

Владимирский государственный университет

Ф И З И К А

Электричество и магнетизм
Электромагнитные колебания
и волны
Оптика

Конспект лекций

Владимир 2006

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

Кафедра общей и прикладной физики

Ф И З И К А

Электричество и магнетизм
Электромагнитные колебания и волны
Оптика

Конспект лекций

Составитель
А. А. КУЗНЕЦОВ

Владимир 2006

ББК 22.3

Ф 48

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой общей физики

Владимирского государственного педагогического университета

Е. К. Куркутова

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой приборостроения и информационно-измерительных
технологий Владимирского государственного университета

Л. М. Самсонов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Ф 48 **Физика.** Электричество и магнетизм. Электромагнитные коле-
Ф48 бания и волны. Оптика: конспект лекций / сост. Кузнецов А.А.; Вла-
дим. гос. ун-т.- Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. - 72 с.

Написан в соответствии с программой курса «Общей физики» для студентов технических и инженерно-медицинских специальностей и содержит две первые части курса общей физики.

Составлен на основе лекционного курса по физике первого семестра обучения, читаемого автором на ФРЭМТ ВлГУ, и включает в себя материалы по механике и молекулярной физике.

Предназначен для студентов вузов по специальностям 2000101 - приборостроение, 200106 – информационно – измерительная техника и технологии, 200401 - биотехнические и медицинские аппараты и системы, 140211 – электроснабжение, 200402 – инженерное дело в медико-биологической практике.

Табл. 1. Ил. 47. Библиогр.: 7 назв.

УДК 530 (075.8)

ББК 22.3

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электростатика

Предмет изучения. В электростатике изучаются электрические поля неподвижных зарядов в предположении, что эти заряды удерживаются в разных точках пространства силами неэлектрического происхождения.

Однако не существует такой конфигурации зарядов, которая была бы устойчива, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы (теорема Ирншоу). Ясно, что неподвижных элементарных зарядов не существует, и потому не существует постоянных полей. Но в большинстве явлений наблюдается не поле отдельного заряда, а суперпозиция полей многих зарядов. Вклад в это поле каждого элементарного заряда очень мал. Напряженность электрического поля при этом определяется как средняя величина по некоторому физическому объему и физически малому отрезку времени. Если флуктуации среднего значения напряженности поля малы, то существенным становится не факт неподвижности зарядов, а постоянство во времени электрического поля.

Закон Кулона. Формула для вектора напряженности \vec{E} электрического поля от отдельного точечного заряда имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{e}_r}{r^2} + \frac{r}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_r \right] \quad (1)$$

Первый член: $\vec{E} = -\frac{q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ - закон Кулона, где \vec{e}_r - единичный век-

тор, направленный от точки наблюдения P , где измеряется поле \vec{E} (этим объясняется знак "минус"), r - расстояние от P до q . Любое воздействие не может распространяться быстрее скорости света, поэтому на поле в данный момент времени влияет только поведение заряда в прошлом. Время запаздывания равно $\frac{r}{c}$, поэтому первое слагаемое, пропорциональное вто-

рой степени расстояния, определяет запаздывающий закон Кулона, а второе - дает поправку на запаздывание для первого члена. Величина третьего слагаемого в формуле (1) спадает обратно пропорционально расстоянию и доминирует на больших расстояниях, выражая закон излучения.

Работа в электрическом поле. При перемещении точечного заряда q в электрическом поле на $d\vec{l}$ (рис. 1) совершается работа $dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}$.

Удельная работа $dA' = \frac{dA}{q} = \vec{E}d\vec{l}$, и $A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}$ определяется криво-

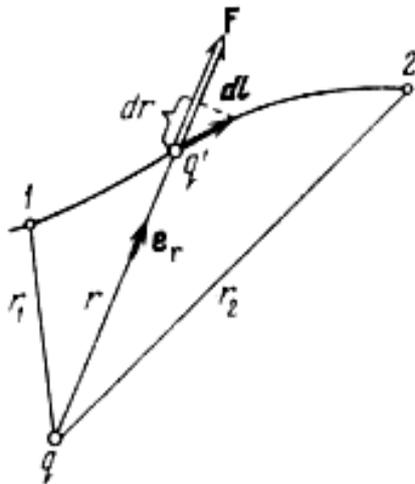


Рис. 1. К определению работы A в электрическом поле

линейным интегралом $A' = \int_L \vec{E}d\vec{l}$ вдоль L .

Потенциальность кулоновского поля.

Ротор вектора. Поле сил называется *потенциальным*, если работа при перемещении в этом поле зависит от начальной и конечной точек пути и не зависит от траектории.

Из потенциальности поля точечного заряда и на основании принципа суперпозиции следует потенциальность произвольного электростатического поля. В таком поле сил работа равна нулю при перемещении по любому замкнутому пути. Чтобы проверить потенциальность поля надо исследовать бесконечное число замкнутых путей, что в общем случае невозможно. Поэтому желательно найти другой, менее трудоемкий, критерий потенциальности.

Пусть имеем произвольный вектор \vec{E} . Выберем некоторое направление и зададим его единичной нормалью \vec{n} к площади ΔS , которая ограничена малым замкнутым контуром L .

Ротором называется вектор, проекция которого на направление \vec{n} определяется формулой $\text{rot}_n \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E}d\vec{l}}{\Delta S}$. Направление положительного обхода определяется правилом правого винта.

Тогда дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (2)$$

что является достаточным условием консервативности поля. В потенциальном поле силовые линии не замкнуты. *Силовая линия* электростатического поля - линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором \vec{E} .

Градиент потенциальной функции. Электростатическое поле можно описать градиентом некоторой скалярной функции точки $\varphi(x, y, z)$. Градиентом φ называется вектор $\text{grad}\varphi = \vec{i} \frac{d\varphi}{dx} + \vec{j} \frac{d\varphi}{dy} + \vec{k} \frac{d\varphi}{dz}$.

Для выяснения смысла этого вектора вычислим полный дифференциал функции φ при перемещении

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz, \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = \text{grad}\varphi d\vec{r}. \quad (3)$$

Раскрывая скалярное произведение векторов (3), получаем, что при значениях угла $\alpha = 90^\circ$ между векторами $\nabla\varphi$ и $d\vec{r}$ $\cos\alpha = 0$ и $d\varphi = 0$. Ясно, что вектор $\text{grad}\varphi$ направлен перпендикулярно поверхности с $\varphi = \text{const}$ (*эквипотенциальной поверхности*). По модулю он равен производной по пути в направлении, перпендикулярном поверхности $\varphi = \text{const}$.

Скалярный потенциал. Работа по перемещению заряда в потенциальном поле не зависит от траектории, поэтому ее можно выразить через координаты концов траектории с помощью потенциала. Можно убедиться, что $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$, поэтому уравнение (2) будет удовлетворено, если $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Знак «минус» показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания. Скалярная функция φ , связанная так с напряженностью \vec{E} поля, называется *скалярным потенциалом* электрического поля.

Так как напряженность не может быть бесконечной, то и производные по координатам от потенциала должны быть конечными. А это означает, что потенциал является непрерывной функцией.

Если напряженность можно измерить экспериментально, то потенциал φ не имеет определенного числового значения. Из формулы (3) видно, что если к φ прибавить любую постоянную, то описываемое потенциалом поле не изменится, так как производные по координатам от постоянной величины равны нулю. Поэтому потенциал φ определен с точностью до аддитивной постоянной. Он приобретает вполне определенные значения во всех других точках, если ему приписать любое значение в одной точке. Придание однозначности потенциалу называется *нормировкой*.

Если заряд перемещается между точками 1 и 2 (см. рис. 1), то удельная работа: $A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} \text{grad}\varphi d\vec{r}$, где $d\vec{l} = d\vec{r}$. Физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов между разными точками.

Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектрики. При рассмотрении электрического поля при наличии в нем диэлектриков электрические заряды различают на свободные и связанные. Под *свободными* зарядами понимают электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния (электроны в металлах и вакууме, ионы в газах и электролитах и т.п.), и заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающие их нейтральность. *Связанными* называют заряды, входящие в состав нейтральных молекул диэлектриков, ионы, закрепленные в твердых диэлектриках вблизи определенных положений равновесия.

Диэлектрики - вещества, в которых заряды под действием электрического поля сдвигаются на микроскопические расстояния.

Внешнее электрическое поле стремится сдвинуть положительные заряды в своем направлении, а отрицательные - в противоположном. Поэтому в направлении вектора напряженности в диэлектрике образуется избыток положительного заряда, а в противоположном - недостаток. Диэлектрик приобретает *дипольный момент*. Процесс называется *поляризацией*.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется *поляризованностью*, или *вектором поляризации*, определяемым отношением дипольного момента $\Delta\vec{p}$ элемента диэлектрика к его объему: $\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}$, или $\vec{P} = \frac{\sum \Delta\vec{p}_i}{\Delta V}$.

Примечание. Диполь - совокупность двух одинаковых по величине, но разных по знаку точечных зарядов, находящихся на малом расстоянии один от другого. Вектор \vec{l} , проведенный от отрицательного заряда к положительному, называется *плечом диполя*. Вектор \vec{p} называется моментом диполя: $\vec{p} = q\vec{l}$.

Механизмы поляризации. Диэлектрик состоит из атомов и молекул, и любой его малый физический элемент объема является электрически нейтральным. Если в атоме при отсутствии внешнего электрического поля электронное облачко распределено сферически симметрично относительно ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом. И в молекулах положительные и отрицательные заряды могут обладать такой симметрией распределения, когда у них не возникает дипольный момент.

Такие молекулы и атомы называются неполярными (H_2 , N_2 , O_2 , ..., CO_2 и др.). При отсутствии внешнего поля такой диэлектрик не поляризован.

Молекулы и атомы, обладающие электрическим дипольным моментом при отсутствии внешнего поля, называются полярными (CO , N_2O , др.).

Во внешнем электрическом поле положительные заряды стремятся сместиться по направлению напряженности поля, а отрицательные - противоположно. Неполярные молекулы приобретают дипольный момент, и диэлектрик поляризуется (*ионная и электронная поляризация*).

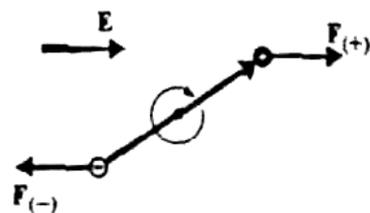


Рис. 2. Ориентационная поляризация

Полярные молекулы также приобретают индуцированный внешним полем дипольный момент и благодаря этому также поляризуются, но этот механизм - второстепенный. Главный механизм поляризации для них другой - *ориентационный*: во

внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил, стремящиеся переориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля (рис. 2). Поляризованность за счет переориентации молекул значительно больше, чем в случае дипольных моментов, индуцированных внешним полем. Поляризованность \vec{P} - количественная характеристика поляризации.

Очевидно, что \vec{P} пропорционально \vec{E} . Если свойства диэлектрика по всем направлениям одинаковы, то диэлектрик называется *линейным изотропным*. У него диэлектрические свойства характеризуются скалярной величиной - *диэлектрической восприимчивостью* $\kappa > 0$ и $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$.

Влияние поляризации на электрическое поле. Дипольный момент элемента объема dV : $d\vec{p} = \vec{P}dV = \kappa \epsilon_0 \vec{E}dV$, т.е. совпадает по направлению с \vec{E} (рис. 3). Поэтому напряженность поля самого дипольного момента направлена противоположно напряженности внешнего поля и ослабляет его. Роль поляризации сводится лишь к разделению разноименных зарядов, в результате чего в объеме диэлектрика, как и на его поверхности, образуются заряды. Эти заряды называются *поляризационными*, или *связанными*. Наличие диэлектрика в электрическом поле учитывается тем, что принимается во внимание локальное электриче-

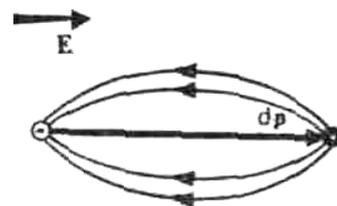


Рис. 3. Механизм ослабления поля при поляризации

ское поле, создаваемое связанными зарядами, возникающими в результате поляризации. Поэтому необходимо найти выражение связанных зарядов.

Электростатическая теорема Гаусса. Пусть точечный заряд q находится внутри объема V , ограниченного поверхностью S (рис. 4). Поток Φ напряженности \vec{E} сквозь эту поверхность будет: $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$. Теорема

Гаусса устанавливает математическую связь между потоком векторов напряженности сквозь замкнутую поверхность S и зарядом q , находящимся в объеме V , стягиваемом этой поверхностью.

Примечание. Скалярный поток частиц. Единичный поток частиц $J = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t}$,

т.е. это количество частиц, прошедших через нормальную единицу поверхности за единицу времени. Иными словами, это своего рода канал через который "капают" частицы. Если умножить J на Δt , то с ростом Δt канал стремится стать "слитным" и выразится

"струйкой" частиц и при достаточно большом Δt можно $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ представить как вектор.

Скалярный поток векторного поля. Заменяем $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ на вектор \vec{E} . Имея поверхность S произвольной формы, получим суммарный поток (как количество векторов, пересекающих эту поверхность)

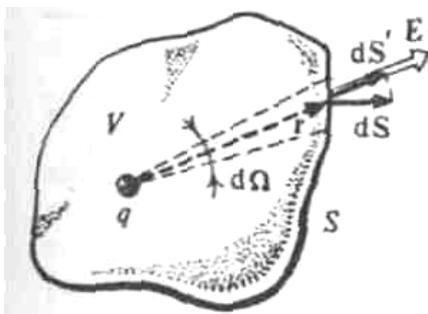


Рис. 4. Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда внутри объема, ограниченного поверхностью

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \text{ или } \Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}.$$

Для замкнутых поверхностей в качестве положительного направления выбирается направление в сторону внешней нормали, поэтому элемент поверхности $d\vec{S}$ направлен во внешнюю сторону от объема (см. рис. 4).

Под знаком интеграла имеем скалярное произведение векторов. Значит надо договориться, какой поток считать положительным, а какой отрицательным. Скалярное произведение $\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha$ и ясно, что знак потока определен знаком косинуса. При $\alpha < \pi/2$ поток векторов, выходящий из объема сквозь поверхность S , положителен.

По закону Кулона $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, значит,

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{S}. \quad (4)$$

Учтем $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \left(\frac{r}{r} \right) dS \cos \left(\vec{r}, d\vec{S} \right) = dS'$, так как $d\vec{S} = dS\vec{n}$, где dS' -

проекция элемента dS на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору \vec{r} .

Известно, что $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$, где $d\Omega$ - телесный угол, под которым элемент

площади dS' виден из начала отсчета радиус-векторов (местонахождение точечного заряда

q). Тогда $\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega$. Полный телесный

угол, под которым видна замкнутая поверхность из точек внутри ограничиваемого его объема, равен 4π , т.е. $\oint_S d\Omega = 4\pi$. Тогда

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Если точечный заряд находится вне объема V , то поток векторов \vec{E} также определяется формулой (4). Теперь через поверхность ADB (рис. 5) поток положителен, а через ACB - отрицателен, поэтому подынтегральное выражение содержит положительные и отрицательные значения. Поверхности ADB и ACB из точки O видны под одним углом, поэтому

$$\oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{S} = \int_{ADB} d\Omega - \int_{ACB} d\Omega = \Omega_0 - \Omega_0 = 0, \quad (6)$$

Объединяя результаты (5) и (6), имеем $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ - когда q находится внутри объема, ограниченного S ; $\Phi_E = 0$ - когда q находится вне объема, ограниченного S .

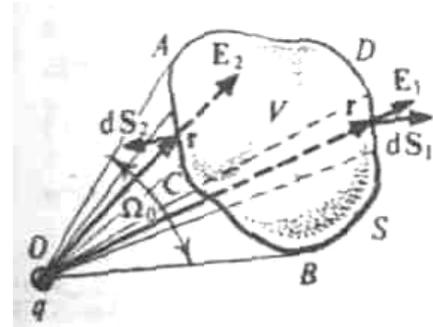


Рис. 5. Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда вне объема

Для системы точечных зарядов $Q = \int_V \rho dV$ обобщением теоремы Гаусса с учетом принципа суперпозиции полей ($\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$) является

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_V q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (7)$$

где ρ - объемная плотность зарядов.

Дивергенция векторного поля. Для описания процессов, связанных с положением и сохранением физических величин вводится математическое понятие *дивергенции* как локальное свойство векторного поля.

Пусть имеется произвольный вектор $\vec{A}(x, y, z)$, определенный во всех точках пространства. Рассмотрим поверхность S . Интеграл $\Phi_A = \int_S \vec{A} d\vec{S}$ на-

зывается *поток вектора \vec{A}* через поверхность и характеризует интенсивность порождения (положительный поток) или уничтожения (поток отрицательный). Можно сказать, что интеграл характеризует суммарную мощность источников вектора \vec{A} внутри объема.

Точечный источник генерирует силовые линии \vec{A} . Дивергенция (англ. divergence - расходящийся) вектора \vec{A} характеризует интенсивность такой генерации, или мощность точечных источников и определяется

формулой $\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}$, поэтому иногда операцию div называют объемной плотностью источника.

Суммирование мощностей источников по объему, в котором они заключены, $\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta V_i} (\text{div } \vec{A})_i \Delta V_i = \int_V \text{div } \vec{A} dV$, или

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} \quad (8)$$

называется формулой Гаусса и связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора сквозь ограничивающую объем замкнутую поверхность.

Связанные заряды. Вернемся к связанным зарядам. По определению $\int_V \rho_i dV = Q$, а из определения дипольного момента и вектора поляри-

зации $dQ = \vec{P}d\vec{S}$, тогда получаем $\int_V \rho_t dV = -\int_S \vec{P}d\vec{S}$. Знак "минус" показывает, что в объеме возникает заряд противоположный по знаку заряду, вытекающему через ограниченную объемом поверхность (рис. 6). С учетом

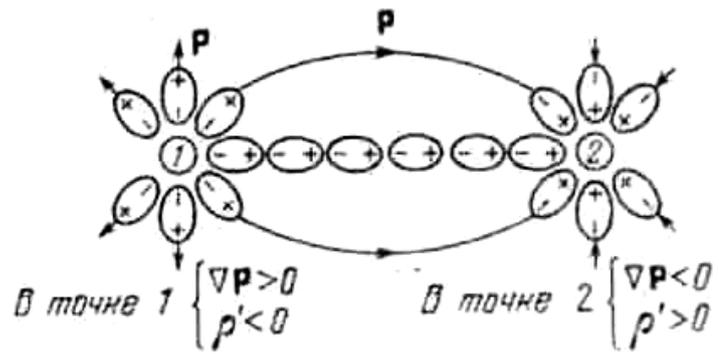


Рис. 6. Графическая интерпретация формулы (9)

(8) получаем объемную плотность связанных зарядов $\int_V (\rho_t + \text{div } \vec{P})dV = 0$,

$$\rho_t = -\text{div } \vec{P} \quad (9)$$

Ясно, что объемные связанные заряды возникают лишь в том случае, когда поляризованность \vec{P} изменяется непрерывно от точки к точке.

При одинаковом векторе напряженности \vec{E} граничная поверхность двух диэлектриков с различной поляризованностью пересекается разным числом поляризованных поверхностных зарядов со стороны каждого диэлектрика. В результате, вблизи границы сосредоточивается связанный заряд с поверхностной плотностью σ_t .

Интегрируя по объему (9) и используя (8), получаем:

$$\int_V \rho_t dV = -\int_V \text{div } \vec{P} dV, \quad \int_V \rho_t dV = \sigma_t \Delta S,$$

$$\int_V \text{div } \vec{P} dV = \int_S \vec{P}d\vec{S} = \int_{S_2} P_2 dS_2 + \int_{S_1} P_1 dS_1 = P_{2n} \Delta S - P_{1n} \Delta S, \text{ или } \sigma_t = -(P_{2n} - P_{1n}).$$

Если $P_{2n} = 0$ (один из пары диэлектриков – вакуум), то $\sigma_t = P_n$, где P_n - нормальная компонента поляризованности диэлектрика на границе с вакуумом.

Формула Пуассона и условие Лапласа. Применим формулу Остроградского - Гаусса для вектора \vec{E} : $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E}dV$, $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$, тогда электростатическая теорема Гаусса запишется в виде

$$\int_V \left(\text{div } E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Подставим $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ в $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ и получим: $\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Учтем, что $\text{div grad } \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \nabla^2 \varphi$, где $\Delta \equiv \nabla^2$ - опера-

тор Лапласа. Окончательно получаем формулу Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Для областей пространства без зарядов $\nabla^2 \varphi = 0$ (условие Лапласа).

Диэлектрическое смещение. С учетом связанных зарядов формула Пуассона запишется в виде $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} + \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$. А с учетом (8) получаем

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f, \quad \text{или} \quad \text{div } \vec{D} = \rho_f, \quad (10)$$

Вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называется *вектором смещения*. Он не является чисто полевым вектором, т.к. учитывает поляризацию среды. Из (10) видно, что единственным источником \vec{D} являются сторонние свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается.

Так как $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$, то $\vec{D} = (\epsilon_0 + \kappa \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$, где $\epsilon = (1 + \kappa) \epsilon_0$ - *диэлектрическая проницаемость*, характеризующая способность вещества не пропускать сквозь себя электрическое поле.

Умножим обе части (10) на dV и интегрируя по объему V , получаем в конечной форме запись электростатической теоремы Гаусса при наличии диэлектриков:

$$\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho dV; \quad \int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_S \vec{D} d\vec{S}; \quad \int_V \rho dV = Q; \quad \int_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad (11)$$

Условия на границе двух диэлектриков. *Граничными условиями* называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. Рассмотрим границу между двумя диэлектриками с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 7). Выберем на плоскости раздела диэлектриков произвольно направленную ось x . Возьмем небольшой прямоугольный контур длины a и ширины b , захватывающий и первый, и второй диэлектрики, но так, что ось x проходит через середину b .

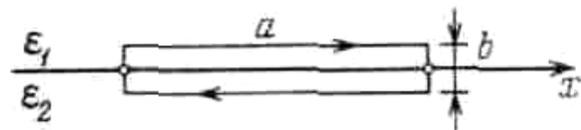


Рис. 7. Прямоугольный контур с границей раздела диэлектриков

Пусть в диэлектриках создано поле с напряженностью \vec{E}_1 в первом диэлектрике и \vec{E}_2 - во втором. Вследствие того, что $\text{rot } \vec{E} = 0$, циркуляция этого вектора по выбранному контуру должна быть равна нулю. Тогда при

$$\oint E_l dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle 2b = 0,$$

выбранном направлении обхода

$$(E_{2x} - E_{1x})a = \langle E_b \rangle 2b.$$

Здесь $\langle E_b \rangle$ - среднее значение E_l на перпендикулярных к границе участках контура. В пределе, при стремящейся к нулю ширине контура b , получается, что $E_{1x} = E_{2x}$. При этом значения проекций векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 на ось x берутся в непосредственной близости к границе диэлектриков. Тогда ясно, что если выбрать направление оси такое, что $E_{1x} = 0$, то проекция E_{2x} также будет нулевой. Это означает, что векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в двух близких точках, но по разные стороны от границы, лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела и каждый из них можно представить в виде суммы нормальной и тангенциальной компонент:

$$\vec{E}_1 = E_{1n}\vec{n} + E_{1\tau}\vec{\tau}; \quad \vec{E}_2 = E_{2n}\vec{n} + E_{2\tau}\vec{\tau}.$$

Тогда в новых обозначениях

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (12)$$

Здесь $E_{i\tau}$ - проекция вектора \vec{E}_i на направление τ вдоль линии пересечения плоскости раздела диэлектриков плоскостью векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

Согласно формуле (12) получаем: $D_{1\tau}/\varepsilon_0\varepsilon_1 = D_{2\tau}/\varepsilon_0\varepsilon_2$, или

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \varepsilon_1/\varepsilon_2. \quad (13)$$

Возьмем на границе диэлектриков воображаемую цилиндрическую поверхность высоты h (рис. 8) с малыми одинаковыми основаниями S_1 и S_2 , расположенными, соответственно, в первом и втором диэлектриках.

Основания $S_1 = S_2 = S$ настолько малы, что поле в пределах них можно считать однородным. Применим к этой поверхности теорему Гаусса и, если сторонних зарядов на границе между диэлектриками нет ($Q_f = 0$), то правая часть формулы (7) равна нулю, и $\Phi_D = 0$. Поток вектора \vec{D} через всю цилиндрическую поверхность можно представить в виде $\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n \rangle S_{\text{бок}} = 0$. Здесь D_{1n} и D_{2n} - проекции вектора \vec{D} , соответственно в первом диэлектрике на нормаль \vec{n}_1 и во втором диэлектрике на нормаль \vec{n}_2 ; $D_{1n}S$ и $D_{2n}S$ - потоки через соответствующие основания S_1 и S_2 ; $\langle D_n \rangle$ - значение D_n , усредненное по всей боковой поверхности $S_{\text{бок}}$; $\langle D_n \rangle S_{\text{бок}}$ - поток через боковую поверхность.

Если устремить высоту цилиндра h к нулю, $S_{\text{бок}}$ также будет стремиться к нулю и в пределе получится $D_{1n} = -D_{2n}$. Здесь D_{in} - проекция на n_i вектора \vec{D} в i -том диэлектрике в непосредственной близости к его границе с другим диэлектриком. Знаки проекций оказались разными вследствие того, что нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если же проецировать \vec{D}_1 и \vec{D}_2 на

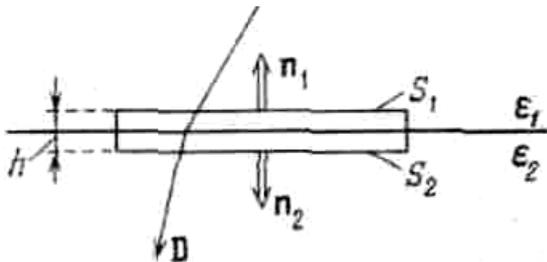


Рис. 8. Цилиндрическая поверхность с границей раздела диэлектриков

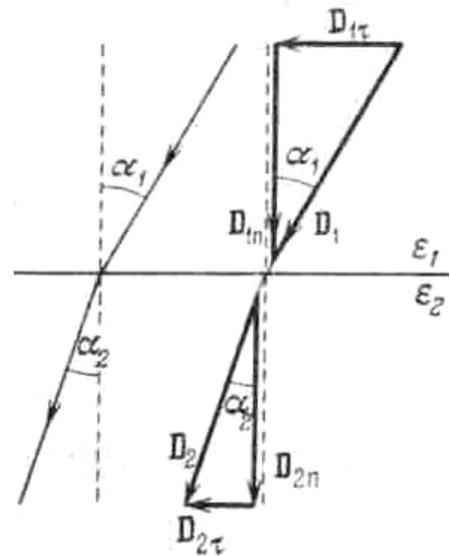


Рис. 9. Преломление линий электрического смещения на границе раздела диэлектриков одну и ту же нормаль, то получится

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (14)$$

Заменяя проекции \vec{D} соответствующими проекциями вектора \vec{E} , умноженными на $\epsilon_0\epsilon$, получим соотношение $\epsilon_0\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0\epsilon_2 E_{2n}$, из которого следует, что

$$E_{1n} / E_{2n} = \epsilon_2 / \epsilon_1. \quad (15)$$

Соотношения (12) – (15) определяют условия, которым должны удовлетворять векторы \vec{E} и \vec{D} на границе двух диэлектриков в том случае, если на ней нет сторонних зарядов (на границе диэлектрика с вакуумом одну из диэлектрических проницаемостей нужно приравнять к единице). Эти результаты означают, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{D} и тангенциальная составляющая вектора \vec{E} изменяются непрерывно; тангенциальная составляющая вектора \vec{D} и нормальная составляющая вектора \vec{E} при переходе через эту же границу раздела претерпевают разрыв. Эти соотношения получены для электростатического поля, однако они справедливы и для полей, изменяющихся со временем.

На границе диэлектриков линии смещения терпят излом (преломляются), вследствие чего угол α между нормалью к поверхности раздела и линией \vec{D} изменяется. Из рис. 9 следует, что $\text{tg } \alpha_1 / \text{tg } \alpha_2 = \frac{D_{1\tau} / D_{1n}}{D_{2\tau} / D_{2n}}$, откуда с учетом формул (13) и (14) получается закон преломления линий электрического смещения:
$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

При переходе в диэлектрик с меньшей ε угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, следовательно, линии располагаются реже; и, наоборот, при переходе в диэлектрик с большей ε линии смещения сгущаются.

Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса. 1. *Поле бесконечной однородно заряженной плоскости.* Вектор напряженности поля в любой точке нормален плоскости. В симметричных относительно плоскости точках векторы напряженности поля совпадают по модулю и противоположны по направлению.

Пусть внутри мысленной цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными плоскости, заключен заряд $Q = \sigma \Delta S$ (рис. 10). Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндрической поверхности будет отсутствовать. Для оснований цилиндра векторы $E_n \vec{n}$ совпадают с векторами \vec{E} . Тогда суммарный скалярный поток векторного поля \vec{E} через основания цилиндра: $\Phi_E = 2E\Delta S$.

$$\text{Тогда согласно теореме Гаусса: } 2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Данный результат независим от длины цилиндра, а значит на любых расстояниях от плоскости $\vec{E} = \text{const}$.

2. *Поле двух разноименно заряженных плоскостей.* Для простоты и удобства рассмотрим случай (рис. 11) $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$. Поле определяется как суперпозиция полей от каждой плоскости в отдельности (рис. 11).

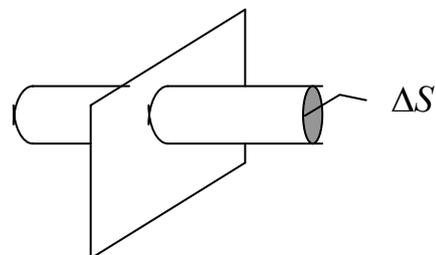


Рис. 10. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

В случае двух разноименно заряженных плоскостей поле оказывается сосредоточенным между плоскостями с одинаковой напряженностью во всех точках. Для плоскостей конечных размеров отклонения поля от однородности наблюдаются вблизи краев. Поле внутри плоского конденсатора при условии, если расстояние d между пластинами много меньше их линейных размеров (S) и без учета краевых эффектов $E = \sigma/\epsilon_0$. С учетом равенств $E = U/d$, $\sigma = Q/\Delta S$, $C = Q/U$ и с учетом диэлектрика с ϵ между пластинами получаем формулу плоского конденсатора



$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta S}{d}.$$

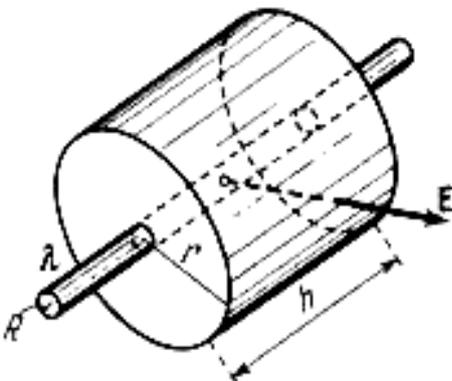
Рис. 11. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

3. Поле бесконечно однородно заряженного цилиндра радиуса R . При постоянстве поверхностной плотности σ и

из соображений симметрии следует, что вектор напряженности \vec{E} в любой точке должен быть направлен вдоль радиальной прямой, нормальной к оси цилиндра, а потому ее величина может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра. Поэтому и через основания цилиндра поток векторов \vec{E} отсутствует.

Пусть дана (рис. 12) коаксиальная данной бесконечная цилиндрическая поверхность радиуса r . Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность ΔS_2 равен $E(r) \Delta S_2$.

При $r > R$ внутрь объема, стягиваемого этой поверхностью, попадает заряд $Q = \sigma \Delta S_1$, где ΔS_1 - площадь боковой поверхности рассматриваемого заряженного цилиндра. Используем теорему Гаусса и получаем



$$E(r) \Delta S_2 = \frac{\sigma \Delta S_1}{\epsilon_0}, \quad E(r) 2\pi r = \frac{\sigma 2\pi R}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

Если $r < R$, то стягиваемый объем не содержит зарядов, и $E(r) = 0$.

Рис. 12. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

При $r \approx R$ в непосредственной близости от поверхности заряженного цилиндра

напряженность испытывает скачок $E(r = R) = \sigma/\epsilon_0$.

Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля положительно заряженного цилиндра только направлением вектора \vec{E} .

Пример. Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусов R и $2R$ равномерно заряжены до значений поверхностных плотностей: $\sigma_1 = 3\sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$. Определим напряженность E поля в областях I, II и III (рис. 13).

Суммарная напряженность на расстояниях $r < R$ от оси равно нулю.

Суммарное поле на расстояниях $r \approx R$ составляет $E(R) = \sigma_1/\epsilon_0$; на расстояниях $R < r < 2R$ $E(r) = \frac{\sigma_1 R}{\epsilon_0 r}$.

Суммарное поле на расстояниях $r > 2R$ в вакууме определяется следующим образом:

$$E(r > 2R) = \frac{\sigma_1 R}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma_2 2R}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} (3\sigma - 2\sigma)$$

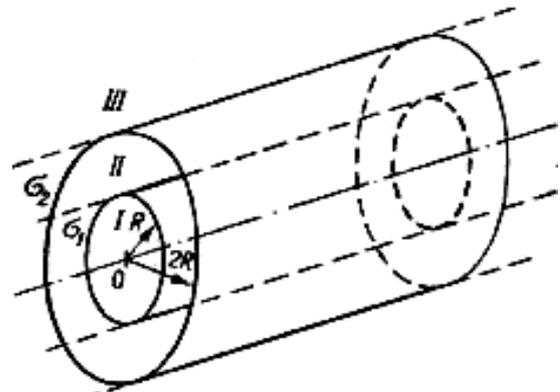


Рис. 13. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

4. Поле сферической однородно заряженной поверхности радиуса R_1 .

Вектор напряженности \vec{E} в любой точке должен быть направлен вдоль радиальной прямой и проходить через центр сферы (рис. 14).

Вообразим концентрическую заданной сфере с σ и радиусом R_2 и исследуем характерные области I, II и III:

1. Для всех $r < R_1$, $E_1 = 0$;
2. Для всех $r \approx R_1$: $E(R_1)4\pi R_1^2 = Q/\epsilon_0$, или $E(R_1) = \sigma/\epsilon_0$;
3. Для всех $R_1 < r < R_2$:

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left(\frac{R_1}{r} \right)$$

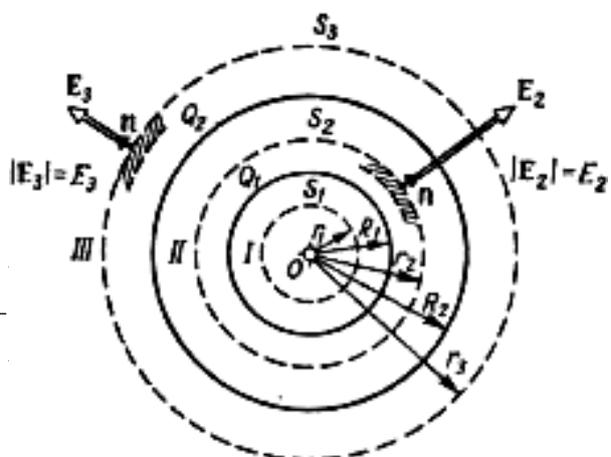


Рис. 14. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

$$\text{Для всех } r \approx R_2: \quad E(R_1)4\pi R_2^2 + E(R_2)4\pi R_2^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\text{и } E_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0 R_2^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2]$$

$$4. \text{ Для всех } r > R_2: \quad E_3 = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2].$$

5. *Поле объемно заряженного шара.* Для поля вне шара ($r > R$) результат будет такой же, как для сферы.

$$\text{Для всех } r < R: \quad E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3; \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r.$$

Внутри шара напряженность поля растет линейно с увеличением расстояния r от центра шара. Вне шара напряженность поля убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

Электрическое поле проводников

Заряженный проводник. Гладкая поверхность заряженного проводника непременно является поверхностью постоянного потенциала. Это следует из самого определения потенциала, как характеристики потенциальной энергии системы зарядов. Очевидно, что избыточные заряды расходятся по поверхности гладкого проводника с одной σ , а раз так, то потенциальная энергия любой произвольной области на поверхности проводника будет постоянной. Электрическое поле, характеризуемое $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, должно быть перпендикулярным к поверхности в каждой ее точке. Разности потенциалов между полюсами нет, а следовательно внутри поле отсутствует. На поверхности - скачок потенциала.

Проводник во внешнем электрическом поле. Положительные ионы увлекаются полем в одном направлении, а отрицательные - в противоположном направлении. Заряды не могут уйти дальше поверхности. Скопившись около нее, они начинают сами создавать внутри тела электрическое поле, которое будет стремиться уничтожить первоначальное поле. Движение зарядов будет продолжаться, пока не произойдет полная ком-

пенсация поля внутри проводника. Так как этот эффект характерен для всех проводников (происходит "автоматически"), то мы должны рассматривать только поверхность проводника, когда имеем дело с внешним полем.

Полый проводник во внешнем поле. Если в пространстве внутри полого проводника любой формы нет зарядов, то электрическое поле в нем равно нулю. Это теорема электростатики и ее содержание вытекает из условия Лапласа и формулы Пуассона.

Прикладное применение этого утверждения - основа для электрозащиты. Это свойство проводников держать (аккумулировать) энергию поля на своей поверхности и около нее используется в виде системы проводников (от двух и более), расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. Такие системы получили название конденсаторов (по аналогии - конденсация, выделение зарядов из объема), количественной оценкой способности которых аккумулировать электрическую энергию, служит емкость, определяющаяся как $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ и являющаяся постоянной величиной для фиксированной системы проводников.

Постоянный электрический ток

Сила тока. Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются по полю, отрицательные - против. Такой ток (под действием электрического поля и в проводнике) называется *током проводимости*.

Если в пространстве перемещается заряженное макроскопическое тело, то возникает тоже ток, но этот ток называется *конвекционным*.

За положительное направление тока условно принимают движение положительных зарядов. Количественной мерой электрического тока служит скалярная физическая величина $I = \frac{dQ}{dt}$. Ток, сила и направление ко-

торого не изменяются во времени, называют постоянным: $I = \frac{Q}{t}$.

Плотность тока. Заряды в произвольном объеме ΔV движутся с различными скоростями, но само движение приводит к переносу самого

заряда в направлении скорости. Интенсивность этого переноса характеризуется плотностью тока $\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum e_i \vec{v}_i$. Положительные и отрицательные заряды создают каждый свою плотность $\vec{j} = \vec{j}^{(+)} + \vec{j}^{(-)}$.

За время dt через поперечное сечение проводника переносится заряд $dQ = n|e| \langle v \rangle S dt$, где e - заряд электрона; n - концентрация носителей тока; $\langle v \rangle$ - средняя упорядоченная скорость носителей тока. Тогда: $I = n|e| \langle v \rangle S$, а плотность тока: $\vec{j} = n|e| \langle \vec{v} \rangle$. Направление вектора \vec{j} определяется $\langle \vec{v} \rangle$. Обычно эти формы представляются в виде $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где ρ и \vec{v} - объемная плотность и скорость зарядов с учетом знаков.

Сила тока $dI = \vec{j} d\vec{S}$ определяется потоком вектора \vec{j} сквозь произвольную поверхность $d\vec{S} = dS \vec{n}$, \vec{n} - единичный вектор нормали к площадке dS , а $d\vec{S}$ - ориентированная в пространстве площадка.

Дифференциальная форма закона Ома. Проводниками называются материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает движение зарядов, т.е. электрический ток.

Экспериментальный закон, связывающий силу тока с разностью потенциалов на концах проводника, был открыт Омом в 1827 г.: $I = \frac{U}{R}$.

В дифференциальной форме закон Ома записывается для плотности тока. В проводнике выделим малый элемент Δl . Сопротивление току этого элемента: $R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$, где γ - удельная электрическая проводимость вещества, величина, обратная удельному электрическому сопротивлению.

В направлении τ рассматриваемого элемента

$$I_\tau = j_\tau \Delta S; \quad \Delta \phi = j_\tau \Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$$

Так как $\frac{\Delta \phi}{\Delta l} = E_\tau$ - компонента напряженности электрического поля в направлении рассматриваемого элемента, то $j_\tau = \gamma E_\tau$. Это соотношение справедливо при любой ориентировке элемента, поэтому: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

При наличии тока $\vec{j} \neq 0$, и, следовательно, $\vec{E} \neq 0$, т.е. внутри проводника с током имеется электрическое поле.

Механизм существования постоянного тока. Источник тока называется источником сторонних ЭДС. По результатам своего действия он представляет собой процесс или устройство, разделяющее положительные и отрицательные заряды (против кулоновских сил). После разделения заряды перемещаются на электроды и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи электродов, которые, в свою очередь действуют на другие заряды и т.д. В результате этих коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает такое распределение зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводника соответствующего электрического поля. Таким образом, роль зарядов на полюсах источника ЭДС состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно электрическое поле, а в том, чтобы обеспечивать такое распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них. Это и обеспечивает постоянный ток.

Дифференциальная форма закона Джоуля - Ленца. Известно, что $dA = dQU$ и $\frac{dQ}{dt} = I$, откуда $dA = IUdt$, а развиваемая током на участке цепи мощность $P = \frac{dA}{dt}$ и $P = IU$, или с учетом закона Ома $P = I^2 R$. Это и есть известный закон Джоуля - Ленца в интегральной форме.

В иной форме $\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$, и так как $\Delta S \Delta l = \Delta V$, то $\frac{\Delta P}{\Delta V} = P_V$, где P_V - объемная плотность тепловой мощности, выделяемой в проводнике.

Используя закон Ома в дифференциальной форме:

$$P_V = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta l} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \vec{j} \vec{E}$$

Любое из этих равенств, когда в левой части стоит P_V , является записью закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Задача разветвленных цепей решаются с помощью двух правил Кирхгофа (1824 - 1887).

Правило 1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0.

$$\sum_i I_i = 0$$

Любая точка разветвленной цепи, в которой сходятся не менее трех проводников с током, называется *узлом*. Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла - отрицательным.

Первое правило вытекает из закона сохранения электрического заряда (нигде не должны накапливаться электрические заряды, иначе токи не могут оставаться постоянными).

Правило 2. Получается из общего закона Ома для разветвленных цепей. В любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k .$$

При использовании этих правил необходимо выбрать направление обхода контура и направление токов на всех участках цепи.

Сегнетоэлектрики. Сегнетоэлектриками называют полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно поляризованы, т.е. обладают поляризованностью при отсутствии электрического поля. На границах указанного интервала температур сегнетоэлектрик в результате фазового перехода превращается в полярный диэлектрик. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \approx 10^4$ зависит и от напряженности поля, и от того, как изменялась напряженность до достижения данного значения. Иногда их называют ферроэлектриками из-за формальной аналогии между их свойствами и свойствами ферромагнетиков.

Точка фазового перехода из состояния сегнетоэлектрика в состояние полярного диэлектрика называется точкой Кюри, а соответствующая температура T_K - температурой Кюри. В некоторых случаях имеются две точки Кюри - сегнетоэлектрические свойства исчезают также и при понижении температуры (у сегнетовой соли $t_{K-B} = 24^\circ C$; $t_{K-H} = -18^\circ C$). Таких немного, основная масса имеет только одну верхнюю точку Кюри.

Магнитное поле в вакууме

Магнитная сила. Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Однако закон Кулона не достаточен для анализа взаимодействия движущихся зарядов.

Полевая траектория взаимодействия для магнитной силы формулируется аналогично полевой трактовке электрического взаимодействия: движущийся заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле; на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила.

Магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим лишь при достаточно больших скоростях заряженных частиц. Тем не менее, оно может проявляться и при очень малых скоростях, если кулоновское взаимодействие по каким-то причинам отсутствует.

Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Представим, что заряды движутся в тонкой цилиндрической проволоке, которая в целом электрически нейтральна и вне проволоки действует лишь магнитная сила. Значит, вокруг проводника с током проявляется действие магнитной силы на движущиеся заряды, которые образуют электрический ток. При этом возникает магнитное взаимодействие токов (рис. 15):

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl,$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ - магнитная постоянная. Из формулы видно, что на длину l_2 проводника приходится сила

$$F_{ml} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l_2 \quad (16)$$

Знак «минус» показывает, что при одинаковых направлениях I_1, I_2 между проводниками действует сила притяжения. Если направления I_1 и I_2 различны, то возникает сила отталкивания.

Ампер есть сила постоянного тока, который будучи поддерживаемым в двух параллельных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого круглого сечения, расположенных на расстоянии 1 м в вакууме, вы-

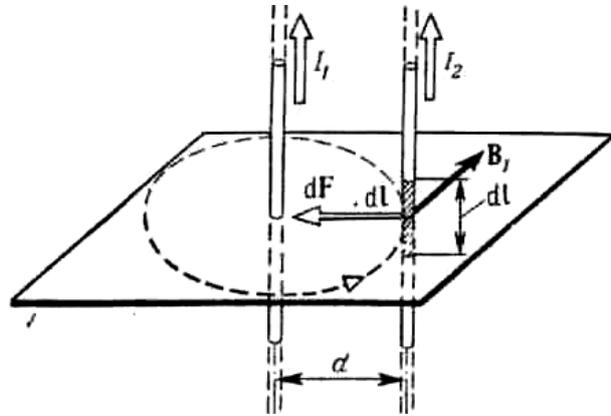


Рис. 15. К магнитному взаимодействию токов

зывает между этими проводниками возникновение силы, равной $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины. Если подставить в формулу (16) значения

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ А}, d = 1 \text{ м}, l_2 = 1 \text{ м}, F_{mi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}, \text{ то } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2.$$

Сила Лоренца. Сила Лоренца представляется в общем виде: $\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$. Первое слагаемое в правой части характеризует составляющую вектора силы со стороны электрического поля, а второе - со стороны магнитного. Здесь \vec{u} - вектор скорости частицы; \vec{B} - вектор магнитной индукции.

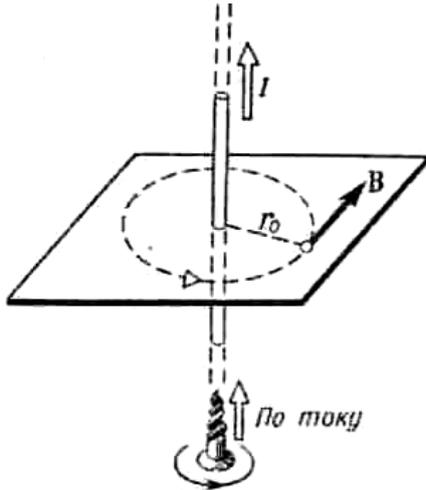


Рис. 16. К определению направления вектора магнитной индукции \vec{B} в точке (правило правого винта)

За вектором \vec{B} установилось название *индукции магнитного поля*.

Сила Ампера. Пусть имеется совокупность точечных зарядов, концентрация которых равна n . Тогда в элементе объема dV имеется ndV зарядов. Если они все движутся со скоростью \vec{u} и на каждый из них действует магнитная сила, определяемая вторым слагаемым в уравнении Лоренца, то на заряды в элементе объема dV действует сила $d\vec{F}_m = nq dV \vec{u} \times \vec{B}$. Учитывая $nq = \rho$, $nq\vec{u} = \rho\vec{u} = \vec{j}$, где ρ и \vec{j} - плотность зарядов и вектор плотности тока. Перепишем $d\vec{F}_m$ в виде $d\vec{F}_m = \rho\vec{u} \times \vec{B} dV$, или $d\vec{F}_A = \vec{j} \times \vec{B} dV$. Последняя формула Ампера определяет силу, действующую на элемент электрического тока плотностью \vec{j} , заключенного в объеме dV .

Для линейных токов: $\vec{j} dV = j_l S_0 d\vec{l} = Id\vec{l}$ и формула Ампера

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) заключаем, что ток, текущий по прямолинейному бесконечному проводнику, создает магнитное поле, силовые линии которого являются окружностями, концентрическими току и лежащими в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 16).

Из принципа суперпозиции для напряженности электрического поля следует справедливость принципа суперпозиции для индукции магнитного поля.

Закон Био - Савара. В полной аналогии с электростатикой, взаимодействие элементов тока представляется двумя стадиями: элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ в точке нахождения элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ создает магнитное поле, взаимодействие с которым элемента $I_2 d\vec{l}_2$ приводит к возникновению силы $d\vec{F}_{12}$. Действие магнитного поля с индукцией \vec{B} на $I d\vec{l}$ описывается формулой (17). С ее учетом две стадии взаимодействия описываются так:

1. Закон Био - Савара. Элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ создает в точке нахождения элемента тока магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

2. На элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$, находящийся в точке с магнитной индукцией $d\vec{B}_{12}$, действует сила $d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12}$ (рис. 15).

Пример. Элемент $I dl$ в произвольной точке А создает поле с $d\vec{B}$, направленное перпендикулярно плоскости чертежа от нас (рис. 17.), а по модулю равно

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

Индукция магнитного поля в точке А, создаваемого прямолинейным током I , текущим по бесконечному проводнику

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \dots = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (18)$$

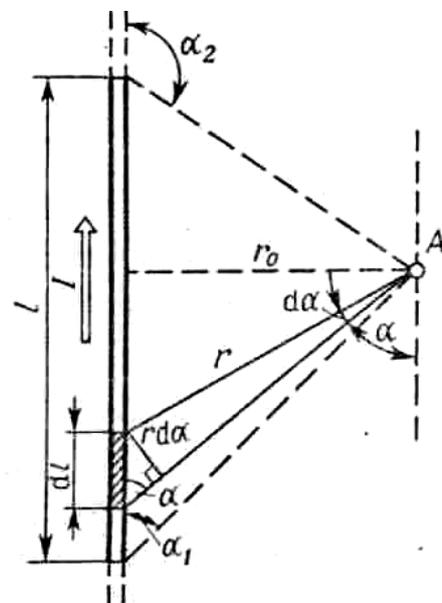
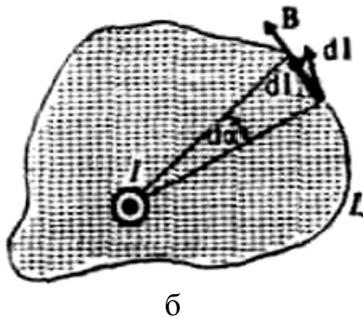
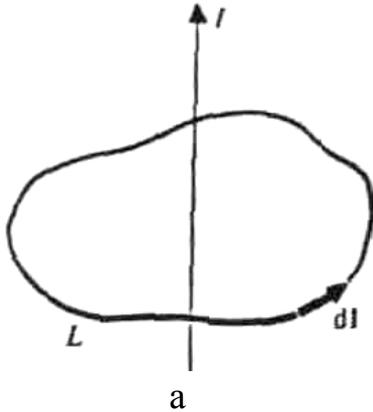


Рис. 17. К примеру

Закон полного тока. Линии индукции магнитного поля, порождаемые прямолинейным бесконечно-длинным током, являются концентрическими окружностями, центр которых лежит на линии тока. Значение индукции дается формулой (18).



Вычислим циркуляцию вектора \vec{B} по замкнутому вокруг тока I контуру L (рис. 18.). Так как линии \vec{B} лежат в плоскостях, перпендикулярных линии I , контур L следует выбрать соответственно $\vec{B}d\vec{l} = Bdl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = Bdl_{\perp}$, где $d\alpha = \frac{dl_{\perp}}{r_0}$.

Принимая во внимание формулу (18), перепишем $\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} dl_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$.

В общем случае сила тока I есть сумма всех токов, охватываемых контуром $I = \sum_i I_i$, поэтому:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_{\Omega} d\alpha = \mu_0 I.$$

Рис. 18. Вычисление циркуляции вектора \vec{B} по замкнутому контуру L

Магнитное поле в веществе

Магнетики. *Магнетиками* называются вещества, которые при внесении во внешнее поле сами становятся источниками дополнительного магнитного поля. При этом полная индукция магнитного поля равна сумме индукций внешнего магнитного поля и поля, порождаемого магнетиком.

В соответствии с различными механизмами намагничивания магнетики разделяют на диа-, пара-, ферро- и ферромагнетики. Антиферромагнетики также относят к магнетикам, хотя они и не создают магнитного поля.

Диамагнетики. При внесении во внешнее магнитное поле в молекулах и атомах движение электронов изменяется так, что образуется определенным образом ориентированный суммарный круговой ток, которых характеризуется магнитным моментом. Можно сказать, что молекулы при

внесении в магнитное поле приобретают индуктивный магнитный момент. Благодаря чему они остаются источниками дополнительного поля, т.е. вещество намагничивается.

Парамагнетики. Движение электронов и молекул может быть такое, что молекулы будут обладать магнитным моментом и при отсутствии магнитного поля, т.е. молекулы обладают постоянным магнитным моментом и каждая молекула является источником магнитного поля. Эти поля без внешнего поля ориентированы беспорядочно, и суммарная индукция поля, создаваемого ими, равна нулю. При внесении такого магнетика во внешнее поле постоянные магнитные моменты отдельных молекул переориентируются в направлении индукции поля. Образуется преимущественное направление ориентации магнитных моментов, и магнетик намагничивается.

Ферро - и ферримагнетики. Намагничивание ферро - и ферримагнетиков связано с тем, что электроны обладают магнитным моментом, находящимся в определенном соотношении с их механическим моментом. Намагничивание такого класса магнетиков связано с определенной ориентировкой спинов и поэтому называется спиновым.

Намагниченность. *Намагниченность* определяется отношением магнитного момента элементарного физического объема к объему:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{mi}, \quad \text{где } \Delta V - \text{элементарный объем, } \vec{p}_{mi} - \text{магнитные моменты}$$

молекул. Суммирование распространяется на все молекулы в объеме ΔV . Намагниченность - объемная плотность магнитного момента магнетика.

Напряженность магнитного поля. Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (19)$$

не является чисто полевой величиной среды. Поэтому по своему значению вектор \vec{H} играет в теории магнитного поля такую же роль, как вектор \vec{D} в теории электрического поля, и его не следовало бы называть напряженностью. Тем не менее, такое название закрепилось за ним исторически. По этим же причинам было принято считать, что источником намагничивания является не \vec{B} , а \vec{H} . Поэтому зависимость $\vec{J}(\vec{H})$ представлена $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ - магнитная восприимчивость.

Зависимость \vec{B} от \vec{H} принято записывать $\vec{B} = \mu \vec{H}$ где μ - магнитная проницаемость среды. Величины χ и μ для диа- и парамагнетиков не

зависят ни от \vec{B} , ни от \vec{H} . Подставим их в выражение (19) и сократим на \vec{H} . При этом получим $1 = \frac{\mu}{\mu_0} - \chi$ или $\chi = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} = \mu_r - 1$, где μ_r - относительная магнитная проницаемость.

У диамагнетиков вектор намагниченности \vec{J} направлен против вектора напряженности \vec{H} и $\chi < 0$, тогда $\mu < \mu_0$ и $\mu_r < 1$. Это значит, что порождаемое диамагнетиком поле направлено против первоначального внешнего поля и диамагнетик ослабляет внешнее поле. Величина $|\chi| \sim 10^{-5}$ не зависит от температуры.

Диамагнетизм имеется у всех веществ.

У парамагнетиков \vec{J} совпадает по направлению с \vec{H} . Для них $\chi_n > 0, \mu > \mu_0, \mu_r > 1$. Парамагнетик усиливает магнитное поле, парамагнитная восприимчивость χ_n зависит от температуры: $\chi_n = \frac{C}{T}$ - закон Кюри, C - постоянная Кюри. При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии имеет порядок $\sim 10^{-3}$, т.е. примерно на два порядка больше диамагнитной восприимчивости. Поэтому у парамагнетиков роль диамагнитной восприимчивости относительно мала и ею часто пренебрегают.

У ферромагнетиков \vec{J} совпадает по направлению с \vec{H} , а $|\vec{J}|$ является очень большой. Для них $\chi \gg 1, \mu \gg \mu_0$. Значения χ и μ зависят от поля и от предыстории намагничивания. Благодаря этому у них имеется остаточная намагниченность, т.е. намагниченность образца в целом сохраняется и после того, как внешнее поле стало равным нулю.

Магнитная восприимчивость ферромагнетиков - функция напряженности внешнего поля. График функции $J(H)$ имеет предел, называемый *намагниченностью насыщения*.

Для всякого ферромагнетика существует температура, при переходе через которую он испытывает фазовый переход (второго рода) и превращается в парамагнетик. Температура, при которой происходит этот процесс, называется *температурой Кюри*.

Условия на границе двух магнетиков. Вблизи поверхности раздела двух магнетиков (рис. 19, 20) векторы \vec{B} и \vec{H} должны удовлетворять определенным ограниченным условиям, определяемых соотношениями

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Поток вектора \vec{B} через эту цилиндрическую поверхность $\Phi = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{бок}$.

Так как $\nabla \vec{B} = 0$, то и $\Phi_B = 0$ и при $h \rightarrow 0$ имеем $B_{1n} = -B_{2n}$, а при проецировании \vec{B}_1 и \vec{B}_2 на одну и ту же

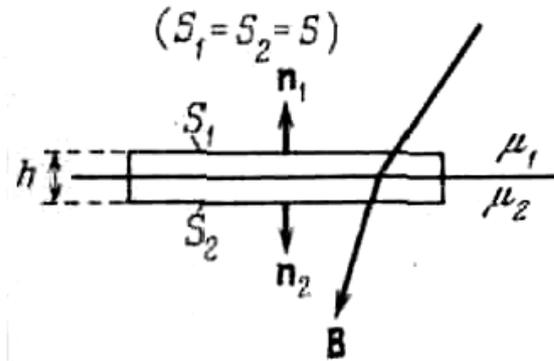


Рис. 19. Цилиндрическая поверхность с

нормаль, имеем $B_{1n} = B_{2n}$. Так как $\mu_0 \mu_1 H_{1n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n}$, то $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Теперь возьмем на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 20). Вычислим для него циркуляцию \vec{H} . При малых размерах контура циркуляцию можно представить $\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_L \rangle 2b$, где $\langle H_L \rangle$ - среднее значение H_L на перпендикулярных к границе участках контура. Если на границе раздела не текут макроскопические токи, то в пределах контура $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$. А значит и циркуляция равна нулю.

При $b \rightarrow 0$ приходим к $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, тогда $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

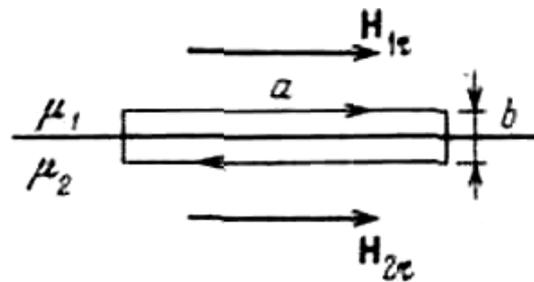


Рис. 20. Прямоугольный контур с границей раздела магнетиков

При переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} изменяются непрерывно. Вектор \vec{B} ведет себя аналогично \vec{D} , а вектор \vec{H} - аналогично \vec{E} .

Электромагнитная индукция

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции. При движении проводника в магнитном поле его свободные электроны под действием силы Лоренца приводятся в движение относительно проводника, и в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется *индукцией токов в движущихся проводниках*. На заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца $\vec{F}_{Lm} = q\vec{u} \times \vec{B}$. Наличие этой силы эквивалентно тому, что в проводнике на заряды действует эффективное электрическое поле $\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{F} / q = \vec{u} \times \vec{B}$ с ЭДС индукции между точками 1 и 2 проводника (рис. 21)

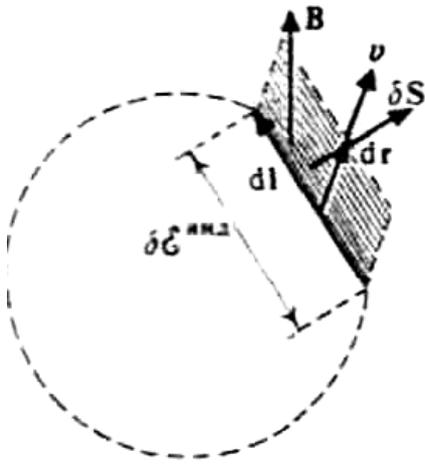


Рис. 21. К описанию индукции токов в движущихся проводниках

чическое поле $\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{F} / q = \vec{u} \times \vec{B}$ с ЭДС индукции между точками 1 и 2 проводника (рис. 21)

$$(\Delta \varepsilon^{\text{инд}})_{21} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{эф}} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

Пусть элемент длины замкнутого проводника $d\vec{l}$ движется со скоростью $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (рис. 21.). На этой длине, в соответствии с формулой (20), создается электродвижущая сила:

$$d\varepsilon^{\text{инд}} = \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{dt} (\vec{dr} \vec{B} \times d\vec{l}).$$

Смешанное произведение преобразуется: $\vec{dr} \times \vec{B} d\vec{l} = d\vec{l} \times d\vec{r} \vec{B} = -d\vec{r} \times d\vec{l} \vec{B} = -d\vec{S} \vec{B} = -\delta \Phi$, где $\delta \Phi$ - поток магнитной индукции сквозь элемент поверхности $d\vec{S} = d\vec{r} \times d\vec{l}$, образованный элементом длины $d\vec{l}$ при его движении. Подставляя полученное в (20), имеем $d\varepsilon^{\text{инд}} = -\frac{\delta \Phi}{dt}$. Для нахождения полной электродвижущей силы индукции

в замкнутом контуре просуммируем ЭДС индукции по всем элементам $d\vec{l}$ этого контура $\varepsilon^{\text{инд}} = \oint d\varepsilon^{\text{инд}} = -\frac{1}{dt} \oint \delta \Phi = -\frac{d\Phi}{dt}$, где $\oint \delta \Phi = d\Phi$.

При движении замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур. Утверждение справедливо при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура.

Примечание 1. Положительной нормалью к поверхности, в которой лежит контур, является вектор \vec{n} праввинтовой системы. 2. Вся работа, совершаемая током, индуцированным в движущемся проводнике, осуществляется за счет работы сил, приводящих проводник в движение.

Явление самоиндукции. Правило Ленца. Запишем закон электромагнитной индукции в ином виде: $\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}d\vec{S}$, где L - контур, S - поверхность, натянутая на контур L , $\varepsilon^{\text{инд}} = \int_L \vec{E}d\vec{l}$, $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$. Отсюда видно, что ЭДС индукции возникает при любых изменениях потока Φ , охватываемого контуром тока. В частности, сам линейный замкнутый ток создает поток магнитной индукции сквозь поверхность, которую он ограничивает. Следовательно, при изменении силы тока в контуре возникает ЭДС. Это явление называется *самоиндукцией*.

Поскольку ток создает вокруг себя магнитное поле по правилу правого винта, а ЭДС в контуре связана с изменением потока по правилу левого винта (рис. 22), то становится ясно, что ЭДС самоиндукции направлена так, что препятствует изменению силы тока, которая ее вызывает (правило Ленца). Величина ЭДС не зависит от величины силы тока и определяется скоростью его изменения. Сила тока в контуре связана с охватываемым им собственным потоком магнитной индукции $\Phi = LI$, где L - индуктивность контура. Поэтому

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Работа источника сторонних сил против ЭДС самоиндукции $dA = -\varepsilon_{si} Idt = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) Idt = Id\Phi$. При этом. Изменение энергии $dW = dA$ магнитного поля тока в контуре связано с изменением потока $dW = Id\Phi$, или в интегральной форме $W = LI^2 / 2$.

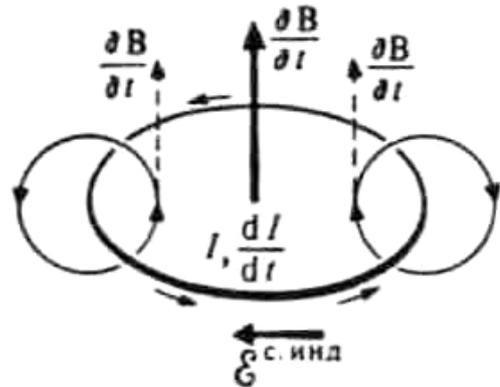


Рис. 22. Возникновение самоиндукции. Правило Ленца

Уравнения Максвелла

Ротор векторной функции. Формула Стокса. Рассмотрим линейный интеграл некоторого векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$, взятый по замкнутому пути (по кривой L). В общем случае кривая L может быть не плоской и ее можно рассматривать как границу некоторой стягивающей ее поверхности S . Этот линейный интеграл, взятый по замкнутому пути, является циркуляцией вектора F и может быть записан в форме $\Gamma = \int_L \vec{F} d\vec{l}$.

Пересечем поверхность, образовав две смежные петли L_1 и L_2 , в каждую из которых входит путь по пересекающей перегородке. С учетом выбранного направления обхода сумма двух циркуляций Γ_1 и Γ_2 будет равна первоначальной циркуляции вдоль петли L . Это объясняется тем, что путь по перегородке проходится при интегрировании в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл дают лишь те части петли, которые в сумме составляют первоначальную петлю L . Дальнейшее разделение на большее количество петель (рис. 23) L_1, L_2, \dots, L_N , не меняет величины

суммы интегралов: $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \vec{F} d\vec{l}$, или $\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \vec{F} d\vec{l}$.

Умножим и разделим правую часть выражения на S_i :

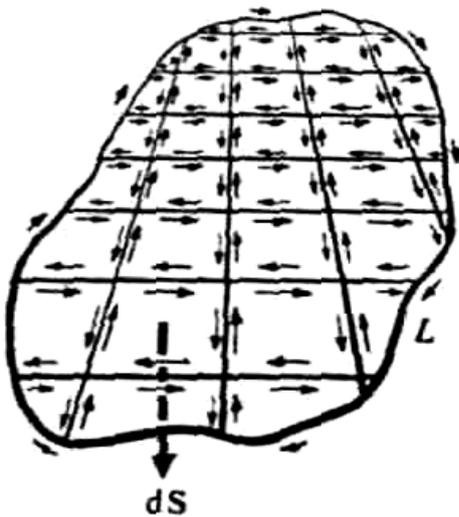


Рис. 23. К доказательству формулы Стокса

$$\Gamma = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N S_i \left[\frac{\Gamma_i}{S_i} \right] \quad (21)$$

Продолжая деление, чтобы в пределе получить локальную количественную характеристику поля \vec{F} , и увеличивая число петель, получаем петли с меньшей циркуляцией, но и с меньшей площадью. Естественно рассмотреть отношение циркуляции на петле к площади петли. Петля L произвольна и не связана с конкретной стягиваемой поверхностью, поэтому и малые петли, полученные при ее разделении, могут иметь любую ориентацию. Площадь S_i элемента поверхности, стягиваемой малой петлей L_i , оказывается

вектором, так как несет информацию о своей ориентации в пространстве.

Выберем определенную ориентацию для элемента поверхности в одной из последних стадий разбиения. Единичный вектор \vec{n} обозначает нормаль к этому элементу; стягивая петлю вокруг точки выхода \vec{n} , нельзя разрушить его постоянство. Это можно сделать, задавая с самого начала точку стягивания как точку выхода вектора \vec{n} . Тогда при выбранном направлении обхода \vec{n} будет определен заданным рельефом в малой окрестности выбранной точки стягивания и направлением обхода l_i по правилу правого винта. Предел отношения циркуляции к площади участка

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} \quad \text{или} \quad \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$$

Предел, получаемый при этой операции, представляет собой скалярную величину, связанную в векторном поле \vec{F} с точкой выхода и направлением \vec{n} . Можно сказать, что предел, полученный для определенного направления \vec{n} , является величиной проекции $\text{rot}_n \vec{F}$ на это направление.

Таким образом, можно выбрать три независимых направления, например $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, и получить три различных скалярных величины. А уже они являются компонентами вектора, называемым ротором \vec{F} .

Запишем полученный результат в виде уравнения

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l},$$

или $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$ и функция слева является первообразной.

$$\text{Получаем} \quad \int_{S_i} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}. \quad (22)$$

Выражение (22) для i -того контура с учетом (21) для всего контура длиной L , стягивающего поверхность S приводит к соотношению, являющемуся математической теоремой Стокса: $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}$, которая по структуре напоминающая формулу Гаусса (теорему дивергенции). Теорема Стокса связывает линейный интеграл от вектора с поверхностным интегралом от ротора этого вектора.

Если стягивать поверхность около иной точки, то отношение циркуляции к площади может иметь иное значение, определяемое характером

векторной функции \vec{F} . Поэтому в общем случае вектор $\text{rot } \vec{F}$ меняется от точки к точке и является векторной функцией координат. Его направление в любой точке нормально к той плоскости, содержащей эту точку, для которой величина циркуляции максимальна. Тогда величина ротора является предельным значением циркуляции, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг выбранной точки.

Наглядное представление о роторе вектора скорости можно получить, представив небольшую легкую крыльчатку, помещенную в малую окрестность заданной точки текущей жидкости. В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше по величине проекция ротора на ось крыльчатки.

Первое уравнение Максвелла. Имея форму записи закона электромагнитной индукции $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$, перепишем левую часть с учетом формулы Стокса для вектора \vec{E} в виде: $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}$.

Объединяя обе формы записи, получаем: $\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$

$$\text{Окончательно: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (23)$$

Закон сохранения заряда. Ток I , протекающий через поверхность S , равен поверхностному интегралу $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$. Поскольку $\int_S \vec{j} d\vec{S}$ есть мгновенная скорость, с которой заряды покидают замкнутый объем, а $\int_V \rho dV$ - полный заряд внутри объема в любой момент времени, то

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (24)$$

Предположим, что ток нестационарный и \vec{j} является функцией как x, y, z , так и t . И пусть рассматриваемый объем стягивается вокруг произвольной точки (x, y, z) ; тогда уравнение (24) (с учетом формулы Гаусса) переходит в зависящее от времени распределение зарядов:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV; \quad \int_V \text{div } \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad \text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (25)$$

Примечание. Объемный интеграл следует брать в определенный момент времени: его производная по времени определяется разностью объемных интегралов при t и $(t + \Delta t)$. А единственное различие между ними связано с изменением ρ , так как граница объема остается на месте. Производная по времени от плотности заряда ρ написана в виде частной производной, поскольку обычно ρ зависит от времени, так и от пространственных координат.

Уравнения (1.24) и (1.25) выражают закон сохранения заряда: заряд не вытекает из области V , если в ней не происходит уменьшение заряда.

Для стационарных токов плотность должна удовлетворять уравнению непрерывности или условию сохранения заряда: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Из закона полного тока имеем для стационарного тока:

$$\int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{или} \quad \int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad (26)$$

Сравним это выражение по формуле записи с теоремой Стокса для произвольного векторного поля \vec{F} : $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$. Очевидно, что уравнение (26) выполнится при условии $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (27)

Однако уравнение (27) недостаточно для определения $\vec{B}(x, y, z)$ при заданном векторе \vec{j} , так как различные векторные поля могут иметь одинаковый ротор. Поэтому дополним полученную связь условием, не распространяемым на поля, создаваемые любым распределением токов:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) однозначно определяют \vec{B} , если дано \vec{j} .

Для случая нестационарных токов $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, откуда следует $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$.

Подставляя в (27) получим противоречие:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) \equiv 0, \quad (29)$$

так как дивергенция ротора любой векторной функции тождественно равна нулю. Значит уравнение (27) не может быть временным для системы, в которой плотность заряда изменяется во времени. Напишем вместо уравнения (27): $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (?) = 0$, но тогда $\operatorname{div} \mu_0 \vec{j} = -\operatorname{div}(?)$, что возможно, исходя из уравнения непрерывности (25). Очевидно, что в общем случае имеются в виду сторонние - свободные заряды. Имея уравнение

$\nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$, или $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f$, и продифференцировав его по времени, получаем $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D}) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$.

Переменим порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам: $\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$. Тогда подстановкой получаем

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \text{ или } \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (30)$$

Система уравнений Максвелла. Для полей в вакууме при наличии электрического заряда и электрического тока, вызванных движением зарядов уравнения Максвелла разбиты на две пары. В первую пару входят только основные характеристики поля \vec{E} и \vec{B} :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad - \text{закон электромагнитной индукции};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad - \text{отсутствие магнитных зарядов (монополей)}.$$

Во вторую пару входят вспомогательные характеристики \vec{D} и \vec{H} :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad - \text{связь между токами проводимости и смещения и}$$

порождаемым ими магнитным полем;

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f \quad - \text{источником } \vec{D} \text{ являются сторонние заряды.}$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме и в соответствующем порядке получаются путем интегрирования с использованием формул Стокса и Гаусса:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho_f dV$$

Ток смещения. Термин “ток смещения” является условным: по существу - это изменяющееся во времени электрическое поле. Основанием для того чтобы назвать “током” величину $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}$, служит лишь то, что размерность этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним - способностью создавать магнитное поле.

Из уравнения (30) Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}$. Правую часть уравнения - векторную сумму плотности токов проводимости и смещения - называют вектором плотности полного тока.

Введение тока смещения «уравнило в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции следует, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое. Из уравнения (30) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле; в частности, он существует и внутри проводников, по которым течет переменный ток. Однако, внутри проводов ток смещения обычно пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Электромагнитные колебания

Электромагнитные колебания в RLC -контуре. Физическая система определена электромагнитным полем, локализованным телами (проводниками, катушками индуктивности, конденсаторами).

Основная задача в теории электромагнитных колебаний заключается в нахождении закона изменения во времени какой-либо электрической или магнитной величины. Рассмотрим контур из соединенных последовательно проводников сопротивлением R , катушки с индуктивностью L , конденсатора с электроемкостью C .

Примем за положительное напряжение U такое напряжение, когда верхняя пластинка конденсатора заряжена положительно (рис. 24). При

разрядке конденсатора в цепи RLC -контура возникает ток, определяемый скоростью убыли заряда на конденсаторе $I = -\frac{dQ}{dt}$.

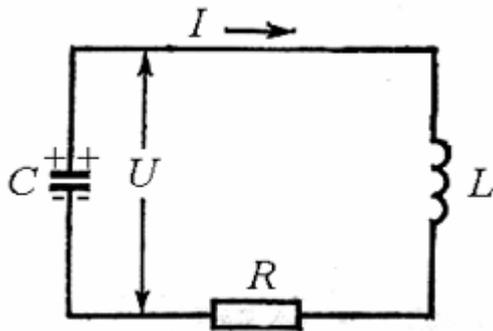


Рис. 24. Контур с последовательным соединением R , L и C . Положительное направление тока показано стрелкой

троемкостью $C = \frac{Q}{U}$.

Скорость убыли заряда непостоянна во времени, поэтому все три скалярные величины $Q(t)$, $I(t)$ и $U(t)$ являются переменными. Объединим первое уравнение с третьим, и подставим полученное $I = -C \frac{dU}{dt}$ во второе уравнение

$$U = -LC \frac{d^2U}{dt^2} - RC \frac{dU}{dt}, \text{ или } \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0 \quad (31)$$

Аналогичный вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с теми же постоянными коэффициентами получается для выбранных переменных I и Q :

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0; \quad (32)$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0.$$

Эти уравнения получаются на основе трех исходных соотношений. При выводе второго уравнения (32) добавляется операция дифференцирования во времени t .

Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка по любой переменной описывает динамику процесса в контуре.

Противодействуют токовому процессу разрядки конденсатора через контур два независимых процесса: омическое сопротивление току и процесс самоиндукции в контуре. Оба процесса ограничены напряжением на конденсаторе

$$U = L \frac{dI}{dt} + RI.$$

Связь между зарядом и напряжением на конденсаторе определена его элек-

Переходим к анализу вариантов решения уравнений (31), (32). Эти уравнения формально одинаковы и имеют одно и то же характеристическое уравнение $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$. Чтобы не путаться в обозначениях переменных во время анализа, введем их общее обозначение y .

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (33)$$

Рассмотрим три возможных случая для корней p_1 и p_2 .

1. Корни p_1 и p_2 – действительные и различные числа. Из (33) видно, что они могут быть только отрицательными. Для реализации этого случая необходимым и достаточным условием является выполнение

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0, \text{ или } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (34)$$

Общее решение дифференциального уравнения $y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. Так как $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$ и $p_1 \neq p_2$, то оба частных решения графически определены обратными экспонентами разной крутизны. Физически этот случай описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени.

Если $LC \gg 1$, или $\frac{1}{LC} \rightarrow 0$, то характеристическое уравнение имеет один отрицательный действительный корень, а второй корень равен нулю. Общее решение $y = C_1 e^{p_1 t}$.

2. Корни характеристического уравнения действительные и $p_1 = p_2$.

Если условие (34) выполняется в форме равенства $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то оба корня характеристического уравнения (33) одинаковые, отрицательные и равны $-\frac{R}{2L}$.

Общее решение уравнений (31), (32) имеет вид $y = (C_1 + C_2 t)e^{pt}$.

Первое частное решение описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени, а второе - процесс импульсного типа.

3. Корни характеристического уравнения - комплексные сопряженные числа $p_{1,2} = \alpha \pm i\beta t$. Для реализации этого случая необходимым и достаточным условием является выполнение неравенства

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (35)$$

Из уравнения (33) видно, что корни могут быть только сопряженными.

Общее решение уравнений (31), (32) можно записать в виде

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t},$$

где C_1 и C_2 - произвольные комплексные постоянные.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t;$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) = e^{\alpha t} \cos \beta t - i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Чтобы получить решение в действительной форме, воспользуемся правилом: *если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u(t) + i v(t)$, то каждая из функций $u(t), v(t)$ является решением этого уравнения.* Правило проверяется подстановкой комплексного решения в дифференциальное уравнение.

В силу этого правила функции $e^{\alpha t} \cos \beta t$, $e^{\alpha t} \sin \beta t$ являются решениями дифференциального уравнения. Зная частные решения, строим общее решение $y = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$, где C_1 и C_2 - уже действительные постоянные.

Возьмем функцию $U = A e^{-\alpha t} \cos \omega t$ в качестве решения уравнения (31). Здесь A , α , ω - постоянные величины.

Возьмем производные от этой функции:

$$\frac{dU}{dt} = A e^{-\alpha t} (-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t),$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -A e^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t]$$

Подставим в уравнение (31) и сократив на множитель $A e^{-\alpha t}$, получим $(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0$.

Это выражение будет справедливо для всех t тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ равны 0, т.е. должны выполняются условия $2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$, $\alpha^2 - \omega^2 - \frac{\alpha R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$.

Первое условие дает $\alpha = \frac{R}{2L}$, тогда из второго следует

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{\alpha R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Так как ω представляет собой действительное число, то ω^2 может иметь только положительное значение, поэтому функция $U = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$ будет решением уравнения

(31) только при $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$,

или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Это совпадает

с условием (35). График решения показан на рис. 25.

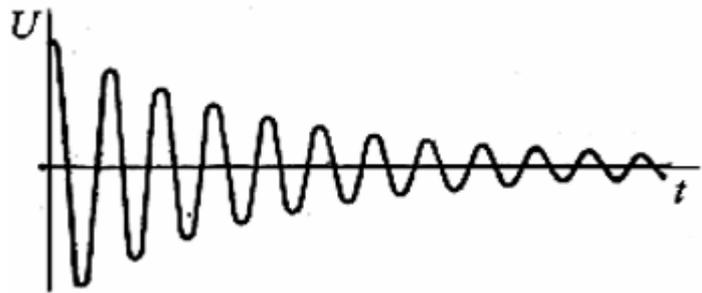


Рис. 25. График функции $U = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$

С таким же успехом и при тех же полученных α и ω можно взять в качестве решения уравнения (32) функцию $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$.

Пусть напряжение U описывается затухающей косинусоидой. Тогда ток будет зависеть от времени: $I = -C \frac{dU}{dt} = Ac\omega \left[\sin \omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \cos \omega t \right] e^{-\alpha t}$.

Здесь отношение $\frac{\alpha}{\omega}$ является мерой затухания. Если значение $\frac{\alpha}{\omega}$ велико, то член с косинусом тоже будет мал и его наличие приводит к сдвигу фазы колебания на угол $\arctg\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)$. Поэтому колебания тока отстают по фазе от колебания напряжения почти точно на четверть периода. Эти колебания сводятся к переходу энергии от конденсатора к индуктивности, т.е. от электрического поля к магнитному и обратно, и сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Относительное затухание осциллятора выражается величиной, обозначаемой Q и характеризующей “добротность” контура: $Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}$.

Добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевают совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз.

При слабом затухании добротность колебательной системы с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний.

Идеальный колебательный контур (контур Томсона, 1853 г.). Если условие (35) сделать идеально выполнимым и пренебречь величиной сопротивления ($R = 0$), то полученный LC -контур будет осциллятором без затухания с собственной частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ясно, что вторые слагаемые в

дифференциальных уравнениях (31), (32) становятся равными нулю и уравнения переписываются в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{LC}U = 0, \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (36)$$

Решением уравнения (36) является уравнение гармонических колебаний $Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, α_0 - начальная фаза.

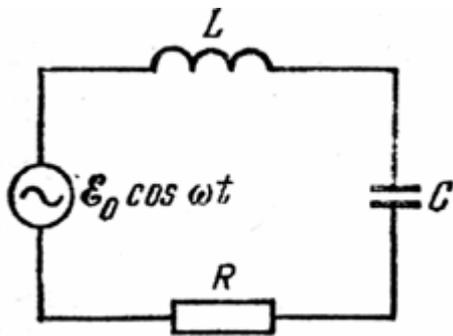


Рис. 26. RLC -контур, возбуждаемый синусоидальной ЭДС

Переменный ток. Наличие в цепи конденсатора исключает возможность протекания по ней постоянного тока. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора, на которых располагаются соответствующие заряды, полностью компенсирует действие сторонней ЭДС. Однако переменный ток в цепи при наличии конденсатора протекать может, поскольку в этом случае заряд на обкладках конденсатора

переменен, а разность потенциалов не компенсирует действия сторонней ЭДС. При введении в RLC -контур генератора переменного напряжения

U (рис. 26) выполняется равенство $IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}$.

Дифференцируем обе части по времени t и получаем:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} U. \quad (37)$$

Принимая во внимание, что $I = \frac{dQ}{dt}$, запишем уравнение (1.37) в виде

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U; \quad (38)$$

$$\ddot{Q} + \left(\frac{R}{L}\right) \dot{Q} + \left(\frac{1}{LC}\right) Q = \frac{U}{L}.$$

Примечание. Запишем уравнение для вынужденных механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}, \text{ где } x - \text{отклонение точки от положения; } m - \text{масса, } F - \text{внешняя сила;}$$

$\alpha = \frac{b}{2m}$ - декремент затухания; b - коэффициент трения. Сравним с этим уравнением уравнение (38). Получается, что роль отклонения в электромагнитном контуре играет заряд на пластинах конденсатора, роль массы - индуктивность L , роль силы - электродвижущая сила U ; роль коэффициента трения - омическое сопротивление R . Сила тока $I = \frac{dQ}{dt}$ играет роль скорости.

Продолжая и имея в виду, что $U_c = \frac{Q}{C}$, перепишем (38) в форме

$$\ddot{U}_c + 2\alpha \dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = \omega_0^2 U, \text{ где } \alpha = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{частота собственных колебаний. Колебания незатухающие. При наличии трения колебания становятся затухающими и время затухания равно } T = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R} \text{ Частота затухающих колебаний: } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Логарифмический декремент затухания: $\Theta = \alpha T$, где $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - период собственных колебаний.

Если сторонняя ЭДС изменится по закону $U = U_0 e^{i\omega t}$, то сила тока в уравнении (37) должна меняться со временем по закону $I = I_0 e^{i\omega t}$. Тогда

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \text{ и уравнение (37) принимает вид } \left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) I = i\omega U.$$

Разделим обе части на $i\omega$, тогда уравнение примет вид закона Ома $IZ = U$, где $Z = R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]$ называется *импедансом*. Он играет роль сопротивления, но, будучи комплексной величиной, позволяет учесть не только соотношение между амплитудами силы тока и напряжения, но и соотношение между их фазами.

Связь между их амплитудами определяется через модули величин

$$|I||Z| = |U|, \text{ где } |Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}.$$

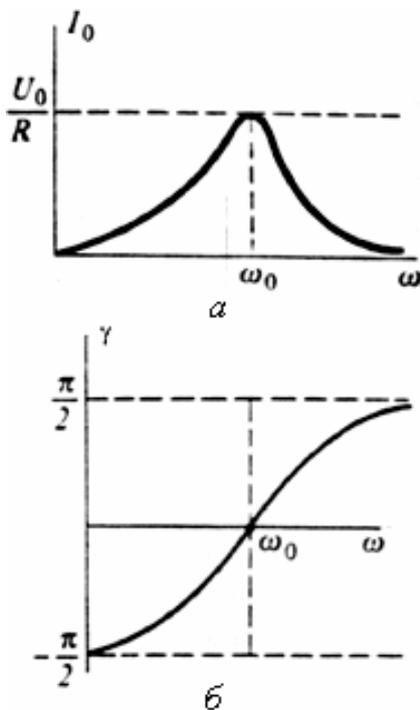


Рис. 27. Зависимость силы тока (а) и сдвига фаз (б) при резонансе напряжений

Зависимость амплитудного значения силы тока I_0 и разность фаз γ между током и внешним напряжением от частоты

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Сила тока I достигает максимума при частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, которая называется *резонансной частотой* контура. При этом $I_0 = \frac{U_0}{R}$, а разность фаз $\gamma = 0$, т.е. в цепи как бы нет емкости и индуктивности. При этой частоте ($\omega = \omega_0$) напряжения на емкости и индуктивности взаимно компенсируются, контур ведет себя как чисто активное сопротивление. Поэтому резонанс называют *резонансом напряжений* (рис. 27). В достаточно добротном контуре амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе может быть во много раз больше амплитуды приложенного к контуру напряжения.

Если силы токов в емкости I_C и индуктивности I_L компенсируют друг друга, то резонанс называется *резонансом токов* и характеризуется большими значениями токов в контуре по сравнению с подводимыми токами.

Нестационарный случай (Пример Бореля). Вариации параметра могут не быть гармонической функцией из-за наличия даже сколь угодно малой величины возмущений λ . Например $m\dot{x}^2/2 + kx^2/2 = \text{const} + \lambda t$ и, взяв еще одну производную, получим $(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = \lambda$.

Тогда при $\lambda = 0$ получим гармонические колебания, но если $\lambda > 0$, исключается всякая возможность равенства нулю $\dot{x} = 0$, а значит и самого последовательного чередования значений: максимум, ноль, минимум и т.д., то есть самого представления гармонического колебания.

Электромагнитные волны

Изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле, которое порождает изменяющееся магнитное поле, которое, в свою очередь, порождает изменяющееся электрическое поле и т.д. В результате образуются сцепленные между собой электрические и магнитные поля, составляющие электромагнитную волну. Способ существования электромагнитной волны делает невозможным ее неподвижность и постоянство напряженностей ее полей во времени, поэтому и движущиеся равномерно и прямолинейно заряды, и постоянные токи не излучают.

Волновое уравнение. Основными характеристиками электромагнитной волны являются энергия и плотность потока энергии. Величина $W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) dV$ характеризует электромагнитную энергию, заключенную в объеме V .

Величина вектора Пойнтинга (1884 г.) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ является плотностью потока энергии сквозь поверхность, ограничивающую (мысленно или реально) объем V .

Уравнение вида $\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ называют *волновым уравнением*,

или однородным уравнением Даламбера, где Φ - формальное обозначение функции $\Phi(x, y, z, t)$. Если справа стоит ноль, то уравнение однородное.

Возьмем одномерный случай $\Phi = \Phi(x)$, тогда $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$. Непосредственной проверкой (подстановкой) можно убедиться, что решениями

этого уравнения является любая функция Φ от аргумента $t - \frac{x}{v}$ или $t + \frac{x}{v}$.

Функции $\Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\Phi\left(t + \frac{x}{v}\right)$ представляют волны, движущиеся в направлении положительных и отрицательных значений оси X соответственно, со скоростью v .

Общее выражение для бегущей плоской гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси, имеет вид

$$\Phi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + B \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Для вакуума $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, поэтому $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ постулируется

постоянной величиной, исходя из диэлектрических и магнитных свойств вакуума.

Электромагнитную волну называют *плоской*, если вектор волны имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения.

Учитывая, что для плоской волны $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ -

волновое число, запишем решение волнового уравнения в форме $\Phi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$. Чтобы освободиться от системы координат перепишем решение с помощью векторных обозначений. Пусть волновой вектор \vec{k} направлен параллельно оси X в сторону положительных значений. Тогда $\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ при $\vec{k}\vec{r} = kx$. Направление, характеризуемое волновым вектором, называется *лучем*. Векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны \vec{k} , т.е. направлению распространения, а это означает, что электромагнитная волна является поперечной.

Шкала электромагнитных волн. Энергия светового кванта $\varepsilon = \hbar\omega = h\nu$, где h - постоянная Планка, \hbar - новая постоянная Планка. Откуда следует, что случай $\nu = \infty$ невозможен, т.к. кванты обладали бы энергией $\varepsilon = \infty$. В настоящее время нет свидетельств ограничения энергии фотона снизу.

Диапазоны частоты электромагнитных волн

Диапазон волн	Границы диапазонов	
	по длинам (λ) волн (нм)	по энергии (ϵ) квантов (МэВ)
Гамма излучение	0,0012	10^6
Рентгеновское	0,0012-12	1,0 - 100
Ультрафиолетовое	12-380	3,2 - 100
Видимый свет	380-760	1,6 - 3,2
Инфракрасное	760-1000000	$1,2 \cdot 10^{-3}$ - 1,6
Радиоволны	1 мм	$1,2 \cdot 10^{-3}$

Электромагнитная природа света. Значение электромагнитной постоянной в уравнениях Максвелла $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,1 \cdot 10^8$ м/с совпало со скоростью света в вакууме, по измерениям Физо (1849 г.) $c = 3,15 \cdot 10^8$ м/с; поперечность электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла, а из экспериментов поляризации света (Юнг, 1817 г.) следует поперечность световых волн.

ОПТИКА

Законы отражения и преломления

Геометрическая оптика. Распространение света рассматривается как движение световой энергии по *лучам*. Плоскость, перпендикулярная лучам света, называется *волновым фронтом*.

Приближение геометрической оптики - это переход от уравнений, описывающих волны, к уравнениям, описывающим лучи.

В геометрической оптике не учитываются эффекты дифракции.

В геометрической оптике оптические длины всех путей, соединяющих точку предмета с точкой изображения, одинаковы. Это утверждение называется *принципом таутохронизма*.

Законы отражения и преломления. 1. Частота электромагнитной волны при отражении и преломлении не изменяется: $\omega_{\text{пд}} = \omega_{\text{от}} = \omega_{\text{пр}}$.

2. Волновые векторы (лучи) падающей, отраженной и преломленной

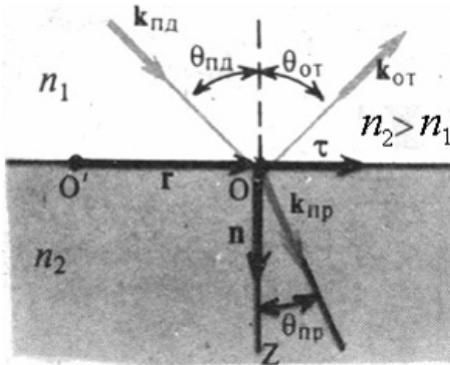


Рис. 28. Преломление света при $n_2 > n_1$

волны лежат в одной плоскости. Если $\vec{k}_{\text{пад}} \cdot \vec{r} = 0$, то $\vec{k}_{\text{от}} \cdot \vec{r} = \vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r} = 0$, где \vec{r} - вектор с началом отсчета в плоскости раздела сред, перпендикулярной вектору \vec{n} (рис. 28).

3. Угол падения равен углу отражения: $\theta_{\text{пад}} = \theta_{\text{от}}$.

Принцип Ферма (П. Ферма 1657 г.).

Лучи от точки предмета идут по разным путям, но все они затрачивают одно и то же время на прохождение своего пути до встречи в точке изображения. Принцип Ферма как

«принцип наименьшего времени» может быть высказан в форме утверждения, что лучом, соединяющим две точки, является тот луч, который делает стационарным время, затрачиваемое светом на его прохождение.

Пусть точки P_1 и P_2 находятся в однородных средах с показателями

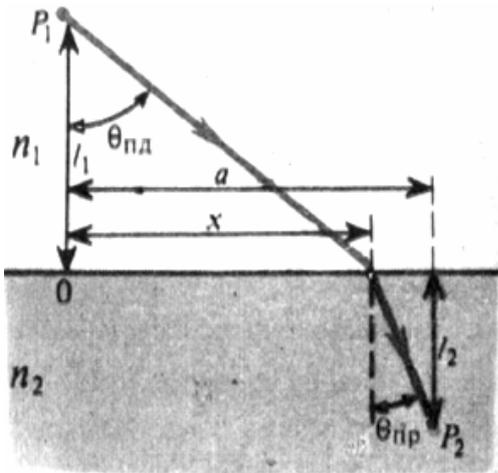


Рис. 29. К выводу закона преломления с помощью принципа Ферма

Учитывая, что

$$\frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \sin \theta_{\text{пад}}; \quad \frac{a-x}{\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = \sin \theta_{\text{пр}}, \quad \text{получаем} \quad n_1 \sin \theta_{\text{пад}} = n_2 \sin \theta_{\text{пр}},$$

что совпадает с законом Снелла.

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления среды с преломленным лучом относительно среды с падающим лучом. Показатель преломления n_{21} второй среды относи-

преломления n_1 и n_2 и разделенных плоской границей (рис. 29.). Время распространения света из P_1 в P_2

$$t = \left(\frac{n_1}{c} \right) \sqrt{l_1^2 + x^2} + \left(\frac{n_2}{c} \right) \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2},$$

где $v = c/n$ зависит от переменной x .

$$\text{Условие стационарности} \quad \frac{dt}{dx} = 0$$

принимает вид

$$\frac{n_1 x}{c \sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (a-x)}{c \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = 0$$

тельно первой называется относительным показателем преломления. Если одна из сред - вакуум, то $n_1 = \frac{c}{v_1}$ и $n_2 = \frac{c}{v_2}$ - абсолютные показатели преломления сред 1 и 2, относительно вакуума.

Полное внутреннее отражение ($n_2 < n_1$). При некотором значении угла падения, называемом предельным углом, угол преломления становится равен $\frac{\pi}{2}$, и преломленный луч движется вдоль поверхности раздела без выхода во вторую среду (рис. 30, а, б).

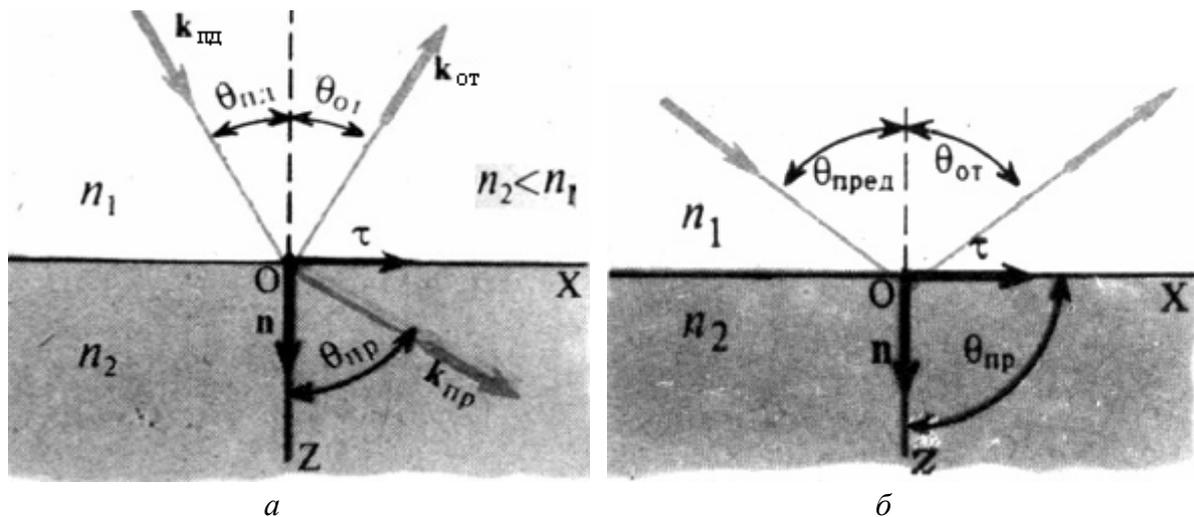


Рис. 30. Преломление света при $n_2 < n_1$ (а). При предельном угле падения (б) угол преломления становится равным $\pi/2$

Поляризация света

Закон Брюстера. При отражении света от границы со среды с большим показателем преломления ($n_2 > n_1$) фаза отраженной волны изменится на π , т.е. вектор напряженности электрического поля (магнитного поля) изменяет направление на обратное. При отражении света от границы со средой с меньшим показателем преломления не происходит изменения фазы вектора \vec{E} . Преломленная волна не претерпевает изменения фазы.

Плоскость, в которой лежит вектор падающей волны и нормаль к поверхности раздела в точке падения луча, называется *плоскостью падения*.

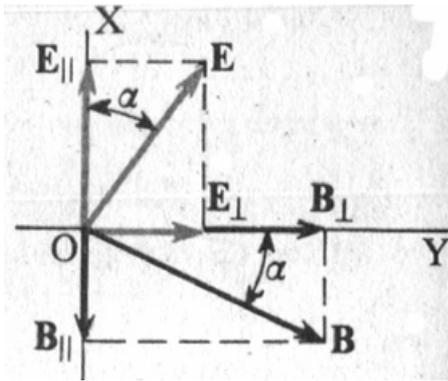


Рис. 31. Разложение плоской волны на две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях

Обозначим индексом // компоненты векторов, лежащих в плоскости падения луча, а индексом \perp - в перпендикулярной плоскости (рис. 31, 32). На основании принципа суперпозиции векторы падающей, отраженной и преломленной волн имеют вид:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_{\text{пад//}} + \vec{E}_{\text{пад}\perp};$$

$$\vec{E}_{\text{от}} = \vec{E}_{\text{от//}} + \vec{E}_{\text{от}\perp};$$

$$\vec{E}_{\text{пр}} = \vec{E}_{\text{пр//}} + \vec{E}_{\text{пр}\perp}.$$

Аналогично представляются и компоненты векторов индукции \vec{B} .

Поведение вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух сред разной оптической плотности рассмотрено для двух компонент разложения вектора падающей волны: вектор перпендикулярен плоскости падения (рис. 32) и вектор - в плоскости падения (рис. 34). Кривые, приведенные на графиках (рис. 33, 35), получаются графическим решением формул Френеля.

У волны, электрический вектор которой лежит в плоскости падения (рис. 34) при угле падения θ_B , отраженная волна полностью отсутствует (рис. 35). Это явление называется явлением Брюстера (1815 г.).

Угол θ_B находится из условия

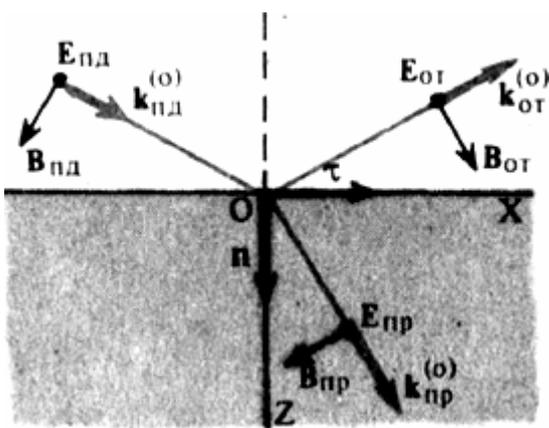


Рис. 32. Напряженность электрического поля падающей волны перпендикулярна плоскости падения

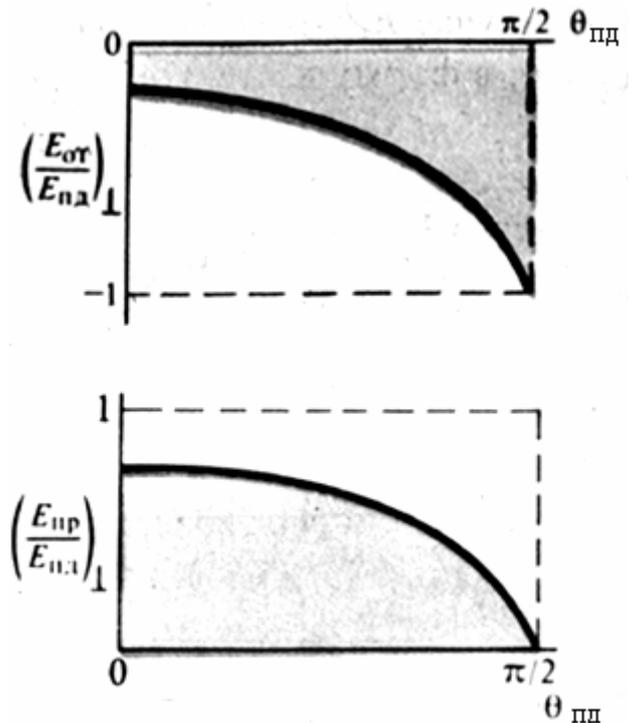


Рис. 33. Зависимости $(E_{\text{от}}/E_{\text{пад}})_{\perp}$ и $(E_{\text{пр}}/E_{\text{пад}})_{\perp}$ от угла падения при $n_1 < n_2$

$$\left(\frac{E_{от}}{E_{нд}} \right)_{//} = 0, \text{ которое соответствует выполнению } \theta_B + \theta_{пр} = \frac{\pi}{2}.$$

На основании принципа Ферма $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_{пр}$ при

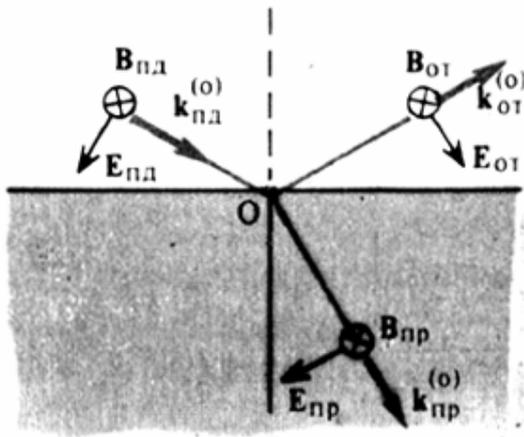


Рис. 34. Напряженность электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения

$$n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B \text{ получа-}$$

ем $\text{tg } \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$. Эта формула называется законом Брюстера, а θ_B - углом Брюстера.

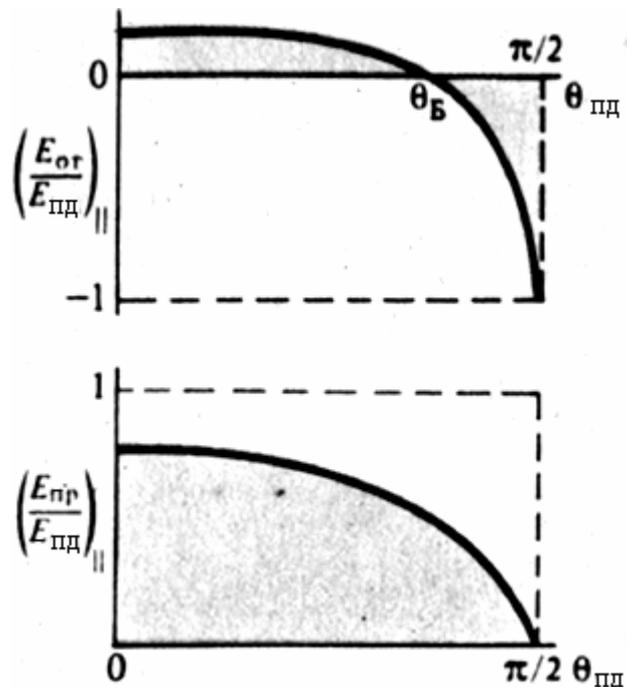


Рис. 35. Зависимости $(E_{от}/E_{нд})_{//}$ и $(E_{пр}/E_{нд})_{//}$ от угла падения при $n_1 < n_2$

На рис. 35 видно, что при $\theta_{нд} < \theta_B$ отношение $\left(\frac{E_{от}}{E_{нд}} \right)_{//}$ - положительно, а при $\theta_{нд} > \theta_B$ - отрицательно. Это и означает, что при переходе через угол Брюстера фаза отраженной волны скачком изменяется на π .

Поскольку в падающей под углом Брюстера волне, лежащая в плоскости падения компонента вектора $\vec{E}_{нд}$ не отражается, в отраженной волне имеется компонента напряженности электрического поля, перпендикулярная плоскости падения, т.е. отраженный свет полностью поляризован.

Механизм поляризации света. Явление Брюстера обусловлено поперечностью электромагнитных волн. Входящая в диэлектрическую среду световая волна возбуждает колебание диполей, которые излучают вторич-

ную волну. Вторичная волна распространяется со средней скоростью, характерной для среды, а первичная волна после входа в среду продолжает распространяться с начальной скоростью. Первичная и вторичная волна складываются между собой. В момент излучения вторичная волна имеет ту же фазу колебаний, что и первичная, но вследствие неодинаковых фазовых скоростей распространения в среде между волнами образуется разность фаз, в результате чего вторичная волна гасит первичную. В итоге (на длине замещения) первичная волна замещается вторичной, которая распространяется со скоростью, характерной для среды. Линия колебаний электронов коллинеарна вектору \vec{E} волны. При угле Брюстера, когда угол между преломленной и отраженной волнами должен был бы составить 90° , электроны среды, порождающие преломленную волну, колеблются вдоль линии, параллельной направлению, в котором должна распространяться отраженная волна. Вдоль линии своих колебаний (ось диполя) электромагнитная волна не излучается. Поэтому в этом случае отраженная волна отсутствует.

Примечание. Для продольных волн все направления, перпендикулярные линии распространения, эквивалентны. Для поперечных волн они не эквивалентны. Электромагнитные волны являются поперечными, и их свойства зависят от ориентировки векторов \vec{E} и \vec{B} .

Монохроматические волны являются поляризованными. У хаотического света, представляющего собой суперпозицию волн со случайными фазами и амплитудами напряженности, поля волн описывают в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн, нерегулярную, чрезвычайно хаотическую линию. Если эти колебания вектора напряженности не имеют никаких преимущественных направлений, то волна называется неполяризованной.

Интерференция света

Принцип суперпозиции при сложении световых волн. Две плоские монохроматические бегущие волны с одинаковой частотой, распространяющиеся в одном и том же направлении, в результате сложения дают плоскую монохроматическую волну той же частоты, распространяющуюся в том же направлении.

Если слагаемые волны имеют разные частоты или различные направления распространения, то в результате их сложения не будет получена плоская волна:

1. Разные частоты, направление распространения одинаково. Результат - *биения* с частотой $\Omega = \omega_0 - \omega_1$.

2. Одинаковые частоты, направление распространения противоположное. Результат - *стоячие волны*.

Интенсивность при сложении световых волн. Интенсивность волны, являющейся результатом суперпозиции двух или нескольких волн, определяется соотношением их фаз и поляризованностей.

Интерференцией называется изменение средней плотности потока энергии, обусловленное суперпозицией электромагнитных волн.

Для монохроматической волны интенсивность

$$I = \frac{1}{2} E_0^2, \quad (39)$$

где E_0 - амплитуда световой волны.

Умножив (39) на ε , получим среднюю объемную плотность энергии; умножив (39) на $\upsilon\varepsilon$, получим плотность потока энергии (ε - диэлектрическая проницаемость среды, υ - скорость света в среде).

Если складываются волны с различными амплитудами, то

$$I = \frac{1}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \delta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cos \delta,$$

где $I_1 = \frac{1}{2} E_{01}^2$, $I_2 = \frac{1}{2} E_{02}^2$ - интенсивности слагаемых волн.

Ясно, что суммарная интенсивность изменяется от минимального значения $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ при $\cos \delta = -1$, до максимального: $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ при $\cos \delta = 1$.

При суперпозиции двух монохроматических волн с одинаковой амплитудой интенсивность определяется еще проще:

$$I = E_0^2 (1 + \cos \delta) = 2I_0(1 + \cos \delta),$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, а $I_0 = \frac{E_0^2}{2}$ - интенсивность каждой из световых волн, интерференцию которых и выражает вышеприведенная амплитуда.

Примечание. Величина $\cos \delta$ для каждой точки пространства постоянна.

Понятие когерентности. Время разрешения. Каждый прибор измеряет лишь некоторое среднее значение величины по малому промежутку времени, называемому *временем разрешения*.

Приборов, которые имели бы разрешение в один период световых колебаний (10^{-11} , с), нет, поэтому заключаем, что в течение многих десятков

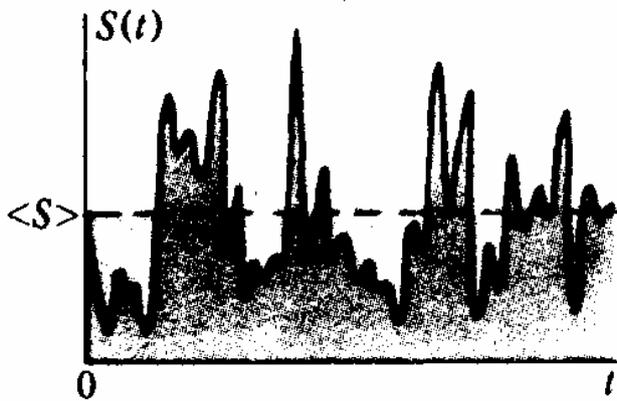


Рис. 36. Флуктуации плотности потока энергии при усреднении по промежуткам времени меньшим τ_k

разрешения прибора.

При увеличении промежутка времени усреднения реальная кривая потока от времени сглаживается, высота пиков уменьшается, резкие изменения ослабляются. При приближении времени усреднения к τ_0 , сплошная кривая приближается к пунктирной. При временах усреднения порядка τ_0 изменения плотности потока энергии волн полностью исчезают. Значит, все эти изменения происходят в промежутке времени меньше τ_0 , и τ_0 - масштаб флуктуаций. Дальнейшее увеличение промежутка времени усреднения не изменяет среднего значения. Таким образом, время τ_0 - характерное время рассматриваемого процесса. Такие характерные времена называют *временами когерентности* τ_k . Путь, проходимый световым пучком за время когерентности, называется *длиной когерентности* l_k .

Способы получения когерентных лучей. Чтобы осуществить двухлучевую интерференцию, необходимо иметь две монохроматические волны одинаковой частоты. Такие волны по определению имеют бесконечную продолжительность по времени и ясно, что в природе они не существуют.

Можно получить волны, пригодные к интерференции, если они возникают в результате деления одной и той же волны на две. Обе части волны в отношении изменений их фаз во времени являются копиями исходной. Но полной аналогии с интерференцией монохроматических волн

или даже сотен периодов колебаний волны величины напряженности прибором считаются, т.е. $\langle E \rangle = 0$. Поэтому экспериментально можно изучать не средние величины напряженности поля волны, а средние величины от квадрата напряженности, т.е. потоки энергии волн (рис. 36). Результат измерения потока энергии волн уже в общем случае не нулевой, но, очевидно, сильно продолжает зависеть от времени

не получится, т.к. каждая из волн имеет конечное время когерентности, в течение которого они могут интерферировать. Назовем два способа: делением амплитуды волны (на пластине); делением фронта волны (на щелях).

Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. При распространении света в среде его скорость уменьшается, что влечет за собой при постоянстве частоты уменьшение длины волны. Тогда волновое число в среде связано с волновым числом в вакууме соотношением

$$k_{\text{ср}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср}}} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{n2\pi}{\lambda} = nk, \text{ где } v = \frac{c}{n} \text{ скорость волны в среде, } n - \text{ абсолютный показатель преломления среды.}$$

Разность фаз, возникающая за счет прохождения геометрического расстояния Δ_{Γ} в среде, равна $\delta = k_{\text{ср}}\Delta_{\Gamma} = nk\Delta_{\Gamma} = k\Delta$; $\Delta = n\Delta_{\Gamma}$ - оптическая длина пути.

Отражение от параллельных поверхностей. Пусть n_1 и n_2 показатели преломления среды и пленки толщиной d . Рассчитаем разность оптических путей лучей, отразившихся от нижней и верхней поверхностей пленки (рис. 37):

$$\Delta = (|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n_1;$$

$$|AB| + |BC| = 2d \frac{1}{\cos \theta_{\text{пд}}};$$

$$|AD| = 2d \operatorname{tg} \theta_{\text{пр}} \sin \theta_{\text{пд}}$$

Принимая во внимание закон преломления:

$$\frac{\sin \theta_{\text{пд}}}{\sin \theta_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1}; \text{ получим}$$

$$\Delta = 2d \left[n_2 \frac{1}{\cos \theta_{\text{пр}}} - \operatorname{tg} \theta_{\text{пр}} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \sin \theta_{\text{пр}} n_1 \right] = 2dn_2 \cos \theta_{\text{пр}} \quad (40)$$

Эта формула показывает, что все лучи, падающие на пленку под одним углом, разделяются на два луча и после отражений от поверхностей имеют одно и то же направление распространения, будучи параллельны друг другу. Между лучами, отразившимися от разных поверхностей пленки, возникает разность хода, и они принципиально могут интерферировать между собой. Максимум интерференции наступает при условии:

$$\Delta = m\lambda, \quad (41)$$

где λ - длина волны в вакууме.

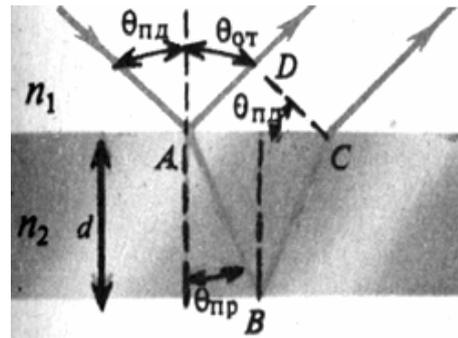


Рис. 37. К расчету оптической длины пути в тонких пленках

Наблюдать такую интерференцию можно двумя способами: фокусировать лучи с помощью линзы, в результате чего в фокальной плоскости линзы возникнут полосы интерференции; либо увидеть их глазами, аккомодированными на бесконечность.

Линии равного наклона. Если на пластинку падает пучок непараллельных лучей, то в отраженном пучке будут присутствовать лучи разных направлений распространения с соответствующими (разными) углами преломления. Те из них, для которых удовлетворяется последнее условие (41), дают при интерференции максимум интенсивности. Значит, если с помощью линзы в ее фокальной плоскости образовать интерференционную картину, то интерференционная линия определенной интенсивности соответствует углу $\theta_{\text{пр}}$ (40) или, что то же самое, определенному углу падения или отражения. Иными словами, эта линия соответствует определенному углу наклона образующих ее лучей к поверхности пластины. Поэтому такие интерференционные линии называют *линиями равного наклона*. Они локализованы на бесконечности.

Если пучок света, падающий на пленку, аксиально симметричен, то линии равного наклона - окружности.

Дифракция света

Принцип Гюйгенса. Если в некоторый момент времени известен фронт световой волны, то для определения положения фронта волны через промежуток времени Δt надо каждую точку фронта рассматривать как источник сферической волны и построить около каждого такого источника сферу радиуса $c\Delta t$.

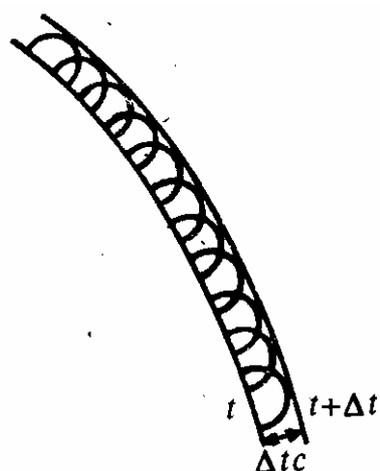


Рис. 38. Иллюстрация принципа Гюйгенса

и построить около каждого такого источника сферу радиуса $c\Delta t$. Поверхность, огибающая вторичные сферы волны (рис. 38.), представляет фронт волны через промежуток времени Δt .

Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопросы об интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям, не учитывая, таким образом, явление интерференции. При учете интерференции принцип получил название Гюйгенса - Френеля.

Принцип Гюйгенса - Френеля (1818 г.). Представление о том, что каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, было дополнено Френелем в виде утверждения, что эти источники когерентны между собой, а испускаемые ими вторичные волны интерферируют. Таким образом, при анализе распространения волн необходимо принять во внимание их фазу и амплитуду, что позволяет рассматривать вопрос об интенсивности результирующей световой волны в любой точке пространства, т.е. определять закономерности распространения света.

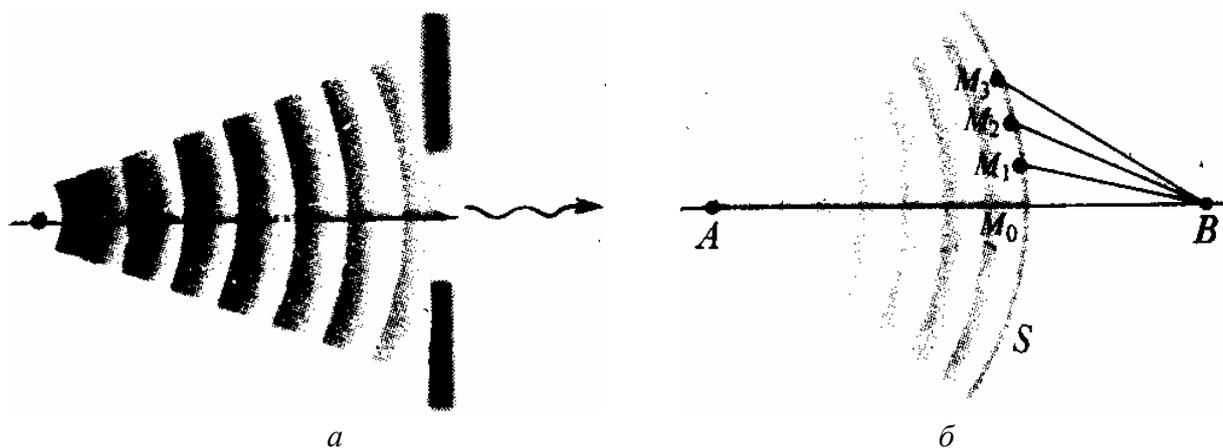


Рис. 39. Распространение света через отверстие конечных размеров (*а*). К определению зон Френеля (*б*)

Ограничения Френеля. Сферическая (или плоская) волна падает на непрозрачный экран с отверстием (рис. 39, *а*). Требуется найти распределение интенсивности света за экраном. Для решения этой задачи с помощью принципа Гюйгенса - Френеля делаются два предположения: 1. Непрозрачные части экрана не являются источниками вторичных волн (обратные вторичные волны не возникают); 2. В отверстии точки волнового фронта - такие же источники вторичных волн, какими они были бы при отсутствии непроницаемых частей экрана.

Зоны Френеля. Пусть *A* - источник сферической волны, *S* - вспомогательный волновой фронт в некоторый момент времени. Найдем интенсивность волн в точке *B* с помощью принципа Гюйгенса - Френеля. Для решения разобьем поверхность *M* на кольцеобразные зоны такого размера, чтобы расстояния от краев каждой последующей зоны до *B* отличались на $\frac{\lambda}{2}$ (рис. 39, *б*).

Обозначая M_0, M_1, M_2, \dots - границы зон, запишем это условие в виде

$$M_1 B - M_0 B = \frac{\lambda}{2};$$

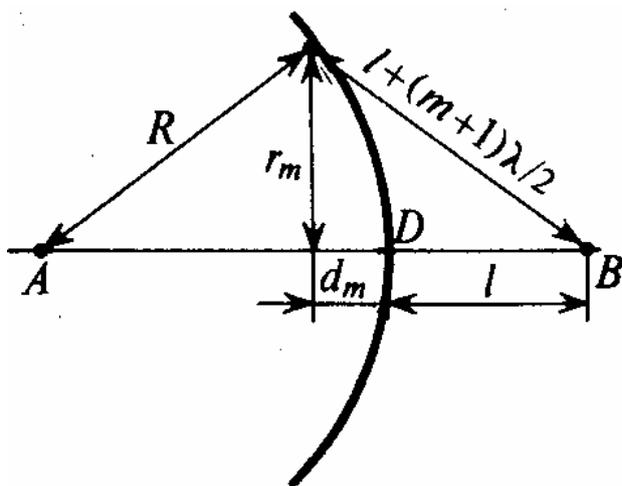
$$M_2 B - M_1 B = \frac{\lambda}{2};$$

... ..

$$M_m B - M_{m-1} B = \frac{\lambda}{2}.$$

Колебания от соседних зон проходят до точки B расстояния, отличающиеся на $\frac{\lambda}{2}$, поэтому в точку B они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут ослаблять друг друга. Поэтому амплитуда результирующего светового колебания в точке B

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m, \quad (42)$$



где A_1, A_2, \dots, A_m - амплитуды колебаний от 1-й, 2-й, ..., m -й зон.

Для оценки амплитуд колебаний найдем площади зон Френеля (рис. 40). Радиусы зон находятся с помощью построения: r_m - радиусы зон; R - радиус кривизны кривой сферической волны D - точка пересечения фронта с прямой AB ; d_m - расстояние от D до проекции границы соответствующей зоны на прямую AB . Центральная зона называется нулевой

Рис. 40. К расчету радиусов и площадей зон Френеля

($r_m = 0$). Величина радиуса r_m определяется из

$$r_m^2 = R^2 - (R - d_m)^2 = \left[l + (m + 1) \frac{\lambda}{2} \right]^2 - (l + d_m)^2,$$

из которого с точностью до величины $(\lambda/2)^2$ следует

$$r_m^2 = \frac{Rl(m+1)\lambda}{R+l}; \quad d_m = \frac{l(m+1)\lambda}{(R+l)2}. \quad (43)$$

Тогда площадь нулевой зоны $S_0 = \pi r_0^2 = \frac{\pi R l \lambda}{R + l}$.

Для суммарной площади нулевой и первой зоны получим $S_{01} = \frac{\pi R l 2\lambda}{R + l}$, поэтому $S_1 = S_{01} - S_0 = \frac{\pi R l \lambda}{R + l}$, т.е. равна площади нулевой зоны. То же происходит и для других зон. Это означает, что при не слишком больших m , площади зон Френеля примерно одинаковы.

При определении площадей зон пренебрегают кривизной поверхности волнового фронта. Площадь кольцевой зоны на сферической поверхности волнового фронта принимается равной площади ее проекции на плоскость перпендикулярную прямой AB . Эти два условия хорошо выполняются, если радиусы зон Френеля много меньше радиуса кривизны волнового фронта. А так как длина рассматриваемых волн - малая величина, то ясно, что эти условия хорошо выполняются для большего числа зон.

Таким образом, построение зон Френеля разбивает волновую поверхность сферической волны на равные по площади зоны. Согласно предположению Френеля, действие отдельных зон в точке B тем меньше, чем больше угол φ_m между нормалью \vec{n} к поверхности зоны и направлением на B , т.е. действие зон постепенно убывает от центральной к периферическим (до нуля). Кроме того, интенсивность излучения в направлении точки B уменьшается с ростом m и вследствие расстояния от зоны до точки B .

Учитывая оба этих фактора, можно записать $A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots$

Общее число N зон Френеля, уместяющихся на полусфере очень велико. Например, $N = \frac{2\pi R^2}{\pi R l \lambda} (R + l) = 8 \cdot 10^5$ при $R = l = 0,1$ м и $\lambda = 0,5$ мкм.

Поэтому в качестве допустимого приближения будем считать, что амплитуда колебаний A_m от некоторой m -й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т.е. $A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$.

Тогда выражение (42) можно записать в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \quad (44)$$

Выражения в скобках равны нулю, а оставшаяся часть амплитуды последней зоны $\pm \frac{A_m}{2}$ ничтожно мала.

Получилось, что амплитуда, создаваемая в произвольной точке B сферической волновой поверхности, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной. Это значит, что действие всей волновой поверхности на точку M сводится к действию ее малого участка, меньшего центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке B будет равна A_1 , т.е. в два раза превзойдет амплитуду A (формула (44) см. на стр. 61). Соответственно интенсивность света в точке B будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками A и B . Следовательно, распространение света от A к B происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень малого канала вдоль AB , т.е. прямолинейно. Таким образом, принцип Гюйгенса - Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

Дифракция от круглого отверстия. Поставим на пути сферической или плоской световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса r_0 . Расположим экран так, чтобы перпендикуляр, опущенный из источника света, попал в центр отверстия (рис. 41). На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку P . При радиусе отверстия r_0 , значительно меньшем, чем длины a и b , длину a можно считать равной расстоянию от источника S до преграды, а длину b - расстоянию от преграды до точки P . Если расстояния a и b удовлетворяют соотношению

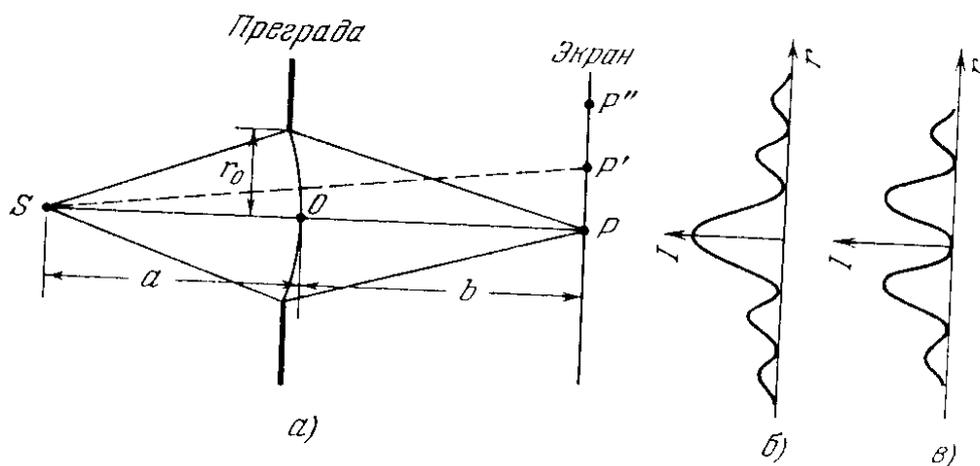


Рис. 41. Дифракция от круглого отверстия

$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$, где m - целое число, то отверстие оставит открытым ровно m первых зон Френеля, построенных для точки P (формула (44)).

Следовательно, число m открытых зон Френеля определится

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (45)$$

В соответствии с (42) амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m \quad (46)$$

Перед A_m берется знак плюс, если m нечетное, и минус, если m четное. Представим (46) в виде, аналогичном (44), и положив выражения в скобках равными нулю, приходим к формулам

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m - \text{нечетное}), \quad A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m - \text{четное}).$$

Амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы. Поэтому $(A_{m-1}/2) - A_m$ можно заменить через $-A_m/2$. В результате получится $A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$, где знак плюс берется для нечетных m и минус — для четных.

Для малых m амплитуда A_m мало отличается от A_1 . Следовательно, при нечетных m амплитуда в точке P будет приближенно равна A_1 , при четных m - нулю.

Если убрать преграду, амплитуда в точке P станет равной $A_1/2$ (формула (44)). Таким образом, преграда с отверстием, открывающим небольшое нечетное число зон, не только не ослабляет освещенность в точке P , но, напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в два раза, а интенсивности - почти в четыре раза.

Выясним характер дифракционной картины на экране за преградой (см. рис. 41). Вследствие симметричного расположения отверстия относительно прямой SP освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния r от точки P . В самой этой точке интенсивность будет достигать максимума или минимума в зависимости от того, каким - четным или нечетным - будет число открытых зон Френеля. Пусть, например, это число равно трем. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности. Картина зон Френеля для точки P дана на рис. 42, *а*. Теперь сместимся по экрану в точку P' . Ограниченная краями отверстия картина зон Френеля для точки P' имеет вид, показанный на рис. 42, *б*. Края отверстия закроют часть третьей зоны, одновременно час-

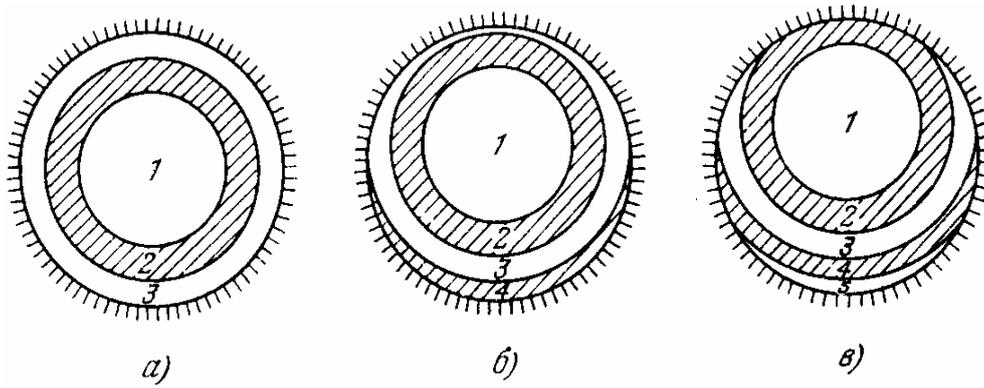
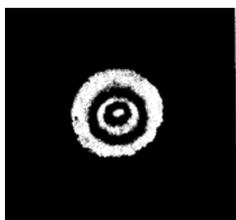


Рис. 42. Картины зон Френеля при дифракции от круглого отверстия

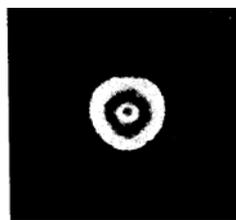
точно откроется четвертая зона. В итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении точки P' достигнет минимума. Если сместиться по экрану в точку P'' , края отверстия частично закроют не только третью, но и вторую зону Френеля, одновременно откроется частично пятая зона (рис. 42, в). В итоге действие открытых участков нечетных зон перевесит действие открытых участков четных зон, и интенсивность достигнет максимума, но более слабого, чем максимум, наблюдавшийся в точке P' .

Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое (m - нечетное), либо темное (m - четное) пятно (рис. 43). Ход интенсивности I с расстоянием r от центра картины изображен на рис. 41, б (для нечетного m) и на рис. 41, в (для четного m). При перемещении экрана параллельно самому себе вдоль прямой SP картины, изображенные на рис. 43, будут сменять друг друга (согласно (45) при изменении b значение m становится то нечетным, то четным).

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно; чередования светлых и темных колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной.



Нечетное m



Четное m

Рис. 43. Дифракционная картина от круглого отверстия

Дифракция от круглого диска. Поместим между источником света S и точкой наблюдения P непрозрачный круглый диск радиуса r_0 (рис. 44). Если

диск закроет m первых зон Френеля, амплитуда в точке P будет

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Выражения, стоящие в скобках, можно положить равными нулю, значит, $A = \frac{A_{m+1}}{2}$.

Очевидно, что освещенность может зависеть только от расстояния r до точки P (рис 44, а). При небольшом числе закрытых зон амплитуда A_{m+1} мало отличается от A_1 . Поэтому интенсивность в точке P будет почти такая же, как при отсутствии преграды между источником S и точкой P (см. (1.44)). Для точки P' , смещенной относительно точки P в любом радиальном направлении, диск будет перекрывать часть $(m + 1)$ -й зоны Френеля, одновременно откроется часть m -й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки P' интенсивность достигнет минимума. Если сместиться из центра картины еще дальше, диск перекроет дополнительно часть $(m + 2)$ -й зоны, одновременно откроется часть $(m - 1)$ -й зоны. В результате интенсивность возрастет и в точке P'' достигнет максимума.

Таким образом, в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины помещается светлое пятно (рис. 45). Изменение интенсивности света I с расстоянием r от точки P изображено на рис. 44, б.

Если диск закрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает тени - освещенность экрана всюду остается такой же, как при отсутствии преград. Если диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$, так что

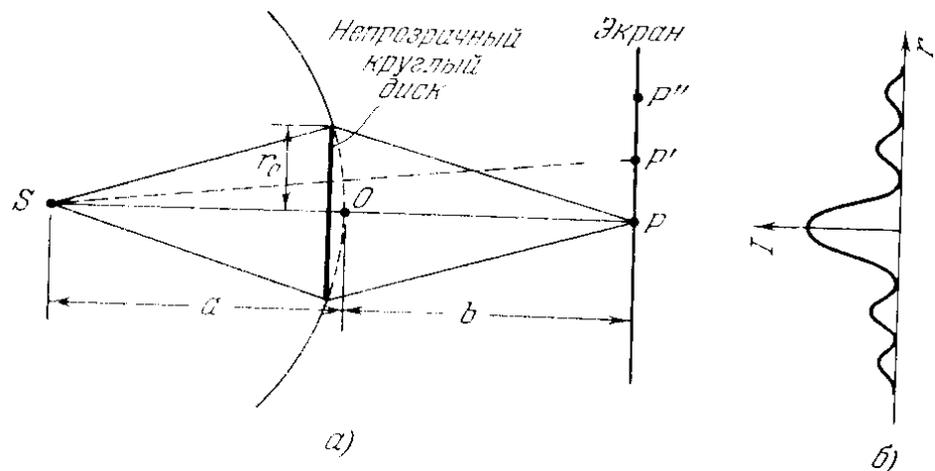


Рис. 44. Дифракция от круглого диска

светлое пятно в центре отсутствует и освещенность в области геометрической тени практически всюду равна нулю.

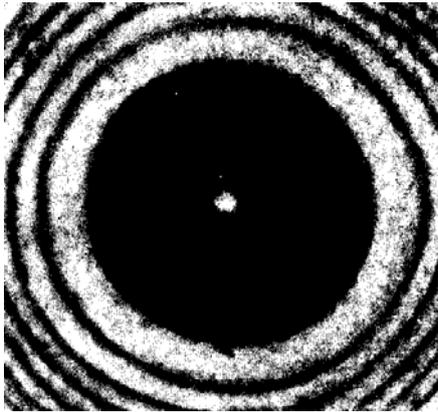


Рис. 45. Пятно Пуассона

Пятно Пуассона. Если на пути световой волны стоит непрозрачный круглый экран (рис. 45), то за экраном в его тени на оси возникает световое пятно, называемое *пятном Пуассона*. Необходимость его возникновения очевидна из принципа Гюйгенса - Френеля и метода зон Френеля. Экран закрывает некоторое число зон Френеля, начиная с нулевой. Однако следующие зоны после последней из закрытых создают в точке *B* освещенность.

Волна, как бы “огибает” непрозрачный экран (проникает в область геометрической тени). Явление огибания волнами препятствий называется *дифракцией*. В более широком смысле, дифракция - это любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики.

При больших размерах непрозрачного экрана интенсивность пятна Пуассона слабая. Поэтому для наблюдения дифракции надо брать достаточно малые экраны. Кроме этого, необходимо, чтобы свет обладал большой степенью когерентности, потому что в противном случае не будет происходить интерференция лучей от различных участков зон.

Недостатки метода зон Френеля. Метод зон Френеля хорошо работает при ситуации, когда размер экрана много больше длины волны, но он имеет свои недостатки: 1) не может объяснить, почему амплитуда вторичных волн спадает по определенному закону в зависимости от направления; 2) вычисленная по методу Френеля фаза волны отличается от фактической фазы волны на $\pi/2$.

Объяснения этому удалось дать лишь в более строгой теории дифракции, основанной на интеграле Кирхгофа. Эта теория дифракции содержит две большие части: 1) приближение Френеля (или дифракция Френеля) - осуществляется в ближней зоне, т.е. l - относительно мала; 2) приближение Фраунгофера - осуществляется в дальней волновой зоне, т.е. l - велика, вплоть до бесконечности (прил. 1).

Дисперсия света

В диэлектрике скорость распространения электромагнитных волн зависит от частоты. Это явление называется *дисперсией*. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении некогерентных волн, поскольку различные частоты, составляющие волну, распространяются с различной скоростью. Дисперсия является следствием зависимости поляризованности атомов от частоты: $\epsilon_{r\omega} = \epsilon_{\omega}(\omega)$, где $\epsilon_{r\omega}$ - относительная диэлектрическая проницаемость, зависящая от частоты. Коэффициент преломления $n_{\omega} = \sqrt{\epsilon_{r\omega}}$, то следовательно и скорость распространения электромагнитных волн зависит от частоты. Этим обстоятельством и объясняется механизм возникновения дисперсии. Графическая зависимость n_{ω} от частоты ω называется дисперсионной кривой. Если n_{ω} растет при росте ω , то дисперсия называется *нормальной* (рис. 46). Вблизи резонансной частоты показатель преломления с увеличением частоты уменьшается. Это явление называется *аномальной дисперсией* (рис. 47).

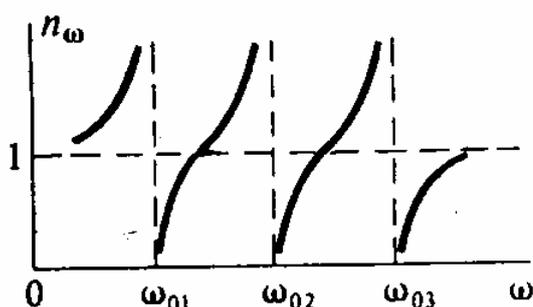


Рис. 46. Нормальная дисперсия

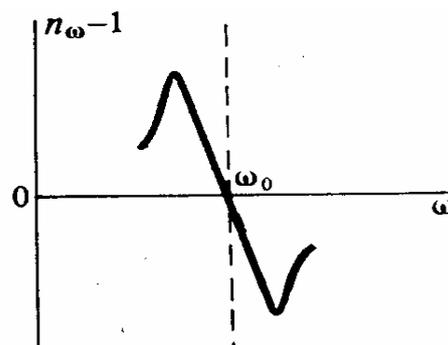


Рис. 47. Аномальная дисперсия

При нормальной дисперсии для больших частот $\omega \gg \omega_{01}$ показатель преломления сместится к 1, оставаясь меньше ее. Поэтому, для коротковолнового излучения диэлектрик является оптически менее плотной средой, чем вакуум. В частности, в этом случае от поверхности диэлектрика может наблюдаться полное отражение. Нормальная дисперсия наблюдается во всей прозрачной области; аномальная - только в области поглощения (прил. 2). Форма импульса электромагнитного сигнала в дисперсионной среде изменяется. Передний фронт импульса в дисперсионной среде движется со скоростью света в вакууме, а последующие части движутся со скоростью, характерной для среды.

Приложения

Приложение 1

В пределах обширного диапазона длин волн имеется не менее трех областей, где возможны интересные приближения.

1. Область, где длина волны мала по сравнению с размерами приборов, с помощью которых изучают такие волны; более того, энергия фотонов меньше порога чувствительности приборов. В этой области первое грубое приближение дает метод, называемый геометрической оптикой.

2. Область, где длина волны становится порядка размеров приборов (радиоволны), а энергия фотонов по-прежнему ничтожна. В этом случае другое приближение, в котором учтены волновые свойства света, но снова пренебрегают эффектами квантовой механики. Это приближение основано на классической теории электромагнитного излучения.

3. Для более коротких волн, когда энергия фотонов велика по сравнению с чувствительностью приборов и от волнового характера излучения можно отвлечься, возникает фотонная картина.

Приложение 2

Наличие резонансных частот обуславливает возникновение окраски тел в результате селективного поглощения света вблизи резонансных частот ω_{0i} . Это может происходить как в толще вещества, так и в поверхностном слое. Приведем три правила

1. Если частота ω_{0i} находится в ультрафиолетовой области, то в видимой части спектра нет селективного поглощения света, и вещество - почти бесцветное и прозрачное (стекло).

2. Когда собственные частоты ω_{0i} попадают в видимую часть спектра, соответствующие участки видимой части спектра поглощаются и вещество оказывается окрашенным в дополнительный цвет;

3. При отражении света от поверхности наиболее интенсивно отражаются те участки спектра, которые при прохождении толщины вещества наиболее сильно поглощаются. Поэтому цвет вещества, возникающий за счет селективного отражения, является дополнительным к цвету того же вещества, возникающего в результате селективного поглощения.

Экзаменационные вопросы II семестра обучения

Вопрос 1. Коллоквиум № 1

1. Электростатика. Предмет изучения. Теорема Ирншоу. Закон Кулона.
2. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Операция ротор вектора напряженности электрического поля. Скалярный потенциал. Потенциал поля точечного заряда.
3. Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Вектор поляризации. Молекулярная картина поляризации. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле.
4. Скалярный поток вектора. Электростатическая теорема Гаусса. Объемная плотность зарядов.
5. Операция дивергенции. Теорема Остроградского - Гаусса. Объемная плотность связанных зарядов.
6. Поверхностная плотность зарядов. Электрическое смещение. Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлектриков.
7. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные плоскости, заряженные коаксиальные цилиндры.
8. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные концентрические сферы, шар.
9. Условия на границе двух диэлектриков.
10. Электрическое поле проводников. Конденсаторы. Электроемкость. Постоянный электрический ток.
11. Дифференциальная форма закона Ома. Дифференциальная форма закона Джоуля - Ленца. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Понятие о сегнетоэлектриках.
12. Магнитное поле в вакууме. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Сила Лоренца. Вектор магнитной индукции. Сила Ампера.
13. Закон Био - Савара. Закон полного тока. Магнитное поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током.
14. Закон Био - Савара. Закон полного тока. Магнитное поле замкнутого витка с током.

Вопрос 2. Коллоквиум № 2.

1. Магнитное поле в веществе. Магнетики. Диа-, пара-, ферромагнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитные проницаемость и восприимчивость.
2. Второе уравнение Максвелла. Условия на границе двух магнетиков.
3. Электромагнитная индукция. Явление самоиндукции. Правило Ленца.
4. Теорема Стокса. Первое уравнение Максвелла.
5. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла.
6. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.
7. Электромагнитные колебания. Идеальный контур Томпсона. Электромагнитные колебания в контуре Томпсона. Добротность контура.
8. Электромагнитные колебания в контуре RLC .
9. Переменный ток в RLC -контуре. Импеданс. Резонанс напряжений.
10. Электромагнитные волны. Энергия и плотность потока энергии. Вектор Пойтинга. Уравнение Д'Аламбера. Решения волнового уравнения. Волновой вектор. Электромагнитная природа света.
11. Геометрическая оптика. Приближения геометрической оптики. Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления. Принцип Ферма.
12. Поляризация электромагнитной волны. Явление Брюстера. Монохроматический и хаотический свет.
13. Интерференция света. Время разрешения. Когерентность.
14. Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. Линии равного наклона.
15. Дифракция света. Принцип Гюйгенса - Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля.
16. Дифракция от круглого отверстия.
17. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона.
18. Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия.

Заключение

Настоящий конспект лекций написан в соответствии с требованиями образовательного стандарта и программой курса "Общая физика" ВлГУ. Конспект содержит теоретический материал второго семестра обучения (17-18 лекций) и предназначен для самостоятельной подготовки студентов к экзаменам по экзаменационным вопросам (прил. 3).

Библиографический список не претендует на полноту охвата вопросов и не содержит всех первоисточников, но приведенные в списке работы имеют обширную библиографию, используя которую можно найти необходимые первоисточники.

Автор благодарит членов методической комиссии кафедры «Общей и прикладной физики» за ценные замечания и рекомендации.

Библиографический список

1. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для вузов/ А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 6-е изд., стереотип. - М. : Наука, 1969. - 736 с.
2. Мандельштам, Л. И. Лекции по теории колебаний/ Л. И. Мандельштам. - М.: Наука, 1972. - 470 с.
3. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм: учеб. пособие для физ. спец. вузов. / А. Н. Матвеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 480 с.
4. Он же. Оптика: учеб. пособие для физ. спец. вузов/ А. Н. Матвеев. - 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1985. – 351 с.
5. Савельев, И.В. Курс общей физики: учеб. пособие. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика/ И. В. Савельев – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. - 496 с.
6. Парселл, Э. Электричество и магнетизм: учеб. рук./ Э. Парселл; пер. с англ.; под ред. А.И. Шальникова и А.О. Вайсенберга. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
7. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. В 9 ч. Ч. 5. Электричество и магнетизм/ Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; пер. с англ. Г. И. Копылова, Ю.А. Симонова; под ред. Я. А. Смородинского. – 2-е изд. - М. : Мир. 1977. – 302 с.

Оглавление

Электричество и магнетизм	5
Электростатика	5
Предмет изучения. Закон Кулона. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. Градиент потенциальной функции. Скалярный потенциал.	
Электрическое поле в диэлектриках	8
Диэлектрики. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле. Электростатическая теорема Гаусса. Скалярный поток частиц. Скалярный поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Связанные заряды. Формула Пуассона и условие Лапласа. Диэлектрическое смещение. Условия на границе двух диэлектриков. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.	
Электрическое поле проводников	20
Заряженный проводник. Проводник во внешнем электрическом поле. Полный проводник во внешнем поле.	
Постоянный электрический ток	21
Сила тока. Плотность тока. Дифференциальная форма закона Ома. Механизм существования постоянного тока. Дифференциальная форма закона Джоуля - Ленца. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Сегнетоэлектрики.	
Магнитное поле в вакууме	25
Магнитная сила. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био-Савара. Закон полного тока.	
Магнитное поле в веществе	28
Магнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Условия на границе двух магнетиков.	
Электромагнитная индукция	32
Индукция токов. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Правило Ленца.	
Уравнения Максвелла	34
Ротор векторной функции. Формула Стокса. Первое уравнение Максвелла. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Система уравнений Максвелла. Ток смещения.	
Электромагнитные колебания и волны	39
Электромагнитные колебания	39
Электромагнитные колебания в RLC -контуре. Идеальный колебательный контур. Переменный ток. Нестационарный случай.	
Электромагнитные волны	47
Волновое уравнение. Шкала электромагнитных волн. Электромагнитная природа света.	
Оптика	49
Законы отражения и преломления	49

Геометрическая оптика. Законы отражения и преломления. Принцип Ферма. Полное внутреннее отражение.

Поляризация света.....51

Закон Брюстера. Механизм поляризации света.

Интерференция света.....54

Принцип суперпозиции при сложении световых волн. Интенсивность при сложении световых волн. Понятие когерентности. Время разрешения. Способы получения когерентных лучей. Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. Отражение от параллельных поверхностей. Линии равного наклона.

Дифракция света..... 58

Принцип Гюйгенса. Принцип Гюйгенса-Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля. Дифракция от круглого отверстия. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона. Недостатки метода зон Френеля.

Дисперсия света67

Приложения68

Заключение.....71

Библиографический список71

ФИЗИКА
Электричество и магнетизм
Электромагнитные колебания и волны
Оптика

Конспект лекций

Составитель
КУЗНЕЦОВ Артемий Артемьевич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В. Н. Кунин

Редактор Е. В. Невская
Технический редактор Н.В. Тупицына
Компьютерная верстка А. А. Кузнецова

ЛР № 020275. Подписано в печать 20.04.06.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Times.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,46. Тираж 100 экз.
Заказ 101-2006 г.

Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.