ , можем записать

$$dx + \Delta(dx) = (\rho + y)d\varphi, \quad (12.36)$$

где  $\Delta(dx)$  – продольная деформация рассматриваемого слоя.

Вычитаем из (12.36) уравнение (12.35):

$$dx + \Delta(dx) - dx = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi.$$

Получим

$$\Delta(dx) = yd\varphi.$$

Относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = y \frac{d\varphi}{dx} = \frac{y}{\rho},$$

а нормальное напряжение

$$\sigma = E y / \rho.$$

Умножим левую и правую части последнего выражения на  $dF \cdot y$ , где  $dF$  – бесконечно малый элемент площади поперечного сечения балки, и проинтегрируем по площади всего поперечного сечения балки. Получим

$$\int_{(F)} \sigma dF y = \frac{E}{\rho} \int_{(F)} y^2 dF. \quad (12.37)$$

В правой части этого уравнения  $\int_{(F)} y^2 dF = J$  – осевой момент инерции поперечного сечения, в левой части  $\sigma dF$  – определяет продольную силу.

Так как  $\sigma dF = dP$ , выражение (12.37) приобретает вид

$$\int_{(F)} y dP = \frac{EJ}{\rho}. \quad (12.38)$$

Очевидно, что  $\int_{(F)} y dP = M$ , то есть равно изгибающему моменту, действующему в сечении балки.

Следовательно, из (12.38) получим выражение  $M = \frac{EJ}{\rho}$ , которое преобразуем к виду

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (12.39)$$

Произведение  $EJ$  называется *жесткостью балки* при изгибе, а уравнение (12.39) называется *основным уравнением изгиба балки*.

Из курса математики известно выражение для кривизны

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{W''}{(1+W'^2)^{3/2}},$$

где  $W' = \frac{dW}{dx}$  – первая производная от прогиба.

При малых изгибах  $W' \ll 1$  и  $\frac{1}{\rho} = W''$ .

Подставляя последнее выражение в (12.39), получим

$$EJW'' = M. \quad (12.40)$$

Воспользуемся известным из курса сопротивления материалов *методом сечения*, заключающемся в том, что если от системы, находящейся в равновесии, отбросить какую-то часть, то система останется в равновесии, если действие отброшенной части заменить эквивалентными силами.

Поэтому элемент  $dx$  будет находиться в равновесии, если на него будут действовать силы, показанные на рис.12.8.

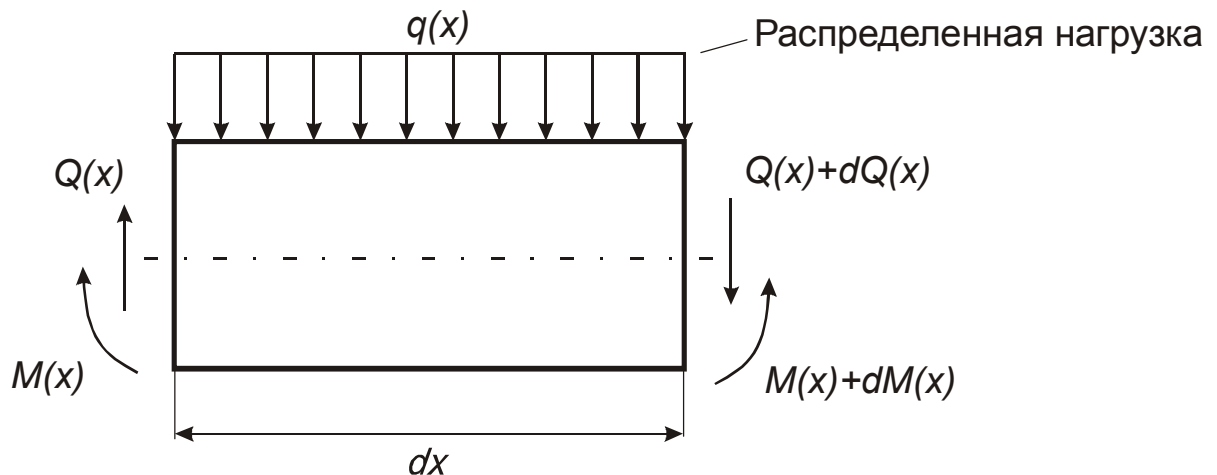


Рис.12.8. Малый элемент балки  $dx$ :  $Q$  – сила, действующая в поперечном сечении;  $M(x)$  – изгибающий момент.

Запишем уравнение равновесия сил на вертикальную ось, считая силы, направленные вверх, положительными, а вниз – отрицательными:

$$Q - (Q + dQ) - q(x)dx = 0.$$

Получим

$$-dQ - q(x)dx = 0,$$

или

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x). \quad (12.41)$$

Для изгибающих моментов, считая их положительными, если они направлены по часовой стрелке, и отрицательными – если против, запишем

$$M + Qdx - (M + dM) - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0,$$

или после преобразования:

$$Qdx - dM - q(x) \frac{dx^2}{2} = 0. \quad (12.42)$$

Из уравнения (12.41) найдем:

$$-q(x)dx = dQ.$$

Подставляя в (12.42), получим

$$Qdx - dM - dQ \frac{dx}{2} = 0.$$

Так как  $Q \gg dQ$ , то  $Qdx \gg dQ \frac{dx}{2}$  и им можно пренебречь.

Тогда 
$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

С учетом этого выражения и выражения (12.41) найдем

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -q(x). \quad (12.43)$$

Учитывая (12.40):

$$EJW^{IV} = M''.$$

На основе этого выражения и (12.43) получим

$$EJW^{IV} = -q(x)$$

или

$$EJW^{IV} + q(x) = 0. \quad (12.44)$$

*Это уравнение упругой линии бруса при изгибе.*

В соответствии с принципом Д'Аламбера, при решении динамических задач статические силы заменяются динамическими.

При рассмотрении свободных колебаний балки статическая нагрузка  $q(x)$  заменяется силой инерции.

Получим уравнение

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0, \quad (12.45)$$

называемое *уравнением свободных колебаний балки*,

где  $z = z(x, t)$  – функция как координаты  $x$ , так и времени  $t$ ,

$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$  – сила инерции,

$EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$  – сила упругости балки при изгибе.

**Дифференциальное уравнение изгиба пластины при статической нагрузке [12].** Будем считать, что статическая нагрузка каким-то образом распределена по поверхности пластинки и направлена нормально к ней и, кроме того, имеются силы и пары сил, приложенные по контуру пластинки. Двумя парами плоскостей, параллельных  $zx$  и  $zy$ , выделим из пластинки бесконечно малый элемент (рис.12.9) и составим для него дифференциальные уравнения равновесия. Усилия, приходящиеся на какую-либо из боковых граней выделенного элемента, всегда можно привести к силе, приложенной в центре грани, и к паре сил. Для дальнейших выводов удобно разложить и силу, и пару сил на составляющие, параллельные координатным осям. Обозначения для этих составляющих установим на основании подробного рассмотрения усилий, действующих по граням элемента, совпадающим с плоскостями  $zy$  и  $zx$ . Возьмем первую из этих граней.

По ней будут действовать нормальные напряжения  $\sigma_x$  и касательные напряжения  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ .

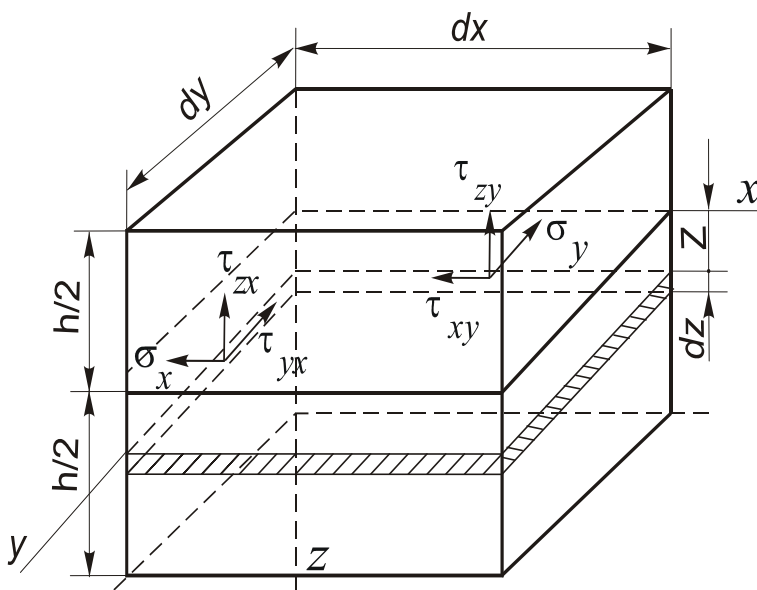


Рис. 12.9. Напряжения на гранях элемента

Совокупность всех усилий, соответствующих напряжениям  $\sigma_x$ , дает нам составляющую равнодействующей силы в направлении оси  $x$ . Две другие составляющие будут соответствовать напряжениям  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ . Введем для этих составляющих такие обозначения:

$$T_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz ;$$

$$S_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dz ; \quad N_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zx} dz .$$

Следовательно,  $T_1$  представляет собой отнесенную к единице длины силу, растягивающую пластинку в направлении оси  $x$ . Величины  $S_1$  и  $N_1$  – отнесенные к единице длины касательные силы. Из них  $S_1$  стремится вызвать сдвиг в срединной плоскости пластинки, сила  $N_1$  направлена перпендикулярно к пластинке, в дальнейшем будем называть ее перерезывающей силой. Положительные направления силы  $T_1$ ,  $S_1$  и  $N_1$ , соответственно принятому ранее обозначению для напряжений, представлены стрелками на рис.12.10 (для упрощения на рисунке сохранено лишь пересечение выделенного из пластинки элемента со срединной плоскостью). Совершенно таким же способом вводим обозначения для сил  $T_2$ ,  $S_2$  и  $N_2$ , соответствующих грани элемента, совпадающей с плоскостью  $zx$ :

$$T_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz; \quad S_2 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz; \quad N_1 dx = dx \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zy} dz.$$

Принимая во внимание равенство  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ , заключаем, что  $S_1 = S_2$ . Направления  $N_2$ ,  $T_2$  и  $S_2$  даны на рис.12.10. Для двух других боковых граней выделенного элемента получим усилия, если к величинам  $N_1$ , ...,  $S_2$  присоединим бесконечно малые приращения, соответствующие изменениям координат на величины  $dx$  и  $dy$ . Таким образом, вместо  $N_1, \dots, S_2$  будем иметь величины

$$N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx; \quad S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy.$$

Перейдем теперь к составлению моментов усилий, приложенных к граням выделенного элемента. Для грани, совпадающей с плоскостью  $zy$ , введем такие обозначения:

$$H_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz; \quad M_1 dy = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz.$$

Таким образом,  $H_1$  и  $M_1$  представляют собой отнесенные к единице длины моменты приложенных к грани усилий относительно осей, параллельных  $x$  и  $y_0$ .  $M_1$  является изгибающим, а  $H_1$  – скручивающим моментом. Направления моментов, принятые за положительные, указаны стрелками (рис. 12.11). Что касается момента тех же усилий относительно оси, параллельной оси  $z$ , то он при бесконечно малом размере  $dy$  представляет собой бесконечно малую величину высшего порядка, которой можно пренебречь.

Для грани, совпадающей с плоскостью  $zx$ , соответствующие моменты обозначим так:

$$M_2 dx = dy \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz; \quad H_2 dx = -dx \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -H_1 dx.$$

Моменты для двух других граней элемента получим, если к величинам  $M_1, \dots, H_2$  присоединим соответствующие приращения.

Кроме сил, приложенных по боковым граням элемента, на элемент будет действовать еще нагрузка, изгибающая пластинку. Предположим,

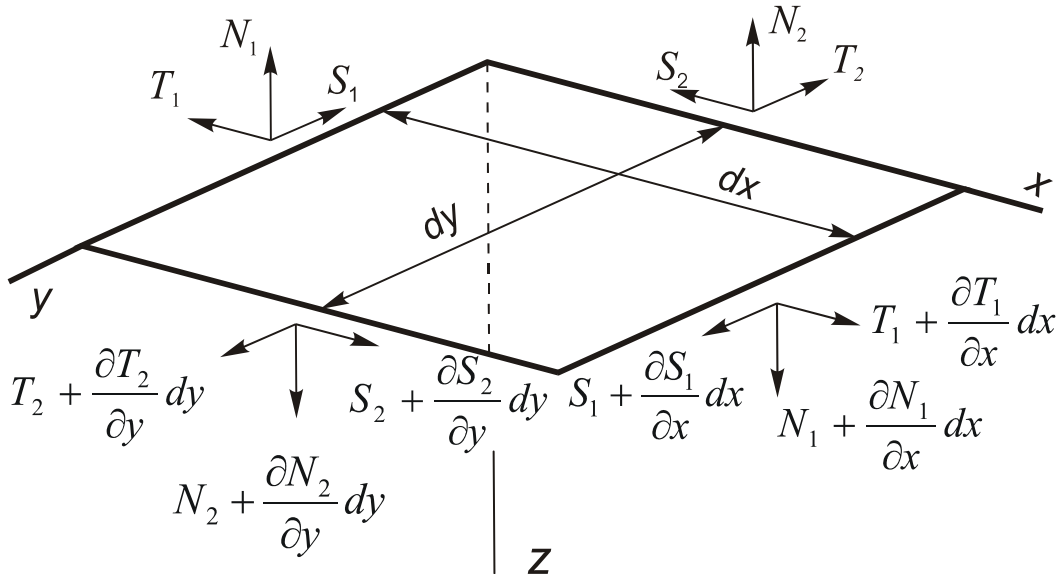


Рис. 12.10. Силы на гранях элемента

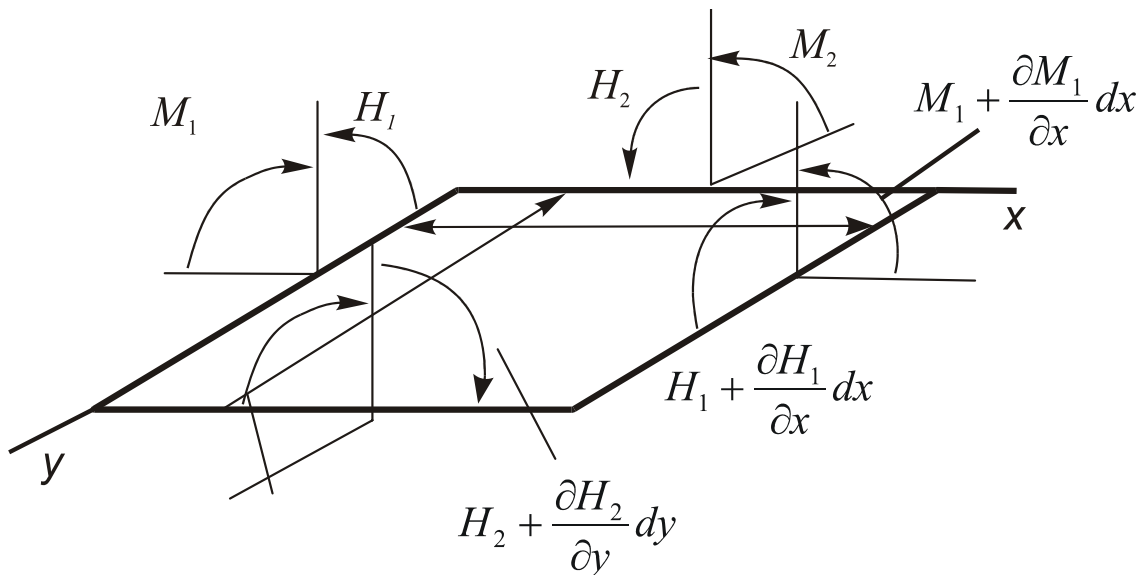


Рис. 12.11. Моменты на гранях элемента



что нагрузка является нормальной к поверхности пластинки, интенсивность нагрузки обозначим через  $q$ . В таком случае на выделенный элемент будет действовать внешняя сила  $q dx dy$ , параллельная оси  $z$ .

Составим теперь уравнения равновесия для выделенного элемента. Проектируя все приложенные к элементу силы на направления координатных осей, на основании принятых обозначений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + q &= 0. \end{aligned} \quad (12.46)$$

Составляя моменты тех же сил относительно осей  $y$  и  $x$  и отбрасывая малые величины высших порядков, приходим к таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial H_2}{\partial y} - N_1 &= 0; \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial x} - N_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.47)$$

Первые два уравнения системы (12.46) связывают между собой силы, лежащие в срединной плоскости пластинки. Соответствующие им деформации не сопровождаются искривлением срединной плоскости пластинки. Изгиб пластинки определяется величинами, входящими в третье из уравнений (12.46) и в уравнения (12.47).

Исключив из них величины  $N_1$  и  $N_2$ , придем к дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q. \quad (12.48)$$

Уравнение это, полученное на основании условий равновесия выделенного нами элемента, включает три неизвестные величины  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_1$ , и нам для дальнейшего решения задачи необходимо установить между этими величинами дополнительные зависимости, что возможно сделать, если обратиться к деформациям пластинки. Связь между моментами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_1$  и прогибами пластинки  $w$  установим приближенным способом, положив в основу наших дальнейших выводов гипотезу, аналогичную *гипотезе плоских сечений*, на которой построена приближенная теория изгиба балок.

Эта гипотеза предполагает, что плоские сечения пластинки, парал-

лельные плоскостям  $zx$  и  $zy$ , остаются плоскими и перпендикулярными к срединной поверхности искривленной пластинки.

Обозначим через  $M_1 dy$  и  $M_2 dx$  моменты, соответствующие напряжениям  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , действующим по граням выделенного элемента, тогда

$$M_1 dy = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz dy; \quad M_2 dx = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz dx \quad (12.49)$$

$M_1$  представляет собой изгибающий момент, приходящийся на единицу длины сторон пластинки, параллельных оси  $y$ .  $M_2$  представляет соответствующую величину для сторон, параллельных оси  $x$ . Установим связь между моментами  $M_1$  и  $M_2$ , с одной стороны, и радиусами кривизны  $\rho_x$  и  $\rho_y$ , соответствующими сечениям срединной поверхности пластинки плоскостями, параллельными  $zx$  и  $zy$ , с другой. Для этого выделим из элемента бесконечно тонкий слой, параллельный срединной плоскости и удаленный от нее на расстояние  $z$ . Напряжения и деформации этого элемента выразим через радиусы  $\rho_x$  и  $\rho_y$ . Так как грани нашего элемента при чистом изгибе остаются плоскими, то для относительных удлинений выделенного слоя получим известные выражения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{z}{\rho_x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{z}{\rho_y}.$$

Соответствующие значения напряжений напишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{EZ}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{EZ}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right). \end{aligned} \quad (12.50)$$

Вставляя эти выражения в (12.49), получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right); \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right). \end{aligned} \quad (12.51)$$

Величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (12.52)$$

определяет жесткость балки-полоски при изгибе пластинки по цилиндри-

ческой поверхности и называется *цилиндрической жесткостью пластинки*.

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с весьма малыми прогибами пластинки. В таком случае величины  $1/\rho_x$  и  $1/\rho_y$  могут быть заменены

их приближенными выражениями  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Формулы (12.51) приведем к виду

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (12.53)$$

Для вычисления момента  $H_1$  необходимо составить выражение для сдвигающих напряжений  $\tau_{xy}$ .

Деформация сдвига  $\epsilon_{xy}$  определяется формулой

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (12.54)$$

где  $u$  и  $v$  — перемещения рассматриваемой точки пластинки по направлениям, параллельным осям  $x$  и  $y$ .

Перемещения эти легко находятся, если воспользоваться приведенной выше гипотезой. Предположим, что  $AB$  (рис.12.12) представляет сечение срединной поверхности изогнутой пластинки плоскостью, параллельной  $zx$ . Какой-либо линейный элемент пластинки, перпендикулярный к срединной плоскости  $xy$ , после изгиба займет наклонное положение  $mn$ , нормальное к искривленной срединной поверхности. Так как срединная поверхность, по на-

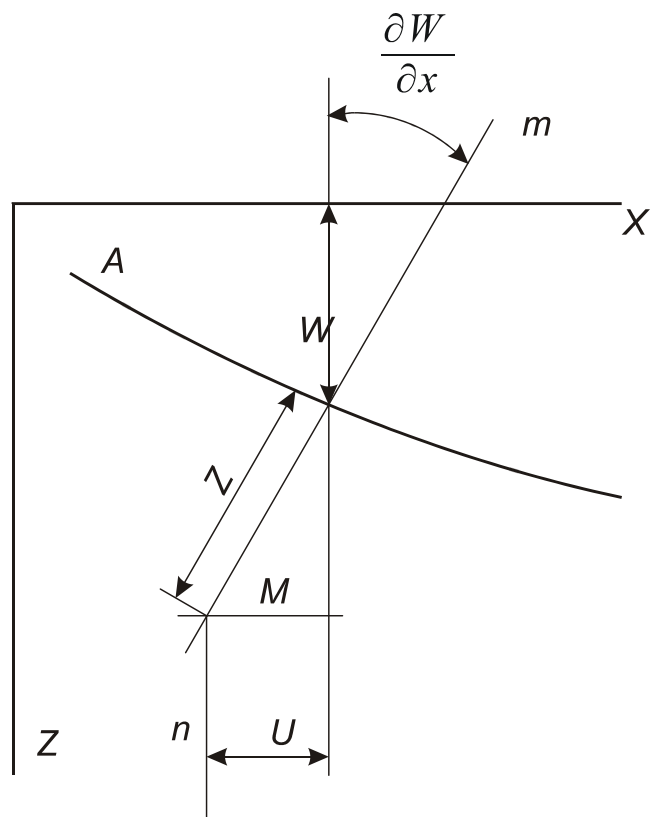


Рис. 12.12.

шему предположению, не испытывает никаких растяжений и прогибы пластинки весьма малы, то перемещение какой-либо точки  $M$ , взятой на линейном элементе  $mn$ , по направлению оси  $x$  будет зависеть лишь от поворота  $mn$  на угол  $\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}$ . Следовательно,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Таким же образом найдем

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Для сдвига  $\varepsilon_{xy}$  и сдвигающих напряжений  $\tau_{xy}$  получаем

$$\varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad X_y = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Следовательно

$$H_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (12.55)$$

Подставив найденные выражения для моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_3$  в уравнение (12.48), придем к такому дифференциальному уравнению для изогнутой поверхности пластинки:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (12.56)$$

Уравнение это играет в теории изгиба пластинок такую же роль, что и уравнение (12.45) при исследовании изгиба балок. Если для какого-либо случая удастся найти решение уравнения (12.56), то при помощи формул (12.53) и (12.55) находятся моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_1$  и соответствующие им напряжения.

Перерезывающие силы  $N_1$  и  $N_2$  найдутся из уравнений (12.47). Подставляя в них значения  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H_1$ , получаем:

$$\begin{aligned} N_1 &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ N_2 &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad (12.57)$$

### 12.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ [13]

Расчетные модели в виде рам и арок, показанные на рис.12.13, являются статически неопределимыми системами, т.е. такими, для определения напряжений в которых недостаточно одних уравнений статического равновесия.

Как известно из курса "Прикладная механика", расчет статически неопределимой системы начинается с определения *степени статической неопределимости*, которая равна числу "лишних" связей, удаление которых превращает статически неопределимую систему в статически определимую и геометрически неизменяемую систему.

Показанная на рис.12.13 уголковая рама трижды статически неопределима, так как для преобразования ее в статически определимую необходимо, например, ликвидировать жесткое защемление в точке  $C$ , что эквивалентно устранению трех лишних внутренних связей. Эти внутренние связи представляют продольную  $X_1$  и поперечную  $X_2$  силы, а также изгибающий момент  $X_3$ . Они уже не могут быть найдены при помощи одних уравнений статики. Для расчета таких систем к уравнениям статики (уравнениям равновесия) необходимо добавлять уравнения деформаций. Для связи усилий, входящих в уравнения статики, с деформациями, входящими в уравнения деформаций, применяется закон Гука. Уравнениям статического равновесия, деформаций и закон Гука составляют полную систему уравнений, необходимых для определения неизвестных. В зависимости от характера неизвестных различают два метода расчета статически неопределимых систем: метод сил, когда в качестве неизвестных выбираются

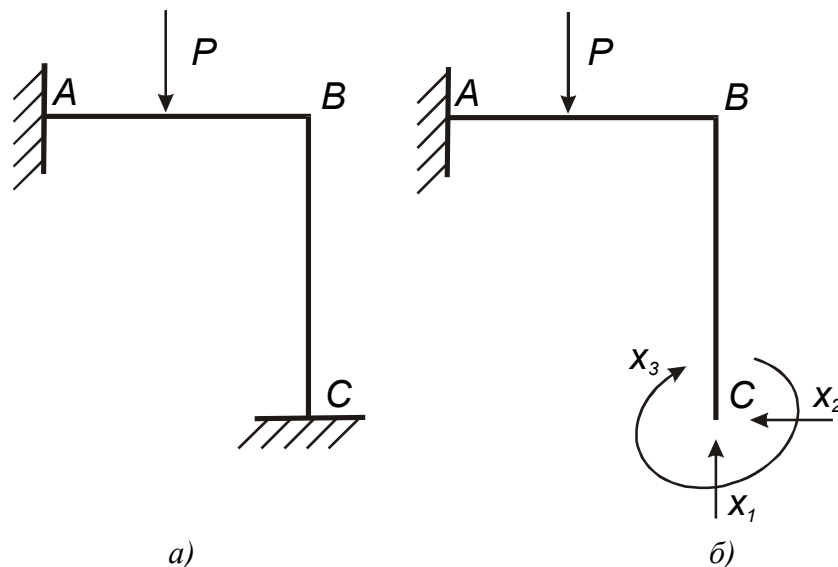


Рис.12.13. Угловая рама (а) и её эквивалентная система (б)

усилия, и метод перемещений, когда неизвестны перемещения. Методы

сил и перемещений подробно описаны в курсах сопротивления материалов [13].

Степень статической неопределимости систем  $n$  легко находится при помощи формулы:

$$n = 3m - \text{ш}, \quad (12.58)$$

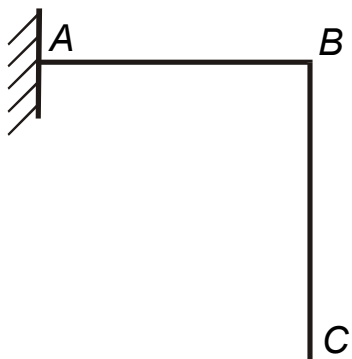


Рис.12.14. Основная система

где  $m$  – число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений, Ш – число одиночных шарниров. Для рамы, показанной на рис.12.14, число замкнутых контуров равно единице, шарниров – нулю. Следовательно

$$n = 3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Заметим, что при расчете стержневых систем часто приходится иметь дело с *внецентренным* растяжением или сжатием, когда в поперечном сечении стержня одновременно действуют продольная растягивающая или сжимающая сила  $N$  и изгибающие моменты  $M$ . В общем случае напряжение в сечении стержня

$$\sigma_{\pm} = \sigma_N \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_y} \pm \sigma_{M_z}. \quad (12.59)$$

В случае изгиба только в одной плоскости, как показано на рис.12.15 в сечении  $AA$ ,

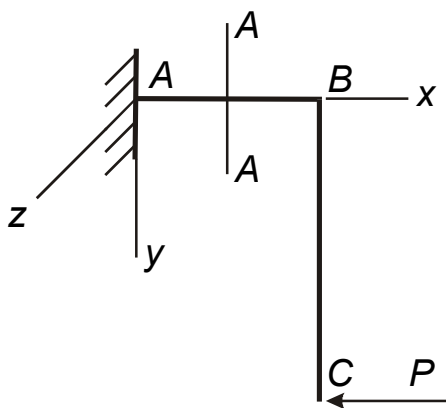


Рис.12.15. Внецентровая деформация

$$\sigma_{AA} = \sigma_N \pm \sigma_{M_z} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_z y}{I_z}, \quad (12.60)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня  $AB$ ,  
 $M_z$  – изгибающий момент,  
 $I_z$  – момент инерции сечения,  
 $y$  – расстояние от нейтральной линии стержня до точки сечения, в которой определяется напряжение.

**Определение напряжений методом сил.** Расчет начинают с установления степени статической неопределимости системы (определения числа лишних неизвестных) по формуле (12.58). Затем необходимо пре-

вернуть заданную систему (рис.12.13,а) в статически определимую путем удаления лишних связей. Полученная таким образом статически определимая система называется *основной системой* (рис. 12.14). Она не должна быть геометрически изменяемой.

Взамен отброшенных связей к основной системе прикладывают силы, заменяющие действие лишних связей (рис. 12.16). Получаемая таким образом система называется *эквивалентной системой*. Следует заметить, что выбор основной и эквивалентной систем не однозначен. Например, вместо эквивалентных систем, показанных на рис.12.13,б можно использовать системы, показанные на рис. 12.16. Лишние неизвестные – опорные реакции, усилия в разрезах и т.д. находят из условия, что перемещения заданной и эквивалентной систем должны быть равны. Следовательно, для точки С должны выполняться условия:

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = 0,$$

где  $\Delta_i$  – перемещение основной системы от сил  $X_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и силы  $P$  по

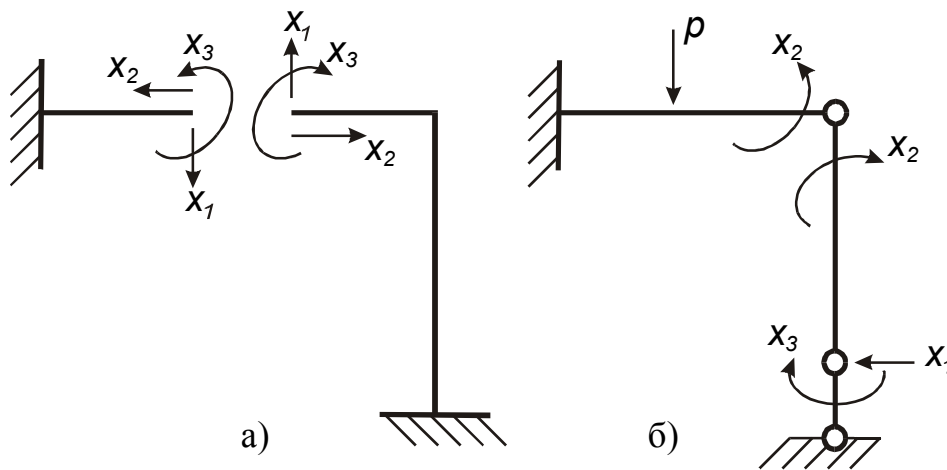


Рис. 12.16. Варианты эквивалентных систем

направлению силы  $X_i$ .

Используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{2P} = 0; \\ \Delta_3 &= \Delta_{31} + \Delta_{32} + \Delta_{33} + \Delta_{3P} = 0, \end{aligned} \quad (12.61)$$

где  $\Delta_{ij}$ ,  $\Delta_{iP}$  – перемещения, показанные на рис.12.17. Видно, например, что  $\Delta_{13}$  – перемещение по направлению силы  $X_1$ , вызванное действием силы  $X_3$ ;  $\Delta_{2P}$  – перемещение по направлению силы  $X_2$  от действия внешней силы  $P$ .

Представляя

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} x_j,$$

где  $\delta_{ij}$  – перемещение в направлении силы  $X_i$  от действия силы  $X_j=1$  (еди-

ничное перемещение), систему уравнений (12.61) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (12.62)$$

Если число степеней свободы  $n$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta_{11}\bar{X}_{11} + \delta_{12}\bar{X}_{21} + \dots + \delta_{1n}\bar{X}_{n1} + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}\bar{X}_{11} + \delta_{22}\bar{X}_{21} + \dots + \delta_{2n}\bar{X}_{n1} + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{n1}\bar{X}_{11} + \delta_{n2}\bar{X}_{21} + \dots + \delta_{nn}\bar{X}_{n1} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \quad (12.63)$$

Уравнения (12.62), (12.63) называются *каноническими уравнениями* метода сил. Такое название обусловлено тем, что неизвестными в этих

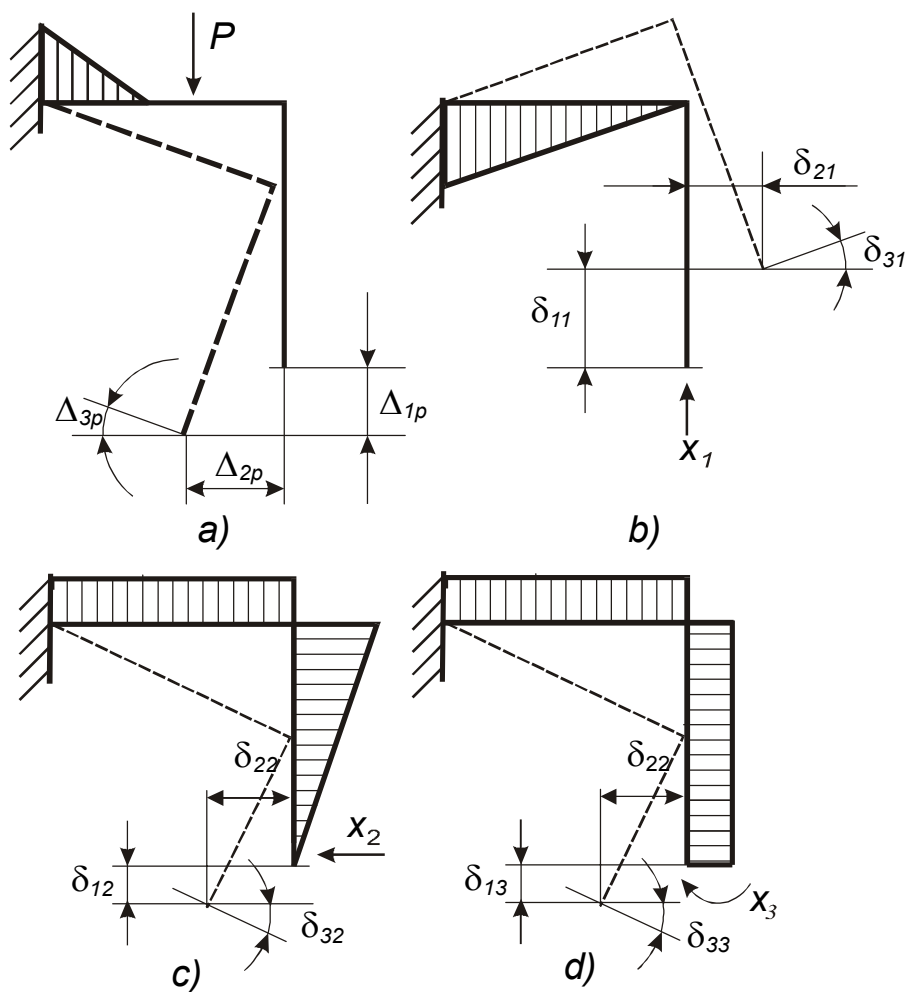


Рис. 12.17. Перемещения от действия сил

уравнениях являются силы (опорные реакции, реакции связей и т.д.), а сами уравнения составляются по определенному правилу (канону). Число уравнений равно числу неизвестных сил, т.е. степени статической неопределимости системы.



Очевидно, что неизвестные силы можно найти, решая систему уравнений (12.63), если известны единичные перемещения  $\delta_{ij}$ . Эти перемещения обычно находят по формуле Мора, которая в общем случае имеет вид [3; 13]:

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_j}{EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_j}{EF_0} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{Q}_m Q_n}{GF} dx,$$

где:  $E, G$  – модули продольной упругости и сдвига;

$F$  – площадь поперечного сечения;

$n$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению;

$\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$  – изгибающий момент, продольная и поперечная силы, вызванные единичной силой  $\bar{x}$ .

При расчете плоских рам, когда учитывалась только деформация изгиба, главные ( $\delta_{ii}$ ) и побочные ( $\delta_{ij}$ ) коэффициенты определяются по упрощенным формулам

$$\delta_{ii} = \sum \int_{(s)} \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}; \quad (12.64)$$

$$\delta_{ij} = \sum \int_{(s)} \frac{\bar{M}_i M_j ds}{EJ}. \quad (12.65)$$

Заметим, что объем вычислений существенно уменьшается, так как в соответствии с теоремой о взаимности перемещений

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Интегралы вида  $\int \bar{M}_i M_j dx$ , входящие в формулы (12.64), (12.65) для единичных перемещений, в случае стержней постоянной жесткости можно вычислять, применяя правило

Верещагина, в соответствии с которым

$$\int_0^l \bar{M}_i M_j dx = \Omega_n y_c;$$

где:  $\Omega_n$  – площадь одной из эпюр напряжений,

$y_c$  – ордината другой, обязательно прямолинейной эпюры под центром тяжести площади первой эпюры (рис.12.18).

Для ускорения расчетов по правилу Верещагина можно

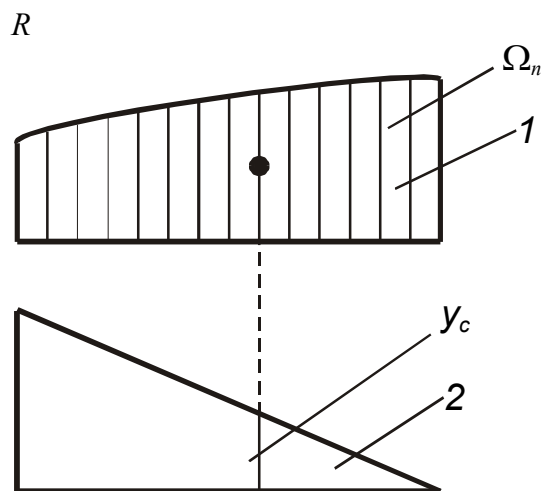


Рис.

использовать таблицу 12.1. Более обширные таблицы приведены в справочнике [3].

После определения единичных перемещений, решая систему уравнений (12.63), можно найти все неизвестные силы  $x_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$ .

Для построения окончательной (суммарной) эпюры моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на значение соответствующей реакции  $X_i$ . Складывая полученные эпюры с грузовой эпюрой, получим окончательную эпюру моментов.

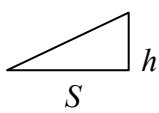
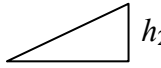

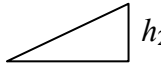
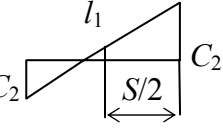
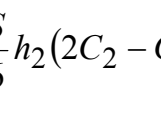
Если требуется определить изгибающие моменты только в некоторых характерных точках, например под нагрузкой или в узлах системы, целесообразно пользоваться формулой

$$M = M_p + \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n. \quad (12.66)$$

Используя затем формулу (12.59) или (12.60) можно рассчитать напряжения в интересующих нас точках рамы.

Таблица 12.1.

Выражения интегралов  $\int M_i M_j ds$  (основание всех площадей  $S$ )

№ п.п	$M_j$	$M_i$	$\int M_i M_j ds$	$\int M_i M_j ds$
1			$\frac{Shh_2}{3}$	$\frac{Sh_1}{6}(2C_4 - C_3)$
2			$\frac{Sh_2^2}{6}$	$\frac{S}{6}h_2(C_4 - 2C_3)$
3			$\frac{S}{6}h_2(2C_2 - C_1)$	$\frac{5}{6} \begin{bmatrix} 2(C_1 C_3 + C_2 C_4) \\ -C_2 C_3 - C_1 C_4 \end{bmatrix}$

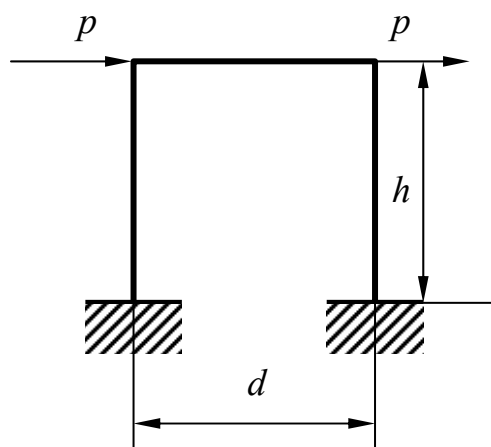


Рис. 12.19. Заданная система

**Пример 12.1.** Построить эпюру изгибающих моментов для рамы на рис. 12.19.

**Решение:** Система трижды статически неопределима. Сравниваем три основные системы, приведенные на рис. 12.20. Каждая из них статически определима и геометрически не изменяема. Необходимо выяснить, применение какой системы связано с минимальным количеством подсчетов. С этой точки зрения лучшими будут те, в которых использована симметрия сооружения. Поэтому из сравнения сразу же выпадают несимметричная система, приведенная на рис. 12.20, а, и система, показанная на рис. 12.20, б, в которой несиммет-

ричны неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ . Наилучшей является система по рис. 12.20, в, для которой, кроме того, проще выполнить построение эпюр; ее и принимаем для дальнейшего расчета. Эпюры изгибающих моментов для выбранной системы приведены на рис. 12.21.

Составим канонические уравнения, выражающие условия отсутствия взаимных перемещений сечений в разрезе, сделанном посередине ригеля рамы:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Прежде всего замечаем, что все эпюры (рис. 12.21) можно разделить на две категории: симметричные  $\bar{M}_1, \bar{M}_3$  и обратно симметричные  $\bar{M}_2, \bar{M}_p$ . У последних ординаты левых и правых частей по числовой величине равны, но расположены с разных сторон рамы. Легко видеть, что все перемещения, при определении которых симметричные эпюры умножаются на обратно симметричные, равны нулю.

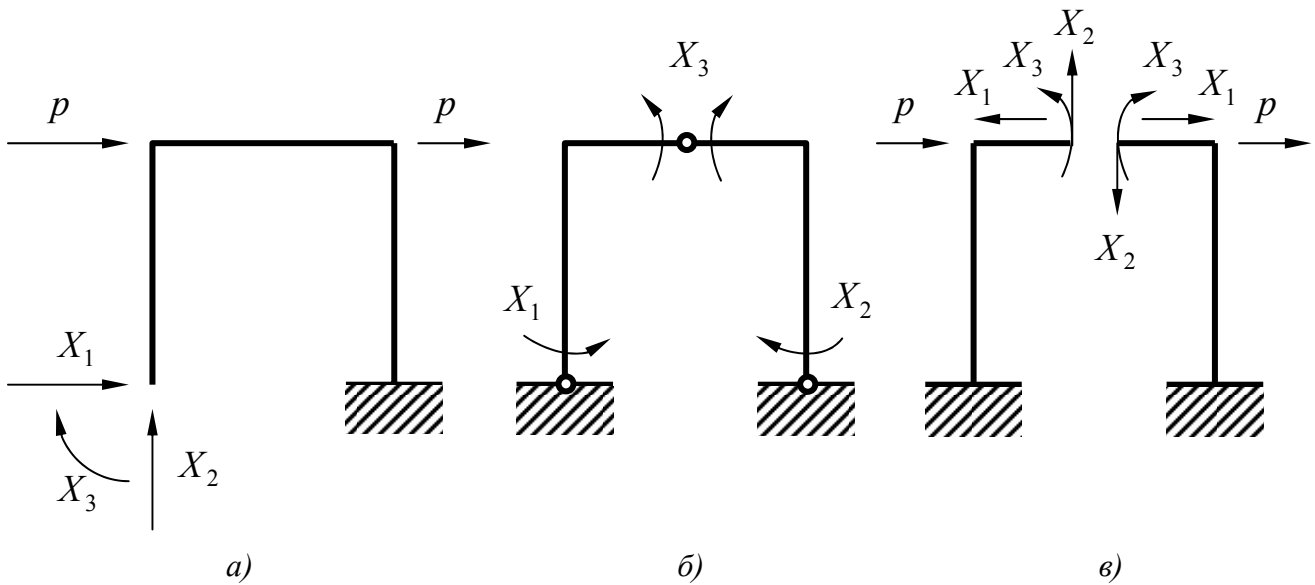


Рис. 12.20. Варианты основных систем

В данном примере равны нулю следующие перемещения:

$$\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{23}, \delta_{32}, \Delta_{1p} \text{ и } \Delta_{3p}.$$

Поэтому система канонических уравнений принимает вид:

$$X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} = 0; \quad X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} = 0; \quad X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Первые два уравнения дадут

$$X_1 = 0 \text{ и } X_3 = 0$$

Остается решить третье уравнение; оно дает

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}.$$

Вычислим перемещения  $\Delta_{2p}$  и  $\delta_{22}$ :

$$\Delta_{2p} = -\frac{2Ph^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{Ph^2a}{2EJ};$$

$$\delta_{22} = \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot h \cdot \frac{a}{2} \right] \cdot \frac{2}{EJ} = \frac{a^2}{12EJ} \cdot (a + 6h).$$

Следовательно,

$$X_2 = 6Ph^2 / [a(a + 6h)].$$

Остается эюру  $\bar{M}_2$  умножить на  $X_2$  и результат сложить с грузовой эюрой. Окончательная эюра изгибающих моментов изображена на рис. 12.22.

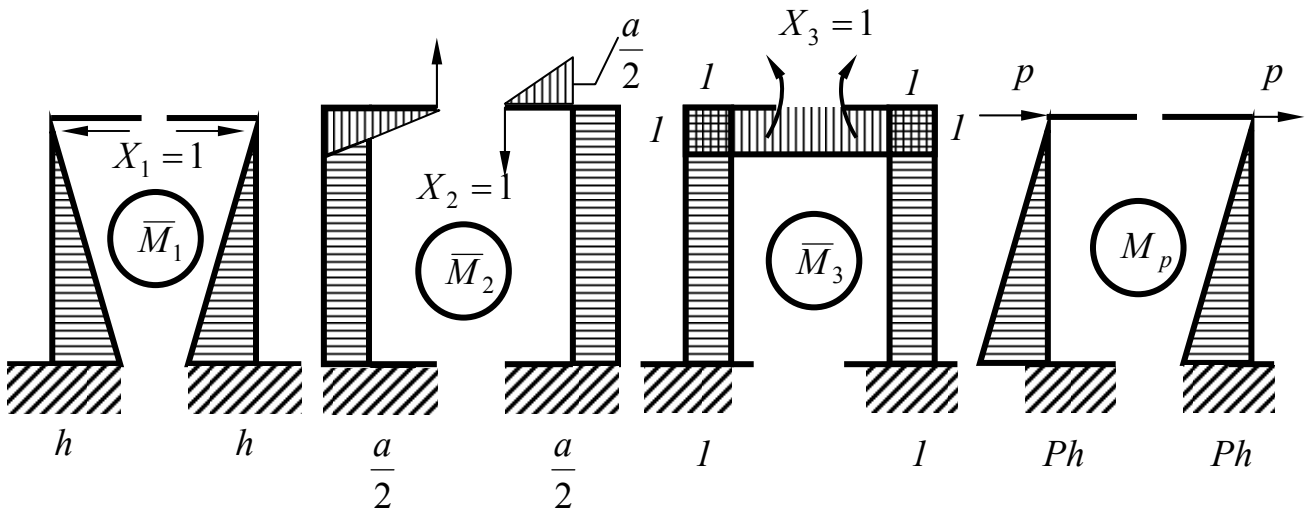


Рис. 12.21

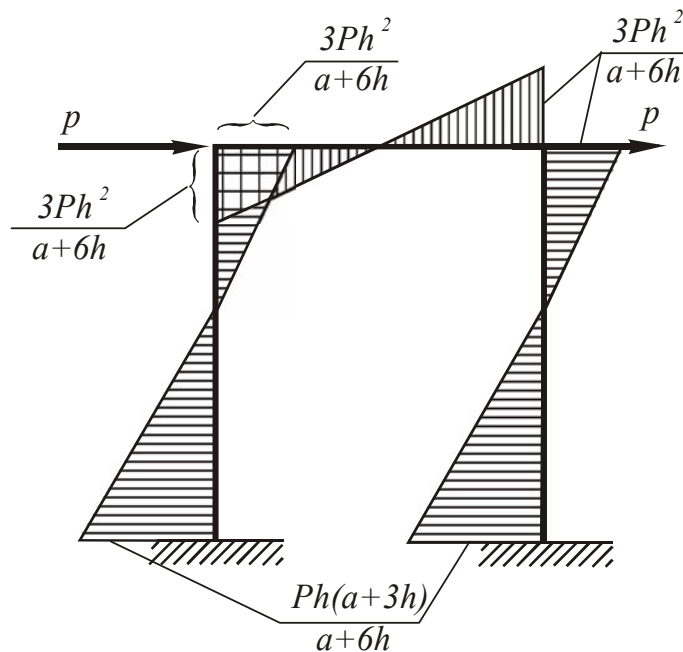


Рис. 12.22. Окончательная (суммарная) эюра М.

## Контрольные вопросы

1. Какие принимаются допущения при выводе уравнения свободных колебаний струны?
2. Напишите уравнение свободных колебаний струны и объясните его.
3. Что понимается под начальными и краевыми условиями?
4. Расскажите о методе Фурье.
5. Приведите вывод уравнения свободных колебаний струны.
6. Какие частоты называются собственными частотами струны?
7. Приведите вывод уравнения свободных колебаний балки.
8. Покажите на рисунке напряжения, действующие на краях элемента.
9. Какие силы и изгибающие моменты действуют на краях элемента?
10. Что понимается под гипотезой плоских сечений?
11. Какие системы называются статически неопределимыми?
12. Что представляет собой основная система?
13. В каком порядке производится расчет статически неопределимых систем?

Приложение

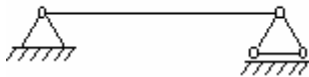
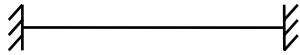

Т а б л и ц а П.1

Физические параметры материалов

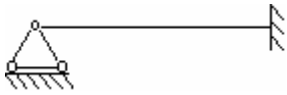
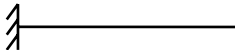
Материал	$E \cdot 10^{11}, \text{Н/М}^2$	$\rho \cdot 10^3, \text{кг/М}^3$	$\nu$	$[\sigma] \cdot 10^8, \text{Н/М}^2$
Сталь	2 – 2,2	7,8	0,24 – 0,3	1,6
Алюминий	0,68	2,7	0,32 – 0,36	0,3 – 0,8
Медь	1,27	8,9	0,31 – 0,34	0,3 – 1,2
Серебро	0,82	10,5	---	---
Золото	0,78	19,3	---	---
Дюралюминий	0,72	2,7	---	0,8 – 1,5
Стеклотекстолит				
СТЭФ (Н=1,33 мм)	0,33	2,47	0,279	---
СТЭ (Н=1,22 мм)	0,35	1,98	0,14	---
НФД (Н=0,92 мм)	0,345	2,32	0,238	---
СТЭФ (с печатной схемой, Н=1,22 мм)	0,302	2,05	0,22	---
Текстолит	0,06 – 0,1	---	---	0,3 – 0,4
Гетинакс	0,1 – 0,17	---	---	0,5 – 0,7

Т а б л и ц а П.2

Значения параметров  $\lambda_i$  и коэффициентов  $A_i, B_i, C_i$ , базисных функций


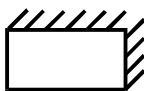
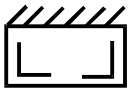
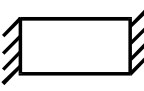
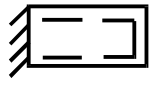

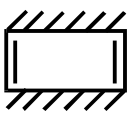
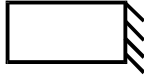

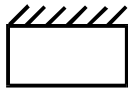
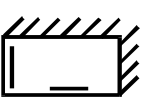
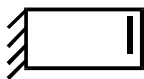
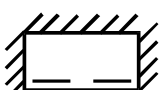
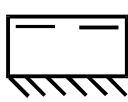
Условия закрепления	$i$	$\lambda_i$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
	1	4,730	-1,0178	-1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	-1,0000001
	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001

Окончание табл. П.2

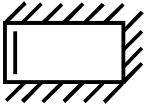
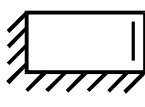
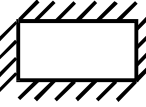
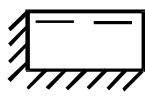
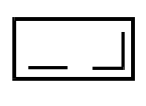
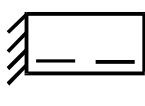
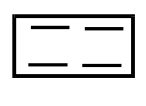
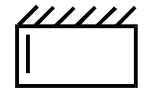
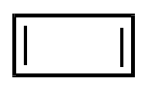

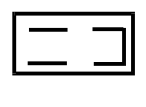
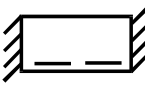
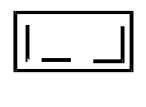
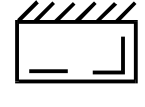
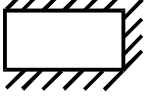
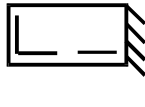
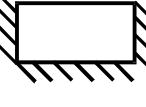
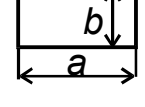
Условия закрепления	$i$	$\lambda_i$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

Т а б л и ц а П.3

Частотный коэффициент

Эскизы	$\alpha$	Эскизы	$\alpha$
	$9.87 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$		$3.52 \sqrt{1 + 2.48 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.33 \frac{a^2}{b^2} + 2.44 \frac{a^4}{b^4}}$		22.37
	$15.42 \sqrt{1 + 0.95 \frac{a^2}{b^2} + 0.41 \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \frac{a^2}{b^2}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.57 \frac{a^2}{b^2} + 5.14 \frac{a^4}{b^4}}$		3.52
	$22.37 \sqrt{1 + 0.48 \frac{a^2}{b^2} + 0.19 \frac{a^4}{b^4}}$		$3,52 \frac{a^2}{b^2}$
	$15.42 \sqrt{1 + 1.11 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		15.42
	$22.37 \sqrt{1 + 0.57 \frac{a^2}{b^2} + 0.47 \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \frac{a^2}{b^2}$

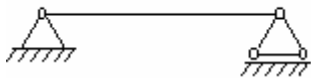
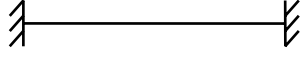


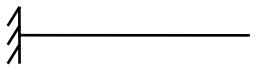
Окончание табл. П.3

Эскизы	$\alpha$	Эскизы	$\alpha$
	$22.37\sqrt{1+0.61\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$3.52\sqrt{1+5.56\frac{a^2}{b^2}+19.2\frac{a^4}{b^4}}$
	$22.37\sqrt{1+0.61\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$15.42\sqrt{1+0.29\frac{a^2}{b^2}+0.05\frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52\frac{a}{b}$		$3.52\sqrt{1+1.58\frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87\frac{a^2}{b^2}$		$3.52\sqrt{1.58\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	9.87		$22.37\sqrt{0.1\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87\sqrt{0.43\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$22.37\sqrt{1+0.1\frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87\sqrt{1+0.43\frac{a^2}{b^2}}$		$15.42\sqrt{0.34\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52\sqrt{1+5.97\frac{a^2}{b^2}+40.5\frac{a^4}{b^4}}$		$15.42\sqrt{1+0.34\frac{a^2}{b^2}}$
	$22.37\sqrt{1+0.14\frac{a^2}{b^2}+0.02\frac{a^4}{b^4}}$		$a$ - длинная сторона $b$ - короткая сторона



Т а б л и ц а П. 4

Численные значения некоторых интегралов

Способ крепления	$i$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i^2 dx$	$l \int_0^l x_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l x_i''^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9348	48,70454
	2	0,6366	0,5	19,739	779,2727
	3	0,6366	0,5	44,413	3945,068
	4	0,6366	0,5	78,956	12468,36
	5	0,6366	0,5	123,37	30440,34
	1	0,8456	1,0358	12,748	518,4548
	2	0,8594	0,9985	45,975	3797,111
	3	0,8737	1,0026	98,664	14347,29
	4	0,8764	0,9976	172,08	39844,88
	5	0,9152	1,0447	256,77	93140,375
	1	0,8903	1,0357	51,250	518,4726
	2	0,8863	0,9984	108,75	3797,502
	3	0,8910	1,0000	186,85	14618,15
	4	0,8921	0,9973	283,14	39838,21
	5	0,9068	1,0448	436,23	93132,35
	1	0,6078	0,4995	5,7524	118,8525
	2	0,6208	0,4999	21,450	1248,754
	3	0,6256	0,4999	47,021	5432,763
	4	0,6334	0,4992	108,74	15865,02
	5	0,6309	0,5008	127,54	37076,88
	1	1,0664	1,8552	8,6228	22,93523
	2	0,8426	0,9639	31,248	468,0322
	3	0,8738	1,0017	77,461	3813,367
	4	0,8819	1,0026	143,85	14656,03
	5	0,8785	0,9814	215,65	39201,60

## РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Токарев, М.Ф.** Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: учеб. пособие для вузов / М.Ф. Токарев, Е.Н. Талицкий, В.А. Фролов; под ред. В.А.Фролова. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
2. Случайные колебания: пер. с англ. / Под ред. А.А.Первозванцева. – М.: Мир, 1967. – 356 с.
3. **Писаренко, Г.С.** Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев.: Наук. думка, 1988. – 536 с.
4. Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий/ В.С. Ильинский.– М.: Радио и связь, 1982. – 296 с.
5. Vibrations analysis for electronic equipment/ D.S. Steinberg.– New York, 1973. – 456p.
6. Амортизация радиоэлектронной аппаратуры/ Ю.А. Суровцев.– М.: Сов. радио, 1974. – 176 с.
7. Конструирование приборов. В 2-х кн. Кн.1/ Под ред. О. Ф. Тищенко; пер. с нем. В. Н. Пальянова. –М.: Машиностроение, 1987 –384 с.
8. **Каленкович, Н.И.** Механические воздействия и защита радиоэлектронных средств: учеб. пособие для вузов/ Н.И. Каленкович, Е.П. Фастовец, Ю.В. Шамгин. – Минск: Выш. шк., 1989. — 244с.
9. Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы: учеб. пособие/ Е.Н. Талицкий; Владим. гос. ун-т., Владимир, 2001. – 256 с.
10. Метод конечных элементов / М. Секулович; под ред. В.Ш. Барбакадзе; пер. с серб. Ю.Н. Зуева. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
11. **Араманович, И.Г.** Уравнение математической физики: учеб. пособие для втузов/ И.Г. Араманович, В.И. Левин. –М.: Наука, 1969.– 288 с.
12. Курс теории упругости/ С.П. Тимошенко. – Киев: Наукова Думка, 1972. – 508с.
13. **Дарков, А.В.** Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро.– М.: Высш. шк., 1969. – 734 с.

Учебное издание  
ТАЛИЦКИЙ Евгений Николаевич

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ  
И ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Учебное пособие  
В 3 частях  
Часть 3

Редактор Е.В. Невская  
Технический редактор Н.В. Тупицына  
Корректор Е.В. Афанасьева  
Компьютерная верстка А.В. Венина, А.О. Кондрашкова

ЛР №020275. Подписано в печать . . .06.  
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.  
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 7,42. Тираж 100 экз.  
Заказ – 2006 г.

Издательство  
Владимирского государственного университета  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.