Владимирский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

Электронное издание

Владимир 2023

ISBN 978-5-9984-1570-8

УДК 512.64
ББК 22.14

Автор-составитель О. В. Крашенинникова

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Математический анализ : курс лекций [Электронный ресурс] / авт.-сост. О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. – 326 с. – ISBN 978-5-9984-1570-8. – Электрон. дан. (6,4 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-R). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач.

Предназначен для студентов бакалавриата очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых трех семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 37. Библиогр.: 13 назв.

ISBN 978-5-9984-1570-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал издания соответствует программе первых двух курсов обучения и включает разделы: «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды».

Курс лекций содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемым разделам, примеры решения типовых задач.

Используемые обозначения и терминология являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что материал издания ни в коей мере не призван заменить более подробные курсы по математическому анализу, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с учебным материалом представленных разделов предполагает параллельное изучение этих тем по книгам, указанным в библиографическом списке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. ТОЧНЫЕ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Для сокращенной записи разного рода формулировок и утверждений удобно пользоваться логическими символами. Их использование в математических текстах уже давно стало обычным. Перечислим наиболее употребительные из них: $\vee -$ дизъюнкция, $\wedge -$ конъюнкция, $\Rightarrow -$ импликация, $\Leftrightarrow -$ равносильность, $\forall -$квантор всеобщности, $\exists -$ квантор существования. Поясним теперь их смысл. Пусть P и Q – какие-либо высказывания, то есть некоторые суждения о тех или иных, например, математических объектах, которые могут оказаться как истинными, так и ложными. С помощью перечисленных выше символов можно образовывать новые высказывания: $P \vee Q$ означает P или Q, P 3234 $\wedge$ Q означает P и Q, $P \Rightarrow Q$ означает из P следует Q, $P \Leftrightarrow Q$ означает P равносильно Q.

На рубеже XIX и XX столетий в трудах немецких математиков Г. Кантора, а затем Ф. Хаусдорфа была создана теория множеств, которая легла в основу современной математики и, в частности, математического анализа. Понятие множества является первоначальным и потому неопределяемым.

Под **множеством** понимается некоторый набор предметов произвольной природы. Множества обозначают прописными буквами A, B,…, предметы, из которых состоит множество, называются его элементами и обозначаются a, b,…. Например, $A=\{0,1,2,...,9\}-$ множество однозначных чисел.

Запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A. Запись $a \notin A$ означает, что a не принадлежит A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Если все элементы, из которых состоит множество A, входят и в множество B ($a \in A \Rightarrow a \in B$), то A называется подмножеством множества B и в этом случае пишут $A \subset B$. По определению $\varnothing \subset A$, каково бы ни было A.

Два множества A и B считаются равными, если состоят из одних и тех же элементов, то есть $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств: $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B: $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$.

Аналогично определяется объединение и пересечение любого, в том числе и бесконечного числа множеств.

Изучение математического анализа мы начнем с построения множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. В курсе элементарной математики, изучаемом в школе, последовательно появляются:

множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, ..., n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел $\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел $\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Во множестве $\boldsymbol{Q}$ определены алгебраические операции сложения и умножения вместе с обратными им операциями вычитания и деления, за исключением деления на нуль. Они подчиняются известным законам. Множество $\boldsymbol{Q}$ упорядочено отношением $\leq$. Рациональные числа удобно изображать точками числовой прямой (оси). Рациональные точки расположены на числовой оси всюду плотно, то есть каковы бы ни были рациональные числа r_1 и r_2, найдется рациональное число $r \in (r_1, r_2)$, например, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ – середина отрезка $[r_1, r_2]$. Несмотря на это, рациональных чисел недостаточно для того, чтобы снабдить каждую точку числовой прямой рациональным числом, иначе говоря, снабдить каждый отрезок рациональной длиной. Рассмотрим квадрат со стороной 1. Его диагональ $\sqrt{2}$. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$, причем дробь несократима. Тогда $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $2n^2 = m^2 \Rightarrow m^2$ – четное, то есть m – четное, значит $m = 2k$. Поэтому $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ – четное, то есть $n-$четное, что противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Таким образом, $\sqrt{2}\notin \boldsymbol{Q}$.

Поэтому возникает необходимость пополнения множества $\boldsymbol{Q}$ новыми числами. Из курса элементарной математики известно, что всякое рациональное число можно представить десятичной дробью, конечной, либо бесконечной, но обязательно периодической. Так, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3)$ и т.д.

Определение. **Действительным числом** называется произвольная бесконечная десятичная дробь, то есть $x=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ (где из двух знаков "$\pm$" берется один).

Множество действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Если дробь из $\boldsymbol{R}$ периодична, то будем считать ее представлением рационального числа. Тем самым $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$. Непериодическую дробь будем называть иррациональным числом. Таково, например, число $x=0{,}1010010001\ldots$

Пусть $A-$ ограниченное сверху (снизу) числовое множество, то есть существует число M (m) такое, что для любого $x\in A\Rightarrow x\le M\,(x\ge m)$. Это число M (m) называется верхней (нижней) гранью множества A.

Конечно, любое ограниченное сверху (снизу) множество A имеет бесконечно много верхних (нижних) граней, например $M+1$ ($m-1$).

Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение. Наименьшая из всех верхних граней числового множества A называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $\sup A$ (от латинского слова supremum).

Определение. Наибольшая из всех нижних граней числового множества A называется точной нижней гранью этого множества и обозначается $\inf A$ (от латинского слова infimum).

Равенство $\sup A=M$ означает:

1. $\forall x\in A\Rightarrow x\le M$ ($M-$ верхняя грань);
2. $\forall\varepsilon>0\ \ \exists x_\varepsilon\in A$ такой, что $x_\varepsilon>M-\varepsilon$ (число, меньшее M, уже не является верхней гранью).

Равенство $inf\,A=m$ означает:

3. $\forall x\in A \Rightarrow x\geq m$ (m – нижняя грань);
4. $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists x_\varepsilon \in A$ такой, что $x_\varepsilon > m+\varepsilon$ (число, большее m, уже не является нижней гранью).

Замечание. Пусть во множестве A существует наибольший элемент $x_0 \in A$, то есть $\forall x\in A \Rightarrow x\leq x_0$. Тогда $sup\,A=x_0$.

Пример. Дано множество $A=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n};\ldots\right\}$. Найти $sup\,A$ и $inf\,A$.

Решение. Так как во множестве A существует наибольший элемент, равный 1, то $sup\,A=1$. Докажем, что $inf\,A=0$. Действительно

1. $\frac{1}{n}>0 \;\; \forall n$,
2. $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists n$ такой, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$, то есть $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема 1.1. (о точной верхней (нижней) грани)
Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Множество $\boldsymbol{R}$ можно расширить, добавив к нему символы $-\infty$ и $+\infty$, называемые несобственными числами. Условимся считать, что эти числа противоположны друг другу, то есть $-(-\infty)=+\infty$, $-(+\infty)=-\infty$ и что для любого $x\in \boldsymbol{R}$: $-\infty<x<+\infty$. Если множество $A\subset \boldsymbol{R}$ не ограничено сверху, то естественно считать, что $sup\,A=+\infty$. Аналогично, если множество $A\subset \boldsymbol{R}$ не ограничено снизу, то естественно считать, что $inf\,A=-\infty$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному правилу действительное число x_n, то множество занумерованных действительных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ называется **числовой последовательностью** и обозначается $\{x_n\}$. При этом

x_n называется общим членом последовательности.

Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n};\ldots\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\ldots;\frac{n}{n+1};\ldots\right\}$.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N$, зависящий от ε такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Для рассмотренных примеров $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Числовая последовательность называется сходящейся, если имеет предел и расходящейся в противном случае.

Пример. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon)$, такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно $\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Отсюда $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. В качестве искомого номера N можно взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] - 1$, где $[x]$–целая часть числа x, не превосходящая x.

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, $a \neq b$. По определению предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$. Пусть $a < b$. Выберем $N = \max(N_1, N_2)$, $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ и пусть $n > N$. Тогда $|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{|b-a|}{2} + \frac{|b-a|}{2} = |b-a|$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Сходящаяся последовательность будет ограниченной, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|x_n| \le M$ для всех номеров n.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то есть по определению предела

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N \Rightarrow \left|x_n - a\right| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N$ такой, что $\forall n>N \Rightarrow \left|x_n - a\right| < 1$. Из последнего неравенства следует $\left|x_n\right| = \left|x_n - a + a\right| \le \left|x_n - a\right| + |a| < 1 + |a|$ при $\forall n > N \Rightarrow$ $n = N+1, N+2, \ldots$

Выберем $M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|, 1+|a|)$. Тогда $|x_n| \le M$ для всех номеров n.

Теорема доказана.

Теорема 2.3. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их сумма, произведение и частное имеют пределы, причем

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad k = const$.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то есть по определению предела

   $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

   $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Выберем $N = \max(N_1, N_2)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| \le$
   $\le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$.

2. Из теоремы 2.2 следует, что $|x_n| \le M$, $|y_n| \le M \;\; \forall n$.

   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то есть по определению предела

   $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$,

   $\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$.

   Выберем $N = \max(N_1, N_2)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow |x_n y_n - ab| =$

   $= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \le |y_n(x_n - a)| + |a(y_n - b)| \le M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \dfrac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon$.

Теорема доказана.

Примеры.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{5x^2+4x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{4}{x}}=\frac{2}{5}.$$

Правило: чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ нужно и числитель, и знаменатель разделить на высшую степень n в знаменателе.

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2x+5}{5x^2+4x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{4}{x}}=0.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{5x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-3+5x}{5+\frac{4}{x}}=\infty.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3+(3-2n)^3}{(3n+1)^2+(n-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+6n+12n^2+8n^3+27-54n+36n^2-8n^3}{9n^2+6n+1+n^2-2n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48n^2-48n+39}{10n^2+4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{48-\frac{48}{n}+\frac{39}{n^2}}{10+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}=4{,}8.$$

В последнем примере использованы формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned}(a\pm b)^2&=a^2\pm 2ab+b^2\\(a\pm b)^3&=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\end{aligned}.$$

Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.

Теорема 2.4. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $x_n\le y_n$, начиная с некоторого номера, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Нужно доказать, что $a\le b$. Предположим противное. Пусть $a>b$. По определению предела имеем:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_1\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$, $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_2\Rightarrow|y_n-b|<\varepsilon$, $b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon$.

Выберем $N=\max(N_1, N_2)$, $\varepsilon=\dfrac{|a-b|}{2}$. Тогда $y_n < b+\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$, а $x_n > a-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$. Отсюда $y_n < \dfrac{a+b}{2} < x_n$. Получили противоречие. Следовательно, $x_n \le y_n$. Теорема доказана.

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n \le b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$, если $x_n \ge b$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge b$, если $|x_n| \le b$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \le b$.

Теорема 2.5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и $x_n \le z_n \le y_n$, начиная с некоторого номера, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. По определению предела имеем:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, $a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$.

Пусть $x_n \le z_n \le y_n$ при $n > N_3$. Выберем $N=\max(N_1, N_2, N_3)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow$ $a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon$, то есть $|z_n - a| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Например, последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ бесконечно малые.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 2.6. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно малые, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{k \cdot x_n\}$ будут бесконечно малыми. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, а $\{y_n\}$ ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ будет бесконечно малая.

Например, последовательность $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ будет бесконечно малой, так как последовательность $\{\sin n\}$ ограниченная, а последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ бесконечно малая.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Например, последовательности $\{(-1)^n \cdot n\}$, $\{2^n\}$ бесконечно большие.

Теорема 2.7. Если последовательность $\{x_n\}$бесконечно малая и $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ будет бесконечно большой. Если последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, то $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ бесконечно малая.

Монотонные последовательности. Число *e*.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

невозрастающей, если $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

неубывающей, если $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

убывающей, если $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

возрастающей, если $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, убывающие и возрастающие последовательности – *строго монотонными.*

Теорема Вейерштрасса. Всякая неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Всякая невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности: $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$, $x_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37, \ldots$

Теорема 2.7. Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Следуя Эйлеру, предел этой последовательности обозначают *e*, то есть $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Известно, что *e*=2,718281828459045… Постоянную *e* называют неперовым числом или числом Д. Непера.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+5}{13n-10}\right)^{n-3} = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n-10+15}{13n-10}\right)^{n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n-10}{13n-10} + \frac{15}{13n-10}\right)^{n-3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{15}{13n-10}\right)^{n-3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n-45}{13n-10}} = e^{\frac{15}{13}}$.

§ 3. ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть X и Y – какие-либо непустые множества.

Определение. **Функцией** называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Пишут: $y = f(x)$ или $f : X \to Y$.

Множество X называется областью определения функции, x – независимая переменная или аргумент, $y = f(x)$- значение функции. Множество $f(X)$ называется множеством значений функции.

Если $f(X) = Y$, то отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным. Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае можно определить обратную функцию $f^{-1} : Y \to X$, $f^{-1}(y) = x \in X$ такому, что $f(x) = y$.

В зависимости от природы множеств X и Y функции присваивают то или иное название. Если Y – числовое множество, то функцию называют числовой или скалярной. Если к тому же и X – числовое множество, то функцию называют числовой функцией одной переменной. Если $X \subset \boldsymbol{R}$, а Y – множество всех векторов на плоскости или в пространстве, то функцию называют вектор-функцией скалярного аргумента. Числовую последовательность можно рассматривать как функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения в $\boldsymbol{R}$.

Способы задания функции:

1. Аналитический (с помощью одной или нескольких формул).

Например, $y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

Множество значений независимой переменной x, при которых формула имеет смысл, называется естественной областью определения. По умолчанию всегда будем считать, что функция рассматривается на всей естественной области определения.

2. Словесный.

Например, функция Дирихле $y = \begin{cases} 0, & x - \textit{иррационально} \\ 1, & x - \textit{рационально.} \end{cases}$

3. Табличный.
4. Графический.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $\{(x, f(x)) : x \in X\}$. График обладает свойством: любая прямая, параллельная оси *Oy,* пересекает график не более чем в одной точке.

Определение. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. **Сложной функцией** (композицией) функций f и g называется функция $g \circ f$, определяемая правилом: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in X$.

Перечислим так называемые основные элементарные функции: степенная функция $x^{\alpha} (\alpha \neq 0)$, показательная функция a^x $(a > 0, a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x \,(a > 0, a \neq 1)$, тригонометрические функции $\sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \arccos x, arctg\, x, arcctg\, x$.

Определение. **Элементарной функцией** называется функция, которая выражается через основные элементарные функции с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Определение. Окрестностью точки $a \in \boldsymbol{R}$ называется любой конечный интервал $(\alpha; \beta)$, содержащий точку a. Произвольную окрестность точки a будем обозначать $O(a)$. Если задано число $\varepsilon > 0$, то под ε-окрестностью $O_{\varepsilon}(a)$ точки a будем понимать интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может самой точки a. Такую окрестность называют проколотой.

Определение. Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Рассматриваются также односторонние пределы функции – правый и левый пределы.

Определение. Число b называется **правым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Определение. Число b называется **левым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

Теорема 3.1.(сведение предела функции к пределу последовательности)

Для того чтобы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to a,\ x_n \neq a$ выполнялось $f(x_n)\to b,\quad n\to\infty$.

Для предела функции в точке справедливы теоремы, аналогичные теоремам о пределах последовательности.

Теорема 3.2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный.

Теорема 3.3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=d$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=b\pm d$;
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=b\cdot d$, в частности, $\lim\limits_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot b$, где $c=const$;
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{d},\quad d\neq 0$

Теорема 3.4. (предел сложной функции)

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеем $g(x)\neq y_0$ и пусть $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=b$

.

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Решение. Подставим -1 вместо x, получим и в числителе и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ нужно и числитель, и знаменатель разложить на множители и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{x^2(x+2)-(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решение. Подставим 8 вместо x, получим и в числителе и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ нужно числитель умножить на сопряженное выражение, а знаменатель на неполный квадрат суммы и применить формулы сокращенного умножения

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

Тогда получим

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt{9+2x}-5\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)(x-8)}=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)}{\left(\sqrt{9+16}+5\right)(x-8)}=\frac{2(4+4+4)}{10}=\frac{12}{5}.$$

§ 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4.1. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$ и существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=d$, то $b\le d$.

Следствие. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x)\le A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le A$.

Теорема 4.2. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x)\le \varphi(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$.

Теорема 4.3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $b>0\ (b<0)$. Тогда найдется проколотая окрестность точки a, в которой $f(x)>0\ (f(x)<0)$.

С помощью теоремы 4.2. установим важное предельное соотношение, которое обычно называют первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $x\ne 0$ имеет место неравенство

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \qquad (*)$$

Пусть x – длина дуги AB, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

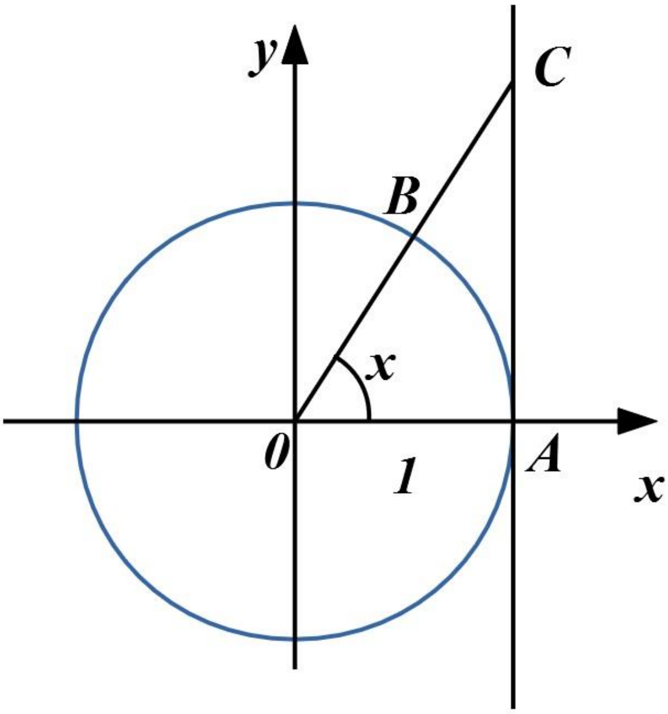

Рис. 1.

Очевидно (см. рис. 1), что $S_{\Delta AOB} < S_{сект\ AOB} < S_{\Delta AOC}$. Но $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{сект\ AOB} = \frac{1}{2}x$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}tg\,x$. Таким образом, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin x < x < tg\,x$. Отсюда, разделив на x, получим $\frac{\sin x}{x} < 1$ и $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Таким образом, неравенство $(*)$ верно для всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$. При $x = \frac{\pi}{2}$ равенство $(*)$ верно, а так как все функции в этом неравенстве четные, то оно верно и для всех $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Из неравенства (*) вытекают полезные неравенства:

$$|\sin x| \le |x| \quad \forall x \in \boldsymbol{R}, \ |x| \le |tg\,x| \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

За исключением $x = 0$ эти неравенства строгие.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$.

$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x}{2}\right| \le 2 \cdot \frac{|x|}{2} < \delta = \varepsilon$.

Переходя к пределу при $x \to 0$ в неравенстве (*), получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Теорема доказана.

Из первого замечательного предела вытекают соотношения:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix} x=\sin y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}=\begin{bmatrix} x=tg\,y\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{tg\,y}=1$.

Другим важным примером применения теоремы 4.2. и теоремы о пределе сложной функции является второй замечательный предел. Как было доказано ранее $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Рассмотрим теперь предел соответствующей функции $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to+\infty$ и докажем, что он равен тому же числу *e*. Заметим, что замена *n* на *x* отнюдь не очевидна, поскольку меняется характер переменной: $n\in\boldsymbol{N}$, в то время как *x* принимает всевозможные действительные положительные значения. Так, например, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$ просто потому, что $\sin\pi n=0\ \ \forall n\in\boldsymbol{N}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\pi x$ не существует.

Положим $[x]=n$. Если $x\to+\infty$, то $n\to\infty$. Далее, $n\le x<n+1$ и при $x\ge 1$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n};\quad \frac{1}{n+1}+1<\frac{1}{x}+1\le\frac{1}{n}+1;\quad \left(\frac{1}{n+1}+1\right)^n<\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\le\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+1\right)^n=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^{n+1}=e$, то по теореме 4.2. получим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^x=e$.

Рассмотрим теперь предел этой функции при $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|}=\begin{bmatrix}|x|=y\\ y\to+\infty\end{bmatrix}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

Оба предельных соотношения можно объединить в одно и записать $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. Замена $\dfrac{1}{x}=y$ преобразует его к виду $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. (2) Это и есть второй замечательный предел.

Из соотношения (2) вытекают следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=y \\ x=\ln(1+y)\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=\ln a.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Замечание. Здесь мы пользовались свойством непрерывности логарифмической и показательной функций.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)\cdot(\cos x-1)}{x^2(\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}\cdot 4}=-\dfrac{1}{2}$.

Определение. Определенная в некоторой проколотой окрестности точки a функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** в точке a, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 4.4. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке a, то в этой точке функции $k\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ также будут бесконечно малыми.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке a, $\beta(x)$ ограниченная, то $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ будет бесконечно малой в точке a.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке a.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, в этом случае пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

При сравнении бесконечно малых функций часто употребляют символ *o* (*o* малое). Именно, если $\alpha(x)$ представляет бесконечно малую в точке *a* функцию более высокого порядка, чем бесконечно малая в этой же точке функция $\beta(x)$, то это записывают условно следующим образом: $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Теперь определение эквивалентных бесконечно малых функций можно сформулировать таким образом:

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми в точке *a*, если $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$.

Исходя из замечательных пределов и следствий из них получаем следующую таблицу эквивалентностей при $x\to 0$:

1. $\sin x\sim x$
2. $tg\, x\sim x$
3. $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$
4. $\arcsin x\sim x$
5. $arctg\, x\sim x$
6. $e^x-1\sim x$
7. $a^x-1\sim x\ln a$
8. $\ln(1+x)\sim x$
9. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

Согласно сформулированному определению бесконечно малых функций можно записать следующие равенства при $x\to 0$:

1. $\sin x=x+o(x)$
2. $tg\, x=x+o(x)$
3. $1-\cos x=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$
4. $\arcsin x=x+o(x)$
6. $e^x-1=x+o(x)$
7. $a^x-1=x\ln a+o(x)$
8. $\ln(1+x)=x+o(x)$
9. $(1+x)^\alpha-1=\alpha x+o(x)$

5. $arctg\, x = x + o(x)$

Теорема 4.5. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - бесконечно малые функции в точке a, причем $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}$.

Эта теорема дает право при вычислении предела одночлена, то есть произведения или частного, заменять сомножители или числитель со знаменателем эквивалентными функциями. Самая распространенная ошибка при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего выражения, эквивалентной функцией (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{\sin 3x\cdot tg\, 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{3x\cdot 2x} = \frac{2}{3};$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2\sqrt{2x+1}-2} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2\left((1+2x)^{\frac{1}{2}}-1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x} = -\frac{3}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4}{x^4} = 4$, но ошибочно

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)-\sin^2 2x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x^2-4x^2}{x^4} = 0.$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{1+tg\, 5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)+5x+o(x)}{-\frac{1}{2}x^2+1+o(x^2)-\frac{1}{5}x-1+o(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+o(x)+5+o(1)}{-\frac{1}{2}x+o(x)-\frac{1}{5}+o(1)} = -25.$$

5. $$\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{\ln\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+\cos x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-2}.$$

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Согласно определению предела это означает, что
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Примеры.

1. $y = \sin x$ непрерывна, $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \dfrac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \dfrac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

2. $y = x$ непрерывна, $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Заданная на множестве *D* функция $f(x)$ называется непрерывной на нем, если она непрерывна по этому множеству в любой его точке. Совокупность всех непрерывных на множестве *D* функций будем обозначать *C(D)*.

Теорема 5.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \ne 0)$.

Теорема 5.2. Пусть функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $h = g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Примеры.

1. Так как $y = x$ непрерывна при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, то непрерывна функция $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$
2. $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ непрерывна как сложная функция.

Определение. Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется разрывной в точке x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Мы будем называть точками разрыва функции точки, в которых функция не определена, но которые являются предельными точками области определения, то есть точки, в любой окрестности которых есть хотя бы одна точка из области определения, отличная от данной.

Рассмотрим возможные типы точек разрыва функции.

1. Устранимая точка разрыва.

Определение. Точка x_0 называется **устранимой точкой разрыва** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ существует, но функция $f(x)$ либо не определена в точке x_0, либо $f(x_0)\neq a$ (рис. 2).

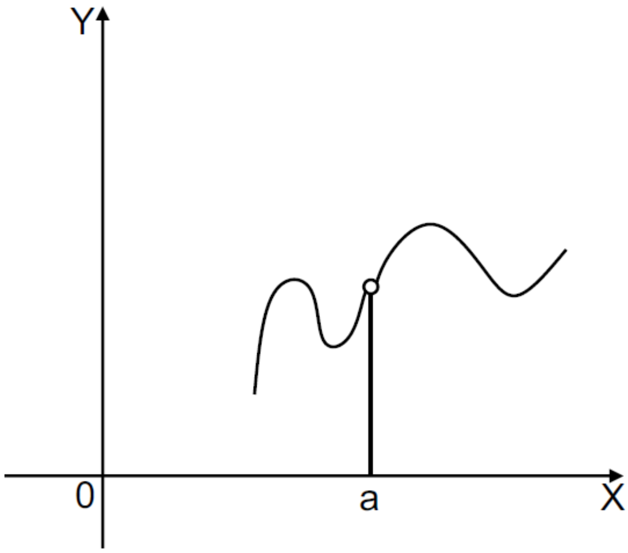

Рис. 2.

Например, функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$, но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Эту функцию легко сделать непрерывной, положив $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$

В общем случае этот разрыв можно устранить, положив значение функции $f(x)$ в точке x_0 равным ее предельному значению $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0\\ a, & x=x_0.\end{cases}$

2. Точка разрыва первого рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва I рода**, если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, но они не равны между собой, то есть $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Например, функция $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв I рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, а $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ (рис 3).

Функция в точке разрыва I рода делает скачок, величина скачка равна $\left| \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \right|$.

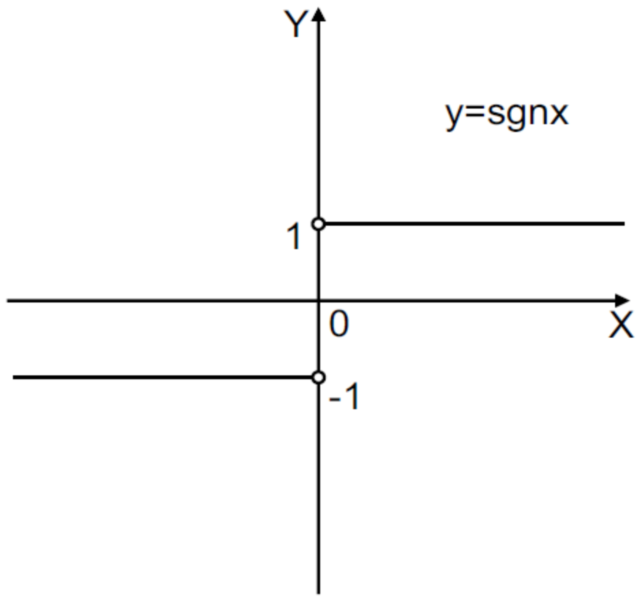

Рис. 3.

3. Точка разрыва второго рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва II рода**, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Например, $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв II рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (рис.4).

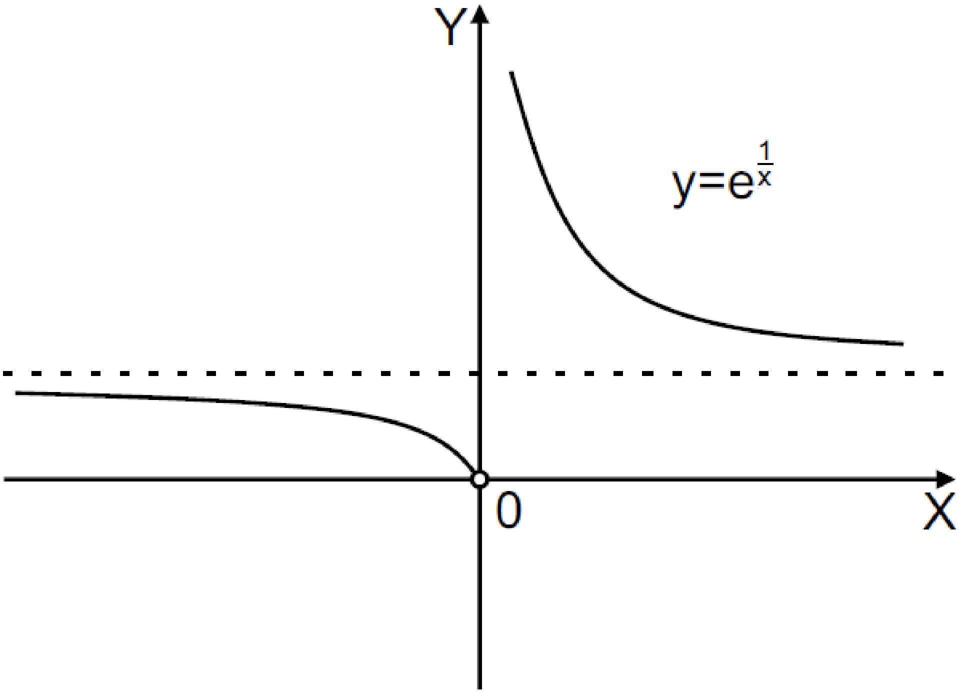

Рис. 4.

Пример. Исследовать точки разрыва функции $y=\dfrac{x}{\sin x}$ и построить схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

Решение. Функция не определена в точках, в которых $\sin x=0$, то есть $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Рассмотрим сначала точку $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, то $x=0-$ устранимая точка разрыва. Теперь рассмотрим точки $x=2\pi n$, $n\in$ $\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$. Так как

$\lim\limits_{x\to 2\pi n+}\dfrac{x}{\sin x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2\pi n-}\dfrac{x}{\sin x}=-\infty$, то точки $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$ будут точками разрыва второго рода. Аналогично для точек $x=\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$ имеем $\lim\limits_{x\to(\pi+2\pi n)+}\dfrac{x}{\sin x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(\pi+2\pi n)-}\dfrac{x}{\sin x}=+\infty$. Следовательно, точки $x=\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$ также являются точками разрыва второго рода. График функции $y=\dfrac{x}{\sin x}$ приведен на рисунке 5.

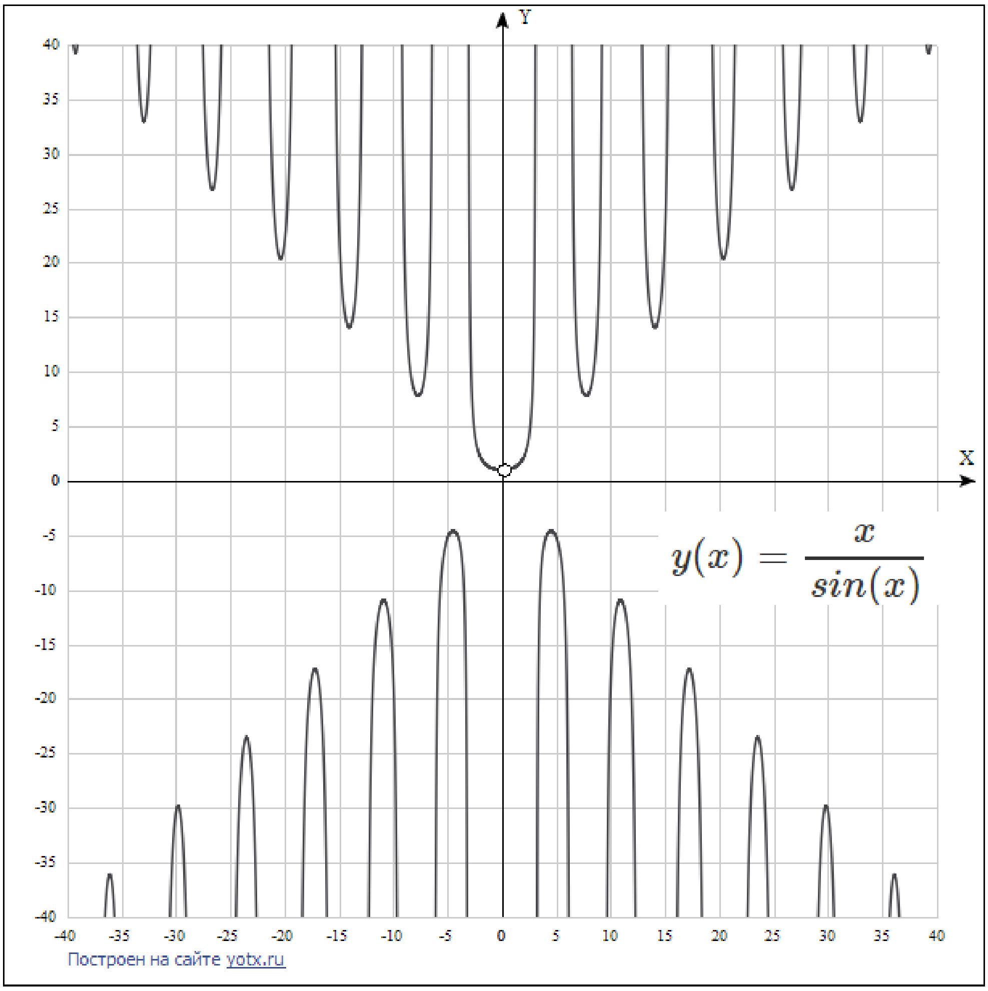

Рис. 5.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Сформулируем теоремы, выражающие основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Первая теорема Больцано-Коши (об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает разные по знаку значения, то есть $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$, в которой функция обращается в нуль $f(c)=0$.

Первая теорема Больцано-Коши лежит в основе метода приближенного вычисления корней уравнения вида $f(x)=0$ с непрерывной левой частью, который получил название *метода половинного деления*. Пусть нам удалось найти отрезок $[a,b]$ такой, что $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения. Если отрезок $[a, b]$ содержит ровно один корень (например, если функция $f(x)$ монотонна на $[a, b]$), то разделим $[a, b]$ пополам и из двух половинок выберем ту, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для этого достаточно определить знак $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Понятно, что искомый корень содержится на выбранном отрезке. Продолжая этот процесс, на n-ом шаге получим содержащий искомый корень отрезок, длина которого равна $\frac{b-a}{2^n}$. Как только она станет меньше наперед заданной точности, вычисления заканчивают. За приближенное значение корня с заданной точностью можно взять середину последнего отрезка.

Пример. Методом половинного деления локализовать корень с точность до 0,1 какой-либо корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = -3x + 1$, находим, что единственный корень находится на отрезке [0,1]. Разделим этот отрезок пополам и найдем знак функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ в точке 0 и точке $\frac{1}{2}$: $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8} < 0$. Следовательно, искомый корень лежит на отрезке [0;0,5]. Разбиваем этот отрезок пополам точкой 0,25 и находим знак $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{17}{64} > 0$. Поэтому искомый корень лежит на отрезке [0,25;0,5]. Разбиваем его пополам точкой 0, 375 и находим $f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{27}{512} - \frac{9}{8} + 1 = -\frac{37}{512} < 0$. Значит, искомый корень лежит на отрезке [0,25;0,375].

Вторая теорема Больцано-Коши (о промежуточном значении непрерывной функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть далее C – любое число, заключенное между A и B. Тогда найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она ограничена на этом отрезке, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a, b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своего наибольшего и наименьшего значений)
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

§ 6. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a, b). Фиксируем любое значение $x_0 \in (a, b)$ и пусть $x \in (a, b)$. Тогда $x - x_0 = \Delta x$ называется приращением аргумента. Приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – число, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Например, если $y = x^2$, то $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$. Следовательно, в этом случае, $A = 2x_0$, $\varepsilon(\Delta x) = \Delta x$.

Рассмотрим в данной фиксированной точке x_0 отношение приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Отношение (3) называется разностным отношением. Так как значение x_0 фиксировано, то разностное отношение представляет собой функцию аргумента Δx.

Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0 называется предел разностного отношения (3) при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует). Производную обозначают

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пример 1. $y = C$, $\Delta y = C - C = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, следовательно, $(C)' = 0$.

Пример 2. $y = \sin x$ в любой точке x.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

следовательно, $(\sin x)'=\cos x$.

Теорема 6.1. Для того чтобы функция была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела производную.

Доказательство. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Это означает, что $\Delta y = A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $A-$число, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Тогда $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=A$. То есть производная существует и $f'(x_0)=A$.

Пусть существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\varepsilon(\Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$, то есть, $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$. Теорема доказана.

Первое слагаемое в последнем равенстве является при $\Delta x\to 0$ главной линейной частью приращения функции и называется **дифференциалом функции.** Дифференциал обозначается $df(x_0)$, таким образом $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$. Символ Δx заменяется символом dx, который называется дифференциалом независимой переменной x. Под дифференциалом независимой переменной x можно понимать любое (не зависящее от x) число. Договоримся в дальнейшем брать это число равным приращению Δx независимой переменной. Это позволяет переписать формулу для дифференциала в виде $dy=f'(x)dx$.

Теорема 6.2. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Отсюда $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)\cdot(x-x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, то есть, функция непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Замечание. Непрерывная функция не всегда дифференцируема. Для функции $y=|x|$ имеем:

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

Правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции.

Теорема 6.3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемой в данной точке x, то в этой точке дифференцируемы также и функции $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (при условии $v(x)\neq 0$), причем справедливы формулы:

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
2. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

Следствие. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$, где $c=const$.

Доказательство.

1. $\left(u(x)+v(x)\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x}=$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$.

2. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)=$
$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

3. Сначала докажем, что $\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$. Действительно,

$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)}=\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$, тогда

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} - u(x)\cdot\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 6.4. (дифференцирование сложной функции)

Если функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $\left(f(g(x_0))\right)' = f'(y_0)\cdot g'(x_0)$.

Рассмотрим функцию $z = f(y)$. Тогда дифференциал $dz = f'(y)dy$. Если $z = f(g(x))$, то $dz = f'(g'(x))\cdot g'(x)dx$. Но $g'(x)dx = dy$, тогда $dz = f'(y)dy$. Таким образом, дифференциал имеет одну и ту же форму, если $y-$независимая переменная и если $y-$есть функция от другой переменной.

Теорема 6.5. (дифференцирование обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 строго монотонна и непрерывна. Пусть, кроме того, $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, дифференцируемая в этой точке и

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(\varphi(y_0))}. \qquad (4)$$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$. Тогда $f'(x_0) = tg\,\alpha$, где $\alpha -$угол наклона касательной с положительным направлением оси Ox. Производная обратной функции $\varphi'(y_0) = tg\,\beta$, где $\beta -$ угол наклона той же касательной с положительным направлением оси Oy. Так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то формула (4) выражает очевидный факт: $tg\,\alpha = \frac{1}{tg\beta}$.

Производные основных элементарных функций

1. $(c)' = 0$
2. $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. $\left(e^x\right)' = e^x$

6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

8. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

9. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11. $\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12. $\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

16. $\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

17. $\left(ch\, x\right)' = sh\, x$

18. $\left(sh\, x\right)' = ch\, x$

19. $\left(th\, x\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$

20. $\left(cth\, x\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Докажем некоторые из этих формул:

2. $\left(x^n\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x+\Delta x\right)^n - x^n}{\Delta x} = x^n \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$.

5. $\left(e^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x$.

6. $\left(a^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$.

7. $(\ln x)' = \left.\dfrac{1}{(e^y)'}\right|_{y=\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.

8. $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

10. $(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

11. $(tg\, x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

12. $(ctg\, x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13. $(\arcsin x)' = \left.\dfrac{1}{(\sin y)'}\right|_{y=\arcsin x} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\arccos x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(arctg\, x)' = \left.\dfrac{1}{tg\, y}\right|_{y=arctgx} = \cos^2(arctg\, x) = \dfrac{1}{1+tg^2(arctg\, x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

16. $(arcctg\, x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - arccg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $(ch\, x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\, x$.

18. $(sh\, x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x$.

19. $(th\, x)' = \left(\dfrac{sh\, x}{ch\, x}\right)' = \dfrac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4ch^2 x} = \dfrac{1}{ch^2 x}$.

Замечание. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции табличные формулы можно переписать, например: $(e^u)' = e^u \cdot u'$, $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ и т.п. Здесь $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования суммы и частного, имеем

$$y' = \left(\sin\sqrt{3}\right)' + \left(\frac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\sin^2 2x\right)' \cdot \cos 4x - (\cos 4x)' \cdot \sin^2 2x}{\cos^2 4x} =$$

$$=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2\cdot\cos 4x+\sin 4x\cdot 4\cdot\sin^2 2x}{3\cos^2 4x}=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x+4\sin 4x\cdot\sin^2 2x}{3\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{2\sin 4x\left(\cos 4x+2\sin^2 2x\right)}{3\cos^2 4x}=\frac{2\sin 4x\left(\cos 4x+1-\cos 4x\right)}{3\cos^2 4x}=\frac{2\sin 4x}{3\cos^2 4x}.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=\left(2x^2+3x-1\right)e^{4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем

$y'=\left(2x^2+3x-1\right)'\cdot e^{4x}+\left(2x^2+3x-1\right)\left(e^{4x}\right)'=(4x+3)\cdot e^{4x}+\left(2x^2+3x-1\right)\cdot 4e^{4x}=$
$=e^{4x}\left(8x^2+16x-1\right)$. Тогда дифференциал функции равен $dy=e^{4x}\left(8x^2+16x-1\right)dx$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке равно $f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)=f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, справедливо приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, то есть $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f(x_0)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{101}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$. Положим $x_0=100$, $\Delta x=1$. Тогда

$y(x_0)=\sqrt{100}=10$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{100}}=0{,}05$. Следовательно,

$\sqrt{101}\approx 10+0{,}05\cdot 1=10{,}05$.

Логарифмическая производная

Пусть функция $y=f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке x. Тогда в этой точке существует $\ln y=\ln f(x)$ и можно вычислить производную этой функции в данной точке x: $\dfrac{y'}{y}=\left(\ln f(x)\right)'$. Величина, определяемая этой формулой, называется логарифмической производной функции $y=f(x)$ в данной точке x.

Вычислим логарифмическую производную показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$. Эта функция определена и непрерывна при всех x, для которых $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и $u(x)>0$. Потребуем, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ были дифференцируемы для рассматриваемых значений x.

Тогда $\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$, $\ln y = v(x)\cdot \ln u(x)$, $\frac{y'}{y} = v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$,

$$y' = \left(v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right) u(x)^{v(x)}.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Прологарифмируем функцию $\ln y = \ln x^x$, $\ln y = x \ln x$. Теперь дифференцируем обе части:

$\frac{y'}{y} = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}$, $y' = (\ln x + 1)x^x$.

§7. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть на плоскости дана кривая, $M_0 -$ некоторая точка кривой. Пусть $M -$близкая к M_0 точка на кривой. Прямую M_0M называют секущей. Если точку M неограниченно приближать к точке M_0 по кривой, то секущая будет поворачиваться вокруг M_0.

Касательной к кривой в точке M_0 называют прямую, проходящую через точку M_0, если она является предельным положение секущей когда $M \to M_0$.

Пусть в некоторой системе координат xOy кривая является графиком функции $y = f(x)$, $x_0 -$ абсцисса точки M_0, $x = x_0 + \Delta x -$ абсцисса точки M. При $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$ точка M стремится к точка M_0. Слова «прямая (T) является предельным положением секущей (S)» будем понимать в том смысле, что угловой коэффициент k_s прямой (S) стремится к угловому коэффициенту k прямой (T)

при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} k_s = k$. Так как $k_s = tg\,\varphi$, $k = tg\,\beta$, то это равносильно

тому, что $\lim\limits_{x\to x_0} \beta = \varphi \neq \frac{\pi}{2}$ (рис. 6)

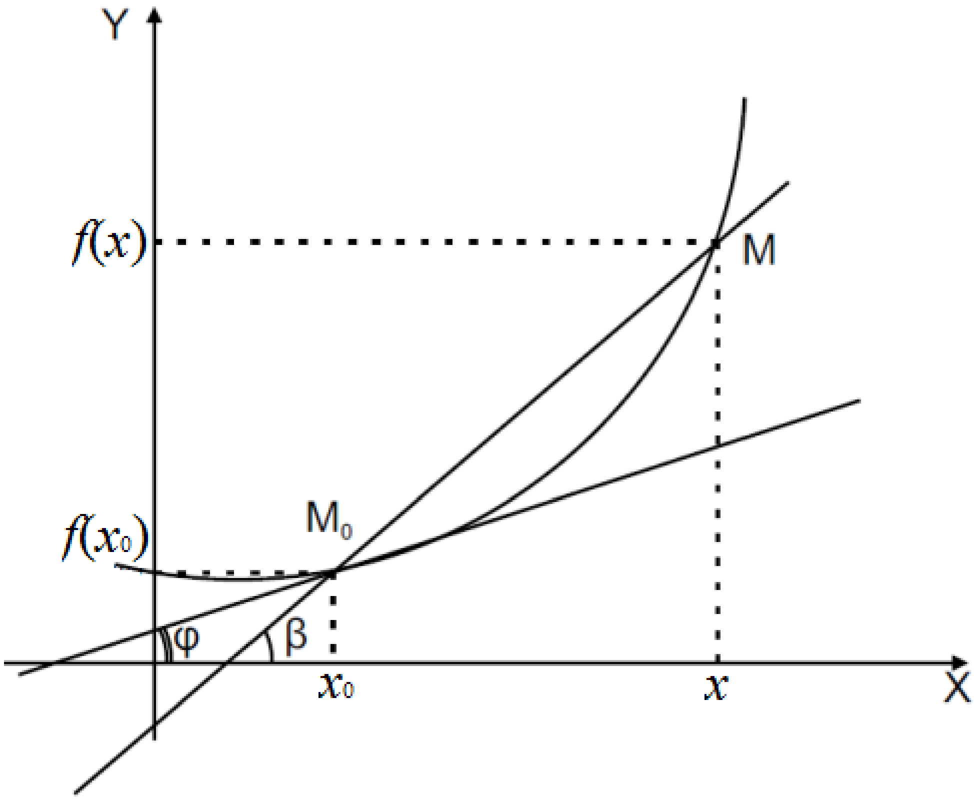

Рис. 6.

Поскольку

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (5)$$

то окончательно приходим к определению: невертикальная прямая (T) с угловым коэффициентом k, проходящая через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ есть **касательная к графику функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной функции в точке.

Таким образом, уравнение касательной: $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Так как $M_0(x_0, f(x_0))$ принадлежит касательной, то $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Следовательно, уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (6)$$

Таким образом, доказана **теорема 7.1.**:

Если функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует касательная к графику функции, которая задается уравнением (5). Если же предел в (5) равен $+\infty$ или $-\infty$, то касательной по определению будем считать проходящую через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ вертикальную прямую $x = x_0$.

Определение. **Нормалью** к кривой в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку, перпендикулярная касательной. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$. Поэтому уравнение

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \tag{7}$$

при условии, что $f'(x_0) \neq 0$ есть уравнение нормали в точке x_0. Если же $f'(x_0) = 0$, то нормалью будет вертикальная прямая $x = x_0$.

Физический смысл производной

Пусть функция $y = s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда разностное отношение $\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{ср}$ определяет среднюю скорость точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. А $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{мгн}$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t.

Пример 1. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $y(x_0) = 14\sqrt{1} - 15\sqrt[3]{1} + 2 = 1$,

$$y' = 14\left(\sqrt{x}\right)' - 15\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (2)' = \frac{14}{2\sqrt{x}} - 15 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{\sqrt{x}} - 5x^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'(x_0) = \frac{7}{\sqrt{1}} - 5 \cdot 1^{-\frac{2}{3}} = 2.$$

Согласно (6), уравнение касательной $y = 1 + 2(x-1)$, $y = 2x - 1$.

Согласно (7), уравнение нормали $y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = -\dfrac{1}{2x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение. Имеем $y(x_0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$, $y'(x_0) = \dfrac{1}{2}$.

Согласно (6), уравнение касательной $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x+1)$, $y=\frac{1}{2}x+1$. Эта прямая пересекает ось Ox в точке $(-2;0)$, а ось Oy в точке $(0;1)$. Следовательно, она отсекает от осей координат прямоугольный треугольник с катетами 2 и 1. Площадь такого треугольника равна половине произведения катетов, то есть $s=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$.

Пример 3. Точка движется по оси Ox по закону $x=3t^2+t+5$ от нулевого момента до момента $t=7$. Найти: а) среднюю скорость на данном промежутке времени; б) момент времени в промежутке [0;7], в котором мгновенная скорость была бы равна средней.

Решение. а) Средняя скорость на данном промежутке времени равна $v_{cp}=\frac{x(7)-x(0)}{7}=\frac{154}{7}=22$;

б) Найдем производную данной функции $x'=6t+1$. Следовательно, мгновенная скорость равна средней в момент, когда $6t+1=22$, $t=3{,}5$.

§ 8. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда производная $f'(x)$ представляет собой функцию, определенную на (a,b). Может случиться, что эта функция $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке $x\in(a,b)$. Тогда эта производная называется **второй производной** или **производной второго порядка** функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ или $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и всех последующих порядков: $f'''(x)=\left(f''(x)\right)',\ldots f^{(m)}(x)=\left(f^{(m-1)}(x)\right)'$. Штрихи для обозначения производных выше третьего порядка не применяют. Используют либо римские цифры, либо арабские цифры в скобках. Удобно считать, что $f^{(0)}(x)=f(x)$. Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную порядка n, называют n раз дифференцируемой на этом множестве.

Физический смысл второй производной

Пусть функция $y = s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда $s'(t) = v(t)$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t. Разностное отношение $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a_{ср}$ определяет среднее ускорение точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. А $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a_{мгн}$ определяет мгновенное ускорение точки в момент времени t.

Производные *n*-го порядка некоторых функций

1. $y = x^{\alpha}$ $(x > 0, \alpha \in R)$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots,$ $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2. $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a, \ldots,$ $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

В частности, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

3. $y = \ln x$

$y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{1\cdot 2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

4. $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $y = \cos x$

$y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Пример. Найти производную n-го порядка функции $y = \frac{x}{x+1}$.

Решение. $y' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y'' = -\frac{2}{(x+1)^3}$, $y''' = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$, …, $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Формула Лейбница для *n*-ой производной произведения двух функций

Теорема 8.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n-ые производные, тогда справедлива формула

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}\cdot v''+\ldots+\frac{n!}{k!(n-k)!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+\ldots+$$

$$+n\cdot u'\cdot v^{(n-1)}+u\cdot v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}, \qquad (8)$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, которые могут быть найдены с помощью треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

……………………..

Пример. По формуле Лейбница найти производную пятого порядка функции $y=\left(x^2+3x+1\right)\cdot e^{2x}$.

Решение. По формуле (8) имеем:

$$(u\cdot v)^{(5)}=u^{(5)}\cdot v+5\cdot u^{(4)}\cdot v'+10u'''\cdot v''+10u''\cdot v'''+5u'\cdot v^{(4)}+u\cdot v^{(5)}. \qquad (9)$$

Положим $u(x)=x^2+3x+1$, тогда $u'=2x+3$, $u''=2$, $u'''=u^{(4)}=u^{(5)}=0$,

$v(x)=e^{2x}$, тогда $v'=2e^{2x}$, $v''=4e^{2x}$, $v'''=8e^{2x}$, $v^{(4)}=16e^{2x}$, $v^{(5)}=32e^{2x}$.

Подставим найденные производные в (9), получим

$$(y)^{(5)}=10\cdot 2\cdot 8e^{2x}+5(2x+3)\cdot 16e^{2x}+\left(x^2+3x+1\right)\cdot 32e^{2x}=$$
$$=16e^{2x}\left(2x^2+6x+2+10x+15+10\right)=16e^{2x}\left(2x^2+16x+27\right).$$

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда существует ее дифференциал $dy=f'(x)dx$, который является функцией двух переменных: точки x и величины dx. Зафиксируем значение приращения аргумента $dx=\Delta x$. Тогда дифференциал можно рассматривать как функцию от x, заданную на том же интервале (a,b). Если она дифференцируема, то ее дифференциал имеет вид:

$$d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=d\left(f'(x)\right)dx=f''(x)\,\Delta x\,dx.$$

Если и в этом случае значение Δx взять равным dx, то получим $d(dy)=f''(x)\,dx^2$. Это выражение называется **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка** и обозначается d^2y, то есть $d^2y=f''(x)\,dx^2$. Аналогично определим дифференциал третьего порядка

$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)\right)dx^2 = f'''(x)\Delta x\, dx^2 = f'''(x)\,dx^3$, …, дифференциал n-го порядка $d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$. В силу такого определения можно записать $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Для дифференциалов первого порядка мы доказали свойство инвариантности формы, то есть, их форма не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией от другой переменной. Убедимся, что для дифференциалов более высокого порядка это свойство не выполняется. Если x независимая переменная, то второй дифференциал $d^2y = f''(x)\, dx^2$. (9)

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = f(\varphi(t))$. Тогда $dy = f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$,

$$d^2y = d\left(f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\right)dt = \left(f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)' dt^2 = f''(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi'(t)dt^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 =$$

$$= f''(\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 = f''(\varphi(t))(dx)^2 + f'(\varphi(t))d^2x = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Последняя формула отличается от (9) наличием в ней дополнительного, и вообще говоря, не равного нулю члена $f'(x)d^2x$.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ И НЕЯВНО

Рассмотрим еще один способ задания функции. Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{10}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, тогда выразив из первого уравнения системы (10) t через x и подставив во второе, получим $y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$. Если вторая функция имеет обратную, то разрешив второе уравнение относительно $t = \psi^{-1}(y)$ и подставив в первое, получим $x = \varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)$. Система (10), в которой одна из функций имеет обратную, задает некоторую функцию y от x или x от y. Такой способ задания функции называется **параметрическим**.

Например,

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 < t < +\infty.$$

Выразив из первого уравнения $t=\sqrt{x}$ и подставив во второе, получим $y=\sin\sqrt{x}$.

Любую обычную функцию $y=f(x)$ можно считать заданной параметрически, если положить $x=t$, $\quad y=f(t)$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по переменной t в рассматриваемой области изменения этой переменной. Кроме того, функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию в окрестности рассматриваемой точки $t=\varphi^{-1}(x)$. Поставим задачу о вычислении производных y по x. Будем обозначать их y'_x, y''_{xx},… В силу инвариантности формы первого дифференциала можем записать $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, где $dy=\psi'(t)dt$, $dx=\varphi'(t)dt$. При этом берем dy и dx в одной и той же точке t для одного и того же dt. Тогда получаем

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

Пример. Найти первую и вторую производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

Кривая, определяемая этими уравнениями, называется циклоидой. Ее описывает точка окружности, катящейся без скольжения по прямой.

Решение.

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cdot\cos\dfrac{t}{2}}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}=ctg\,\frac{t}{2}\quad (t\neq 2\pi n,\ n\in Z),$$

$$y''_{xx}=-\frac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot a\cdot 2\sin^2\dfrac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}.$$

Функция y есть **неявная функция** от x, если она задана уравнением $f(x,y)=0$, не разрешенным относительно y. Например, $e^{xy}-x-y=0$, $\sqrt[x]{y}-\sqrt[y]{x}=0$. Чтобы найти производную y'_x, дифференцируют обе части равенства по x, помня, что y есть функция от x, а затем разрешают полученное равенство относительно искомой производной.

Как правило, она будет зависеть от x и y: $y'_x = \varphi(x, y)$. Вторую производную от неявной функции находят, дифференцируя функцию $\varphi(x, y)$ по x, помня, что y есть функция от x: $y'' = F(x, y, y'_x)$. Заменяя здесь y'_x через $\varphi(x, y)$, получают выражение второй производной через x и y: $y'' = F(x, y, \varphi(x, y))$.

Пример. Найти первую производную функции, заданной неявно $e^{xy} - x - y = 0$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства по x, помня, что y есть функция от x:

$$e^{xy}(y + x \cdot y') - 1 - y' = 0,$$

$$e^{xy} x \cdot y' - y' = 1 - ye^{xy},$$

$$y'(e^{xy} x - 1) = 1 - ye^{xy},$$

$$y' = \frac{1 - ye^{xy}}{e^{xy} x - 1}.$$

§ 10. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление представляет собой универсальный инструмент исследования поведения функции. Особенно близко к дифференциальному исчислению подошел П. Ферма (первая половина 17-го в.), который предложил правило отыскания экстремумов функций, по существу равносильное известному из школьного курса. Как общий метод дифференциальное (и интегральное) исчисление было разработано в конце 17-го века в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница. Символика, предложенная Лейбницем, которую дополнил А. Лежандр, применяется и то сию пору.

Определение. Пусть x_0 − внутренняя точка области определения функции $y = f(x)$. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если найдется некоторая окрестность этой точки, в которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ ($f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).

Лемма 10.1. (достаточное условие возрастания или убывания функции)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в точке x_0.

Доказательство. По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Пусть $f'(x_0)>0$.

По определению предела имеем: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно $f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0)+\varepsilon$. Выберем $\varepsilon=\frac{f'(x_0)}{2}>0$. Тогда $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{f'(x_0)}{2}>0$, то есть $f(x)-f(x_0)$ и $x-x_0$ должны иметь одинаковый знак. Если $x_0-\delta<x<x_0$, то $x-x_0<0$, следовательно $f(x)-f(x_0)<0$. Если $x_0<x<x_0+\delta$, то $x-x_0>0$, следовательно $f(x)-f(x_0)>0$. Лемма доказана.

Замечание. Положительность (отрицательность) производной $f'(x_0)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $y=f(x)$ в точке x_0. В качестве примера укажем на функцию $y=x^3$, которая возрастает в точке $x=0$ и тем не менее имеет в этой точке производную $f'(0)=0$.

Определение. Точка x_0 называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)\ \left(f(x)\ge f(x_0)\right)$. (*) Если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)\ \left(f(x)>f(x_0)\right)$, то x_0 называется **точкой строго локального максимума (минимума).**

Точки максимума или минимума функции называются точками экстремума.

Неравенства (*) можно перевести на язык приращений и представить в виде: $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)\le 0\quad(\ge 0)$. В случае строгого экстремума эти неравенства строгие при $\Delta x\ne 0$.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума).

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то она не может в этой точке ни возрастать, ни убывать,

поскольку тогда в некоторой проколотой окрестности этой точки $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ ($\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0$ соответственно). Но тогда неравенства $f'(x_0) > 0$ $\left(f'(x_0) < 0\right)$ невозможны. Остается принять $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.
Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными**.

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: если в точке x_0 кривой $y = f(x)$, которой соответствует локальный экстремум функции $y = f(x)$, существует касательная, то она параллельна оси Ox (рис.7).

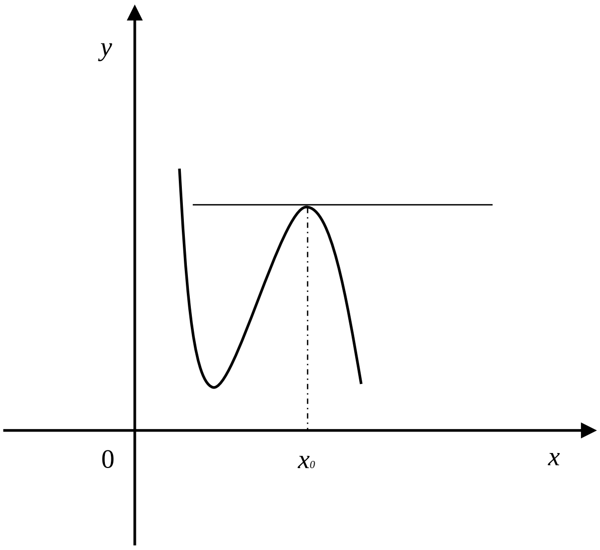

Рис. 7.

Теорема Ролля.
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема хотя бы на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c, в которой $f'(c) = 0$.
Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений на этом отрезке, то есть $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$. Возможны 2 случая:
1. $m = M$, тогда $f(x) = const$ и, следовательно, $f'(x) = 0 \ \forall\ x \in [a,b]$.
2. $m < M$. В этом случае, как как $f(a) = f(b)$, можно утверждать, что либо m, либо M достигается функцией в некоторой внутренней точке

$c \in [a,b]$. Но тогда функция $y = f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум. Поскольку $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox (рис.8).

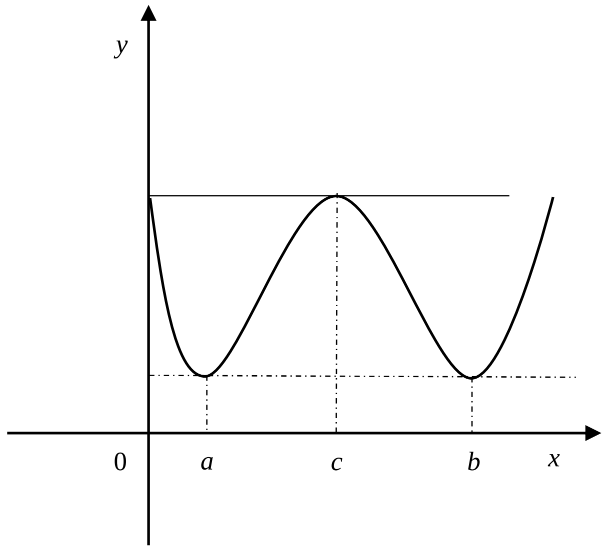

Рис. 8.

Следующая теорема является важнейшей среди всех теорем дифференциального исчисления.

Теорема Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Убедимся, что она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1. она непрерывна на отрезке $[a, b]$ как разность непрерывных функций $y = f(x)$ и линейной функции;
2. дифференцируема на интервале (a, b), ее производная $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Кроме того $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, то есть значения на концах совпадают.

Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, то есть $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Теорема доказана.

Формула (11) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Число $c \in (a, b)$ можно представить в виде $c = a + \theta(b - a)$, где $\theta \in (0, 1)$. Тогда формулу (11) можно переписать в виде: $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$.

Зафиксируем любое $x \in (a, b)$, зададим приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда, записывая формулу Лагранжа для отрезка $[x, x + \Delta x]$, будем иметь $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$, где $\theta \in (0, 1)$.

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа заметим, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\,\varphi$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $(a,\ f(a))$ и $(b,\ f(b))$, а $f'(c) = tg\,\varphi$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c,\ f(c))$. Формула Лагранжа (11) означает, что на кривой $y = f(x)$ между точками a и b найдется точка c, касательная в которой параллельна секущей AB (рис. 9).

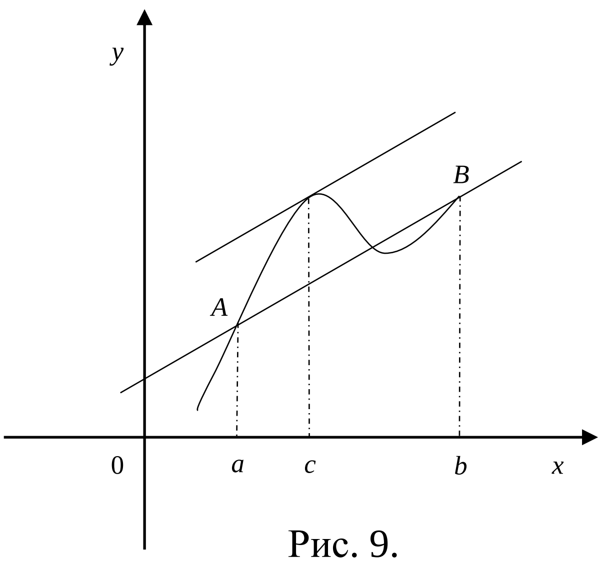

Рис. 9.

Замечание. Мы получили теорему Лагранжа как следствие теоремы Ролля. Заметим вместе с тем, что сама теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа при $f(a) = f(b)$.

Некоторые следствия из теоремы Лагранжа

Теорема 10.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$. Тогда $f(x) = const = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $f'(x) = g'(x)$, то $f(x) = g(x) + C$.

В качестве еще одного следствия теоремы Лагранжа рассмотрим вопрос об условиях, обеспечивающих неубывание (невозрастание) функции на данном интервале.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Неубывающие или невозрастающие функции называются монотонными, а возрастающие или убывающие функции – строго монотонными.

Теорема 10.3. Для того чтобы функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$ на интервале (a, b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Условие неубывания эквивалентно тому, что $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$. Тогда переходя к пределу в этом неравенстве, получим $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ge 0$.

Пусть $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (a, b)$. Возьмем $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Функция $f(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна на $[x_1, x_2]$. Поэтому к $f(x)$ можно применить на $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, в результате чего получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. По условию $f'(c) \ge 0$, $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $f(x_2) \ge f(x_1)$. Теорема доказана.

Теорема 10.4. Если $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b).

Доказательство. Возьмем $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, поэтому $f(x_2) > f(x_1)$. Теорема доказана.

Теорема 10.5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Тогда для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$ на интервале (a, b) и не обращалась тождественно в нуль ни на каком отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Из теоремы 10.3. следует, что $f'(x) \geq 0$. Если бы $f'(x) = 0$ на каком-то отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то $f(x)$ была бы постоянной на этом отрезке. Это противоречит условию сторого возрастания функции.

Пусть $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, следовательно, функция $f(x)$ не убывает на (a, b) по теореме 10.3. То есть $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Возьмем $\forall x : x_1 \leq x \leq x_2$. Тогда $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Если бы $f(x_1) = f(x_2)$, то для $\forall x \in [x_1, x_2] \quad f(x_1) = const = f(x_1) = f(x_2)$, следовательно, ее производная на этом отрезке $f'(x) = 0$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 10.6. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ во всех точках этого интервала за исключением конечного числа точек, в которых $f'(x) = 0$, то $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на нем.

Например, рассмотрим функцию $y = x + \sin x$, ее производная $y' = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$, $y' = 0$ при $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, по следствию 10.6. функция строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Теорема Коши

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что $g(a) \neq g(b)$. Если это не так, то для функции $g(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля, а, следовательно, нашлась бы точка c, в которой $g'(c) = 0$. Но это противоречит условию теоремы. Итак, $g(a) \neq g(b)$, и мы имеем право рассмотреть следующую вспомогательную функцию:

$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$. Проверим для этой функции выполнение условий теоремы Ролля. Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как разность непрерывных функций, дифференцируема на интервале (a,b). Кроме того, очевидно, что $F(a)=F(b)=0$. Таким образом, условия теоремы Ролля выполнены, следовательно, существует точка $c\in(a,b)$, такая, что $F'(c)=0$. В силу того, что $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$, будем иметь $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$. Учитывая, что $g'(c)\neq 0$, получаем требуемую формулу: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

Теорема 18.4 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены на некотором интервале $(a-\delta, a+\delta)$ и дифференцируемы на нем за исключением, быть может, точки $x=a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Можно считать, что предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$, полагая $f(a)=g(a)=0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке $x=a$. Так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то по определению предела имеем: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon$. Возьмем любое x из проколотой δ-окрестности точки a и применим теорему Коши, получим:
$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-l\right|=\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$, где $c\in(a,x)$. Таким образом, по определению предела имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции, то правило Лопиталя можно применять повторно. При этом получим

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Замечание 2. Первое правило Лопиталя легко переносится на случай, когда $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Сформулируем теорему для случая, когда $x\to+\infty$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,+\infty)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Сделаем замену переменной $x=\frac{1}{t}$. Если $x\to+\infty$, то $t\to 0+$. Функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ определены и дифференцируемы на интервале $\left(0,\frac{1}{a}\right)$.Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to0+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$.

Теорема 10.5. (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки $x=a$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

3) $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$.

Раскрытие неопределенностей других видов

Кроме рассмотренных выше неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\frac{\infty}{\infty}$, часто встречаются неопределенности следующих видов: $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(0^{0}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$ или

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to a} e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)},\quad \lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=(\infty\cdot 0).$$

Аналогично раскрываются неопределенности вида $\left(0^{0}\right)$ и $\left(\infty^{0}\right)$.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$$

2. $$\lim_{x\to 0+} x^{x}=\left(0^{0}\right)=\lim_{x\to 0+} e^{\ln x^{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x},$$

Вычислим отдельно $$\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot\ln x\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}=-\lim_{x\to 0+} x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x}=e^{0}=1$.

§ 11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФОРМУЛЕ МАКЛОРЕНА

Теорема 11.1. (Формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точка a, x – любое значение аргумента из указанной окрестности, p – произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \qquad (12)$$

где $$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} \cdot f^{(n+1)}(\xi). \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f_n(x,a)$. Тогда (12) можно переписать в виде

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f_n(x,a). \qquad (14)$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что $R_{n+1}(x)$ определяется формулой (13).

Фиксируем любое значение x из окрестности, указанной в формулировке теоремы. Ради определенности будем считать, что $x>a$. Рассмотрим на отрезке $[a, x]$ вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - f_n(x,t) - (x-t)^p \cdot Q(x), \qquad (15)$$

где $Q(x) = \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$ (16).

Подробнее $\varphi(t)$ можно записать в виде

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p \cdot Q(x) \qquad (17)$$

Покажем, что $\varphi(t)$ удовлетворяет на отрезке $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля. Из формулы (17) и условий, наложенных на $f(x)$, очевидно, что $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$ и дифференцируема на (a, x), так как $f(t)$ и ее производные до порядка n непрерывны на $[a,x]$, а $f^{(n+1)}(t)$ существует и конечна на нем. Убедимся, что $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$. Полагая в (15) $t = a$ и, принимая во внимание (16), будем иметь:

$\varphi(a) = f(x) - f_n(x,a) - (x-a)^p \cdot Q(x) = f(x) - f_n(x,a) - R_{n+1}(x)$.

Отсюда, на основании (14), получим $\varphi(a) = 0$. Равенство $\varphi(x) = 0$ сразу вытекает из формулы (17).

Итак, для функции $\varphi(t)$ на отрезке $[a,x]$ выполнены все условия теоремы Ролля, следовательно, внутри $[a,x]$ найдется точка ξ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$. Найдем $\varphi'(t)$. Дифференцируя равенство (17), будем иметь

$$\varphi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2(x-t) - \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} -$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1} \cdot Q(x).$$

Легко видеть, что все члены в правой части последнего равенства, за исключением последних двух, взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1} \cdot Q(x).$$

Полагая здесь $t = \xi$ и учитывая, что $\varphi'(\xi) = 0$, получим $Q(x) = \dfrac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$. Сопоставляя это равенство с (16), окончательно будем иметь $R_{n+1}(x) = Q(x)(x-a)^p = \dfrac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$. Теорема доказана.

Замечание. $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом в общей форме или в форме Шлемильха-Роша.

Найдем разложение по формуле Тейлора простейшей функции – алгебраического многочлена n-ой степени $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$. Так как $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, то и остаточный член $R_{n+1}(x) \equiv 0$ и формула Тейлора принимает вид $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Здесь в качестве a можно взять любую точку бесконечной прямой. Таким образом, формула Тейлора позволяет представить любой многочлен $f(x)$ в виде многочлена по степеням $(x-a)$, где a – любое действительное число.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 11.1.

Многочлен $f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f_n(x,a)$ называется многочленом Тейлора функции $f(x)$. Дифференцируя $f_n(x,a)$ по x и полагая затем $x=a$, получим следующие равенства:

$f_n(a,a)=f(a)$, $f_n'(a,a)=f'(a)$, …, $f_n^{(n)}(a,a)=f^{(n)}(a)$.

Таким образом, многочлен Тейлора для произвольной функции $f(x)$ обладает следующим свойством: он сам и его производные до порядка n включительно равны в точке $x=a$ соответственно $f(x)$ и ее производным до порядка n.

Различные формы остаточного члена. Формула Маклорена.

Преобразуем формулу (13) для остаточного члена. Так как точка ξ лежит между точками a и x, то найдется такое число $\theta\in(0,1)$, что $\xi-a=\theta(x-a)$, $\xi=a+\theta(x-a)$, $x-\xi=(1-\theta)(x-a)$. Таким образом, формула (13) может быть переписана в виде:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}\cdot f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{18}$$

Рассмотрим теперь два важных частных случая формулы (18):

1) если $p=n+1$, то получаем остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \tag{19}$$

2) если $p=1$, то получаем остаточный член в форме Коши:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{20}$$

Первая форма остаточного члена (19) наиболее употребительна в приложениях. Так как формы Лагранжа и Коши отвечают разным значениям p, а θ зависит от p, то значения θ в формулах (19) и (20) являются, вообще говоря, различными. Обе формы остаточного члена используются в тех случаях, когда требуется при тех или иных фиксированных значениях x, отличных от a, приближенно вычислить функцию $f(x)$.

Принято называть **формулой Маклорена** формулу Тейлора с центром в точке $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_{n+1}(x),$$

где остаточный член имеет вид:

1) в форме Лагранжа $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $\quad\theta\in(0,1)$ (21)

2) в форме Коши $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $\qquad \theta\in(0,1)$

3) в форме Пеано $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

Оценка остаточного члена для произвольной функции

Оценим для произвольной функции $f(x)$ остаточный член в формуле Маклорена, взятый в форме Лагранжа. Предположим, что рассматриваемая функция $f(x)$ обладает свойством: существует число M такое, что для всех n и для всех x из рассматриваемой окрестности точки $x=0$ справедливо неравенство: $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$. Отсюда вытекает, что $\left|f^{(n)}(\theta x)\right|\le M$, а, поэтому из формулы (21) следует, что

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|\le M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (22)$$

При любом фиксированном x $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Отсюда вытекает, что выбирая достаточно большой номер n, мы можем сделать правую часть (22) сколь угодно малой. Это дает возможность применять формулу Маклорена для приближенного вычисления значений функций, обладающих указанным свойством с любой наперед заданной точностью. Приведем примеры таких функций:

1. $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Совокупность всех производных этой функции ограничена на любом отрезке $[-r;r]$, $r>0$ числом $M=e^r$;

2. $f(x)=\sin x$ или $f(x)=\cos x$. Совокупность всех производных каждой из этих функций ограничена всюду числом $M=1$.

Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1. Показательная функция $f(x)=e^x$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ $\forall n$, то формула Маклорена имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $\theta\in(0,1)$.

На любом отрезке $[-r;r]$, $r>0$, в силу того, что $\left|e^{\theta x}\right|<e^r$, получаем следующую оценку $\left|R_{n+1}(x)\right|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$.

2. Функция $f(x)=\sin x$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$, формула Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\theta x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)=(-1)^n\cos\theta x\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

На любом отрезке $[-r;r]$, $r>0$ для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{2n+1}(x)|<\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Функция $f(x)=\cos x$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ (-1)^k, & n=2k\end{cases}$, формула Маклорена имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x),$$

где

$$R_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\theta x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x+\frac{(2n+2)\pi}{2}\right)=(-1)^{n+1}\cos\theta x\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

$$|R_{2n+2}(x)|<\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

4. Функция $f(x)=\ln(1+x)$.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, …, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Тогда $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$. Поэтому формула Маклорена имеет вид:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Остаточный член на этот раз запишем и оценим и в форме Лагранжа и в форме Коши:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\qquad \text{(в форме Лагранжа)}\qquad (23)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)}{(1+\theta x)^{n+1}}\qquad \text{(в форме Коши)}.$$

Для оценки $R_{n+1}(x)$ для значений $0 \le x \le 1$ удобнее исходить из остаточного члена в форме Лагранжа. Переходя в формуле (23) к модулям, получим: $\forall x \in [0,1] \Rightarrow |R_{n+1}(x)| < \dfrac{1}{n+1}$. Отсюда очевидно, что для всех $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Оценим теперь остаточный член для отрицательных значений $x \in [-r,0]$, где $0 < r < 1$. Для этого будем исходить из остаточного члена в форме Коши. Перепишем этот остаточный член в виде:

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}. \qquad (24)$$

Принимая во внимание, что для рассматриваемых значений x имеем $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, переходя в равенстве (24) к модулям, будем иметь $|R_{n+1}(x)| < \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$. Так как $0 < r < 1$, то эта оценка позволяет утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

5. Функция $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$.

Формула Маклорена имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа имеет вид: $R_{n+1}(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, 0 < \theta < 1$. Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

В частном случае, когда $\alpha = n \in \boldsymbol{N}$, $R_{n+1}(x) = 0$ и мы получаем формулу бинома Ньютона: $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n$.

Пример. Разложить функцию $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$ в ряд Маклорена.

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена $1+2x-8x^2$ и разложим его на множители: $D = 4+32 = 36$, $x_1 = \dfrac{-2+6}{-16} = -\dfrac{1}{4}, x_2 = \dfrac{-2-6}{-16} = \dfrac{1}{2}$. Тогда $1+2x-8x^2 = -8\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}\right) = (1-2x)(1+4x)$. По свойству логарифма исходную функцию можно представить в виде $f(x) = \ln(1-2x) + \ln(1+4x)$. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n} + \ldots$ Полагая в этой формуле сначала $t = -2x$, а затем $t = 4x$, окончательно получим:

$$f(x) = -2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} - \ldots - \frac{2^n x^n}{n} - \ldots + 4x - \frac{16x^2}{2} + \frac{64x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{4^n x^n}{n} + \ldots =$$

$$= 2x - 10x^2 + \frac{56x^3}{3} - \ldots + \frac{\left((-1)^{n-1}4^n - 2^n\right)x^n}{n} + \ldots$$

Использование формулы Маклорена для асимптотических оценок элементарных функций и вычисления пределов.

Формулу или оценку, характеризующую поведение функции $f(x)$ при $x \to a$, называют асимптотической. Такие оценки немедленно вытекают из формулы Маклорена, если взять в этой формуле остаточный член в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

Примеры.

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{3!} + o(x)\right) = -\frac{1}{6},$$

2. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + o(1)\right) = \frac{1}{12}.$$

§ 12. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Сформулируем несколько достаточных условий достижения функцией локального экстремума в заданной точке.

Теорема 12.1. (Первое достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (то есть $f'(x_0) = 0$). Тогда: 1) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 − точка строго локального максимума; 2) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 − точка строго локального

минимума; 3) если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.
Доказательство. По теореме Лагранжа имеем $f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)$, где точка c находится на интервале с концами x_0 и x. Если $x>x_0$, то $c>x_0$, и, значит, $f'(c)<0$. Поэтому $f(x)<f(x_0)$. Если $x<x_0$, то $c<x_0$, значит, $f'(c)>0$. Поэтому $f(x)<f(x_0)$. Доказательство пункта 2) проводится аналогично. Если $f'(x)>0$ справа и слева от точки x_0, то $f'(c)(x-x_0)<0$ слева и $f'(c)(x-x_0)>0$ справа. Отсюда имеем $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ при $x_1<x_0<x_2$. Случай $f'(x)<0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.
Теорема 12.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с "+" на "–"(с "–" на "+"), то x_0 − точка строго локального максимума (локального минимума). Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.
Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 12.1, так как там мы нигде не использовали существование производной $f'(x)$ в точке x_0.

Пример. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.
Решение. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Её производная равна $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Она нигде не обращается в нуль и не определена в точке $x=0$, в которой имеет разрыв второго рода. При $x<0$ $f'(x)<0$, а при $x>0$ $f'(x)>0$, следовательно $x=0$−точка локального минимума.
Теорема 12.3 (Второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f'(x_0)=0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда: 1) если $f''(x_0)>0$, то x_0 − точка строго локального минимума; 2) если $f''(x_0)<0$, то x_0 − точка строго локального максимума.

Доказательство. Если $f''(x_0) > 0$, то $f'(x)$ возрастает в точке x_0, то есть $f'(x)$ меняет знак с "–" на "+", поэтому x_0 − точка строго локального минимума. Если $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке x_0, то есть $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", поэтому x_0 − точка строго локального максимума. Теорема доказана.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$, проходящая через любую точку $M(x, f(x))$ этого графика $(a < x < b)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy.

Определение. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**выпуклой вверх**) на (a, b), если график этой функции расположен не ниже (не выше) касательной, проведенной к графику в любой точке этого интервала.

На рисунке 10 изображен график функции, выпуклой вниз, на рисунке 11 – график функции, выпуклой вверх.

Теорема 12.4. Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную и $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ для всех $x \in (a, b)$, то функция выпукла вниз (выпукла вверх) на этом интервале.

Доказательство. Рассмотрим случай $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Возьмем любую точку $x_0 \in (a, b)$ и проведем касательную к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$. Её уравнение имеет вид:

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (25)$$

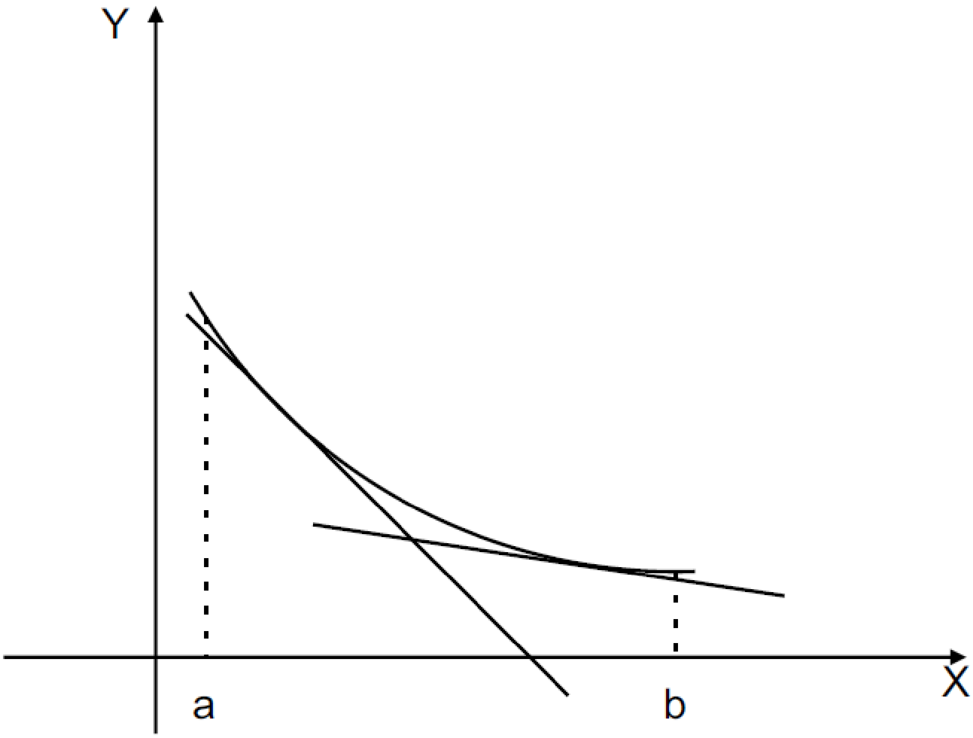

Рис. 10.

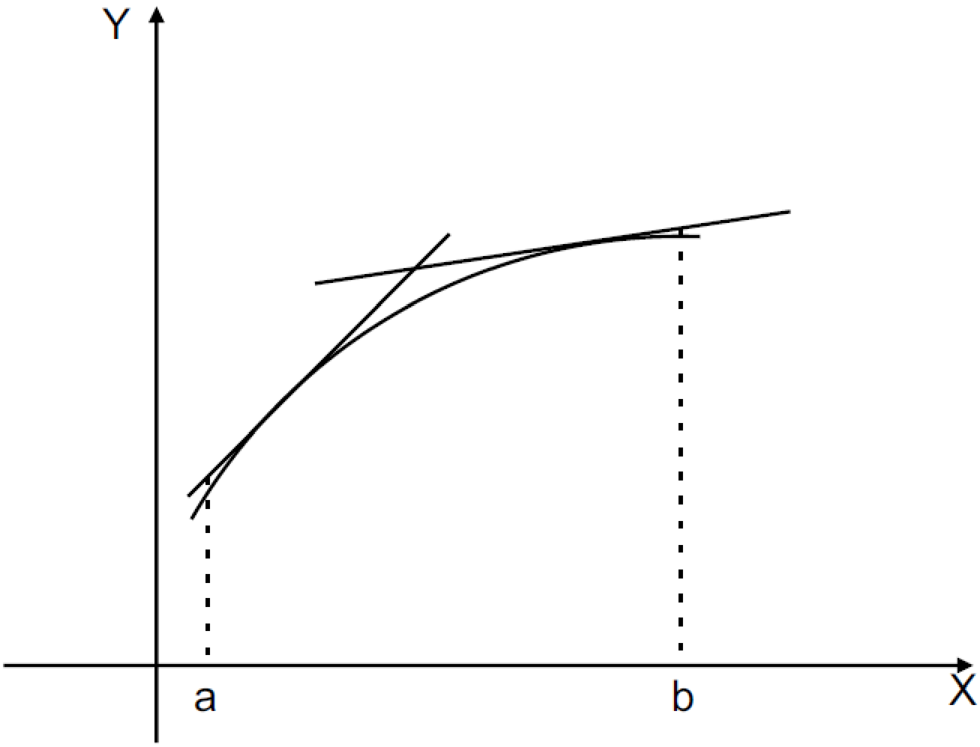

Рис. 11.

Требуется доказать, что график функции лежит не ниже касательной, проведенной в этой точке. Разложим $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора, полагая в этой формуле $n = 1$, получим:

$$y_{кр} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \qquad (26)$$

где остаточный член взят в форме Лагранжа, а ξ заключено между x_0 и x. Сопоставляя формулы (25) и (26), будем иметь: $y_{кр} - y_{кас} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$. Так как по условию $f''(x) \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $\frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \ge 0$, то есть $y_{кр} \ge y_{кас}$. Теорема доказана.

Теорема 12.5. Пусть функция $f''(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Тогда существует окрестность этой точки, в которой функция $f(x)$ выпукла вниз (выпукла вверх).

Пример. Исследовать на выпуклость функцию $f(x) = \ln x$.

Решение. Функция определена при $x > 0$. Производная первого порядка $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ на $(0, +\infty)$, следовательно, функция возрастает на всей области определения. Производная второго порядка функции $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ на $(0, +\infty)$, следовательно, функция выпукла вверх на всей области определения.

Определение. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба дифференцируемой функции $y = f(x)$, если существует проколотая окрестность этой точки такая, что график функции имеет в левой и правой полуокрестностях разные направления выпуклости.

Теорема 12.6 (необходимое условие точки перегиба).

Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0 и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 12.7 (первое достаточное условие точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и $f''(x)$ имеет в ней разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$. Тогда если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, то x_0 – точка перегиба.

Теорема 12.8 (второе достаточное условие точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \ne 0$. Тогда x_0 – точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ на плоскости xOy называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Например, график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

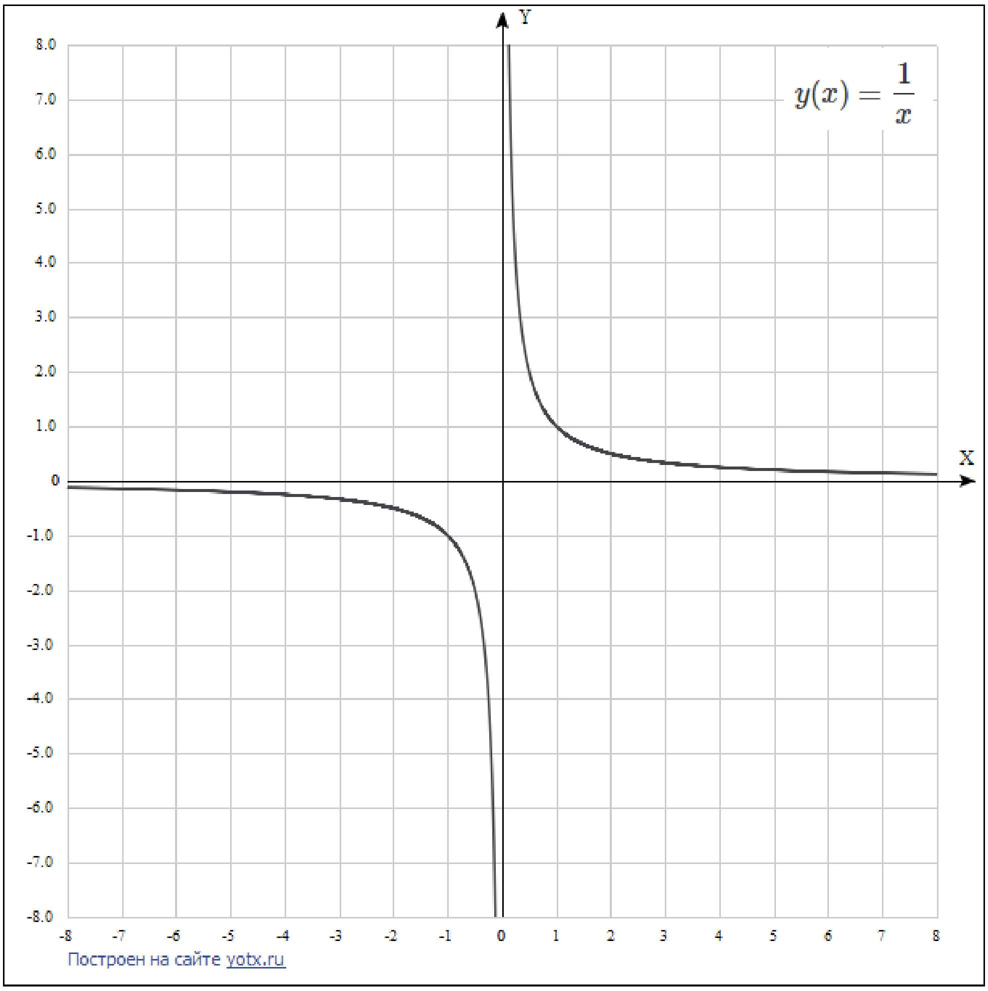

Рисунок 12.

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших значениях x.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ $x \to +\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 12.9. Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ графика функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = b$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$. При $k = 0$ $y = b$ – горизонтальная асимптота, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Область определения функции.
2. Исследование на четность, нечетность.
3. Точки пересечения с осями координат.
4. Исследование на монотонность и точки экстремума
5. Исследование на выпуклость и точки перегиба.
6. Нахождение вертикальных, наклонных асимптот.
7. График функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{3x^2 - 6x}{x - 1}$

1. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Функция общего вида, так как область определения не симметрична относительно начала координат.
3. Если $x = 0$, то $y = 0$; $y = 0$ при $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$, то есть при $x = 0$ или $x = 2$. График функции проходит через точки $(0; 0)$ и $(2; 0)$.
4. $y' = \frac{(6x-6)(x-1) - (3x^2 - 6x)}{(x-1)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 6 - 3x^2 + 6x}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x + 6}{(x-1)^2} = \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2}$

   $y' = 0$ при $x^2 - 2x + 2 = 0$, $D = 4 - 8 = -4 < 0$, то есть производная в нуль не обращается, поэтому точек экстремума нет. Так как $y' > 0$ на всей области определения, то функция монотонно возрастает на $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
5. $y'' = 3 \cdot \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x + 2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 6 \cdot \frac{(x-1)^2 - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3} = \frac{-6}{(x-1)^3}$,

   $y'' \neq 0$, следовательно, точек перегиба нет. y'' не определена в точке $x = 1$. Если $x < 1$, то $y'' > 0$, следовательно, функция выпукла вниз на $(-\infty; 1)$. Если $x > 1$, то $y'' < 0$, следовательно, функция выпукла вверх на $(1; +\infty)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1}=-\infty$, следовательно, $x=1-$ вертикальная асимптота.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+6}{x^2-x}=3$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+6-3x^2+3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+6}{x-1}=-3$, следовательно, $y=3x-3$ наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

7. График функции.

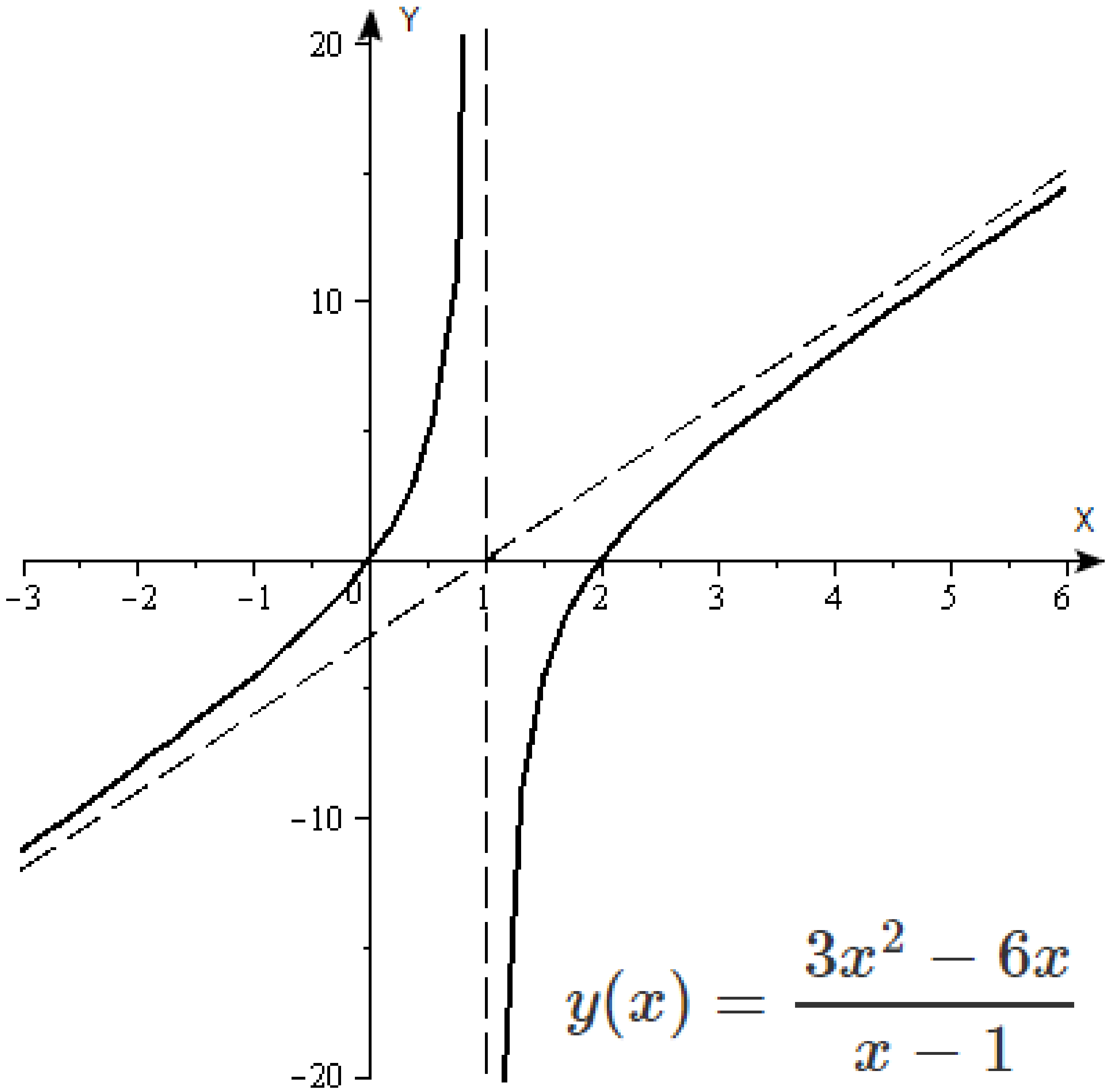

Рисунок 13.

§ 13. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a; b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса функция $y = f(x)$ достигает в некоторой точке $[a; b]$ своего наибольшего (наименьшего) значения. Наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a; b]$(тогда оно совпадает с одним из локальных максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$), либо на одном из концов отрезка $[a; b]$. Отсюда вытекает правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке:

1) найти производную;

2) найти точки локального экстремума и выбрать среди них те, которые принадлежат $[a; b]$;

3) вычислить значения функции в этих точках и в граничных точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее значения.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$ на отрезке $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Решение. $y' = \frac{-8}{x^3} - 8$, $\frac{-8}{x^3} - 8 = 0$, $\frac{-8}{x^3} = 8$, $x^3 = -1$, $x = -1 \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

y' не определена в $x = 0 \notin \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Вычисляем $y(-2) = \frac{4}{4} + 16 - 15 = 2$,

$y(-1) = \frac{4}{1} + 8 - 15 = -6$,

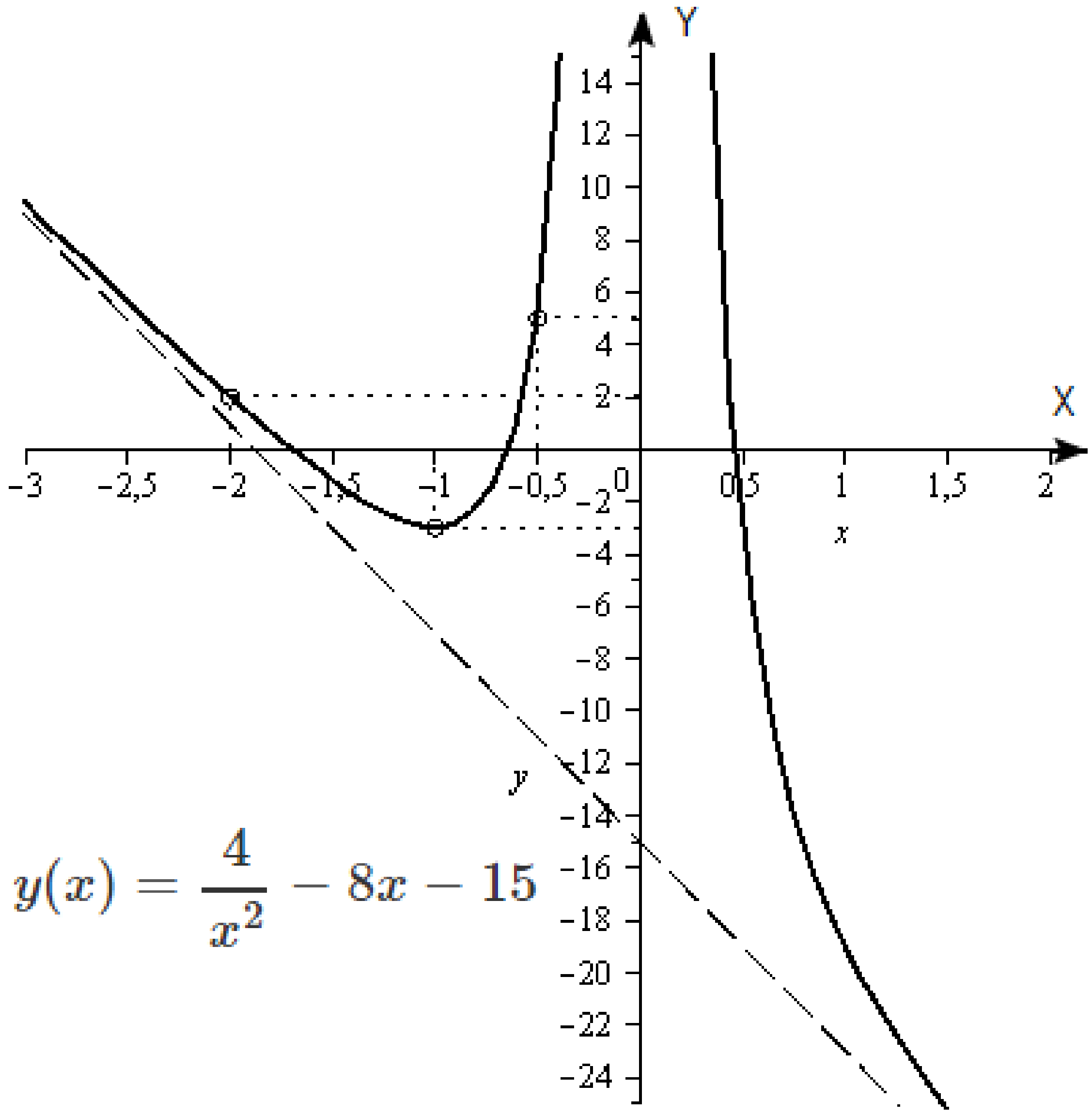

Рисунок 14.

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 4 + 4 - 15 = 5$, следовательно, $\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x) = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$, $\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x) = y(-1) = -6$.

Пример 2. (задача ЕГЭ)

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе суммарно трудятся x^2 часов в неделю, тогда за эту неделю они произведут x единиц товара, а на втором заводе суммарно трудятся y^2 часов в неделю, тогда за эту неделю они произведут y единиц товара. По условию $500x^2 + 300y^2 = 1200000$. Требуется найти максимум функции $f = x + y$. Выразим из первого уравнения y через x, получим $y = \sqrt{\frac{12000 - 5x^2}{3}}$. Подставим в выражение функции f, тогда $f = x + \sqrt{\frac{12000 - 5x^2}{3}}$. Найдем производную функции $f' = 1 - \frac{5x}{\sqrt{3}\sqrt{12000 - 5x^2}}$. $f' = 0$ при $\sqrt{3}\sqrt{12000 - 5x^2} = 5x$, $3(12000 - 5x^2) = 25x^2$, $36000 = 40x^2$, $900 = x^2$, $x = \pm 30$, но $x = -30$ не удовлетворяет условию задачи. Проверяем знак производной: $f' > 0$ при $x < 30$ и $f' < 0$ при $x > 30$, следовательно, $x = 30$ – точка локального максимума функции. Тогда $y = \sqrt{2500} = 50$ и максимальное количество единиц товара равно 80.

Пример 3. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Решение. Пусть высота конуса равна h. Тогда $OH = h - R$. По теореме Пифагора из ΔAOH: $AH^2 = r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$. Тогда объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2Rh - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3)$. Найдем производную этой функции: $V' = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2)$. Нули производной: $V' = 0$ при $4Rh - 3h^2 = 0$, $h(4R - 3h) = 0$, $h = 0$ не удовлетворяет условию задачи, $h = \frac{4R}{3}$. Проверяем знак производной: $V' > 0$ при $h < \frac{4R}{3}$ и $V' < 0$ при $h > \frac{4R}{3}$, следовательно, $h = \frac{4R}{3}$ – точка локального максимума функции. Ответ: $h = \frac{4R}{3}$.

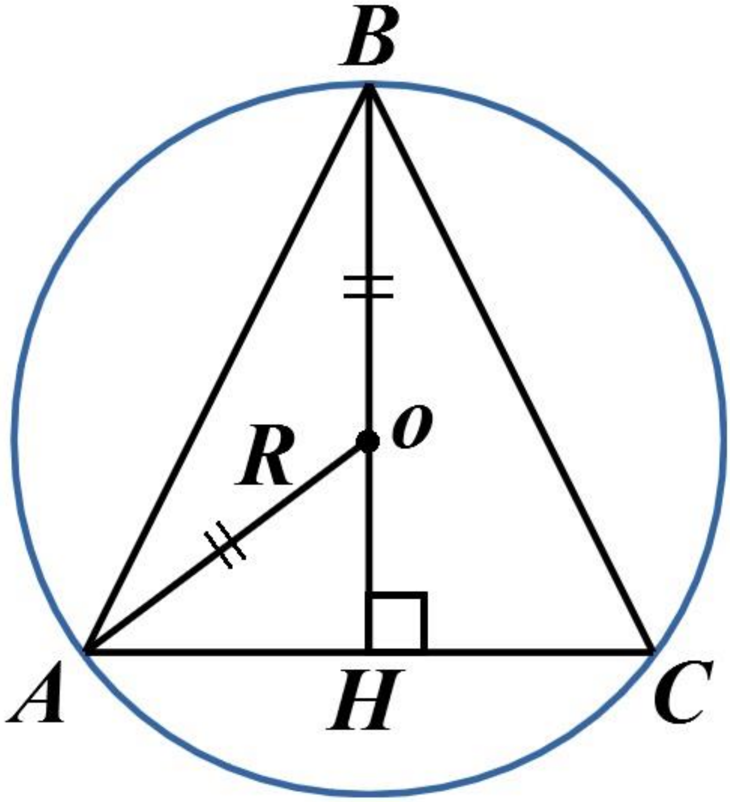

Рисунок 15.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Термин «пространство» по существу эквивалентен термину «множество». Познакомимся с некоторыми пространствами (рис.16).

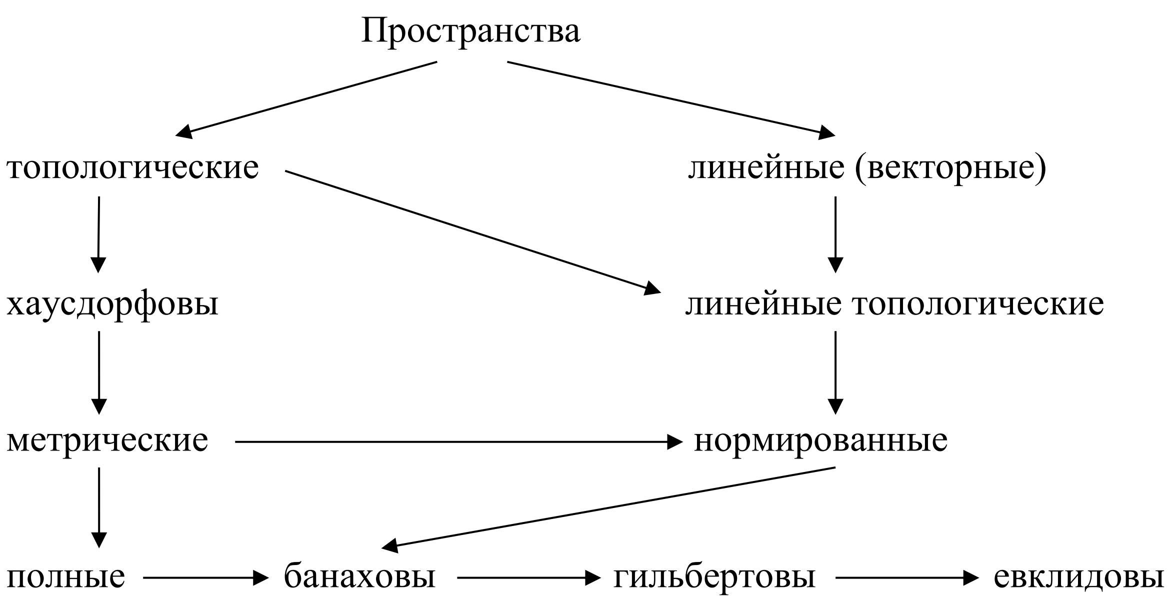

Рис.16.

Стрелки на рисунке 16 имеют такой смысл: пространство, на которое указывает стрелка, является частным случаем того пространства, из которого она «выходит».

Пусть X – произвольное множество. *Топологической структурой* или *топологией* во множестве X называется совокупность Ω его подмножеств, для которой выполнены три условия:

1. объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности Ω, также принадлежит Ω;
2. пересечение любых двух множеств, принадлежащих совокупности Ω, также принадлежит Ω;
3. пустое множество и все множество X принадлежат Ω.

Множество X с выделенной топологической структурой Ω называется *топологическим пространством* и обозначается (X,Ω). Множества, входящие в выделенную совокупность Ω, называются открытыми в X множествами. Условия 1) –3) называются аксиомами топологической структуры. Элементы множества X называются точками пространства (X,Ω).

Приведем примеры топологических пространств.

1. Пусть Ω содержит всего два множества: пустое множество $\varnothing$ и множество X. Тогда топологическое пространство (X,Ω) называется антидискретным пространством или пространством с тривиальной топологией.
2. Пусть X есть луч $[0;+\infty)$, а Ω состоит из пустого множества $\varnothing$, X и всевозможных лучей $(a;+\infty)$, $a \geq 0$. Для совокупности Ω аксиомы 1) –3) выполнены.

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым* в пространстве (X,Ω), если его дополнение открыто. Например, в антидискретном пространстве замкнуты пустое множество $\varnothing$ и множество X. В стрелке замкнуты $\varnothing$, весь луч $[0;+\infty)$ и отрезки $[0;a]$, где $a \geq 0$.

Определение. **Топологической окрестностью** (или просто **окрестностью**) точки x топологического пространства X называется всякое открытое множество U_x, содержащее эту точку x.

Определение. Топологическое пространство (X,Ω) называется **хаусдорфовым**, если любые две различные точки x и y этого пространства имеют непересекающиеся окрестности $U_x \in \Omega$ и $U_y \in \Omega$, то есть $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Пусть M – произвольное множество. *Метрикой* во множестве M называется такая числовая функция ρ, определенная на множестве всевозможных пар элементов множества M $\rho: M \times M \to \mathbf{R}$, $(x,y) \to \rho(x,y)$, что выполнены три условия:

1. $\forall x,y \in M$ имеем $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y)=0$, если $x=y$ и $\rho(x,y)>0$, если $x \neq y$;
2. $\forall x,y \in M$ имеем $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность);

3. $\forall x, y, z \in M$ имеет место неравенство треугольника $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Тогда пара (M,ρ) или само множество M называется метрическим пространством, значение метрической функции $\rho(x,y)$ на паре элементов x и y называется расстоянием между точками x и y.

Приведем примеры метрических пространств.

1. Возьмем в качестве множества M произвольное множество и для любых элементов x и y из M положим $\rho(x,y)=1$, если $x \ne y$ и $\rho(x,y)=0$, если $x = y$. Такая метрика называется симплициальной. В этом пространстве расстояние между любыми двумя различными точками равно 1.
2. Возьмем в качестве множества M множество $\boldsymbol{R}$. Определим метрику по формуле $\rho(x,y)=|x-y|$. Это стандартная метрика на прямой.

Метрику на одном и том же множестве M можно задавать по-разному. Например, на плоскости $\boldsymbol{R}^2$ можно задать расстояние между точками $\bar{x}=(x_1,y_1)$ и $\bar{y}=(x_2,y_2)$ как по формуле $\rho(\bar{x},\bar{y})=\max\left(\left|x_2-x_1\right|,\left|y_2-y_1\right|\right)$, так и по формуле $\rho(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Для всякого числа $\varepsilon > 0$ определим открытые ε- окрестности точек $x \in M$ в метрическом пространстве (M,ρ)(обозначим их через $U_\varepsilon(x)$) как множество точек , содержащееся в M и состоящее из всех точек $y \in M$ с условием $\rho(x,y) < \varepsilon$. Множества U, являющиеся объединением любой совокупности, составленной из ε- окрестностей различных точек точек $x \in M$, назовем открытыми. Тогда можно показать, что система множеств $\{U\}$ задает на множестве M топологию и превращает это множество в топологическое хаусдорфово пространство. Заданная топология называется топологией, порожденной метрикой ρ.

Определение. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots x_n$ метрического пространства (M,ρ) называется **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall N_1, N_2 > N$ имеем $\rho\left(x_{N_1}, x_{N_2}\right) < \varepsilon$.

Определение. Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется **сходящейся** к точке $a \in X$, если числовая последовательность $\rho_n = \rho(x_n, a)$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Из неравенства треугольника можно показать, что такая точка $a \in X$ единственна.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется **полным**, если всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке $a \in X$.

Определение. Множество $X = \{x\}$ называется **линейным пространством**, если выполнены следующие условия:

1. $\forall x, y \in X$ однозначно определен элемент z такой, что $z = x + y$ называемый их суммой, причем:

а) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

б) $x + y = y + x$;

в) существует нулевой элемент такой, что $\forall x \in X$ имеем $x + 0 = x$;

г) $\forall x \in X$ существует обратный элемент 4 такой, что $x + (-x) = 0$.

2. Для любого действительного числа α и $\forall x \in X$ определен элемент $\alpha x \in X$, причем:

а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

б) $1 \cdot x = x$.

3. Операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности:

а) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

б) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Примерами линейных пространств является n-мерное векторное пространство, пространство непрерывных функций $C_{[a,b]}$. Элементы линейного пространства называются векторами.

Определение. Линейное пространство называется **нормированным**, если для любого вектора $x \in X$ определена его норма $\|x\|$, обладающая свойствами:

1) $\|0\| = 0$;

2) $\forall x \neq 0$ имеем $\|x\| > 0$;

3) $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$ имеем $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

4) $\forall x, y \in X$ справедливо неравенство треугольника $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

Заметим, что пространство $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, является нормированным пространством с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{[a,b]}|f(x)|$.

Утверждение. Функция $\rho(x,y)=\|x-y\|$, определенная на декартовом квадрате X^2, где X – нормированное пространство, является метрикой на пространстве X.

Доказательство. Нужно проверить, что функция $\rho(x,y)=\|x-y\|$ неотрицательна, симметрична, удовлетворяет неравенству треугольника.

1) $\rho(x,y)=\|x-y\|\ge 0$ и $\rho(x,y)=\|x-y\|=0 \quad \Leftrightarrow x=y$;

2) $\rho(x,y)=\|x-y\|=|-1|\cdot\|y-x\|=\rho(y,x)$;

3) $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|=\rho(x,z)+\rho(z,y)$. Утверждение доказано.

Определение. Полное нормированное пространство называется **банаховым пространством**.

Пусть на множестве X задана структура линейного пространства. Определим функцию $f(a,b)$ на декартовом квадрате X^2, то есть на множестве пар (a,b), где $a,b\in X$. Пусть $f(a,b)$ обладает следующими свойствами:

1) свойство положительности: $\forall a\in X \;\; f(a,a)>0$ при $a\ne 0$;

2) свойство симметричности: $\forall a,b\in X \quad f(a,b)=f(b,a)$;

3) свойство аддитивности: $\forall a,b,c\in X \quad f(a,b+c)=f(a,b)+f(a,c)$;

4) свойство однородности: $\forall a,b\in X \qquad \forall\lambda\in\boldsymbol{R}$ справедливо $f(\lambda a,b)=\lambda f(a,b)$.

Функция $f(a,b)$, удовлетворяющая свойствам 1)-4) называется **скалярным произведением** и обозначается (a,b). Оказывается, что функция $\sqrt{(a,a)}=\|a\|$ является нормой и само пространство X с этой нормой является нормированным. Действительно, неотрицательность и однородность функции $\sqrt{(a,a)}=\|a\|$ очевидна. Проверим неравенство треугольника. Докажем сначала **неравенство Коши**:

$$(x,y)^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$$

Доказательство. Положим $x_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$, $y_1 = \dfrac{y}{\|y\|}$. Тогда последнее неравенство следует из того, что $|(x_1, y_1)| \le 1$. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $(x_1, y_1) \ge 0$. Тогда имеем: $0 \le (x_1 - y_1, x_1 - y_1) = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) - 2(x_1, y_1) = 2 - 2(x_1, y_1)$. Отсюда получаем $(x_1, y_1) \le 1$. Неравенство Коши доказано.

Теперь докажем **неравенство треугольника**:

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \le \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\,.$$

Доказательство. Используя неравенство Коши, имеем:

$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + 2(x,y) \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| =$

$(\|x\| + \|y\|)^2$. Неравенство доказано.

Полное метрическое пространство X с метрикой $\rho(x,y) = \|x-y\|$ называется **гильбертовым пространством**. Следовательно, гильбертово пространство – частный случай банахова пространства X с нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Конечномерное гильбертово пространство называется **евклидовым пространством**.

§ 2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) действительных чисел x и y называется координатной плоскостью. Координатная плоскость называется евклидовой, если расстояние между двумя любыми точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определено по формуле $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Множество всевозможных упорядоченных троек (x, y, z) действительных чисел x, y, и z называется координатным пространством. Координатное пространство называется евклидовым, если расстояние между двумя любыми точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ определено по формуле $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Определение. Если каждой точке M из некоторого множества $\{M\}$ точек евклидовой плоскости ставится в соответствие по известному некоторое число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция двух переменных и пишут $u = f(M)$ или $u = f(x, y)$.

Аналогично вводится понятие функции трех переменных. Для функции трех переменных будем употреблять обозначение $u = f(x, y, z)$. Если функция $u = f(M)$ задана на множестве $\{M\}$, то это множество называется **областью определения функции**. Для функции двух переменных можно ввести понятие графика функции, именно: графиком функции $u = f(x, y)$ называется поверхность, точки которой имеют координаты $(x, y, f(x, y))$.

Определение. Кривые, на которых $f(x, y) = C = const$ называются **линиями уровня** функции $u = f(x, y)$.

Примеры. 1. Нарисовать область определения функции $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

Решение. Область определения определяется неравенством $\cos(x^2 + y^2) \geq 0$, то есть $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 1, 2, \ldots$ На рисунке 17 изображена область определения данной функции.

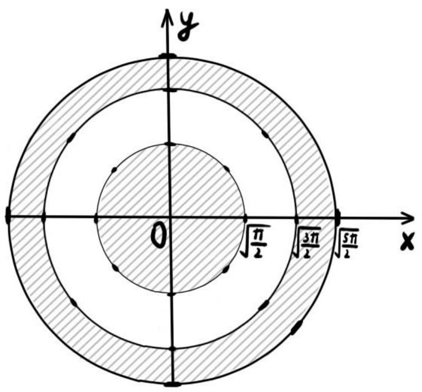

Рис.17.

2. Построить линии уровня функции $z = xy$.

Решение. Линии уровня данной функции определяются уравнением $xy = C$. При $C = 0$ получаем уравнения осей координат $x = 0$ или $y = 0$

. При других значениях C получаем уравнение семейства гипербол $y = \frac{C}{x}$.

3. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Линии уровня данной функции представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = C$. Сама поверхность называется параболоидом вращения и изображена на рисунке 18.

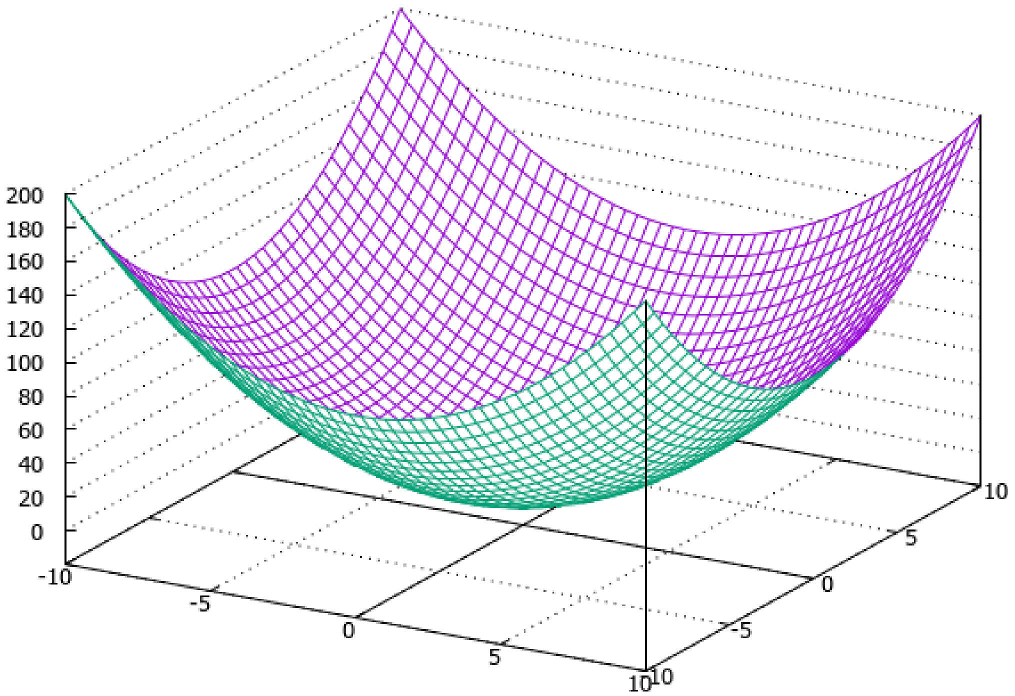

Рис.18.

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n действительных чисел называется n-мерным координатным пространством. Это пространство называется евклидовым $\boldsymbol{R}^n$, если расстояние между двумя любыми точками $M_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $M_2(x_1', x_2', \ldots x_n')$ определено по формуле $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i' - x_i)^2}$.

Рассмотрим несколько примеров множеств в n-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

1. Множество $\{M\}$ всевозможных точек, координаты $x_1, x_2, \ldots x_n$ которых удовлетворяют неравенству

$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2 \le R^2$ называется n-мерным шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$. Если расстояние от каждой точки M множества $\{M\}$ до точки M_0 удовлетворяет строгому неравенству $\rho(M, M_0) < R$, то множество $\{M\}$ называется открывается открытым шаром.

2. Множество $\{M\}$ всевозможных точек, координаты $x_1, x_2, \ldots x_n$ которых удовлетворяют неравенствам $|x_1 - x_{10}| \le d_1$, $|x_2 - x_{20}| \le d_2, \ldots$, $|x_n - x_{n0}| \le d_n$ называется n-мерным параллелепипедом. Если координаты $x_1, x_2, \ldots x_n$ точек множества $\{M\}$ удовлетворяют строгим неравенствам $|x_1 - x_{10}| < d_1$, $|x_2 - x_{20}| < d_2, \ldots$, $|x_n - x_{n0}| < d_n$, то множество $\{M\}$ называется открытым параллелепипедом. При этом точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ называется центром этого параллелепипеда.

Определение. ε**-окрестностью** точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется открытый n-мерный шар радиуса ε с центром в точке M_0.

Пусть $\{M\}$ – некоторое множество точек евклидова n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$. Точка M множества $\{M\}$ называется **внутренней точкой** этого множества, если существует ε-окрестность точки M, все точки которой принадлежат множеству $\{M\}$.

Точка M называется **граничной точкой** множества $\{M\}$, если любая ε-окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству $\{M\}$, так и не принадлежащие ему.

Множество $\{M\}$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется открытым, если любая точка этого множества внутренняя. Если каждая граничная точка множества $\{M\}$ является точкой этого множества, то множество $\{M\}$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется замкнутым. Если все точки множества $\{M\}$ находятся внутри некоторого шара, то это множество называется ограниченным.

Непрерывной кривой L в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ будем называть множество $\{M\}$ точек этого пространства, координаты $x_1, x_2, \ldots x_n$ которых представляют собой непрерывные функции параметра t:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots,\ x_n = \varphi_n(t),\ \ \alpha \le t \le \beta. \qquad (1)$$

Будем говорить, что точки $M'(x_1', x_2', \dots x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots x_n'')$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ можно соединить непрерывной кривой L, если существует такая непрерывная кривая L, определяемая параметрическими уравнениями (1), что

$$x_1' = \varphi_1(\alpha),\ x_2' = \varphi_2(\alpha),\ \dots, x_n' = \varphi_n(\alpha),$$

$$x_1'' = \varphi_1(\beta),\ x_2'' = \varphi_2(\beta),\ \dots, x_n'' = \varphi_n(\beta).$$

Определение. Множество $\{M\}$ пространства $\boldsymbol{R}^n$ называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Например, множество точек пространства $\boldsymbol{R}^n$, определяемое уравнением $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$, называется n-мерным эллипсоидом. Точки n-мерного эллипсоида являются граничными точками множества, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1$. Это множество является множеством внутренних точек n-мерного эллипсоида. Оно является открытым и связным множеством.

Определение. Если каждой точке M множества $\{M\}$ точек n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(M)$ или $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$.

При этом множество $\{M\}$ называется областью определения функции.

Например, для функции $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$ областью определения является замкнутый шар $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \le 1$, а для функции $u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2}}}$ областью определения является множеством внутренних точек n-мерного эллипсоида, определяемое неравенством

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1.$$

§ 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется сходящейся, если существует такая точка A, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n \geq N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon$.

При этом точка A называется пределом последовательности $\{M_n\}$. Пишут $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = A$ или $M_n \to A$ при $n \to \infty$.

Лемма. Пусть последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ сходится к точке A. Тогда последовательности $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \ldots,$ $\{x_n^n\}$ координат точек M_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, a_2, \ldots a_n$ точки A и, наоборот, если последовательности $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}$ $, \ldots, \{x_n^n\}$ координат точек M_n сходятся соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots a_n$, то последовательность $\{M_n\}$ сходится к точке $A(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Доказательство. Пусть $M_n \to A$ при $n \to \infty$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n \geq N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon$. Пусть $M_n\left(x_1^n, x_2^n, \ldots x_n^n\right)$, $A(a_1, a_2, \ldots a_n)$. Тогда неравенство $\rho(M_n, A) < \varepsilon$ можно записать следующим образом:

$$\sqrt{(x_1^2 - a_1)^2 + \ldots + (x_n^2 - a_n)^2} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что при $\forall n \geq N$ выполняются неравенства: $\left|x_1^n - a_1\right| < \varepsilon$ $, \ldots,$ $\left|x_n^n - a_n\right| < \varepsilon$. Иными словами, последовательности $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \ldots,$ $\{x_n^n\}$ координат точек M_n сходятся соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots a_n$. Докажем обратное. Пусть указанные последовательности координат точек M_n сходятся соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots a_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ можно указать номера $N_1, N_2, \ldots N_n$ такие, что при $\forall n \geq N_1, n \geq N_2, \ldots, n \geq N_n$ выполняются неравенства: $\left|x_1^n - a_1\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $\left|x_2^n - a_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ldots, \left|x_n^n - a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Отсюда следует, что при

$\forall n \geq N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ выполняется неравенство (2). Лемма доказана.

Определение. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется **фундаментальной** или последовательностью Коши, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \quad \forall m - нат. \Rightarrow \rho(M_{n+m}, M_n) < \varepsilon$.

Теорема 3.1. (критерий Коши сходимости последовательности)

Для того чтобы последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Из условия фундаментальности последовательности $\{M_n\}$ следует, что последовательности $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, \ldots, \{x_n^n\}$ координат точек M_n также фундаментальны, и, наоборот, если указанные последовательности координат фундаментальны, то фундаментальной будет и последовательность $\{M_n\}$. Затем нужно применить критерий Коши для числовых последовательностей к последовательностям координат точек $\{M_n\}$ и лемму. Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется ограниченной, если все точки этой последовательности находятся внутри или на границе некоторого шара с центром в начале координат.

Теорема 3.2. (Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим функцию $u = f(M)$, определенную на множестве $\{M\}$ n-мерного евклидова пространства, и точку M_0, быть может и не принадлежащую множеству $\{M\}$, но обладающую тем свойством, что в любой ε-окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка M, отличная от M_0.

Определение. Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n$ множества $\{M\}$, элементы которой отличны от M_0 (

$M_n \neq M_0$) соответствующая последовательность $f(M_1)$, $f(M_2),\ldots$, $f(M_n),\ldots$ значений функции сходится к b.

Определение. Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M \to M_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M \in D(u): 0 < \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon$.

Определение. Число b называется пределом функции $u = f(M)$ при $M \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a$ такое, что $\forall M \in D(u): \rho(0, M) > a \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon$.

Утверждение. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в точке M_0 предельные значения b и c. Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ и $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ имеют в точке M_0 предельные значения $b \pm c$, $b \cdot c, \dfrac{b}{c}$ (при условии $c \neq 0$).

Определение. Функция $u = f(M)$ называется бесконечно малой в точке M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

Например, функция $f(M) = (x_1 - a_1)^{n_1} + (x_2 - a_2)^{n_2} + \ldots + (x_n - a_n)^{n_n}$, где $n_1, n_2, \ldots, n_n$ –положительные числа, является бесконечно малой в точке $A(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Если функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 предел, равный b, то функция $\alpha(M) = f(M) - b$ является бесконечно малой в точке M_0. Действительно, $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to M_0} (f(M) - b) = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) - b = 0$. Используя этот результат, можно получить специальное представление для функции, имеющей в точке M_0 предельное значение, равное b: $f(M) = b + \alpha(M)$, где $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$.

Определение. Будем говорить, что функция $u = f(M)$ удовлетворяет в точке M_0 условию Коши, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M', M'' \in D(u):\ 0 < \rho(M', M_0) < \delta, 0 < \rho(M'', M_0) < \delta \Rightarrow$ $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$.

Теорема 3.3. (критерий Коши)
Для того чтобы функция $u = f(M)$ имела конечное предельное значение в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы функция $u = f(M)$ удовлетворяла в этой точке условию Коши.

§ 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть точка M_0 принадлежит области определения функции $u = f(M)$ и любая ε-окрестность этой точки содержит отличные от M_0 точки области определения этой функции.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется **непрерывной в точке** M_0, если существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Условие непрерывности можно записать в следующей форме: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f\left(\lim\limits_{M \to M_0} f(M)\right)$. Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются **точками разрыва** этой функции.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется **непрерывной в точке** M_0, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M \in D(u)$: $\rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow$ $\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon$.

Определение. Функция $u = f(M)$ называется **непрерывной на множестве** $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Назовем полным приращением функции $u = f(M)$ в точке M_0 функцию $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, где M – любая точка из области определения. Пусть $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$. Обозначим $x_1 - x_{10} = \Delta x_1, \ldots, x_n - x_{n0} = \Delta x_n$.

Тогда $\Delta u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$. Очевидно, что для непрерывности функции $u = f(M)$ в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы ее приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ представляло собой бесконечно малую в точке M_0 функцию, то есть, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{M \to M_0} \Delta u = \lim\limits_{M \to M_0} (f(M) - f(M_0)) = 0$.

Для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ нескольких переменных можно определить понятие непрерывности по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных. Рассмотрим частные приращения функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в точке $M(x_1, x_2, \ldots x_n) \in D(u)$. Зафиксируем все аргументы, кроме первого, а первому придадим произвольное приращение Δx_1 такое, что точка с координатами $(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots x_n)$ находилась в области определения функции. Соответствующее приращение функции называется **частным приращением функции** в точке $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, соответствующим приращению Δx_1 аргумента x_1 и обозначается $\Delta_{x_1} u$.

Таким образом, $\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Аналогично определяются частные приращения функции, соответствующие приращениям других аргументов.

Определение. Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется непрерывной в точке $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$ по переменной x_k, если частное приращение $\Delta_{x_k} u$ этой функции в точке $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$ представляет собой бесконечно малую функцию от Δx_k, то есть $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0$.

Из условия непрерывности функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в данной точке M вытекает непрерывность этой функции в точке M по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$. Однако из непрерывности функции в точке M по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ не вытекает, вообще говоря, непрерывность функции в этой точке.

Перечислим основные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Утверждение 1. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0. Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ непрерывны в точке M_0 (частное при условии $g(M_0) \neq 0$).

Введем понятие сложной функции нескольких переменных. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots,$ $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ заданы на множестве $\{D\}$ евклидова пространства $\boldsymbol{R^m}$. Тогда каждой точке $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in D$ ставится в соответствие точка $M(x_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \ldots, x_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m))$ евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$. Обозначим через $\{M\}$ множество всех таких точек. Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ функция n-переменных, заданная на множестве $\{M\}$. В этом случае будем говорить, что на множестве $\{D\}$ пространства $\boldsymbol{R^m}$ определена сложная функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются функциями переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

Утверждение 2.

Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ непрерывны в точке $A(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$, а функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ непрерывна в точке $B(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$, где $x_{i0} = \varphi_i(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$, $i = \overline{1, n}$. Тогда сложная функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ непрерывна в точке $A(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$.

Теорема 4.1. (об устойчивости знака непрерывной функции)

Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0 евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ и если $f(M_0) \neq 0$, то существует такая δ-окрестность точки M_0, в пределах которой во всех точках области своего определения функция $u = f(M)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(M)$.

Теорема 4.2. (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение)

Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна во всех точках связного множества $\{M\}$ евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$, причем $f(A)$ и $f(B) -$ значения этой функции в точках A и B этого множества. Пусть далее C – любое число, заключенное между $f(A)$ и $f(B)$. Тогда на любой непрерывной кривой *L*, соединяющей точки *A* и *B* и целиком лежащей во множестве $\{M\}$, найдется точка *N* такая, что $f(N)=C$.

Доказательство. Пусть $x_1=\varphi_1(t),\ldots,\ x_n=\varphi_n(t),\ \alpha\le t\le\beta -$ уравнения непрерывной кривой *L*, соединяющей точки *A* и *B* множества $\{M\}$ и целиком лежащей во множестве $\{M\}$. На отрезке $[\alpha,\beta]$ определена сложная функция $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, где $x_i=\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha\le t\le\beta$. Очевидно, значения этой функции на отрезке $[\alpha,\beta]$ совпадают со значениями функции $u=f(M)$ на кривой *L*. Указанная сложная функция одной переменной *t* в силу утверждения 2 непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и, следовательно, в некоторой точке $\xi\in[\alpha,\beta]$ принимает значение *C*. Поэтому в точке *N* кривой с координатами $\varphi_1(\xi),\ldots,\ \varphi_n(\xi)$ справедливо равенство $f(N)=C$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. (первая теорема Вейерштрасса)

Если функция $u=f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она ограничена на этом множестве.

Доказательство. Пусть функция $u=f(M)$ не ограничена сверху на множестве $\{M\}$. Выделим последовательность $\{M_n\}$ точек множества $\{M\}$, для которых $f\{M_n\}>n$. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{M_{n_к}\}$, предел M которой принадлежит множеству $\{M\}$. Очевидно, последовательность $\{f(M_{n_к})\}$ бесконечно большая. С другой стороны, в силу непрерывности функции в точке M, эта последовательность $\{f(M_{n_к})\}$ должна сходиться к $f(M)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 4.4. (вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция $u=f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней.

Определение. Функция $u=f(M)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $\{M\}$ евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall M',M''\in\{M\}$: $\rho(M',M'')<\delta\Rightarrow \left|f(M')-f(M'')\right|<\varepsilon$.

Теорема 4.5. (о равномерной непрерывности)
Непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $\{M\}$ функция равномерно непрерывна на этом множестве.

Определение. **Диаметром** ограниченного множества $\{M\}$ называется точная верхняя грань чисел $\rho(M',M'')$, где $M',M''-$ всевозможные точки множества $\{M\}$.

Утверждение 3. Пусть функция $u=f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что на каждом принадлежащем множеству $\{M\}$ замкнутом подмножестве $\{\overline{M}\}$, диаметр которого меньше δ, колебание функции $\omega=\sup\{f(M)\}-\inf\{f(M)\}<\varepsilon$.

§ 5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть точка $M(x_1,x_2,\ldots x_n)$ является внутренней точкой области определения функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$. Рассмотрим в данной фиксированной точке $M(x_1,x_2,\ldots x_n)$ отношение частного приращения $\Delta_{x_i}u$ к соответствующему приращению Δx_i аргумента x_i:

$$\frac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}=\frac{f(x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n)-f(x_1,...,x_i,...,x_n)}{\Delta x_i}$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}$, то он называется частной производной функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ в точке $M(x_1,x_2,\ldots x_n)$ по переменной x_i и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ или f'_{x_i}. Таким образом, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}$.

Отметим, что частная производная функции $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ по переменной x_i представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому вычисление частных производных производится по обычным правилам вычисления производных функций одной переменной.

Примеры. Найти частные производные данных функций:

1) $z=x^y$; 2) $z=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$, 3) $u=x\cdot e^{yz}+\ln(x-y+z)$.

Решение. 1) $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$;

2) $$z'_x=\frac{1}{1+\dfrac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$z'_y=\frac{1}{1+\dfrac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\frac{1-xy+x(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+x^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{(1+y^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1+y^2};$$

3) $u'_x=e^{yz}+\dfrac{1}{x-y+z}$, $u'_y=xz\cdot e^{yz}-\dfrac{1}{x-y+z}$, $u'_z=xy\cdot e^{yz}+\dfrac{1}{x-y+z}$.

Замечание 1. Из существования у функции в данной точке всех частных производных, вообще говоря, не вытекает непрерывность функции в данной точке. Например, функция $u=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & при\quad x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad при\quad x^2+y^2=0\end{cases}$

не является непрерывной в точке (0,0). Действительно, рассмотрим прямую, отличную координат, проходящую через (0,0): $y = kx,\ k \neq 0$. На такой прямой все значения функции постоянны и равны $\dfrac{k}{1+k^2}$. Поэтому если последовательность $\{M_n\}$ отличных от нуля точек такой прямой сходится к нулю, то соответствующая последовательность значений функции имеет предел $\dfrac{k}{1+k^2}$. Так как при $k \neq 0$ этот предел отличен от нуля, то функция разрывна в этой точке на рассматриваемой прямой. Эта функция непрерывна в точке (0,0) по каждой из переменных x и y, то есть непрерывна на координатных осях, так как ее значения на этих осях равны нулю. В этой точке указанная функция имеет частные производные по x и по y, так как $u(x,0) \equiv 0$ и $u(0,y) \equiv 0$ и, поэтому, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$.

Полным приращением функции $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ в точке $M(x_1, x_2, \dots x_n)$, соответствующим приращениям $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \dots,\ \Delta x_n$ аргументов, называется выражение $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Определение. Функция $u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x_1, x_2, \dots x_n)$, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \varepsilon_1(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \cdot \Delta x_1 + \varepsilon_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \cdot \Delta x_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ – некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ числа, а $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_i(0, \ldots, 0) = 0$.

Если хотя бы одно из чисел $A_1, \ldots, A_n$ отлично от нуля, то сумма $A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$ представляет собой главную линейную относительно приращений аргументов часть приращения функции и называется **дифференциалом** в точке $M(x_1, x_2, \dots x_n)$ и обозначается du. Если все $A_1 = \ldots = A_n = 0$, то дифференциал du в точке считается равным нулю. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем

$\Delta x_1,...,\Delta x_n$, имеет место приближенное равенство: $du \approx \Delta u$. Это используется в приближенных вычислениях.

Теорема 5.1. Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ дифференцируема в точке $M(x_1, x_2, \ldots x_n)$, то в этой точке существуют все частные производные по всем аргументам, причем $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_M = A_i$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. По определению имеем $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_M = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$, где $\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i + \varepsilon_i (0,...,\Delta x_i,...,0) \cdot \Delta x_i$, $\varepsilon_i \to 0$ при $\Delta x_i \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \varepsilon_i$, поэтому $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_M = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i$. Теорема доказана.

Используя эту теорему можно переписать выражение для дифференциала следующим образом: $du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n$.

Введем понятие дифференциала dx_i независимой переменной x_i. Под дифференциалом dx_i независимой переменной x_i можно понимать любое не зависящее от $x_1, x_2, \ldots x_n$ число. Договоримся в дальнейшем брать это число равным приращению Δx_i переменной x_i. Тогда $du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$.

Для функции одной переменной из существования производной вытекает дифференцируемость функции. Для функции нескольких переменных это не так. Например, рассмотрим функцию $z = \sqrt[3]{|xy|}$. Найдем ее частные производные в точке (0,0):

$$z'_x\Big|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$z'_y\Big|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(0, \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Пусть функция дифференцируема в точке (0,0), тогда ее приращение в этой точке $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$, где $A = z'_x(0,0) = 0$, $B = z'_y(0,0) = 0$, поэтому

$$\Delta z = \sqrt[3]{|\Delta x\cdot\Delta y|} - \sqrt[3]{0} = \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y.$$

Положим здесь $\Delta x = \Delta y$, тогда $|\Delta x|^{2/3} = (\varepsilon_1(\Delta x,\Delta x) + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta x))\cdot\Delta x$.

При $\Delta x > 0$ имеем $\dfrac{1}{|\Delta x|^{1/3}} = \varepsilon_1(\Delta x,\Delta x) + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta x)$. При $\Delta x \to 0$ левая часть последнего равенства стремится к ∞, а правая часть к 0. Получили противоречие.

Теорема 5.2. Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ частные производные по всем аргументам и они непрерывны в точке M_0, то функция дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Доказательство проведем для функции $z = f(x,y)$ и точки $M_0(x_0,y_0)$. Пусть обе частные производные z'_x и z'_y существуют в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и непрерывны в этой точке. Дадим аргументам x и y столь малые приращения Δx и Δy, чтобы точка $M_0(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ не выходила за пределы указанной окрестности точки M_0. Полное приращение можно записать в виде:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) +$$
$$+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$ Применим теорему Лагранжа:

$$\Delta z = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$ где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Тогда

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + (f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0))\Delta x +$$
$$(f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0))\Delta y.$$

Положим $f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0) = \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)$,

$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0) = \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)$, тогда $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0$ в силу непрерывности частных производных. Таким образом,

$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, следовательно, $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Теорема 5.3. (непрерывность дифференцируемой функции) Если функция дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из условия дифференцируемости функции $u = f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ в точке вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$. А это и означает непрерывность функции в точке. Теорема доказана.

Пример. Вычислить приближенно с помощью дифференциала первого порядка $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$. Требуется найти значение функции в точке $M(1{,}55;0{,}015)$. Заменим точку M близкой к ней точкой $M_0\left(\frac{\pi}{2};0\right)$. Искомое число есть наращенное значение функции z при $\Delta x = 1{,}55 - 1{,}57 = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}015 - 0 = 0{,}015$. Находим приращение функции: $\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Последовательно вычисляем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left.\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}}\right|_{M_0} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left.\frac{8e^y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}}\right|_{M_0} = \frac{4}{3}, \qquad z(M_0) = 3.$$

Окончательно находим: $z(M) \approx 3 + 0\cdot(-0{,}02) + \frac{4}{3}\cdot 0{,}015 = 3{,}02$.

§ 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим сложную функцию $u = f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, где $x_1 = \varphi_1(t_1,t_2,\ldots t_m),\ldots,x_n = \varphi_n(t_1,t_2,\ldots t_m)$.

Теорема 6.1. Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots t_m)$,…, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots t_m)$ дифференцируемы в некоторой точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$, а функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ дифференцируема в соответствующей точке $(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$, где $x_{i0} = \varphi_i(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$, $i = \overline{1,n}$. Тогда сложная функция $u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots t_m), \ldots \varphi_n(t_1, t_2, \ldots t_m))$ дифференцируема в точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$. При этом частные производные этой сложной функции в точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$ определяются формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i},\ i = \overline{1,m}$$

в которых все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ берутся в точке $(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{m0})$, а все частные производные $\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$ берутся в точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$.

Доказательство. Пусть $u = f(x, y, z)$, $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$, $z = z(t, v)$. Рассмотрим сложную функцию $u = f(x(t, v), y(t, v), z(t, v))$. Если находим частную производную по *t*, то *v* фиксируем, тогда функции $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$, $z = z(t, v)$ будут функциями аргумента *t*. Придадим *t* приращение Δt, тогда x, y, z получат приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, причем при $\Delta t \to 0$ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$, так как функции x, y, z имеют производные по *t* и они непрерывны. Функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \Delta y +$$

$+ \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot \Delta z$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_3 \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Мы доказали, что сложная функция имеет все частные производные, в данном случае по t и v и они непрерывны, поэтому функция дифференцируема. Теорема доказана.

Замечание. Если все функции $x_1, x_2, \ldots x_n$ зависят от одного аргумента t, то мы имеем сложную функцию одной переменной: $u = f(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$. Производная такой функции называется полной производной и равна:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt}. \qquad (3)$$

Примеры. Найти частные производные сложных функций:

1) $z = x^y$, $x = \ln(u - v)$, $y = e^{\frac{u}{v}}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?\ \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

Решение. Частные производные находим по формулам: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$. Найдем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{u - v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{u - v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{v},$$

$\frac{\partial y}{\partial v} = -e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{u}{v^2}$. Подставим выражения этих производных в формулу, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{u - v} + e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{x^y \ln x}{v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{y \cdot x^{y-1}}{u - v} - e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{u \cdot x^y \ln x}{v^2}.$$

2) $z = e^{x - 2y}, x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{dz}{dt} - ?$

Решение. Полную производную по t находим по формуле: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Находим соответствующие частные производные:

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2e^{x-2y}$, $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$. Подставим в формулу, получим: $\frac{dz}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t-6e^{x-2y}\cdot t^2$.

3) $z=tg(2t+x^2-y^3)$, $x=\sqrt[3]{t+2}$, $y=\frac{2}{t+2}$, $\frac{dz}{dt}-?$

Решение. Полную производную по t находим по формуле:

$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$. Находим соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2}{\cos^2(2t+x^2-y^3)},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{\cos^2(2t+x^2-y^3)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y^2}{\cos^2(2t+x^2-y^3)},$$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(t+2)^2}}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{(t+2)^2}$. Подставим в формулу, получим:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2}{\cos^2(2t+x^2-y^3)}\left(1+\frac{x}{3\sqrt[3]{(t+2)^2}}+\frac{3y^2}{(t+2)^2}\right).$$

Применим формулу (3) для доказательства теоремы Эйлера об однородных функциях. Функция $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$, заданная на множестве $\{M\}$ называется однородной функцией степени k, если для каждой точки $M(x_1,x_2,\dots x_n)$ множества $\{M\}$ и для каждого числа t, для которого точка $(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)\in\{M\}$ выполняется равенство $f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Теорема 6.2. (Эйлера об однородных функциях)

Если функция $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ является в некоторой области $\{M\}$ дифференцируемой однородной функцией степени k, то в каждой точке $M(x_1,x_2,\dots x_n)$ области $\{M\}$ справедливо равенство:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot x_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot x_n=k\cdot u.$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_{10},x_{20},\dots x_{n0})-$произвольная точка области $\{M\}$. Рассмотрим сложную функцию $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$, где $x_i=tx_{i0}$, $i=\overline{1,n}$, то есть $u=f(tx_{10},tx_{20},\dots,tx_{n0})$. Так как при $t=1$ функции

$x_i = t x_{i0}$ дифференцируемы и функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ дифференцируема в соответствующей точке M_0, то согласно замечанию можно вычислить производную $\frac{du}{dt}$ этой сложной функции в точке $t = 1$ по формуле (3). Так как $\frac{dx_i}{dt_i} = x_{i0}$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot x_{10} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_{20} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot x_{n0}, \tag{4}$$

где производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке M_0. С другой стороны, в силу однородности рассматриваемая сложная функция может быть представлена следующим образом: $u = f(tx_{10}, tx_{20}, \ldots, tx_{n0}) = t^k f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Отсюда вытекает, что $\frac{\partial u}{\partial t} = kt^{k-1} f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то есть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=1} = k\, f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = k \cdot u\,. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), получаем требуемое соотношение для точки M_0. Так как M_0 – произвольная точка области $\{M\}$, то теорема доказана.

Инвариантность формы первого дифференциала

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Тогда ее дифференциал $du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots x_n$ являются независимыми переменными.

Пусть теперь аргументы $x_1, x_2, \ldots x_n$ представляют собой дифференцируемые в точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$ функции $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots t_m)$, а сама функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ дифференцируема в точке $(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$, где $x_{i0} = \varphi_i(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$. В таком случае мы можем рассмотреть $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ как сложную функцию аргументов $t_1, t_2, \ldots t_m$, которая в силу теоремы дифференцируема в точке $(t_{10}, t_{20}, \ldots t_{m0})$. Поэтому дифференциал du этой сложной функции можно представить в виде:

$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_n} dt_n$, где

$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i}$. Подставим выражение для $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ и соберем коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, получим:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \right) dt_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \right) dt_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \right) dt_m = \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial t_m} dt_m \right) + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_n} \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1} dt_1 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial t_m} dt_m \right) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n,$$

когда $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots t_m)$. Таким образом, мы установили, что дифференциал функции нескольких переменных имеет один и тот же вид, когда переменные независимы и когда они функции других переменных.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет установить следующие правила дифференцирования. Пусть u и v дифференцируемые функции каких-либо переменных. Тогда $d(cu) = cdu, (c = const)$, $d(u \pm v) = du \pm dv$, $d(uv) = udv + vdu$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Докажем справедливость третьей формулы. Рассмотрим функцию $w = uv$, тогда $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$. Так как $\frac{\partial w}{\partial u} = v$, $\frac{\partial w}{\partial v} = u$, то $dw = vdu + udv$. В силу инвариантности формы первого дифференциала выражение $vdu + udv$ будет дифференциалом функции uv и в случае, когда функции u и v сами являются дифференцируемыми функциями каких-либо переменных.

§ 7. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим кривую в трехмерном пространстве, заданную параметрическими уравнениями, то есть множество точек с координатами: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta. \\ z = z(t), \end{cases}$

Будем предполагать, что существуют $x'(t), y'(t), z'(t)$ и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \ne 0$. Такие кривые называются гладкими.

Касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение, которое стремится занять секущая M_0M, когда $M \to M_0$ по графику (рис. 19).

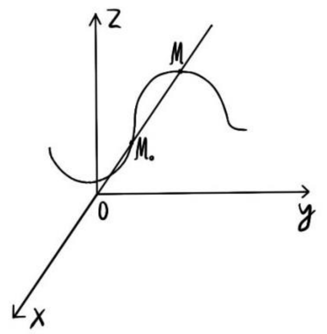

Рис.19.

Направляющий вектор секущей есть

$$\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0M} = \left\{ \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right\}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ получим направляющий вектор касательной $\vec{p} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0), \\ y = y_0 + y'(t_0), \\ z = z_0 + z'(t_0). \end{cases}$$

Рассмотрим поверхность в трехмерном пространстве, заданную уравнением $F(x,y,z)=0$.

Теорема 7.1. Пусть функция $F(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0,z_0). Тогда касательная к любой кривой, проходящей через точку (x_0,y_0,z_0) и лежащей на поверхности, будет ортогональна вектору $\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0),\frac{\partial F}{\partial y}(M_0),\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\right\}$, то есть все они лежат в плоскости $F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$, которая называется касательной плоскостью к поверхности (рис.20).

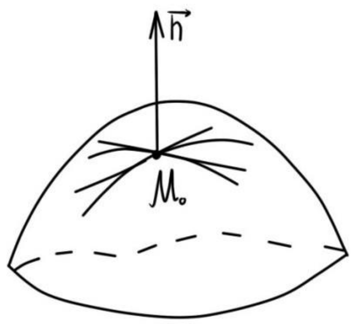

Рис.20.

Доказательство. Рассмотрим на поверхности кривую, заданную параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Тогда $F(x(t),y(t),z(t))=0$. По условию $\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=t_0}=0$. Производная существует, так как функция дифференцируема. С другой стороны, $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot x'_t+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'_t+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot z'_t=(\vec{n},\vec{p})=0$. То есть все направляющие вектора касательных перпендикулярны вектору $\vec{n}$**,** следовательно, лежат в одной плоскости. Теорема доказана.

Нормалью к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке (x_0,y_0,z_0) называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в этой точке. Канонические уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Рассмотрим частный случай: пусть поверхность в трехмерном пространстве задана уравнением $z = f(x,y)$. Тогда можно считать, что она задана неявно: $f(x,y) - z = 0$, а $F(x,y,z) = f(x,y) - z$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. Уравнение касательной плоскости имеет вид: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0)$. А уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Точки поверхности, в которых обращаются в нуль одновременно все частные производные первого порядка, называются особыми. В таких точках нет ни касательной плоскости, ни нормали.

Приращение функции – это то изменение, которое получает аппликата точки, лежащей на поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. По определению $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0)$, а

$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) -$ уравнение касательной плоскости. Таким образом, дифференциал функции – это приращение аппликаты точки, лежащей на касательной плоскости, при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Примеры. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

1) $3x^4 - 4y^3 z + 4z^2 xy - 4z^3 x + 1 = 0$, $M_0(1,1,1)$.

2) $z = arctg\,\frac{y}{x}$, $M_0(1,1,\frac{\pi}{4})$.

Решение. 1) В этом случае $F(x,y,z) = 3x^4 - 4y^3 z + 4z^2 xy - 4z^3 x + 1$.

Найдем значения частных производных в точке $M_0(1,1,1)$:

$$F'_x(M_0) = (12x^3 + 4z^2 y - 4z^3)\Big|_{M_0} = 12,$$

$$F'_y(M_0) = (-12y^2 z + 4z^2 x)\Big|_{M_0} = -8,$$

$$F'_z(M_0)=(-4y^3+8zxy-12z^2x)\Big|_{M_0}=-8\cdot$$

Тогда уравнение касательной плоскости:

$12(x-1)-8(y-1)-8(z-1)=0$,

$3(x-1)-2(y-1)-2(z-1)=0$, $3x-2y-2z+5=0$. А уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}$

2) Найдем значения частных производных функции $z=arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(1,1,\dfrac{\pi}{4})$:

$$z'_x(M_0)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)_{M_0}=-\frac{1}{2},$$

$z'_y(M_0)=\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$. Тогда уравнение касательной плоскости:

$z-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)$. А уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}.$$

§ 8. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть функция $u=f(x,y,z)$ задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Рассмотрим направление, определяемое единичным вектором $\vec{e}$. Проведем через точку M_0 ось *l*, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{e}$. Возьмем на этой оси произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда $\overline{M_0M}=t\vec{e}$ (рис. 21).

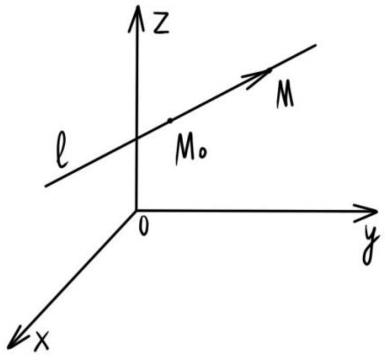

Рис.21.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{t}$, то он называется **производной** функции $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 **по направлению** l и обозначается $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Теорема 8.1. Пусть функция $u=f(x,y,z)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ непрерывные частные производные. Тогда в точке M_0 существует производная по любому направлению l, определяемому единичным вектором $\vec{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, которая равна

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma-$направляющие косинусы, $\alpha,\beta,\gamma-$ углы между вектором $\vec{e}$ и осями координат.

Доказательство. Пусть $M(x,y,z)-$ точка на прямой l, тогда $x=x_0+t\cos\alpha$, $y=y_0+t\cos\beta$, $z=z_0+t\cos\gamma$. Найдем $f(M)-f(M_0)=$
$=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)=\varphi(t)-\varphi(0)$, где
$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0),$$ но

$\varphi'(t)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$. Теорема доказана.

Определение. **Градиентом функции** $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор, обозначаемый символом $\overrightarrow{grad}\,u=\nabla u$ и имеющий координаты, соответственно равные частным производным $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, взятым в точке M_0. Таким образом $\overrightarrow{grad}\,u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\overrightarrow{grad}\,u,\vec{e}\right)=\left|\overrightarrow{grad}\,u\right|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi-$ угол между вектором $\vec{e}$ и вектором $\overrightarrow{grad}\,u$. Из последней формулы видно, что производная по направлению будет максимальна, если $\cos\varphi=1$, то есть $\varphi=0$ когда направление вектора $\vec{e}$ совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{grad}\,u$. При этом $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max}=\left|\overrightarrow{grad}\,u\right|$.

Поясним геометрический смысл вектора градиента функции $u=f(x,y,z)$.

Поверхность уровня функции $u=f(x,y,z)$ определяется уравнением $f(x,y,z)=C=const$. Уравнение касательной плоскости к поверхности $f(x,y,z)=C$ в точке M_0 имеет вид:

$f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)+f'_z(M_0)(z-z_0)=0$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{grad}\,u$ в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ортогонален той поверхности уровня функции $u=f(x,y,z)$, которая проходит через данную точку M_0.

Для функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ n переменных производная по направлению и градиент определяются аналогично. Именно, производная $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$ в точке $M_0(x_{10},x_{20},\ldots x_{n0})$ по любому направлению l, определяемому единичным вектором $\vec{e}=\{\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\ldots,\cos\alpha_n\}$

$\left(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\ldots+\cos^2\alpha_n=1\right)$, определяется как производная по t сложной функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, где $x_i=x_{i0}+t\cos\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$. В случае, если $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ – дифференцируемая функция, для производной по направлению имеет место формула:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cos\alpha_n.$$

Градиентом функции в заданной точке $M_0(x_{10},x_{20},\ldots x_{n0})$ называется вектор с координатами $\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\}$, причем указанные координаты берутся в точке M_0. Для производной по направлению дифференцируемой функции справедлива формула $\frac{\partial u}{\partial l}=\left(\overrightarrow{grad}\,u,\vec{e}\right)$.

Пример 1. Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке $M_0(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l}$, составляющего угол 60^0 с положительным направлением оси *Ox*.

Решение. Найдем значения частных производных в точке $M_0(1,1)$:

$z'_x(M_0)=\left.(2x)\right|_{M_0}=2$, $z'_y(M_0)=\left.(-2y)\right|_{M_0}=-2$. Так как $\cos\alpha=\cos60^0=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\cos30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то окончательно получаем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial(\vec{l})}\right|_{M_0}=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}.$$

Пример 2. Найти производную функции $u=arctg\frac{xz}{y}+\ln(x^2z^2+y^2)$ в точке $M_0(1,1,-1)$ по направлению градиента функции $v=xyz-x^2-z^2-y^2$ в этой точке.

Решение. Найдем значения частных производных функции *u* в точке $M_0(1,1,-1)$:

$$u'_x(M_0)=\frac{1}{1+\frac{x^2z^2}{y^2}}\cdot\frac{z}{y}+\frac{2xz^2}{x^2z^2+y^2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2},$$

$$u'_y(M_0)=\frac{1}{1+\frac{x^2z^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{xz}{y^2}\right)+\frac{2y}{x^2z^2+y^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2},$$

$$u'_z(M_0)=\frac{1}{1+\frac{x^2z^2}{y^2}}\cdot\frac{x}{y}+\frac{2x^2z}{x^2z^2+y^2}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2},$$ следовательно,

$$\overrightarrow{grad}\,u(M_0)=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}.$$

Найдем значения частных производных функции v в точке $M_0(1,1,-1)$:

$v'_x(M_0)=yz-2x=-1-2=-3,\ v'_y(M_0)=xz-2y=-1-2=-3,$

$v'_z(M_0)=xy-2z=1+2=3,$ тогда $\overrightarrow{grad}\,v(M_0)=\{-3,-3,3\}$,

$\left|\overrightarrow{grad}\,v(M_0)\right|=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$. Окончательно получаем,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial(\overrightarrow{grad}\,v)}\right|_{M_0}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{grad}\,v(M_0)\right|}\left(\overrightarrow{grad}\,u(M_0),\overrightarrow{grad}\,v(M_0)\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-\frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

§ 9. ЧАСТНЫЕ ПОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенной в области $\{M\}$, существует в каждой точке этой области. В этом случае указанная производная представляет собой функцию n переменных $x_1,x_2,\ldots x_n$, также определенную в области $\{M\}$. Может случиться, что эта функция $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет частную производную по x_j в некоторой точке M области $\{M\}$. Тогда указанную частную производную по x_j называют второй частной производной или частной производной второго порядка функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в точке M сначала по x_i, затем по x_j и обозначают $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ или $u''_{x_i x_j}$. При этом, если $i \neq j$, то частная производная называется **смешанной частной производной** второго порядка. Можно ввести понятие третьей, четвертой,…, n-ой частной производной:

$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$. Если не все индексы $i_1, \ldots, i_n$ равны между собой, то эта частная производная называется смешанной частной производной n-ого порядка.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = arctg\,\frac{x}{y}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

В рассмотренном примере смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны. Вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производится последовательное дифференцирование. Рассмотрим функцию:

$$z=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Докажем, что для этой функции $z''_{xy}(0{,}0)\neq z''_{yx}(0{,}0)$. Действительно,

$$z'_x=y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4)+xy\cdot 4xy^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ x^2+y^2\neq 0,$$

$$z'_x(0{,}0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0{,}0)}{\Delta x}=0,$$

$$z''_{xy}(0{,}0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z'_x(0,\Delta y)-z'_x(0{,}0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1,$$

$$z'_y=x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-y^4)-xy\cdot 4yx^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ x^2+y^2\neq 0,$$

$$z'_y(0{,}0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(0,\Delta y)-z(0{,}0)}{\Delta y}=0,$$

$$z''_{yx}(0{,}0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z'_y(\Delta x,0)-z'_y(0{,}0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Имеют следующие теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

Теорема 9.1. (Шварца) Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ функция $u=f(x,y)$ имеет смешанные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, причем они непрерывны в точке M_0, тогда они равны в этой точке.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\Phi=\dfrac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk}$, где h и k

выберем настолько малыми, чтобы точка (x_0+h, y_0+k) попала в ту окрестность точки (x_0, y_0), в которой выполнены условия теоремы. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k}$, тогда применяя теорему Лагранжа, получим: $\Phi=\dfrac{1}{h}\big(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\big)=\dfrac{1}{h}\cdot\varphi'(x_0+\Theta_1 h)\cdot h=\varphi'(x_0+\Theta_1 h)$, $0<\Theta_1<1$. Но $\varphi'(x)=\dfrac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k}$. Тогда вновь применяя теорему Лагранжа, получим $\Phi=\varphi'(x_0+\Theta_1 h)=$

$$=\frac{f'_x(x_0+\Theta_1 h, y_0+k)-f'_x(x_0+\Theta_1 h, y_0)}{k}=f''_{xy}(x_0+\Theta_1 h, y_0+\Theta_2 k),$$

$0<\Theta_2<1$.

Введем другую функцию $\psi(y)=\dfrac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h}$,

$\psi'(y)=\dfrac{f'_y(x_0+h,y)-f'_y(x_0,y)}{h}$. Тогда по теореме Лагранжа

$$\Phi=\frac{1}{k}\big(\psi(y_0+k)-\psi(y_0)\big)=\frac{1}{k}\cdot\psi'(y_0+\eta_1 k)\cdot k=\psi'(y_0+\eta_1 k)=$$

$$=\frac{f'_y(x_0+h, y_0+\eta_1 k)-f'_y(x_0, y_0+\eta_1 k)}{h}=f''_{yx}(x_0+\eta_2 h, y_0+\eta_1 k),$$

$\eta_1, \eta_2\in(0,1)$.

Мы получили, что $f''_{xy}(x_0+\Theta_1 h, y_0+\Theta_2 k)=f''_{yx}(x_0+\eta_2 h, y_0+\eta_1 k)$. Устремим в этом равенстве h и k к нулю и, учитывая непрерывность смешанных производных, получим $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. (Юнга) Пусть функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и дифференцируемы в этой точке. Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Следствие. Теоремы Шварца и Юнга имеют место и при $n>2$.
Доказательство. Рассмотрим функцию $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$. Когда вычисляем частные производные $u''_{x_i x_j}$ и $u''_{x_j x_i}$, то все переменные, кроме x_i

и x_j, фиксируем и получаем функцию двух переменных, к которой применяем доказанные теоремы.

Определение. Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется дважды дифференцируемой в точке M_0, если все первые производные дифференцируемой в этой точке. Вообще, функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется n раз дифференцируемой в точке M_0, если все частные производные $(n-1)$-го порядка этой функции являются дифференцируемыми функциями в этой точке.

Теорема 9.3. (достаточное условие дифференцируемости)

Для того чтобы функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ была n раз дифференцируемой в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы все ее частные производные n-го порядка были непрерывными в точке M_0.

Следствие (из теоремы Юнга)

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является n раз дифференцируемой в точке M_0, то в этой точке значение любой смешанной частной производной n-го порядка не зависит от порядка, в котором производится дифференцирование.

Пример. Найти производные указанного порядка:

1) $z = \sin xy$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

2) $z = (x-a)^p (y-b)^q$, $\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = ?$

Решение. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \cos xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy \sin xy$,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x \sin xy - x \sin xy - x^2 y \cos xy = -2x \sin xy - x^2 y \cos xy.$$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p(x-a)^{p-1}(y-b)^q$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p(p-1)(x-a)^{p-2}(y-b)^q, \ldots,$

$$\frac{\partial^p z}{\partial x^p} = p!(y-b)^q, \ \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^p \partial y} = p!q(y-b)^{q-1}, \ \frac{\partial^{p+2} z}{\partial x^p \partial y^2} = p!q(q-1)(y-b)^{q-2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p \partial y^q} = p!q!$$

Пусть в некоторой области D функция $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ имеет непрерывные производные первого порядка. Тогда она дифференцируема в области D и ее дифференциал имеет вид:

$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$, где $dx_i = \Delta x_i$ – некоторые числа. Зафиксируем $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, тогда du будет функцией n переменных. Мы можем снова найти дифференциал этой функции $d(du) = d^2u$ – дифференциал второго порядка. Аналогично определяется $d^3u = d(d^2u), \ldots, d^nu = d(d^{n-1}u)$.

Рассмотрим частный случай – функцию двух переменных $u = f(x, y)$, тогда $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Предположим, что функция имеет частные производные второго порядка и они непрерывны. Тогда

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy\right)dx +$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Предположим, что существуют все частные производные третьего порядка и они непрерывны. Тогда

$$d^3u = d(d^2u) = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dy\right)dx^2 + 2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dy\right)dxdy +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}dx + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy\right)dy^2 = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3.$$

Для сокращения записи второго и последующих дифференциалов функции введем символ дифференциала d при помощи соотношения

$d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ и определим операцию возведения этого символа в степень n как обычную операцию возведения двучлена $\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ в степень n.

Например, $d^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2$. Легко убедиться, что выражение для n-го дифференциала d^nu функции двух переменных $u=f(x,y)$ можно записать в следующей форме:

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u.$$

В полной аналогии с рассмотренным случаем функции двух переменных индуктивно вводится понятие дифференциала n-го порядка d^nu функции $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ n переменных. Для сокращения записи удобно пользоваться символом d дифференцирования, полагая $d=\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$. Если определить операцию возведения этого символа в степень n как обычную операцию возведения многочлена $\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$ в степень n, то для d^nu легко получить следующее выражение:

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n u. \tag{6}$$

Мы доказывали, что дифференциал первого порядка обладает инвариантностью формы. Убедимся, что дифференциал второго порядка этим свойством не обладает. Рассмотрим это на примере функции двух переменных $u=f(x,y)$. Дифференциал первого порядка $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ в случае, когда x и y – независимые переменные и в случае, когда они функции других переменных. Пусть x и y функции других переменных. Тогда

$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y$, где $d^2x=d(dx)$, $d^2y=d(dy)$. Если dx и dy постоянные величины, то $d^2x=d^2y=0$. Если x и y – функции других переменных, то $d^2x\neq 0,\ d^2y\neq 0$.

Замечание. Если x и y – линейные функции других переменных, то дифференциалы высших порядков сохраняют форму.

Действительно, пусть $x=a_1t+b_1v+c_1$, $y=a_2t+b_2v+c_2$. Тогда $dx=a_1dt+b_1dv$, $d^2x=d(a_1dt+b_1dv)=a_1d^2t+b_1d^2v=0$, так как $d^2t=d^2v=0$, поскольку dt, dv считаются фиксированными.

Пример 1. Найти дифференциал второго порядка для функции $z=x\sin^2 y$.

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin^2 y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x\sin y\cos y=x\sin 2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\cos 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2\sin y\cos y=\sin 2y.$$

Тогда $d^2z=2\sin 2y\,dxdy+2x\cos 2y\,dy^2$.

Пример 2. Показать, что функция $z=x\cos\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Найдем частные производные первого порядка функции z:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\frac{y}{x}-x\sin\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin\frac{y}{x}$. Затем находим все вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3}\cos\frac{y}{x}=-\frac{y^2}{x^3}\cos\frac{y}{x},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x},$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$. Подставляем найденные производные в уравнение:

$$x^2\cdot\left(-\frac{y^2}{x^3}\cos\frac{y}{x}\right)+2xy\cdot\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}+y^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\right)=0,$$

$-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y}{x}+2\frac{y^2}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y}{x}=0$. Получили верное равенство.

§ 10. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Будем обозначать дифференциал *k*-го порядка функции $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ в точке M символом $d^k u(M)$.

Теорема 10.1. Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ задана в некоторой ε-окрестности точки $M_0(x_{10},x_{20},\dots x_{n0})$ и $n+1$ раз дифференцируема в указанной окрестности. Тогда полное приращение $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ этой функции в точке M_0 для любой точки M из указанной окрестности может быть представлено в следующей форме:

$$\Delta u=du(M_0)+\frac{1}{2!}d^2u(M_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nu(M_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N), \tag{7}$$

где N – некоторая точка указанной ε-окрестности, зависящая от точки $M(x_1,x_2,\dots x_n)$, а дифференциалы dx_i, входящие в выражения $d^k u(M_0)$ и $d^{n+1}u(N)$, равны $\Delta x_i=x_i-x_{i0}$. Формула (7) называется **формулой Тейлора** для функции $u=f(M)$ с центром разложения в точке M_0.

Доказательство. Докажем теорему для функции двух переменных $u=f(x,y)$. Запишем формулу Тейлора для $n+1$ раз дифференцируемой в некоторой окрестности точки t_0 функции $u=F(t)$ одной переменной *t* с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2+\dots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}\big(t_0+\Theta(t-t_0)\big)(t-t_0)^{n+1},\ 0<\Theta<1.$$

Так как аргумент *t* является независимой переменной, то приращение $\Delta t=t-t_0$ представляет собой дифференциал dt независимой переменной *t*. Поэтому $F^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k=F^{(k)}(t_0)dt^k=d^kF(t_0)=d^ku(t_0)$,

$F^{(n+1)}\left(t_0+\Theta(t-t_0)\right)(t-t_0)^{n+1}=d^{(n+1)}u\left(t_0+\Theta(t-t_0)\right)$. Если обозначить $F(t)-F(t_0)=\Delta u$, то формулу Тейлора, согласно предыдущему, можно переписать в следующем виде:

$$\Delta u=du(t_0)+\frac{1}{2!}d^2u(t_0)+....+\frac{1}{n!}d^nu(t_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(t_0+\Theta(t-t_0)). \quad (8)$$

Рассмотрим в ε-окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ произвольную точку $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ и соединим эти точки прямой линией. Координаты *x, y* точек этой прямой представляют собой следующие линейные функции новой переменной *t*:

$$x=x_0+t\Delta x,\ y=y_0+t\Delta y. \quad (9)$$

При этом координаты точек отрезка M_0M соответствуют значениям переменной $t\in[0;1]$. Значению $t=0$ отвечает точка M_0, значению $t=1$ отвечает точка M. Так как по условию функция $u=f(x,y)$ в рассматриваемой окрестности точки M_0 $n+1$ раз дифференцируема, то из формул (9) вытекает, что на прямой M_0M эта функция является сложной функцией переменной *t*, $n+1$ раз дифференцируемой по крайней мере для всех значений $t\in[0;1]$. Обозначим эту сложную функцию через $F(t)$ и запишем для нее формулу Тейлора с центром разложения в точке $t_0=0$ в форме (8) при $\Delta u=F(1)-F(0)=f(M)-f(M_0)$.

Дифференциалы различных порядков в (8) представляют собой дифференциалы сложной функции $u=f(x,y)$, где *x* и *y* являются линейными функциями (9). При этих условиях дифференциалы любого порядка функции $u=f(x,y)$ в форме (6). Поэтому

$$d^ku(t_0=0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u(M_0(x_0,y_0))=d^ku(M_0),$$

$$d^{n+1}u(t_0+\Theta(t-t_0))=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} u(N(x_0+\Theta\Delta x,y_0+\Theta\Delta y))=$$

$$=d^{n+1}u(N), \quad (10)$$

причем в этих формулах dx и dy находятся из соотношений (9) при $dt=\Delta t=1-0=1$. Таким образом, в формулах (10)

$$dx = dt \cdot \Delta x = \Delta x\,, dy = dt \cdot \Delta y = \Delta y\,. \qquad (11)$$

Подставляя выражения для $d^k u(t_0)$ и $d^{n+1}u(t_0 + \Theta(t - t_0))$ из формул (10) в формулу (8) и учитывая соотношения (11), получим формулу Тейлора (7). Теорема доказана.

Приведем развернутое выражение формулы Тейлора для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{10},\ldots,x_{n0}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - x_{n0})\right)^k \times$$

$$\times f(x_{10},\ldots,x_{n0}) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - x_{n0})\right)^{n+1} \times$$

$$\times f(x_{10} + \Theta(x_1 - x_{10}),\ldots,x_{n0} + \Theta(x_n - x_{n0}))\,.$$

Пример 1. Разложить по формуле Тейлора функцию $z = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ в окрестности точки $M(1;-2)$.

Решение. Найдем значение функции z и всех её частных производных в точке $M(1;-2)$:

$z(M) = 5$, $\quad z'_x\big|_M = 4x - y - 6 = 0$, $\quad z'_y\big|_M = -x - 2y - 3 = 0$, $\quad z''_{xx}\big|_M = 4$, $z''_{xy}\big|_M = -1$, $z''_{yy}\big|_M = -2$. Тогда

$$z = 5 + \frac{1}{2}(4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

Пример 2. Разложить по формуле Тейлора функцию $z = 4x^4 + 4x^3y - y^4 - 3xy^2 + 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x + 4y$ в окрестности точки $M(4;3)$.

Решение. Функция $z(x,y) -$ многочлен четвертой степени относительно x, y, $d^5 z \equiv 0$, следовательно, остаточный член формулы Тейлора четвертого порядка равен нулю и $z(x,y)$ совпадает со своим многочленом Тейлора четвертой степени в точке $M(4;3)$:

$$z(x,y) = z(x_0,y_0) + dz(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2u(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}d^3u(x_0,y_0) + \frac{1}{4!}d^4u(x_0,y_0)$$

Последовательно находим:

$z(x_0, y_0) = 1645$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(16x^3 + 12x^2 y - 3y^2 + 6x - 4y + 3\right)\Big|_M = 1588$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^3 - 4y^3 - 6xy - 4x + 4y + 4\right)\Big|_M = 76$,

$dz(x_0, y_0) = 1588(x-4) + 76(y-3)$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(48x^2 + 24xy + 6\right)\Big|_M = 1062$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(12x^2 - 6y - 4\right)\Big|_M = 170$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-12y^2 - 6x + 4\right)\Big|_M = -128$,

$d^2 z(x_0, y_0) = 1062(x-4)^2 + 340(x-4)(y-3) - 128(y-3)^2$;

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (96x + 24y)\big|_M = 456$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (24x)\big|_M = 96$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -6$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (-24y)\big|_M = -72$,

$d^3 z(x_0, y_0) = 456(x-4)^3 + 288(x-4)^2(y-3) - 18(x-4)(y-3)^2 - 72(y-3)^3$;

$\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 96$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 24$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 0$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -24$,

$d^4 z(x_0, y_0) = 96(x-4)^4 + 96(x-4)^3(y-3) - 24(y-3)^4$. Отсюда получаем ответ:

$$z(x, y) = 1645 + 1588(x-4) + 76(y-3) + 531(x-4)^2 + 170(x-4)(y-3) -$$
$$- 64(y-3)^2 + 76(x-4)^3 + 48(x-4)^2(y-3) - 3(x-4)(y-3)^2 - 12(y-3)^3 +$$
$$+ 4(x-4)^4 + 4(x-4)^3(y-3) - (y-3)^4.$$

§ 11. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ задана на множестве $\{M\}$ и $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ – некоторая точка этого множества.

Определение. Точка $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \{M\}$ называется точкой **локального максимума (минимума)**, если найдется ε-окрестность этой точки $O_\varepsilon(M_0)$ такая, что $f(M) \le f(M_0)$ ($f(M) \ge f(M_0)$) для любой точки $M \in O_\varepsilon(M_0)$. Если $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точка M_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума). Точки локального максимума и локального минимума объединяются общим названием точек локального экстремума.

Если функция $u = f(M)$ имеет локальный экстремум в точке M_0, то полное приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ удовлетворяет одному из следующих условий: $\Delta u \le 0$ (в случае локального максимума), $\Delta u \ge 0$ (в случае локального минимума). Очевидно и обратное: если полное приращение функции $u = f(M)$ в точке M_0 удовлетворяет условию $\Delta u \le 0$, то в этой точке функция имеет локальный максимум, если $\Delta u \ge 0$, то в этой точке функция имеет локальный минимум.

Теорема 11.1. (необходимое условие экстремума)
Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ локальный экстремум, то все частные производные в этой точке (которые существуют) равны нулю.

Доказательство. Докажем, что $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0$. Зафиксируем значения переменных $x_2, \ldots, x_n$, положив их равными $x_{20}, \ldots, x_{n0}$. Мы получим функцию $g(x_1) = f(x_1, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ одной переменной x_1. Эта функция имеет в точке x_{10} локальный экстремум и по теореме Ферма $g'(x_{10}) = 0$. Но $g'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. Таким образом, $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0$. Аналогично устанавливается равенство нулю остальных частных производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0} = 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то условие (12) влечет за собой равенство $du(M_0) = 0$. (13)

Обратно, если в точке M_0 имеет место равенство $du(M_0)=0$, то все частные производные $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0}=0$, $i=\overline{1,n}$. Действительно, так как $du(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)dx_n=0$, то, полагая, например, $dx_1\neq 0$, а $dx_2=\ldots=dx_n=0$, получим, что $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)=0$. Из этих рассуждений вытекает, что равенство (13) является необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке M_0 функции. Условия (12) и (13) не являются достаточными условиями экстремума. Например, у функции $z=xy$ частные производные $z'_x=y$ и $z'_y=x$ равны нулю в точке $M_0(0;0)$, но сама функция не имеет экстремума в этой точке, а функция $z=x^2+y^2$ имеет в этой точке равные нулю частные производные $z'_x=2x$ и $z'_y=2y$ и эта точка – точка минимума функции.
Точки, в которых выполняются условия (12) или (13), называются **стационарными**.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий точек экстремума. Функция $\Phi(x,y)=\Phi(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$, где $a_{ij}=const$ ($\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}=(a_{11}+\ldots+a_{1n})+(a_{21}+\ldots+a_{2n})+\ldots+(a_{n1}+\ldots+a_{nn})$)

, зависящая от переменных $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$, называется **билинейной формой** от указанных переменных. Наименование билинейная форма объясняется тем, что при фиксированных значениях переменных $x_1,\ldots,x_n$ функция $\Phi(x,y)$ будет линейной относительно переменных $y_1,\ldots,y_n$ и, наоборот, при фиксированных значениях переменных $y_1,\ldots,y_n$ функция $\Phi(x,y)$ будет линейной относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$. Функция $\Phi(x,x)=\Phi(x_1,\ldots,x_n;x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ называется **квадратичной формой**, соответствующей данной билинейной форме $\Phi(x,y)$. Если $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$, то билинейная форма $\Phi(x,y)$ и соответствующая ей квадратичная форма $\Phi(x,x)$ называются **симметричными**.

Рассмотрим симметричную квадратичную

$$\Phi(h,h)=\sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} a_{ij}h_i h_j,\ \ a_{ij}=a_{ji},\ \ i,j=\overline{1,n}, \qquad (14)$$

зависящую от переменных $h_1,\ldots,h_n$. Квадратичная форма называется **положительно определенной** (**отрицательно определенной**), если для любых значений переменных $h_1,\ldots,h_n$, не равных одновременно нулю, эта форма имеет положительные (отрицательные) значения. Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы объединяются общим наименованием **знакоопределенные** квадратичные формы. Квадратичная форма называется **знакопеременной**, если она имеет как положительные, так и отрицательные значения. Квадратичная форма называется **квазизнакоопределенной**, если она имеет либо только неотрицательные значения, либо только неположительные значения, но при этом она имеет нулевые значения также и для не равных одновременно нулю значений переменных $h_1,\ldots,h_n$.

Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

Будем называть симметричную матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij}=a_{ji}$ матрицей квадратичной формы (14). Определители $A_1=a_{11}$, $A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ldots,\ A_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называются главными минорами матрицы A квадратичной формы. Для того чтобы квадратичная форма (14) была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства: $A_1>0$, $A_2>0,\ldots,A_n>0$. Для того чтобы квадратичная форма (14) была отрицательно определенной необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров $A_1, A_2, ..., A_n$ чередовались, причем $A_1 < 0$.

Теорема 11.2. (**достаточное условие экстремума**)
Пусть в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дважды дифференцируема и все вторые частные производные этой функции непрерывны в точке M_0. Тогда если в этой точке второй дифференциал $d^2u(M_0)$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, \ldots,$ dx_n независимых переменных, то функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум. При этом, если $d^2u(M_0) < 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный максимум, а если $d^2u(M_0) > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный минимум. Если же в точке M_0 второй дифференциал $d^2u(M_0)$ является знакопеременной формой, то в этой точке функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не имеет локального экстремума. Точка M_0 в этом случае называется **седловой точкой** функции.

На практике часто встречается задача об экстремуме функции двух переменных $u = f(x, y)$.

Теорема 11.3. (достаточное условие экстремума функции двух переменных)
Пусть в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $u = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков. Обозначим $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $u = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, причем при $A > 0$ локальный минимум, при $A < 0$ локальный максимум;
2) если $\Delta < 0$, то функция $u = f(x, y)$ не имеет в точке M_0 локального экстремума;
3) если $\Delta < 0$, то нужны дополнительные исследования.

Справедливость первой части сформулированного утверждения вытекает из предыдущей теоремы и критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы, ибо $A_1 = a_{11}$, $A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Примеры. 1) Исследовать на экстремум функцию $u = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Решение. Координаты стационарной точки (x, y, z) гладкой поверхности функции u должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} u'_x = 6x^2yz - 2x = 0 \\ u'_y = 2x^3z - 2y = 0 \\ u'_z = 2x^3y - 2z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(3xyz - 1) = 0 \\ y = x^3z \\ z = x^3y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} 3xyz = 1 \\ y = x^6y, \\ z = x^3y \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ z = y \\ y^2 = 1/3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = -y \\ y^2 = 1/3 \end{cases}.$$ Отсюда получаем пять стационарных точек: $M_1(0,0,0)$,

$M_2\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_3\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_4\left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $M_5\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Найдем все вторые производные функции u:

$u''_{xx} = 12xyz - 2$, $u''_{yy} = -2$, $u''_{zz} = -2$, $u''_{xy} = 6x^2z$, $u''_{xz} = 6x^2y$, $u''_{yz} = 2x^3$.

Найдем значения вторых производных в точке M_1:

$u''_{xx}(M_1) = -2$, $u''_{yy}(M_1) = -2$, $u''_{zz}(M_1) = -2$, $u''_{xy}(M_1) = 0$, $u''_{xz}(M_1) = 0$, $u''_{yz}(M_1) = 0$. Тогда $d^2u(M_1) = -2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2$. Так как $d^2u(M_1)$ – отрицательно определенная квадратичная форма, то точка M_1 – точка строгого локального максимума. Далее, найдем значения вторых производных в точке M_2:

$u''_{xx}(M_2) = 2$, $u''_{yy}(M_2) = -2$, $u''_{zz}(M_2) = -2$, $u''_{xy}(M_2) = 2\sqrt{3}$, $u''_{xz}(M_2) = 2\sqrt{3}$, $u''_{yz}(M_2) = 2$. Тогда

$d^2u(M_2) = 2dx^2 - 2dy^2 - 2dz^2 + 4\sqrt{3}dxdy + 4\sqrt{3}dxdz + 4dydz$. Матрица этой квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Главные миноры:

$A_1 = 2 > 0$, $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -4 - 12 = -16 < 0$, $A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix} =$

$= 2(4-4) - 2\sqrt{3}(-4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 96 > 0$. Следовательно, данная квадратичная форма знакопеременная, поэтому в точке M_2 функция не имеет экстремума и точка M_2 есть седловая точка функции u. Аналогично устанавливается, что точки M_3, M_4 и M_5 также седловые точки функции u.

3) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

Решение. Координаты стационарной точки (x, y) гладкой поверхности функции z должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6y - 39 = 0 \\ z'_y = 2y - 6x + 18 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x^2 - 18x + 15 = 0 \\ y = 3x - 9 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -6 \end{cases}.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(5;6)$, $M_2(1;-6)$. Найдем все вторые производные функции z: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = -6$. Тогда для точки $M_1(5;6)$ имеем: $A = z''_{xx}(M_1) = 30$, $C = z''_{yy}(M_1) = 2$, $B = z''_{xy}(M_1) = -6$, $\Delta_1 = AC - B^2 = 60 - 36 = 24 > 0$, $A > 0$, следовательно, $M_1(5;6)$ – точка локального минимума. Для точки $M_2(1;-6)$ имеем: $A = z''_{xx}(M_2) = 6$, $C = z''_{yy}(M_2) = 2$, $B = z''_{xy}(M_2) = -6$, $\Delta_2 = AC - B^2 = 12 - 36 = -24 < 0$, следовательно, $M_2(1;-6)$ не является точкой экстремума.

§ 12. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна на некотором ограниченном замкнутом множестве $D \in \boldsymbol{R}^n$. Тогда на этом множестве функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Если наибольшее и наименьшее значение достигаются во внутренней точке множества *D*, то это будет точка экстремума функции, и поэтому в этой точке все частные производные первого порядка (которые существуют) равны нулю. Таким образом, для того чтобы найти точки, в которых функция принимает свое наибольшее и наименьшее значения, нужно найти стационарные точки, то есть решение системы $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=\overline{1,n}$, лежащие внутри *D*. Кроме того, нужно найти точки, в которых часть частных производных не существует, а другая обращается в нуль. После этого нужно исследовать функцию на границе.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+xy+y^2-4x$ в замкнутой области *D*, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $2x+3y-12=0$.

Решение. Построим сначала область *D*. Это треугольник *OAB*, ограниченный осями координат и прямой, проходящей через точки $A(0;4)$ и $B(6;0)$ (рис 22).

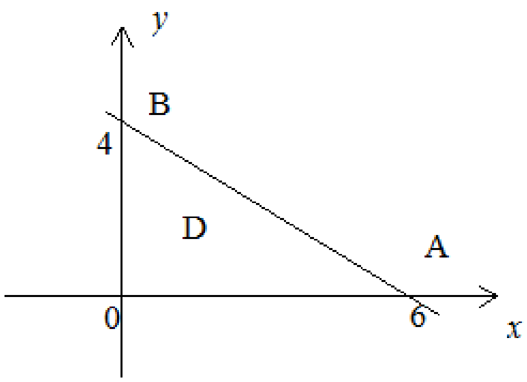

Рис. 22

Найдем стационарные точки функции $z=x^2+xy+y^2-4x$, то есть решения системы:

$$\begin{cases} z'_x=2x+y-4=0 \\ z'_y=x+2y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} -4y+y-4=0 \\ x=-2y \end{cases},\quad \begin{cases} y=-\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{8}{3} \end{cases}.$$

Эта точка не попадает в область *D*. Исследуем функцию на границе области *D*. Она состоит из трех отрезков *OA*, *OB*, *AB*. Отрезок *OA* задается условием $x=0$, $0\le y\le 4$. На этом отрезке функция принимает вид:

$z=y^2$. Ее производная $z'=2y$ обращается в нуль в точке $y=0$, которая является концевой точкой отрезка. Найдем значения функции на концах отрезка: $z(0,0)=0$, $z(0,4)=16$. Отрезок *OB* задается условием $y=0$, $0\le x\le 4$. На этом отрезке функция принимает вид: $z=x^2-4x$. Ее производная $z'=2x-4$ обращается в нуль в точке $x=2$. Найдем значения функции в этой точке и концевых точках отрезка: $z(2,0)=-4$, $z(4,0)=0$. Отрезок *AB* задается условием $y=4-\frac{2}{3}x$, $0\le x\le 4$. На этом отрезке функция принимает вид:
$z=\frac{7}{9}x^2-\frac{16}{3}x+16$. Ее производная $z'=\frac{14}{9}x-\frac{16}{3}$ обращается в нуль в точке $x=\frac{24}{7}$. Найдем значение функции в этой точке: $z=\frac{48}{7}$. Теперь выберем среди всех найденных значений наибольшее и наименьшее значения: $z_{\max}=z(0,4)=16$, $z_{\min}=z(2,0)=-4$.

§ 13. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

В математике приходится сталкиваться с такими задачами, когда переменная u, являющаяся по смыслу задачи функцией аргументов x, $y,\ldots$, задается посредством функционального уравнения

$$F(u,x,y,\ldots)=0. \qquad (15)$$

В этом случае говорят, что u как функция аргументов $x, y,\ldots$ задана неявно. Например, функция $u=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, рассматриваемая в круге $x^2+y^2\le 1$ может быть задана неявно посредством функционального уравнения $F(u,x,y)=u^2+x^2+y^2-1=0$.

Возникает вопрос, при каких условиях функциональное уравнение (15) однозначно разрешимо относительно u, то есть однозначно определяет явную функцию $u=f(x,y,\ldots)$ и при каких условиях эта явная функция является непрерывной и дифференцируемой.

Теорема 13.1. (**о существовании и дифференцируемости неявной функции**)

Пусть функция $F(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(x_0, y_0) = 0$;

2) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $P = \{(x, y) : x_0 - \Delta_1 \leq x \leq x_0 + \Delta_1, y_0 - \Delta_2 \leq y \leq y_0 + \Delta_2\}$ такой, что $\forall x : |x - x_0| \leq \Delta_1$ существует и притом единственное решение уравнения $F(x, y) = 0$, удовлетворяющее условию $|y - y_0| \leq \Delta_2$. Полученная функция $y = f(x)$ будет непрерывной, дифференцируемой и $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, то можно считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. По условию эта производная непрерывна, поэтому существует окрестность точки (x_0, y_0), в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Выберем Δ так, чтобы квадрат $\{(x, y) : |x - x_0| \leq \Delta, |y - y_0| \leq \Delta\}$ входил в эту окрестность точки (x_0, y_0), тогда $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ в этом квадрате. Рассмотрим функцию $F(x_0, y)$, в которой зафиксируем первую переменную. Тогда $F'_y(x_0, y) > 0$, поэтому функция $F(x_0, y)$ возрастает, кроме того, по условию $F(x_0, y_0) = 0$. Значит $F(x_0, y_0 - \Delta) < 0$, а $F(x_0, y_0 + \Delta) > 0$ (рис.23).

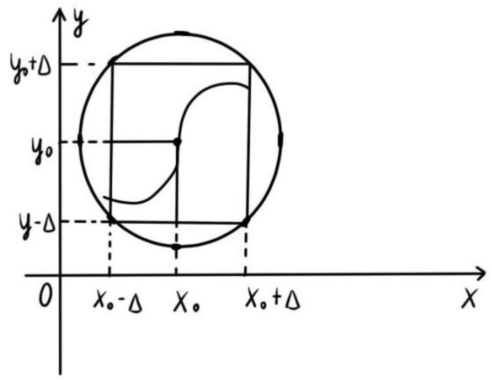

Рис.23.

Рассмотрим функцию $F(x, y_0 - \Delta)$, в которой зафиксируем вторую переменную. Эта функция непрерывна по *x*, так как она дифференцируема и $F(x_0, y_0 - \Delta) < 0$, поэтому существует Δ' такое, что $F(x, y_0 - \Delta) < 0$ при $x_0 - \Delta' \le x \le x_0 + \Delta'$. Рассмотрим функцию $F(x, y_0 + \Delta)$. Аналогично существует Δ'' такое, что $F(x, y_0 + \Delta) > 0$ при $x_0 - \Delta'' \le x \le x_0 + \Delta''$.

Обозначим $\Delta_1 = \min(\Delta', \Delta'')$ и рассмотрим прямоугольник $P = \{(x, y) : x_0 - \Delta_1 \le x \le x_0 + \Delta_1, y_0 - \Delta \le y \le y_0 + \Delta\}$. Для этого прямоугольника $F'_y(x, y) > 0$, $F(x_0, y_0 + \Delta) > 0$, $F(x_0, y_0 - \Delta) < 0$. Возьмем любое $x \in [x_0 - \Delta_1 \le x \le x_0 + \Delta_1]$ и зафиксируем. Тогда функция $g(y) = F(x, y)$ удовлетворяет условиям: $g(y_0 - \Delta) < 0$, $g(y_0 + \Delta) > 0$ и $g'(y) > 0$ на отрезке $[y_0 - \Delta; y_0 + \Delta]$. Поэтому эта функция непрерывна, строго возрастает и на концах отрезка принимает разные по знаку значения, следовательно, существует и притом единственное *y* такое, что $g(y) = F(x, y) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что $\forall x \in [x_0 - \Delta_1 \le x \le x_0 + \Delta_1]$ существует и притом единственное *y* такое, что $F(x, y) = 0$. Следовательно, получаем функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) = 0$. При этом из равенства $F(x_0, y_0) = 0$ имеем $f(x_0) = y_0$.

Докажем непрерывность этой функции в любой точке $x \in (x_0 - \Delta_1 \le x \le x_0 + \Delta_1)$. Докажем непрерывность в точке x_0. Нужно доказать, что $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x: \left|x-x_0\right|<\delta$ $\Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

Повторим с самого начала наши рассуждения, взяв $\Delta=\varepsilon$. В результате мы докажем, что решение уравнения $F(x,y)=0$ при $\left|x-x_0\right|<\delta$ будет удовлетворять неравенству $\left|y-y_0\right|<\varepsilon$ и для любого x такое решение единственное, то есть $y=f(x)$. Таким образом, мы доказали, что $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$. Непрерывность в точке x_0 доказана. Пусть $x_1\neq x_0$, $x_1\in[x_0-\Delta_1\leq x\leq x_0+\Delta_1]$, тогда рассмотрим точку $M_1(x_1,y_1)$. В окрестности этой точки снова выполнены все условия теоремы и поэтому в этой точке функция непрерывна.

Докажем дифференцируемость функции $y=f(x)$. Доказательство переведем для точки x_0. Придадим x_0 приращение Δx, тогда $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Функция $F(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, поэтому дифференцируема: $\Delta F=F'_x(x_0,y_0)\Delta x+F'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$, $\quad \varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ при $\Delta x,\Delta y\to 0$. Заметим, что при $\Delta x,\Delta y\to 0$ в силу непрерывности функции $y=f(x)$ имеем $\Delta F=F(x_0+x,f(x_0+\Delta x))-F'(x_0,y_0)=0$, так как $y=f(x)$ есть решение уравнения $F(x,y)=0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)}{F'_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)},$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$ Теорема доказана.

Следствие (общая теорема о неявной функции)

Пусть функция $F(x_1,\ldots,x_n,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_{10},\ldots,x_{n0},y_1)$ такой, что $F(M_0)=0$ (то есть лежащей на поверхности) имеет все частные производные первого порядка и они непрерывны, причем $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)\neq 0$, тогда в некоторой окрестности точки $(x_{10},\ldots,x_{n0})$ существует и притом единственное решение уравнения

$y = f(x_1,\ldots,x_n)$ такое, что $F(x_1,\ldots,x_n, f(x_1,\ldots,x_n)) = 0$, то есть это есть решение уравнения $F(x_1,\ldots,x_n, y) = 0$. При этом функция $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ будет непрерывной, дифференцируемой, причем $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}$.

Заметим, что формулы для вычисления производных легко выводятся из правила дифференцирования сложной функции. Предположим, что мы знаем, что функция $z = f(x, y)$ является решением уравнения $F(x, y, z) = 0$ и она дифференцируема. Найдем производные от левой и правой частей этого уравнения по *x* и *y*, считая *z* функцией от *x* и *y*:

$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$, отсюда $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$. Аналогично, $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$, отсюда $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Найдем смешанную производную: $z''_{xy} = -\frac{(F'_x)'_y F'_z - F'_x (F'_z)'_y}{(F'_z)^2}$

$$(F'_x)'_y = F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_x = F''_{xy} + F''_{xz} \cdot \left(-\frac{F'_y}{F'_z} \right),$$

$$(F'_z)'_y = F''_{zy} + F''_{zz} \cdot z'_y = F''_{zy} + F''_{zz} \cdot \left(-\frac{F'_y}{F'_z} \right).$$

Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений

Предположим, что *m* функций

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1,\ldots,x_n) \\ u_2 = \varphi_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \ldots \\ u_m = \varphi_m(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \tag{16}$$

ищутся как решение системы *m* функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(u_1,\ldots,u_m, x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ F_2(u_1,\ldots,u_m, x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \ldots \\ F_m(u_1,\ldots,u_m, x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{cases}. \tag{17}$$

Под термином решение системы (17) будем понимать совокупность *m* функций (16) таких, что при подстановке этих функций в систему (17) все уравнения этой системы обращаются в тождества. Это решение будем называть непрерывным и дифференцируемым (гладким) в некоторой области $D \subset \boldsymbol{R}^n$, если каждая из функций (16) непрерывна и дифференцируема в D.

Определение. Определитель, составленный из частных производных функций F_1, $F_2, \ldots,$ F_m

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

называется определителем Якоби или кратко якобианом функций F_1, $F_2, \ldots,$ F_m и обозначается символом $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)}$.

Теорема 13.2. Пусть *m* функций

$$\begin{cases} F_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \\ F_2(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ F_m(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{18}$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(u_{10}, \ldots, u_{m0}, x_{10}, \ldots, x_{n0})$, причем частные производные этих функций по переменным $u_1, \ldots, u_m$ непрерывны в точке M_0. Тогда, если в этой точке все функции (18) обращаются в нуль, якобиан $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)} \neq 0$, то для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ найдется такая окрестность точки $\overline{M}_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$, что в пределах этой окрестности существуют и притом единственные *m* функций (16), которые удовлетворяют условиям $\left|u_1-u_{10}\right|<\varepsilon_1, \ldots, \left|u_m-u_{m0}\right|<\varepsilon_m$ и являются решением системы уравнений (17), причем это решение непрерывно и дифференцируемо в указанной окрестности точки $\overline{M}_0$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится методом математической индукции по числу уравнений. При $m=1$ эта теорема переходит в следствие из предыдущей теоремы. Предположим, что выполнены условия этой теоремы. Подставим эти функции в систему уравнений (17), решением которой эти функции являются, и продифференцируем получившиеся тождества по x_i, $i=\overline{1,n}$. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial u_m}\cdot\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}=0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial u_m}\cdot\dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}=0 \end{cases}.$$

Эти равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно m неизвестных $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i},\ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_i}$. Определитель этой системы якобиан отличен от нуля в окрестности точки M_0. Следовательно, эта система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_{k-1},x_i,u_{k+1},\ldots u_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)}}.$$

Выражения для частных производных второго и последующих порядков можно получить посредством дифференцирования этих формул.

Пример. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$.

Решение. Продифференцируем оба уравнения по x и y:

$$\begin{cases} u + x\cdot u'_x - y\cdot v'_x = 0 \\ x\cdot u'_y - v - y\cdot v'_y = 0 \\ y\cdot u'_x + v + x\cdot v'_x = 0 \\ u + y\cdot u'_y + x\cdot v'_y = 0 \end{cases}.$$

Отсюда находим $u'_x = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$, $v'_x = \dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2}$, $u'_y = \dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2}$, $v'_y = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2}$.

§ 14. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

При нахождении наибольшего и наименьшего значений функции в заданной области мы столкнулись с проблемой с новой задачей: требуется найти экстремум функции *m*+*n* переменных $u = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ при наличии *m* условий связи

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1\ldots,y_m) = 0 \\ F_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \ldots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases}. \qquad (19)$$

Определение. Точка $M_0(x_{10},\ldots,x_{n0},y_{10},\ldots,y_{m0})$, координаты точек которой удовлетворяют условиям связи (19), называется точкой условного локального максимума (минимума) функции $u = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$, если найдется окрестность этой точки $O_\varepsilon(M_0)$ такая, что $\forall M \in O_\varepsilon(M_0)$ выполняется неравенство $f(M) \le f(M_0)$ ($f(M) \le f(M_0)$). Координаты точки *M* удовлетворяют условиям связи (19).

Для нахождения условного экстремума функции $u = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ при наличии связей (19) предположим, что функции, стоящие в левых частях равенств (19), дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, причем в самой точке M_0 частные производные указанных функций по $y_1,\ldots,y_m$ непрерывны, а якобиан

$\dfrac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(u_1,\dots,u_m)} \neq 0$. В таком случае в силу теоремы из пункта 13 для достаточно малых положительных чисел $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ найдется такая окрестность точки $\overline{M}_0(x_{10},\dots,x_{n0})$ пространства $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, что всюду в пределах этой окрестности определены m функций $\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,\dots,x_n) \\ y_2=\varphi_2(x_1,\dots,x_n) \\ \dots \\ y_m=\varphi_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$,

удовлетворяющих условиям $|y_1-y_{10}|<\varepsilon_1$, $\dots$, $|y_m-y_{m0}|<\varepsilon_m$ и являющихся при наличии этих условий единственным и дифференцируемым решением системы уравнений (19). Подставляя найденные функции в функцию $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ мы сведем вопрос о существовании условного экстремума в точке M_0 у функции $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ при наличии связей (19) к вопросу о существовании безусловного экстремума в точке $\overline{M}_0(x_{10},\dots,x_{n0})$ у сложной функции аргументов $x_1,\dots,x_n: u=f(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,x_n))=\Phi(x_1,\dots,x_n)$. (20)

Установим теперь необходимые условия существования условного экстремума в точке M_0. Пусть функция $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при наличии связей (19) или (что тоже самое) функция (20) имеет в точке $\overline{M}_0(x_{10},\dots,x_{n0})$ имеет безусловный экстремум. Согласно необходимому условию безусловного экстремума функции $u=\Phi(x_1,\dots,x_n)$ в точке $\overline{M}_0$ равен нулю дифференциал этой функции

$$du=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{21}$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала и равенства (20) формулу (21) можно переписать в виде:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m=0. \tag{22}$$

В этой формуле все частные производные берутся в точке M_0. Однако в этом равенстве $dy_1,\dots,dy_m$ представляют собой дифференциалы функций $y_1=\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\ y_m=\varphi_m(x_1,\ldots,x_n)$, являющиеся решением системы (19). При этом уравнения (19) обратятся в тождества и мы получим, дифференцируя эти тождества:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m=0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m=0. \end{cases} \tag{23}$$

Так как якобиан $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\neq 0$, то из линейной системы (23) дифференциалы $dy_1,\ldots,dy_m$ могут быть выражены как линейные функции $dx_1,\ldots,dx_n$. Если найти эти выражения и подставить их в (22), то собирая в полученном равенстве члены, содержащие $dx_1,\ldots,dx_n$, будем иметь $A_1dx_1+\ldots+A_ndx_n=0$, где через $A_1,\ldots,A_n$ обозначены некоторые рациональные функции частных производных функций $f,F_1,\ldots,F_m$ в точке M_0. Так как в этом равенстве фигурируют лишь дифференциалы независимых переменных, то из него заключаем, что $A_1=\ldots=A_n=0$. Присоединяя к указанным равенствам *m* условий связи (19) , мы получим необходимые условия существования условного экстремума функции $u=f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ при наличии связей (19) в виде: $A_1=0,\ldots,A_n=0$, $F_1=0,\ldots,F_m=0$. Эти равенства представляют собой систему *m*+*n* уравнений для определения координат точки возможного экстремума.

Метод неопределенных множителей Лагранжа

Умножим равенства (23) соответственно на произвольные и пока еще неопределенные постоянные множители $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Полученные после умножения равенства сложим почленно с равенством (22). В результате получим следующее равенство:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial\Psi}{\partial y_m}dy_m=0, \tag{24}$$

где символом $\Psi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ обозначена следующая функция $\Psi = f + \lambda_1 F_1 + \ldots \lambda_m F_m$. Эту функцию будем называть **функцией Лагранжа**. Считая, что для функций (19) выполнены условия, сформулированные в предыдущем пункте, и что функция $u = f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ дифференцируема, выберем множители $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0,\ldots,\frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0. \tag{25}$$

Это можно сделать, ибо равенства (25) приводят к линейной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0, \end{cases}$$

определитель которой (якобиан) отличен от нуля. В силу равенств (25) равенство (24) принимает вид $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0$. Поскольку при сделанных выше предположениях переменные $x_1,\ldots,x_n$ являются независимыми, то из последнего равенства заключаем, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0,\ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \tag{26}$$

Присоединяя к уравнениям (25) и (26) условия связи (19), получим систему m+2n уравнений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0,\ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0,\ \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0,\ldots,\ \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0,\ F_1 = 0,\ldots,F_m = 0 \tag{27}$$

для определения m+n координат точек возможного условного экстремума и m множителей $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Практически при реализации этого метода поступают следующим образом: составляют функцию Лагранжа и для этой функции находят точки возможного безусловного экстремума. Для исключения множителей $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ привлекают условия связи (19). Такой путь отыскания точек возможного условного экстремума является законным, ибо он приводит к системе m+2n уравнений.

Перейдем к нахождению достаточных условий экстремума. Предположим, что в точке M_0 выполнены необходимые условия экстремума. Кроме того дополнительно потребуем двукратной дифференцируемости функций $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и (19) в окрестности точки M_0 и непрерывности всех частных производных второго порядка в самой точке M_0. Из конструкции функции Лагранжа очевидно, что при наличии связей (19) экстремумы функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ и функции Лагранжа совпадают. Это вытекает из того, что при наличии связей (19) разность $f(M) - f(M_0)$ совпадает с разностью $\Psi(M) - \Psi(M_0)$. Но тогда для получения достаточного условия экстремума в точке M_0 у функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при наличии связей (19) следует присоединить к условиям (27) требование знакоопределенности в этой точке $d^2\Psi$. При этом мы можем констатировать в точке M_0 наличие минимума, если при наличии связей (19) $d^2\Psi(M_0) > 0$ и максимума, если $d^2\Psi(M_0) < 0$. Отметим, что второй дифференциал $d^2\Psi$ можно в данной точке M_0 возможного экстремума вычислять так, как если бы все переменные $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ были независимы. В самом деле, в общем случае второй дифференциал $d^2\Psi$ функции Ψ не обладает свойством инвариантности формы и должен был бы с учетом зависимости $y_1, \ldots, y_m$ от $x_1, \ldots, x_n$ определяться равенством

$$d^2\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m \right)^2 \Psi +$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} d^2 y_1 + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} d^2 y_m.$$

Но в точке возможного экстремума M_0 справедливы равенства

$\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}=0$ …, $\frac{\partial\Psi}{\partial y_m}=0$, так что $d^2\Psi$ определяется той же формулой

$$d^2\Psi=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2\Psi, \qquad (28)$$

что и в случае, когда переменные $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ независимы. Поскольку требуется установить знакоопределенность $d^2\Psi$ лишь при наличии связей (19), то при проведении вычислений следует в формулу (28) для $d^2\Psi$ подставить вместо $dy_1,...,dy_m$ их значения, определяемые из системы (23). После этого следует изучить вопрос о знакоопределенности $d^2\Psi$ в данной точке M_0.

Рассмотрим задачу вычисления условного экстремума функции $u=f(x,y)$ с условием связи $\varphi(x,y)=0$. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. По необходимому условию экстремума должны выполнятся равенства:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda}=0.\end{cases}$$

Пусть $(x_0,y_0,\lambda_0)-$ решение этой системы, а

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0)\\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0,\lambda_0) & L''_{xy}(M_0,\lambda_0)\\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0,\lambda_0) & L''_{yy}(M_0,\lambda_0)\end{vmatrix}.$$

Тогда, если $\Delta<0$, то $M_0(x_0,y_0)-$точка условного локального максимума, если $\Delta>0$, то $M_0(x_0,y_0)-$точка условного локального минимума.

Примеры. 1) Найти экстремум функции $z=x^2-y^2$ на прямой $2x-y-3=0$.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид: $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(2x-y-3)$. Ее частные производные первого порядка равны:

$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda \\ L'_y=-2y-\lambda \\ L'_\lambda=2x-2y-3 \end{cases}$. Найдем решения системы $\begin{cases} 2x+2\lambda=0 \\ -2y-\lambda=0 \\ 2x-2y-3=0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\dfrac{\lambda}{2} \\ -2\lambda+\dfrac{\lambda}{2}=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \\ \lambda_0=-2 \end{cases}$.

$L''_{xx}=2$, $L''_{xy}=0$, $L''_{yy}=-2$, $\varphi'_x=2$, $\varphi'_y=-1$.

$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-6<0$. Следовательно, точка $(2{,}1)-$точка локального максимума функции $z=x^2-y^2$ при условии $2x-y-3=0$.

2) Исследовать, имеет ли функция $u=xy+xz+yz$ условный экстремум в точке $M_0(1;1;1)$, если $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$.

Решение. Функция Лагранжа имеет вид: $L(x,y,z,\lambda)=xy+xz+yz+\lambda(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)$. Ее частные производные первого порядка равны:

$$\begin{cases} L'_x=y+z+\lambda(6x^2y^2z+8x)=0 \\ L'_y=x+z+\lambda(4x^3yz+10y)=0 \\ L'_z=x+y+\lambda(2x^3y+12z)=0 \\ L'_\lambda=2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0 \end{cases}.$$

Решением системы является четверка чисел $x=1$, $y=1$, $z=1$, $\lambda=-\dfrac{1}{7}$.

Найдем первый и второй дифференциалы функции Лагранжа:

$dL=ydx+xdy+zdx+xdz+ydz+zdy+\lambda d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)$,

$d^2L = 2dxdy + 2dxdz + 2dzdy + d\lambda \cdot d(2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17)$.

В силу условий связи $d(2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17) =$
$6x^2y^2zdx + 4x^3yzdy + 2x^3y^2dz + 8xdx + 10ydy + 12zdz = 0$. Поэтому при $x = y = z = 1$ имеем $6dx + 4dy + 2dz + 8dx + 10dy + 12dz =$
$= 14dx + 14dy + 14dz = 0$. Отсюда $dz = -dx - dy$, следовательно, в точке $(1;1;1;-\frac{1}{7})$ имеем $d^2L = -2(dx^2 + dxdy + dy^2)$. Так как d^2L в точке $(1;1;1;-\frac{1}{7})$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то функция $L(x, y, z, \lambda)$ имеет в этой точке локальный максимум, следовательно, точка $M_0(1;1;1)$ является точкой локального условного максимума.

Замена переменных

В ряде вопросов анализа встречается задача о замене переменных. Эта задача заключается в следующем. Предположим, что нам задано некоторое выражение $F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots)$, (29)

содержащее независимые переменные x, y, функцию $z = z(x, y)$ и ее частные производные. Вместо независимых переменных x, y вводятся новые переменные u, v и новая функция $w = w(u, v)$, причем заданы соотношения, посредством которых u, v, ω выражаются через x, y, z:

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z) \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases} \tag{30}$$

Требуется преобразовать выражение (29) к новым переменным u, v, w. При этом будем предполагать, что функции (30) достаточное число раз дифференцируемы и что систему (30) можно разрешить относительно x, y, z, а первые два уравнения (30) – относительно x, y.

Для решения поставленной задачи достаточно выразить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ через $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$. Имея в виду, что $z = z(x, y)$, а $w = w(u, v)$, запишем первые дифференциалы функций (30). Получим:

$$\begin{cases} du = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right), \\ dv = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right), \\ dw = \dfrac{\partial w}{\partial u}du + \dfrac{\partial w}{\partial v}dv = \dfrac{\partial\chi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\chi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\chi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right). \end{cases}$$

Подставляя в выражение для dw выражения для du, dv и приравнивая коэффициенты при dx, dy, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial\chi}{\partial x} + \dfrac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial w}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial\chi}{\partial y} + \dfrac{\partial\chi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}, \end{cases}$$

из которой легко выразить $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \dfrac{\partial\chi}{\partial x}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \dfrac{\partial\chi}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - \dfrac{\partial\chi}{\partial y}}{\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \dfrac{\partial\chi}{\partial z}}.$$

Если выражение (29) зависит также и от частных производных второго порядка, то для определения этих производных через частные производные w по u и v, следует записать первые дифференциалы от уже вычисленных производных первого порядка.

Замечание 1. Аналогично производится замена и в случае, когда старые переменные связаны с новыми не соотношениями (30), а неявными соотношениями вида

$$\begin{cases} \Phi_1(u,v,w,x,y,z) = 0, \\ \Phi_2(u,v,w,x,y,z) = 0, \\ \Phi_3(u,v,w,x,y,z) = 0, \end{cases}$$

допускающими разрешимость как относительно u, v, w, так и относительно x, y, z.

Замечание 2. Указанный прием применим для случая любого числа независимых переменных (и, в частности, одной независимой переменной).

Пример 1. Преобразовать оператор Лапласа $F = \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Решение. Найдем дифференциалы:

$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi$, $dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$. Из соотношений $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi$ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) + \frac{\partial z}{\partial y}(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при dr и $d\varphi$, получим:

$\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial r}$, $-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$. Из этих соотношений получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}. \tag{31}$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) -$$

$$-\frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \varphi} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Аналогично из второй формулы (31) находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \varphi} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Таким образом, оператор Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

Пример 2. Преобразовать дифференциальное уравнение $z'_x+(y-x)z'_y=z-x-1$, приняв $u=x$, $v=x-2y+z$ за новые независимые переменные, а $w=x-y+z$ за новую функцию.

Решение. Выразим частные производные z'_x и z'_y через частные производные функции w по переменным u и v. Для этого дифференцируем равенство $w=x-y+z$ по переменным x и y, считая, что $w=w(u(x,y),v(x,y))$:

$$w'_u\cdot u'_x+w'_v\cdot v'_x=1+z'_x,$$

$$w'_u\cdot u'_y+w'_v\cdot v'_y=-1+z'_y.$$

Эти равенства с учетом того, что $u'_x=1$, $v'_x=1+z'_x$, $u'_y=0$, $v'_y=z'_y-2$, перепишем в виде:

$$w'_u+w'_v(1+z'_x)=1+z'_x,$$

$$w'_v(z'_y-2)=-1+z'_y.$$

Отсюда найдем: $z'_x=\dfrac{w'_u+w'_v-1}{1-w'_v}$, $z'_y=\dfrac{1-2w'_v}{1-w'_v}$.

Подставив эти выражения в исходное уравнение, после упрощения получим $w'_u+(z-2y+x)w'_v=z-y$.

Осталось лишь заменить старые переменные x и y, а также старую функцию z на их выражения через u, v и w. Для этого достаточно разрешить систему уравнений

$$\begin{cases} u=x \\ v=x-2y+z \\ w=x-y+z \end{cases}$$

относительно x, y, z. В данном случае, однако, в этом нет необходимости, так как $z-2y+x=v$, $z-y=w-u$. Окончательно получаем

$$w'_u+vw'_v=w-u.$$

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К числу важных задач механики относится задача об определении закона движения материальной точки по заданной ее скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ускорению. Эти задачи приводят к проблеме отыскания функции по заданной производной этой функции.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на (a,b), если $\forall x \in (a,b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на бесконечной прямой и открытой полупрямой.

Примеры. 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$ на $(-\infty,+\infty)$, так как $\forall x \in \boldsymbol{R}$ имеем $(\sin x)' = \cos x$.

2. Функция $F(x) = \ln x$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $(0,+\infty)$, так как $\forall x \in (0,+\infty)$ имеем $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ где C – любая постоянная, тоже является первообразной для $f(x)$ на (a,b).

Теорема 1.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на (a,b), то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Доказательство. Положим $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируема на (a,b), то и $F(x)$ дифференцируема на (a,b), причем всюду на этом интервале $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Отсюда получаем, что $F(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = const$. Теорема доказана.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на (a,b), то любая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где C – $const$.

Если функция $f(x)$, определенная на (a,b), имеет первообразную, то она называется интегрируемой на (a,b).

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на (a,b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на (a,b), то согласно следствию из теоремы 1.1. имеем $\int f(x)dx = F(x)+C$, где C – любая постоянная. Легко видеть, что подынтегральное выражение есть дифференциал любой первообразной для $f(x)$. Действительно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$, то по определению дифференциала имеем $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$. А так как $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $d(F(x)+C)=dF(x)$, то можно записать равенства:

1. $\int dF(x) = F(x)+C$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx$.

Знак равенства в последнем соотношении означает, что все функции, входящие в совокупность $\int f(x)dx$ имеют один и тот же дифференциал $dF(x)$. Также имеем $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Определение. Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a,b), называется интегрированием этой функции. Саму задачу нахождения интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a,b), можно рассматривать как обратную к задаче нахождения дифференциала функции.

Следующие два свойства обычно называют линейными свойствами неопределенного интеграла:

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
4. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$;
5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, $k \neq 0$, то $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Исходя из таблицы производных основных элементарных функций, мы можем выписать интегралы основных элементарных функций:

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

6. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

7. $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

9. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

13. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} arctg\, x + C \\ -arcctg\, x + C \end{cases}$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

17. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$

18. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

19. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$

20. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C$.

Докажем некоторые из этих формул.

3°. Если $0 < x < +\infty$, то $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Если $-\infty < x < 0$, то $|x| = -x$, $\ln|x| = \ln(-x)$, $(\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$.

15°. $$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a}}{\sqrt{x^2 \pm a}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}.$$

16°. $$\left(\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) =$$
$$\frac{x+a-x+a}{2a(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

Известно, что производная любой элементарной функции представляет также элементарную функцию. Иными словами, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций. Отметим, что с операцией интегрирования дело обстоит иначе. Можно доказать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными, например,

1. $\int e^{x^2} dx$

2. $\int \cos x^2\, dx$

4. $\int \dfrac{dx}{\ln x} = li\, x$, $x > 0, x \neq 1$

5. $\int \dfrac{\sin x}{x} dx = si\, x$

3. $\int \sin x^2\, dx$

6. $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $x \neq 0$

Каждый из указанных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной. Интеграл 1, называемый интегралом Пуассона или интегралом ошибок, широко используется в статистической физике, в теории теплопроводности и диффузии, интегралы 2 и 3, называемые интегралами Френеля, широко применяются в оптике. Часто встречаются в приложениях интегралы 4–6, первый из которых называется интегральным логарифмом, а последние два – интегральным синусом и косинусом. Для всех перечисленных новых функций составлены таблицы и графики.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

К основным приемам интегрирования относятся: непосредственное интегрирование, внесение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование – это метод нахождения неопределенных интегралов, основанный на применении таблицы интегралов, свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Примеры. Найти неопределенные интегралы

1. $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$;

2. $\int \frac{3x^5 - 2xe^x + 7}{x} dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$;

4. $\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2}$;

5. $\int ctg^2 x\, dx$;

6. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$;

7. $\int e^{2x+3} dx$;

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$;

9. $\int \frac{3dx}{x^2 + 4x + 20} dx$;

10. $\int \frac{x^3 dx}{x + 3}$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

12. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$.

Решение.

1. Согласно свойствам 3 и 4, а также табличным интегралам 2 и 3, имеем:

$$\int (3x^2 - 4x + 5) dx = \int 3x^2 dx - \int 4x\, dx + \int 5dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C\,.$$

2. Разделим почленно числитель на знаменатель, получим:

$$\int \frac{3x^5 - 2xe^x + 7}{x}dx = \int\left(3x^4 - 2e^x + \frac{7}{x}\right)dx = \frac{3x^5}{5} - 2e^x + 7\ln|x| + C.$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2 + x^{-2}\right)^2}}{x^3}dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int x^{-5}dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

4. Выделим целую часть в подынтегральной функции, тогда

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^2} = -\int \frac{x^2 - 1 + 1dx}{x^2 - 1} = -\int\left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right)dx = -x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

5. Согласно формулам тригонометрии, имеем:

$$\int ctg^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = x + ctg\,x + C.$$

6. $$\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$$

7. Согласно свойству 5 неопределенного интеграла получим:

$$\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} = \frac{1}{a^2}\cdot a\cdot arctg\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C.$$

9. Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$\int \frac{3dx}{x^2 + 4x + 20}dx = 3\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 16} = 3\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 16} = \frac{3}{4}arctg\frac{x+2}{4}.$$

10. Выделим целую часть в подынтегральной функции, получим

$$\int \frac{x^3dx}{x+3} = \int \frac{x^3 + 27 - 27}{x+3}dx = \int\left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{a}\cdot a\cdot \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

12. $$\int \frac{2dx}{\sqrt{5 - 3x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C.$$

Внесение под знак дифференциала

Теорема 2.1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и функция $u(x)$ – непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Примеры.

1. $$\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$$

2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{1+\ln x}\, d(1+\ln x) = \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\, d(1+\ln x) = \frac{2(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$;

3. $\int 3x \cdot e^{2x^2} dx = \frac{3}{4}\int e^{2x^2} d(2x^2) = \frac{3}{4}e^{2x^2} + C$;

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\arcsin 2x)}{\arcsin^3 2x} = \frac{1}{2}\int \arcsin^{-3} 2x\, d(\arcsin 2x) = -\frac{1}{4\arcsin^2 2x} + C$

Замена переменной

Теорема 2.2. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(\alpha;\beta)$, причем множество значений функции $\{\varphi(t)\}$ принадлежит интервалу $(a;b)$. Пусть для функции $f(x)$ на $(a;b)$ существует первообразная $F(x)$, то есть $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тогда на интервале $(\alpha;\beta)$ для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ существует первообразная $F(\varphi(t))$, то есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$.

Доказательство. По определению первообразной $F'(x)=f(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Также $\varphi'(t)dt = d\varphi(t)$, поэтому $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = [\varphi(t)=x] =$
$= \int f(x)dx = F(x)+C = F(\varphi(t))+C$. Теорема доказана.

Замена переменной применяется в основном при интегрировании сложных тригонометрических и иррациональных функций.

Примеры.

1. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx = \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{1-x}=t\\ x=1-t^3\\ dx=-3t^2dt\end{array}\right] = -3\int(1-t^3)^2\cdot t^3dt = -3\int(t^3-2t^6+t^9)dt =$

$= -3\left(\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^{10}}{10}\right) + C$, где $\sqrt[3]{1-x}=t$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left[\begin{array}{l}\sqrt{1+e^x}=t\\ e^x=t^2-1\\ x=\ln(t^2-1)\\ dx=\frac{2t\,dt}{t^2-1}\end{array}\right] = \int\frac{2t\,dt}{t(t^2-1)} = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$.

3. $\int \cos^5 x\cdot\sqrt{\sin x}\,dx = \left[\begin{array}{l}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\\ \cos^5 x\,dx = \cos^4 x\cdot\cos x\,dx =\\ \left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx = \left(1-t^2\right)^2 dt\end{array}\right] = \int\sqrt{t}\cdot\left(1-t^2\right)^2 dt =$

$\int\sqrt{t}\cdot\left(1-2t^2+t^4\right)dt = \int\left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}}\right)dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4t^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2t^{\frac{11}{2}}}{11} + C =$

$\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x + C$.

Интегрирование по частям

Теорема 2.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;b)$ и существует первообразная для функции $u'(x)v(x)$. Тогда на $(a;b)$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{или} \quad \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \qquad (1)$$

Доказательство. Запишем формулу производной произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$: $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. Умножим обе части на dx и проинтегрируем. Так как по условию существует $\int u'(x)v(x)dx$ и $\int\left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x) + C$, то существует $\int u(x)v'(x)dx$, причем справедлива формула (1). Теорема доказана.

Вычисление интеграла $\int u\,dv$ посредством формулы (1) называется **интегрированием по частям.** Большая часть интегралов, берущихся по частям, может быть разбита на следующие группы:

1. Интегралы вида $\int(ax+b)^n e^{cx}dx$, $\int(ax+b)^n\sin(cx)\,dx$, $\int(ax+b)^n\cos(cx)\,dx$, где *a,b,c – cost,* $n\in\boldsymbol{N}$. В качестве $u(x)$ берется функция $(ax+b)^n$. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.
2. Интегралы, в которых подынтегральная функция есть произведение многочлена на одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\,x$, $arctg^2 x$, $\arccos^2 x$,… В качестве $u(x)$ берется одна из перечисленных выше функций.
3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx$, $\int\sin(\ln x)\,dx$,

$\int \cos(\ln x)\,dx$. Обозначая любой из интегралов этой группы через I и производя двукратное интегрирование по частям, мы получим для I уравнение первого порядка.

Примеры.

1. $\int (2x+3)\sin 4x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+3 & dv = \sin 4x\,dx \\ du = (2x+3)'\,dx & v = \int \sin 4x\,dx \\ du = 2dx & v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\cos 4x\cdot(2x+3) -$

$-\int -\frac{1}{4}\cos 4x\cdot 2dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\cdot(2x+3)+\frac{1}{8}\sin 4x + C$;

2. $\int \left(2x^2 - x\right)e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x^2 - x & dv = e^{2x}dx \\ du = (2x-1)dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(2x^2 - x\right) - \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{2x}dx =$

$= \begin{bmatrix} u = 2x-1 & dv = e^{2x}dx \\ du = 2dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(2x^2 - x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1) - \int e^{2x}dx\right) =$

$\frac{1}{2}e^{2x}\left(2x^2 - x\right) - \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + \frac{1}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$;

3. $\int x^3\cdot\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x^3dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{bmatrix} = \frac{x^4}{4}\cdot\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\cdot\ln x - \frac{x^4}{16} + C$;

4. $\int arctg\,x\,dx = \begin{bmatrix} u = arctg\,x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = x \end{bmatrix} = x\cdot arctg\,x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\cdot arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$

$= x\cdot arctg\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$;

5.

$I = \int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{ax} & dv = \cos(bx)\,dx \\ du = ae^{ax}dx & v = \frac{1}{b}\sin(bx) \end{bmatrix} = \frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx =$

$= \begin{bmatrix} u = e^{ax} & dv = \sin(bx)\,dx \\ du = ae^{ax}dx & v = -\frac{1}{b}\cos(bx) \end{bmatrix} = \frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax} - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}\cos(bx)\cdot e^{ax} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)dx\right) =$

$= \frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax} + \frac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}I$, то есть получили уравнение относительно I:

$$I=\frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}+\frac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax}-\frac{a^2}{b^2}I$$. Отсюда находим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I=\frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}+\frac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax},$$

$$I=\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\sin(bx)+\frac{a}{b}\cos(bx)\right).$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. **Рациональной функцией (дробью)** называется отношение двух алгебраических многочленов $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. В противном случае рациональная дробь называется неправильной. Любую неправильную рациональную дробь можно посредством деления числителя на знаменатель «столбиком» представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби. Действительно, если $P(x)=q(x)\cdot Q(x)+r(x)$, где $q(x)$ и $r(x)$ – многочлены, причем $\deg r(x)<\deg Q(x)$, то

$$\int R(x)\,dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{q(x)\cdot Q(x)+r(x)}{Q(x)}dx=\int q(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

Интегрировать многочлен мы умеем, поэтому задача сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^m},\ m=1,2,\dots \text{ и } \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m},\ m=1,2,\dots,\ p^2-4q<0.$$

Докажем, что каждая из этих дробей интегрируема в элементарных функциях.

При $m=1$: $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$;

при $m>1$: $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}dx=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$.

Рассмотрим интеграл от дроби второго вида:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left[d\left(x^2+px+q\right) = (2x+p)dx\right] = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^m} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \frac{B}{2}\cdot I_1 + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot I_2 .$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интегралов I_1 и I_2:

$$I_1 = \int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \begin{cases} \ln\left(x^2+px+q\right)+C, & \text{если } m=1 \\ \dfrac{\left(x^2+px+q\right)^{-m+1}}{-m+1}, & \text{если } m=2,3,\ldots \end{cases};$$

при $m=1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\, arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$;

при $m>1$:

$$I_m = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^m} = \begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}=y \\ dx=dy \\ \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^m} =$$

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^m} = \begin{bmatrix} u=\dfrac{1}{\left(y^2+a^2\right)^m} & dv=dy \\ du=\dfrac{-2my\,dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}} & v=y \end{bmatrix} = \frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m} + 2m\int \frac{\left(y^2+a^2-a^2\right)dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}} =$$

$$= \frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m} + 2m\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^m} - 2ma^2\int \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}} .$$

Последнее равенство можно переписать в виде: $I_m = \dfrac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}$. Отсюда находим $I_{m+1} = \dfrac{1}{2ma^2}\left(\dfrac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m} + (2m-1)I_m\right)$. Соотношение, связывающее I_m и I_{m+1}, называется рекуррентным.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому сначала нужно разделить числитель на знаменатель «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 1 & \underline{x^2 + x + 2} \\
\underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x \\
\quad -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad 4x + 1 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} dx = \int \left(x^2 - 2x + \frac{4x+1}{x^2+x+2} \right) dx = \left[d\left(x^2 + x + 2\right) = (2x+1)dx \right] = \frac{x^3}{3} - x^2 +$$

$$+ 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+2} - \int \frac{dx}{x^2+x+2} = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2\int \frac{d\left(x^2+x+2\right)}{x^2+x+2} - \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{x^3}{3} - x^2 +$$

$$+ 2\ln\left(x^2 + x + 2\right) - \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C .$$

Интегрирование рациональных дробей (общий случай)

Рассмотрим интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Любой многочлен $Q(x)$ может быть разложен на произведение действительных неприводимых множителей

$$Q(x) = A(x - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{k_l} .$$

Любую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{B_{k_l} x + C_{k_l}}{\left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{k_l}} . \quad (2)$$

Знаменателями простейших дробей служат все целые степени каждого множителя в разложении $Q(x)$, числителями служат либо постоянные $A_1, A_2, \ldots,$ либо линейные функции $B_i x + C_i$ смотря по тому, является ли знаменателем линейной или квадратичной функцией. Для того чтобы найти неизвестные постоянные в числителях правой части равенства (2), приводят правую часть к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих частей. Получают систему линейных уравнений, решая которую, находят неизвестные постоянные.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$; 2. $\int \frac{2-x}{x^3+1}dx$; 3. $\int \frac{x^2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}dx$.

Решение.

1. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому сначала выделим целую часть:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx.$$

Затем раскладываем знаменатель последней дроби на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x\left(x^2-5x+6\right)} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}.$$

Чтобы найти неизвестные постоянные *A*, *B*, *C*, приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители в левой и правой частях полученного равенства, получим:

$$5x^2-6x+1 = A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3).$$

Положим в последнем равенстве x=0, получим: $1=6A$, откуда $A=\frac{1}{6}$.

Аналогично, полагая в последнем равенстве x=2, получим: $9=-2C$, откуда $C=-\frac{2}{9}$. Наконец, полагая в последнем равенстве x=3, получим: $28=3B$, откуда $B=\frac{3}{28}$. Следовательно, исходный интеграл может быть переписан в виде:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int\left(1+\frac{1}{6x}+\frac{3}{28(x-3)}-\frac{2}{9(x-2)}\right)dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{28}\ln|x-3|-\frac{2}{9}\ln|x-2|+C$$

2. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому раскладываем знаменатель на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2-x}{x^3+1} = \frac{2-x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)},$$

$$2-x = A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1).$$

При $x=-1$ находим $3=3A$, $A=-1$.

Приравняем коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства:

$0=A+B$, $B=-A=1$.

Приравняем коэффициенты при x в левой и правой частях равенства:

$-1=-A+B+C$, $C=-1+A-B=-3$.

Таким образом, исходный интеграл можно переписать в виде:

$$\int\frac{2-x}{x^3+1}dx=\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx=\left[d\left(x^2-x+1\right)=(2x-1)dx\right]=-\ln|x+1|+$$
$$+\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x+1|+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

3. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому раскладываем знаменатель на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}=$$
$$\frac{A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}\ .$$

Приравняем числители левой и правой частей последнего равенства:

$$x^2=A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2\ .$$

При $x=1$ находим $1=B$, при $x=2$ находим $4=D$.

Раскроем скобки в последнем равенстве:

$$x^2=A\left(x^3-5x^2+8x-4\right)+B\left(x^2-4x+4\right)+C\left(x^3-4x^2+5x-2\right)+D\left(x^2-2x+1\right).$$

Приравняем коэффициенты при x^3 в левой и правой частях последнего равенства: $0=A+C$, и приравняем коэффициенты при x^2: $1=-5A+B-4C+D$. Подставляя найденные значения B и D, получим систему:

$$\begin{cases}A+C=0\\5A+4C=4\end{cases},\ \begin{cases}C=-A\\5A-4A=4\end{cases},\ \begin{cases}C=-4\\A=4\end{cases}.$$

Таким образом, исходный интеграл можно переписать в виде:

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-1|-$$
$$-\frac{4}{x-2}+C\ .$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Наиболее употребительные следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные:

I. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Рассмотрим функцию вида: $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $a, b, c, d -$ некоторые постоянные, $n \in \boldsymbol{N}$, $R(x, y) -$рациональная функция. Функцию такого вида и называют дробно-линейной иррациональностью. Покажем, что интеграл от функции такого вида при $ad - bc \neq 0$ рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. Действительно, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$,

$ax + b = t^n(cx+d)$, $x(a - ct^n) = dt^n - b$, $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$. Тогда $dx = \dfrac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt$.

Таким образом, $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt$.

Поскольку рациональная функция от рациональной функции представляет собой также рациональную функцию, то интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, является интегралом от рациональной дроби. Тем самым доказано, что интеграл от дробно-линейной иррациональности рационализируется подстановкой

$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$.

Решение.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = t \\ 1 + x = t^2(1-x) \\ x = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ 1 - x = \dfrac{2}{t^2+1} \\ dx = \dfrac{4tdt}{(t^2+1)^2} \end{array}\right] = \int \frac{4t^2(t^2+1)}{2(t^2+1)^2}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$=2(t-arctgt)+C$, где $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=t$.

II. Интеграл $\int R(x,x^{\alpha},x^{\beta},\ldots)dx$, где $R(x,y,\ldots)-$ рациональная функция, $\alpha=\dfrac{m_1}{n_1}$, $\beta=\dfrac{m_2}{n_2},\ldots -$ рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены $x=t^k$, где $k=НОК(n_1,n_2,\ldots)-$ наименьший общий знаменатель всех дробных показателей у x.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Решение. $\int\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{bmatrix}=\int\dfrac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3dt=4\int\dfrac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\left(1+\dfrac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$

$=4\left(t+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(t^2+1)}{t^2+1}-arctg\,t\right)=4\left(t+\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)-arctg\,t\right)+C=4\sqrt[4]{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)-$

$-4arctg\sqrt[4]{x}+C$.

III. Интегралы более общего вида $\int R(x,(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\ldots)dx$ или $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ldots\right)dx$ находят с помощью аналогичных подстановок $ax+b=t^k$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где $k-$ наименьший общий знаменатель всех дробных показателей.

IV. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Определение. **Биномиальным дифференциалом** называется выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где $a,b-$ произвольные постоянные, $m,n,p\in\boldsymbol{Q}$. Рассмотрим три случая, когда интеграл от биномиального дифференциала допускает рационализирующую подстановку:

1) $p-$ целое, $m=\dfrac{k}{l}$, $n=\dfrac{c}{d}$, $k,l,c,d\in\boldsymbol{Z}$.

Находим $НОК(l,d)=s$, тогда $m=\dfrac{k'}{s}$, $n=\dfrac{c'}{s}$, $k',c'\in\boldsymbol{Z}$. Делаем подстановку $x=t^s$, тогда $x^m=t^{k'}$, $x^n=t^{c'}$, $dx=st^{s-1}dt$, $\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int t^{k'}\left(a+bt^{c'}\right)^p st^{s-1}dt$.

Получили интеграл от рациональной функции.

2) $\dfrac{m+1}{n}\in\boldsymbol{Z}$, $p=\dfrac{c}{s}$.

Делаем подстановку $a+bx^n=t^s$, тогда $x=\sqrt[n]{\dfrac{t^s-a}{b}}$, $x^m=\left(\dfrac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$,

$dx=\dfrac{1}{nb}\left(\dfrac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$. Таким образом, получаем интеграл от рациональной функции $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\dfrac{s}{nb}\int\left(\dfrac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}t^{c+s-1}dt$.

3) $\dfrac{m+1}{n}+p\in \boldsymbol{Z}$.

В этом случае интеграл от биномиального дифференциала рационализируется подстановкой $\dfrac{a}{x^n}+b=t^s$, $x=\sqrt[n]{\dfrac{a}{t^s-b}}$, $dx=-\dfrac{a}{n}\left(\dfrac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\dfrac{st^{s-1}}{\left(t^s-b\right)^2}dt$,

$\left(a+bx^n\right)^{\frac{c}{s}}=a^{\frac{c}{s}}\cdot\dfrac{t^c}{\left(t^c-b\right)^{\frac{c}{s}}}$. Тогда $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=-\dfrac{a^{\frac{m+1}{n}+p}s}{n}\int\dfrac{t^{s(p+1)-1}}{\left(t^s-b\right)^{\frac{m+1}{n}+p}}dt$. Получили интеграл от рациональной функции.

Примеры. Найти неопределенные интегралы: 1) $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

2) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. 1) Имеем $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$, $p=\dfrac{1}{3}$, тогда $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2\in$ $\boldsymbol{Z}$, следовательно, получаем второй случай. Делаем подстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, $x=\left(t^3-1\right)^4$, $x^{-\frac{1}{2}}=\left(t^3-1\right)^{-2}$, $dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt$. Окончательно приходим к интегралу: $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int\dfrac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=12\left(\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{t^4}{4}\right)+C=$

$$=12\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}}{4}\right)+C.$$

2) Имеем $m=0$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{4}$, тогда $\dfrac{m+1}{n}+p=0\in$ $\boldsymbol{Z}$, следовательно, получаем третий случай. Делаем подстановку $\dfrac{1}{x^4}+1=t^4$, тогда $x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$,

$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}} = t^{-1}\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}$, $dx = -t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt$. Окончательно приходим к интегралу: $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int t^2\left(t^4-1\right)^{-1}dt = -\int\frac{t^2}{t^4-1}dt$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому разложим ее на сумму простейших дробей: $\frac{t^2}{t^4-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$. Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой части полученного равенства: $t^2 = A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)$. (*)

Положим $t=1$, найдем $1=4A$, $A=\frac{1}{4}$. При $t=-1$ получаем $1=-4B$,

$B=-\frac{1}{4}$. Раскроем скобки в равенстве (*):

$t^2 = A(t^3+t^2+t+1)+B(t^3-t^2+t-1)+C(t^3-t)+D(t^2-1)$.

Приравняем коэффициенты при t^3: $0=A+B+C$, отсюда $C=0$, и при t^2: $1=A-B+D$, отсюда t^2: $D=\frac{1}{2}$.

Тогда $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int\frac{t^2}{t^4-1}dt = -\int\left(\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{2(t^2+1)}\right)dt =$

$\frac{1}{4}\left(\ln|t+1|-\ln|t-1|\right)-\frac{1}{2}arctg\, t+C$, где $t=\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$.

V. Интегрирование квадратичных иррациональностей посредством подстановок Эйлера.

В этом пункте мы докажем интегрируемость в элементарных функциях любой функции вида $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, где $a,b,c-$произвольные постоянные. Функцию такого вида будем называть **квадратичной иррациональностью**. При этом считаем, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет равных корней.

Докажем, что интеграл от квадратичной иррациональности всегда рационализируется одной из так называемых **подстановок Эйлера**. Рассмотрим три случая:

1. Если $a>0$, то имеем право сделать следующую подстановку:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$,

$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\cdot x\cdot t+t^2$,

$x\left(b-2\sqrt{a}\,t\right) = t^2-c$,

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{bt-\sqrt{a}c-\sqrt{a}t^2}{b-2\sqrt{a}t},$$

$$dx=\frac{2bt-2\sqrt{a}t^2-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}\,t\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t},\frac{bt-\sqrt{a}c-\sqrt{a}t^2}{b-2\sqrt{a}t}\right)\frac{2bt-2\sqrt{a}t^2-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}\,t\right)^2}dt.$$

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

2. Если $c>0$, то имеем право сделать следующую подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c},$$

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}\cdot x\cdot t+c,$$

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\cdot t,$$

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},$$

$$dx=\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2bt}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}\right)\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2bt}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

3. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные различные корни, то есть $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В этом случае делают подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1),$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2,$$

$$a(x-x_2)=t^2(x-x_1),$$

$$x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{ta(x_2-x_1)}{a-t^2},$$

$dx = \dfrac{2at(x_2 - x_1)}{(a - t^2)^2} dt$.

Таким образом, $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(\dfrac{ax_2 - t^2 x_1}{a - t^2}, \dfrac{ta(x_2 - x_1)}{a - t^2}\right)\dfrac{2at(x_2 - x_1)}{(a - t^2)^2} dt$.

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

Примеры. Найти неопределенные интегралы: 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$,

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x - x^2 - 2}}$.

Решение. 1) Так как $a > 0$, то можно сделать подстановку:

$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$,

$x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2$,

$x = \dfrac{t^2 - 1}{1 - 2t}$,

$\sqrt{x^2 + x + 1} = \dfrac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \dfrac{t^2 - 1 + t - 2t^2}{1 - 2t} = \dfrac{t - 1 - t^2}{1 - 2t}$,

$x + \sqrt{x^2 + x + 1} = \dfrac{t^2 - 1}{1 - 2t} + \dfrac{t - 1 - t^2}{1 - 2t} = \dfrac{t - 2}{1 - 2t}$

$dx = \dfrac{2t(1 - 2t) + 2(t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = \dfrac{2t - 2t^2 - 2}{(1 - 2t)^2} dt$.

$\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2t - 2t^2 - 2}{(1 - 2t)(t - 2)} dt = \int \frac{2t - 2t^2 - 2}{-2t^2 + 5t - 2} dt = \int \left(1 - \frac{3t}{(1 - 2t)(t - 2)}\right) dt$.

Разложим дробь $\dfrac{3t}{(1 - 2t)(t - 2)}$ на сумму простейших:

$\dfrac{3t}{(1 - 2t)(t - 2)} = \dfrac{A}{1 - 2t} + \dfrac{B}{t - 2} = \dfrac{A(t - 2) + B(1 - 2t)}{(1 - 2t)(t - 2)}$,

$3t = A(t - 2) + B(1 - 2t)$.

При $t = 2$ находим $6 = -3B$, $B = -2$, при $t = \dfrac{1}{2}$ находим $\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}A$, то есть $A = -1$. Окончательно получаем:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \left(1 + \frac{3}{2(1 - 2t)} + \frac{2}{t - 2}\right) dt = t - \frac{3}{4}\ln|1 - 2t| + 2\ln|t - 2| + C$,

где $t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

2) Квадратный трехчлен $3x - x^2 - 2$ имеет действительные корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, то есть $3x - x^2 - 2 = -(x - 1)(x - 2)$. В этом случае сделаем подстановку:

$\sqrt{3x - x^2 - 2} = t(x - 1)$,

$-(x-1)(x-2)=t^2(x-1)^2$,

$x=\dfrac{t^2+2}{t^2+1}$, $\sqrt{3x-x^2-2}=t\left(\dfrac{t^2+2}{t^2+1}-1\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $dx=-\dfrac{2t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2}$. Тогда имеем:

$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{3x-x^2-2}}=-2\int\frac{t\left(t^2+1\right)\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2+2\right)t}dt=-2\int\frac{dt}{t^2+2}=-\sqrt{2}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C$, где

$t=\dfrac{\sqrt{3x-x^2-2}}{x-1}$.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Часто встречаются интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

I. $\int\sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$; $n,m\in\mathbf{Z}$.

1) Если n и m неотрицательные четные числа, то применяются формулы понижения степени: $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, а также формула $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.
2) Если n и m натуральные числа такие, что хотя бы одно из них нечетное, то в случае нечетного n полагают $\cos x=t$, а в случае нечетного m полагают $\sin x=t$ и используют формулу $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
3) Если n и m целые отрицательные числа такие, что оба числа $|m|$ и $|n|$ либо четные, либо нечетные, то полагают $tg\,x=t$, либо $ctg\,x=t$ и применяют формулы $1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1+ctg^2x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$. К этому типу сводятся интегралы видов $\int\dfrac{dx}{\sin^n x}$, $n>0$ и $\int\dfrac{dx}{\cos^m x}$, $m>0$. В самом деле,

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{dx}{2^n\sin^n\frac{x}{2}\cos^n\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^n\frac{x}{2}\cos^n\frac{x}{2}},\quad \int\frac{dx}{\cos^m x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

4) Если n и m целые отрицательные числа, причем одно из $|m|$ и $|n|$ нечетное, то в случае нечетного $|m|$ полагают $\sin x = t$, а в случае нечетного $|n|$ полагают $\cos x = t$. Иногда в случае больших степеней $|m|$ и $|n|$ полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$.
5) Если $n-$четное число, а $m-$целое отрицательное, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и в этом случае интегралы сводятся к интегралам вида $\int \frac{dx}{\cos^k x}$, $k \in \boldsymbol{N}$. В случае четного m и целого отрицательного n заменяют $\cos^2 x$ по формуле $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. В некоторых специальных случаях полагают $tg\, x = t$.
6) Если $n-$нечетное число, а $m-$целое отрицательное, то полагают $\cos x = t$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае нечетного m и целого отрицательного n полагают $\sin x = t$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

II. $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$

При вычислении этих интегралов используются формулы:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right).$$

III. $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(x,y)-$ рациональная функция, приводится к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2} = t$, при этом

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctg\, t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В некоторых случаях подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом:

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\sin x = t$.
3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $tg\, x = t$.

Замечание. Любое рациональное выражение $R(u,v)$ всегда можно представить в виде суммы трех выражений, представленных в пунктах 1,2 и 3: $R(u,v) = \frac{R(u,v) - R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v) - R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v) + R(u,v)}{2}$.

IV. $\int tg^n x\, dx$, $\int ctg^m x\, dx$; $n, m \in \mathbf{N}$ находят с помощью подстановок $tg\, x = t$ и $ctg\, x = t$ соответственно.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$, 2) $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\, dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$,

4) $\int \cos\frac{x}{3} \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x\, dx$, 5) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$, 6) $\int tg^4 x\, dx$.

Решение. 1) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 x \cdot \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)\sin^2 2x\, dx =$

$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x \cdot \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) =$

$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$.

2) $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int (1 - \cos^2 x)\cos^5 x \cdot \sin x\, dx = -\int (1 - t^2)t^5 dt =$

$= \int (t^7 - t^5)dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C$.

3) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^2 x \cdot \cos^6 x} = \int \frac{d(tg\, x)}{tg^3 x\left(\frac{1}{1 + tg^2 x}\right)^3} = [t = tg\, x] = \int \frac{(1 + t^2)^3 dt}{t^3} =$

$\int \frac{t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1}{t^3} dt = \int \left(t^3 + 3t + \frac{3}{t} + t^{-3}\right)dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + 3\ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C$, где $t = tg\, x$.

4) $\int \cos\frac{x}{3} \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{3}(\sin 7x + \sin 3x)dx =$

$= \frac{1}{2}\int \left(\cos\frac{x}{3}\sin 7x + \cos\frac{x}{3}\sin 3x\right) = \frac{1}{4}\int \left(\sin\frac{22x}{3} + \sin\frac{20x}{3} + \sin\frac{10x}{3} + \sin\frac{8x}{3}\right)dx =$

$-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{22}\cos\frac{22x}{3} + \frac{3}{20}\cos\frac{20x}{3} + \frac{3}{10}\cos\frac{10x}{3} + \frac{3}{8}\cos\frac{8x}{3}\right) + C$.

5) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = \left[t = tg\frac{x}{2} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6}{1+t^2} + \frac{4-4t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{10-4t^2} = -\int \frac{dt}{2t^2-5} =$

$-\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}t - \sqrt{5}}{\sqrt{2}t + \sqrt{5}} \right| + C$, где $t = tg\frac{x}{2}$.

6) $\int tg^4 x\, dx = \begin{bmatrix} t = tg\, x \\ x = arctg\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^4}{t^2+1} dt = \int \frac{t^4-1+1}{t^2+1} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$

$= \frac{t^3}{3} - t + arctg\, t + C = \frac{1}{3} tg^3 x - tg\, x + x + C$.

Тригонометрические подстановки

К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ подстановкой $x = a\sin t$, тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$ подстановкой $x = a\, tg\, t$, тогда $\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}$.

В этом случае можно положить $x = a\, sh\, t$, тогда $\sqrt{a^2 + x^2} = a\, ch\, t$.

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$ подстановкой $x = \frac{a}{\cos t}$, тогда $\sqrt{x^2 - a^2} = a\, tg\, t$.

В этом случае можно положить $x = a\, ch\, t$, тогда $\sqrt{x^2 - a^2} = a|sh\, t|$.

Для удобства приведем некоторые формулы, связывающие гиперболические функции между собой:

$th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$, $cth\, x = \frac{ch\, x}{sh\, x}$, $ch^2 x - sh^2 x = 1$, $ch^2 x + sh^2 x = ch\, 2x$, $sh\, 2x = 2ch\, x \cdot sh\, x$,

$ch^2 x = \frac{1}{2}(1 + ch\, 2x)$, $sh^2 x = \frac{1}{2}(ch\, 2x - 1)$.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$, 2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$, 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-16)^3}}$.

Решение. 1) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\, dt \\ \sqrt{4 - x^2} = 2\cos t \end{bmatrix} = \int 4\sin^2 t \cdot 4\cos^2 t\, dt = 4\int \sin^2 2t\, dt =$

$$= 2\int (1-\cos 4t)dt = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C, \text{ где } t = \arcsin\frac{x}{2}.$$

2) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}} = \begin{bmatrix} x = 3tg\, t \\ dx = \dfrac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{(x^2+9)^3} = \dfrac{27}{\cos^3 t} \end{bmatrix} = \int \frac{27tg^2 t\cdot\cos^3 t}{27\cos^2 t}dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t\, dt = \left[u = tg\frac{t}{2}\right] = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} - \sin t = -2\int \frac{dt}{u^2-1} - \sin t = -\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \sin t + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{tg\frac{t}{2}-1}{tg\frac{t}{2}+1}\right| - \sin t + C, \text{ где } t = arctg\frac{x}{3}.$$

3)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-16)^3}} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{4}{\cos t} \\ \sqrt{(x^2-16)^3} = 64tg^3 t \\ dx = \dfrac{4\sin t}{\cos^2 t}dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sin t\cdot\cos t}{\cos^2 t\cdot 64tg^3 t}dt = \frac{1}{64}\int \frac{dt}{tg^2 t} = \frac{1}{64}\int \frac{\cos^2 t\, dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = \frac{1}{64}(-ctg\, t - t) + C = -\frac{1}{64}\left(ctg\left(\arccos\frac{4}{x}\right) + \arccos\frac{4}{x}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{64}\left(\frac{4}{\sqrt{x^2-16}} + \arccos\frac{4}{x}\right) + C.$$

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Обозначим символом T разбиение отрезка $[a,b]$ при помощи некоторых не совпадающих друг с другом точек $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ назовем диаметром разбиения. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Составим сумму $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется интегральной суммой функции $y = f(x)$, соответствующей данному разбиению T отрезка $[a,b]$. Она зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ_T при $\lambda_T \to 0$, если для любого малого положительного числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ с диаметром $\lambda_T < \delta$ и при любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $|\sigma_T - I| < \varepsilon$.

Для обозначения предела интегральных сумм употребляется символика $I = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\lambda_T \to 0$. Указанный предел I называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 6.1. Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она и ограничена на нем.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I \right| < 1$ или $-1 + I - \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i < f(c_1)\Delta x_1 < 1 + I - \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Зафиксируем точки $c_2, \ldots c_n$, тогда для любой точки $c_1 \in [x_0, x_1]$ имеем $A < f(c_1)\Delta x_1 < B$, то есть функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Аналогично доказывается, что она ограничена на остальных частичных отрезках $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, то есть на всем отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Приведем пример интегрируемой функции. Докажем, что функция $f(x) = C = const$ интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, причем

$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$. Действительно, так как $f(c_i) = C$ при $\forall c_i$, то $\sigma_T = C\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = C(b-a)$ и поэтому $\lim_{\lambda_T \to 0}\sigma_T = C(b-a)$.

Докажем следующее утверждение: неограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ не интегрируема на нем.

Пусть функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$, тогда она не ограничена на некотором частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ любого данного разбиения *T* разбиение отрезка $[a,b]$. Поэтому слагаемое $f(c_i)\Delta x_i$ интегральной суммы σ_T, отвечающей этому разбиению *T,* может быть сделано сколь угодно большим по абсолютной величине за счет выбора точки c_i. Отсюда вытекает, что интегральные суммы σ_T, отвечающие любому разбиению *T,* не ограничены, поэтому не существует конечного предела интегральных сумм.

Возникает вопрос: всякая ли ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция является интегрируемой на нем? Следующий пример показывает, что это, вообще говоря, не так. Рассмотрим функцию Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$.

Она ограничена на любом отрезке $[a,b]$, но не интегрируема на нем. Действительно, если для любого разбиения *T* со сколь угодно малым диаметром λ_T выбрать точки c_i рациональными, то $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a$, а если же для того же разбиения *T* точки c_i выбрать иррациональными, то $\sigma_T = 0$. Поэтому для функции Дирихле не существует предела интегральных сумм, то есть эта функция не интегрируема.

Задачи, приводящие к определенному интегралу

1. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$ и положительную на нем. Поставим задачу нахождения площади криволинейной трапеции $\{(x,y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками деления *T*: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников, которая приближенно равна площади криволинейной трапеции (рис.24). Следовательно,

$\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = \int\limits_a^b f(x)dx = S_{крив.трап}$.

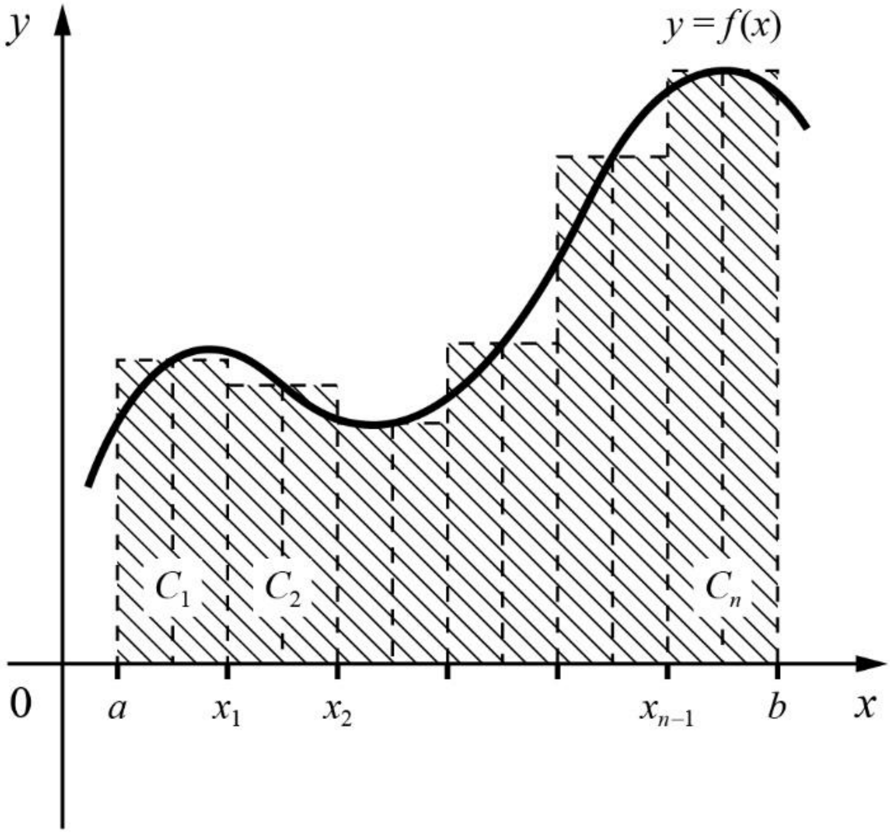

Рис.24.

2. Пусть под действием некоторой переменной силы $F(x)$ тело перемещается из точки a в точку b. Найти работу, совершаемую этой силой.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками деления T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

§ 7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

I. **Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами**

1. Будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Отметим, что эта формула должна рассматриваться как соглашение. Ее нужно рассматривать как естественное распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

2. Будем считать, что при $a<b$ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Эта формула также должна рассматриваться как соглашение. Она представляет собой естественное обобщение понятия интеграла на случай, когда отрезок $[a,b]$ пробегается от b к a (в этом случае в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ имеют отрицательный знак).

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $k \cdot f(x)$ $(k-const)$ также интегрируемы на этом отрезке, причем

$$\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx, \tag{3}$$

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Доказательство. При любом разбиении отрезка $[a,b]$ и любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(c_i) \pm g(c_i) \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \pm g(c_i)\Delta x_i .$$

А поэтому из существования предела правой части следует существование предела левой. Следовательно, функция $f(x) \pm g(x)$ интегрируема и выполняется соотношение (3). Для доказательства интегрируемости функции $k \cdot f(x)$ заметим, что интегральные суммы функций $f(x)$ и $k \cdot f(x)$ отличаются постоянным множителем k. Поэтому функция $k \cdot f(x)$ интегрируема и справедлива формула (4).

4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда она интегрируема на любом отрезке $[c,d]$, содержащемся в $[a,b]$.

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, тогда она интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

II. **Оценки интегралов. Формулы среднего значения**.

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна на нем, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. Каждая интегральная сумма такой функции $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \geq 0$, поэтому и $\lim_{\lambda_T \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$. Действительно, допустим, что $I < 0$. Тогда по определению предела для $\varepsilon = |I|$ найдется интегральная сумма $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, для которой $|\sigma_T - I| < |I|$. Отсюда $\sigma_T < |I| + I = 0$, но мы только что показали, что $\sigma_T \geq 0$. Получили противоречие, следовательно, $I \geq 0$.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq m$, то $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.

Доказательство. Функция $f(x) - m \geq 0$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$, поэтому по свойству 1: $\int_a^b (f(x) - m)dx \geq 0$. Отсюда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b m\,dx = m(b-a)$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq c > 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, то найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = 2k > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции можно найти такой отрезок $[a_1, b_1]$, содержащий точку ξ, в пределах которого значения функции $f(x)$ будут не меньше числа $k > 0$. Поэтому в силу замечания 1:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geq k(b_1 - a_1) > 0.$$

Согласно свойству определенного интеграла имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b} f(x)dx$.

Поскольку $f(x) \geq 0$ и $\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geq c > 0$, где $c = k(b_1 - a_1)$, получим, что $\int\limits_a^b f(x)dx \geq c > 0$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ всюду на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Функция $h(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда в силу свойства 1 имеем: $\int\limits_a^b h(x)dx \geq 0$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (h(x) + g(x))dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Тогда для всех точек $x \in [a, b]$ имеем $f(x) = 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) > 0$. Тогда из свойства 2 следует, что $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, а это противоречит условию $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Следовательно, нет таких точек $x \in [a, b]$, в которых $f(x) \neq 0$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Замечание 2. Из интегрируемости $|f(x)|$ не следует, вообще говоря, интегрируемость $f(x)$. Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ не интегрируема на отрезке $[0, 1]$, тогда как $|f(x)| \equiv 1 -$ интегрируемая на отрезке $[0, 1]$ функция.

6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$ всюду на этом отрезке. Тогда, если M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \qquad (5)$$

Доказательство. Для $\forall x \in [a,b]$ имеем $m \cdot g(x) \le f(x)g(x) \le M \cdot g(x)$ и применяем свойство 3.

Теорема 7.1. (первая формула среднего значения)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на этом отрезке. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \le \mu \le M$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \qquad (6)$$

Доказательство. Полагая в (5) $g(x)=1$ и учитывая, что $\int_a^b dx = b-a$, получим $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Обозначая через $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, получаем требуемую формулу (6). Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существуют такие точки $a_1, b_1 \in [a,b]$, что $f(a_1)=m$, $f(b_1)=M$. Тогда на отрезке $[a_1,b_1]$, а стало быть и на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi)=\mu$. В этом случае формула (4) примет вид: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Эта формула называется **первой формулой среднего значения.**

Теорема 7.2. (первая формула среднего значения в обобщенной форме)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на этом отрезке. Пусть $g(x) \ge 0$ (или $g(x) \le 0$) на всем отрезке $[a,b]$. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \le \mu \le M$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx. \qquad (7)$$

В частности, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \qquad (8)$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (7). Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то в силу неравенства (5) $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и поэтому в качестве μ можно взять любое число. Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то разделив все части неравенства (5) на $\int_a^b g(x)dx$, получим $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$. Полагая $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, получим формулу (7). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то какого бы ни было число μ, заключенное между M и m, на этом отрезке найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$ и формула (7) переходит в формулу (8). Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x)$ не является непрерывной на отрезке $[a,b]$, то формула (8), вообще говоря, неверна. Пусть, например, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$. Тогда число μ в формуле (7) равно $\frac{2}{3}$. Таким образом, для $\forall \xi \in [0,1]$ $f(\xi) \ne \mu$.

Теорема 7.3. (вторая формула среднего значения)

Если функция $g(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, а функция $f(x)$ интегрируема на нем, то на этом отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Эта формула называется второй формулой среднего значения или формулой Бонне.

§ 8. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ И ЕГО СВОЙСТВА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, тогда она интегрируема на любой части этого отрезка, то есть $\forall x \in [a, b]$ она интегрируема на $[a, x]$. Следовательно, существует функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, которую называют **интегралом с переменным верхним пределом**. Докажем несколько свойств этой функции.

Теорема 8.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Из интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует, что она ограничена на этом отрезке, то есть найдется постоянная $M > 0$ такая, что $\forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \le M$. Возьмем любые точки $x, x + \Delta x \in [a, b]$. Имеем: $|\Delta F(x)| = |F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| =$

$$\left| \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| = \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \le \left| \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \le M|\Delta x|.$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда для любой величины Δx с условием $|\Delta x| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ имеем $|\Delta F(x)| < \varepsilon$. Следовательно, функция $\Delta F(x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, то есть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 8.2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна во внутренней точке x_0 этого отрезка. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$. Имеем в силу свойств определенного интеграла

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_a^{x_0} f(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

По формуле среднего значения находим: $F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=f(\xi)\Delta x$, где ξ – число, заключенное между числами x_0 и $x_0+\Delta x$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то при $\Delta x\to 0$ $f(\xi)\to f(x_0)$. Поэтому из последней формулы находим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 8.1. При доказательстве теоремы 8.1. мы установили существование производной от интеграла с переменным верхним пределом и доказали, что эта производная равна подынтегральной функции $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=f(x)$.

Замечание 8.2. Интеграл с переменным верхним пределом часто используется для определения новых функций. Мы отмечали, что первообразные некоторых элементарных функций не выражаются через элементарные функции и не являются поэтому элементарными. Напомним, что к числу неэлементарных функций относятся, например, функции $\int\limits_0^x e^{t^2}dt$, $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$.

Следствие из теоремы 8.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для нее существует первообразная на этом отрезке. Одной из первообразных будет интеграл с переменным верхним пределом.

Формулу Ньютона-Лейбница называют основной теоремой интегрального исчисления, поскольку она связывает понятия определенного и неопределенного интегралов.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ будет первообразной для $f(x)$, то есть $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная, тогда $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C$. Полагая в последней формуле $x=a$, получим $F(a)=C$. Полагая затем $x=b$, найдем $F(b)=\int\limits_a^b f(t)dt+C$. Отсюда находим

$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$ – формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 8.3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и существует функция $F(x)$, непрерывная на этом отрезке такая, что $F'(x)=f(x)$ во всех точках отрезка $[a,b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на части точками деления *T*: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В число точек деления включим те, в которых $F'(x) \neq f(x)$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Тогда

$F(b)-F(a) = F(b)-F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots + F(x_1) - F(a)$.

По теореме Лагранжа: $F(x_i)-F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$, где $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$F(b)-F(a) = F'(c_n)\Delta x_n + F'(c_{n-1})\Delta x_{n-1} + \ldots + F'(c_1)\Delta x_1 = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sigma_T . \qquad (9)$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = \int_a^b f(x)dx$.

Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$ в равенстве (9), получим формулу Ньютона-Лейбница.

§ 9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 9.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad \text{или} \qquad \int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Доказательство. Так как $(uv)' = u'v + uv'$, то функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $u'v+uv'$. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b (u'v+uv')dx = uv\Big|_a^b$. По свойству определенного интеграла $\int_a^b (u'v+uv')dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$. Из этих двух равенств получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Теорема 9.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Функция $x = \varphi(t)$ имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную $\varphi'(t)$ и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и при $t \in [\alpha, \beta]$ $\varphi(t) \in [a, b]$. Тогда имеет место следующая формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для нее существует первообразная $F(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$. Легко проверить, что функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Действительно, $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Учитывая этот факт и формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема доказана.

Примеры. Вычислить определенные интегралы: 1) $\int\limits_0^\pi x\sin 2x\,dx$,

2) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$, 3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^\pi x\sin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin 2x\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2x\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos 2\pi +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi - \frac{1}{4}\sin 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

2) $$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, & x = 4 \to t = 2 \\ x = t^2, & x = 9 \to t = 3 \\ dx = 2t\,dt & \end{bmatrix} = \int\limits_2^3 \frac{2t^2}{t-1}dt = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\int\limits_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{9}{2} + 3 + \ln 2 - 2 - 2 - \ln 1\right) = 7 - 2\ln 2.$$

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} = \begin{bmatrix} t = tg\,\frac{x}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} \to t = -1 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \end{bmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{3+3t^2+1-t^2} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2t^2+4} =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}} - arctg\,\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$

§ 10. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Теорема 10.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и неотрицательна на этом отрезке. Тогда площадь криволинейной трапеции $P = \{(x,y): a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\}$ равна $S(P) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна и не положительна на отрезке $[a,b]$, то значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ равно взятой с отрицательным знаком площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис.25).

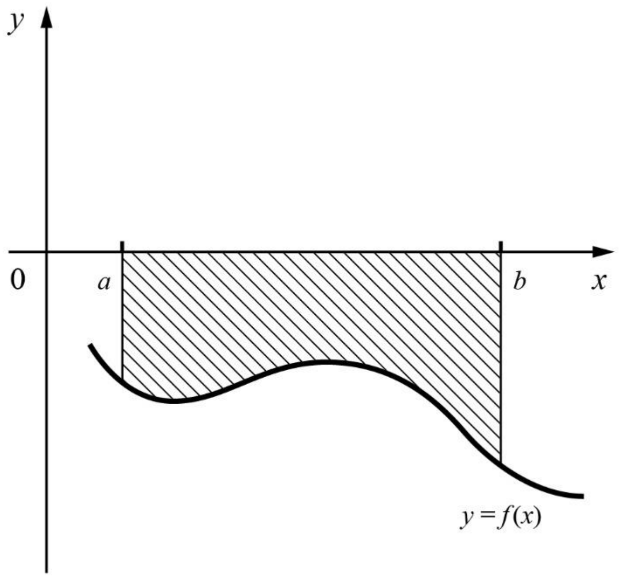

Рис.25.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком функции $g(x)$, сверху графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ равна $S(P) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (рис.26).

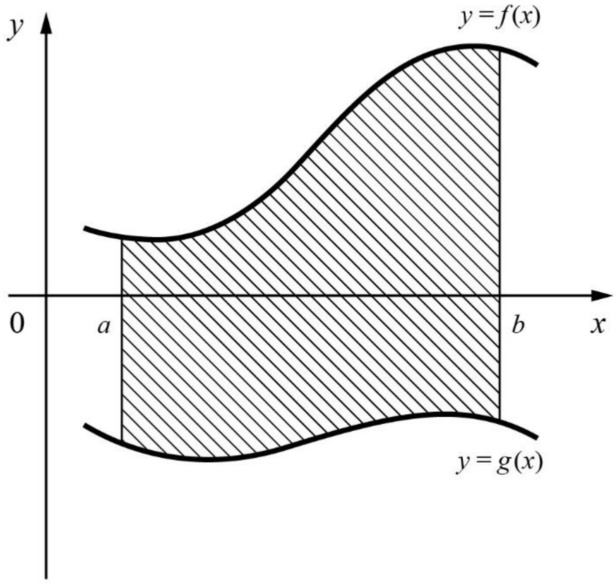

Рис.26.

Доказательство. Заменим функцию $f(x)$ на $f(x) + C \geq 0$ и $g(x)$ на $g(x) + C \geq 0$, тогда $S(P) = \int_a^b (f(x) + C)dx - \int_a^b (g(x) + C)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Примеры. 1) Найти площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 1$ и прямой $y = x + 1$.

Решение. 1) Дуга эллипса, расположенная в верхней полуплоскости, задается уравнением $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Очевидно, что вся площадь равна (рис.27)

$$S = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \begin{bmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \cos t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

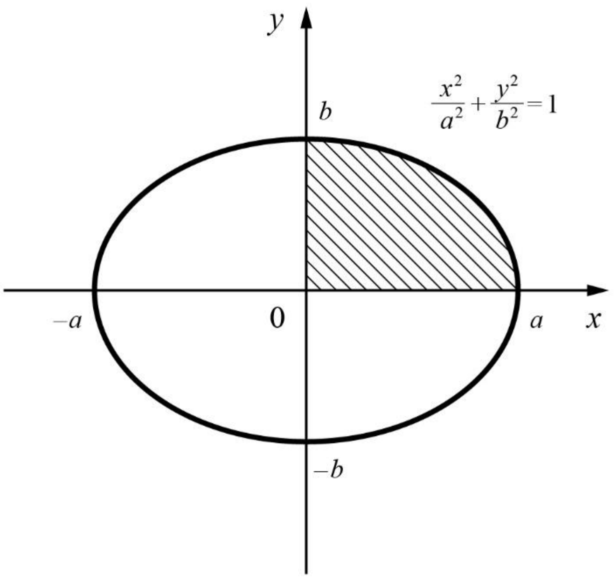

Рис. 27.

2) Найдем точки пересечение графиков функций: $x^2 - 1 = x + 1$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Тогда площадь равна (рис. 28):

$$S = \int_{-1}^{2}\left(x + 1 - x^2 + 1\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}.$$

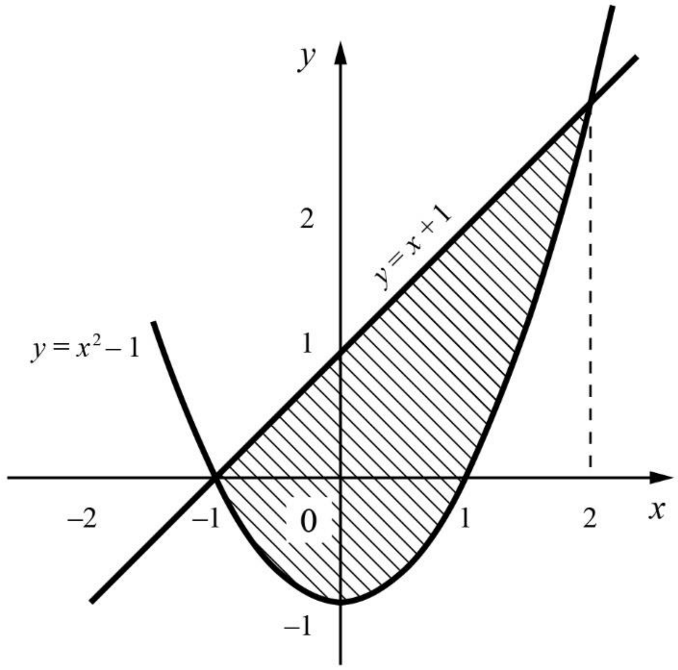

Рис. 28.

Перейдем к вычислению площади области, ограниченной кривой, заданной параметрически. Пусть область D ограничена непрерывной замкнутой кривой Γ: $\begin{cases} x = x(t), & t \in [T_0;T_1], \quad x(T_0) = x(T_1), \quad y(T_0) = y(T_1). \\ y = y(t) \end{cases}$

Рассмотрим простейший случай: отрезок $[T_0;T_1]$ делится точкой $\tau \in (T_0;T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0;\tau]$ и $[\tau;T_1]$ функция $x = x(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей, каждая из которых есть график однозначной непрерывной функции

$y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Предположим, что для любого x выполнено соотношение $y_1(x) \le y_2(x)$, тогда кривая $y = y_2(x)$ есть верхняя, а кривая $y = y_1(x)$ – нижняя граница области D. Если при возрастании t кривая Γ проходится так, что область D остается слева (положительное направление обхода), то верхняя граница D проходится справа налево (значение x убывает), а нижняя граница D проходится слева направо (значение x возрастает). Поэтому имеем: $S(D) = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx = \int\limits_a^b y_2(x)dx - \int\limits_a^b y_1(x)dx$.

Сделав в первом интеграле замену $x = x(t)$, $t \in [T_0;\tau]$, а во втором замену $x = x(t)$, $t \in [\tau;T_1]$, получаем, что так как $y_2(x(t)) = y(t)$, $t \in [T_0;\tau]$ и $y_1(x(t)) = y(t)$, $t \in [\tau;T_1]$, то

$$S(D) = -\int\limits_{T_0}^{\tau} y(t) \cdot x'(t)dt - \int\limits_{\tau}^{T_1} y(t) \cdot x'(t)dt = -\int\limits_{T_0}^{T_1} y(t) \cdot x'(t)dt .$$

Таким же образом получаем, что если отрезок $[T_0;T_1]$ делится точкой $\tau \in (T_0;T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0;\tau]$ и $[\tau;T_1]$ функция $y = y(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема, то $S(D) = \int\limits_{T_0}^{T_1} x(t) \cdot y'(t)dt$. Объединяя эти две формулы, получаем следующую формулу:

$$S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} (x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t))dt .$$

Можно доказать, что все эти три формулы справедливы и в более общем случае, когда непрерывная замкнутая кривая Γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0;T_1]$, проходится при изменении t от T_0 до T_1 таким образом, что ограничиваемая этой кривой область D остается слева. Какую из формул удобнее применять, зависит от конкретного вида функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Пример. Найти площадь области, ограниченной петлей кривой $x = a\left(t^2 - 2t\right)$, $y = a\left(t^2 - 1\right)\left(t - 3\right)$, $a > 0$ (рис.29).

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении t от -1 до 3. Поэтому

$$S(D) = -\int_{T_0}^{T_1} y(t)\cdot x'(t)dt = -\int_{-1}^{3} a\left(t^2 - 1\right)\left(t - 3\right)a\left(2t - 2\right)dt = -2a^2\int_{-1}^{3}\left(t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t - 3\right)dt =$$

$$= -2a^2\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 3t\right)\Bigg|_{-1}^{3} = -2a^2\left(\frac{244}{5} - 80 + \frac{2}{3}\cdot 28\right) + 16 - 12 = \frac{256}{15}a^2.$$

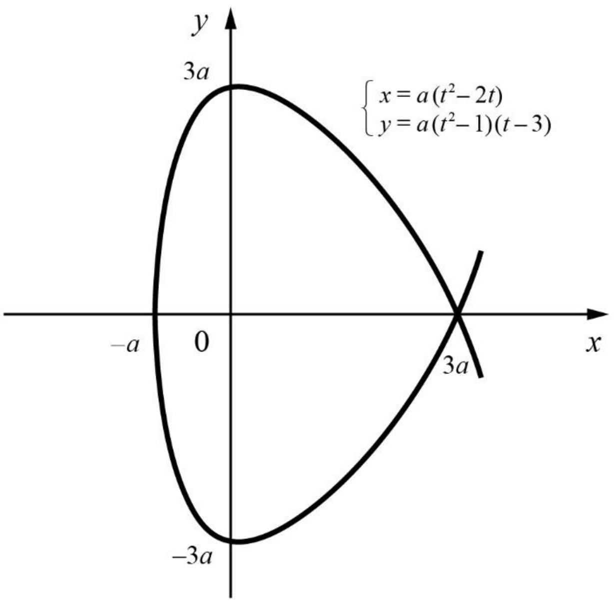

Рис.29.

Перейдем к вычислению площади области, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат. Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $r = r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha;\beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть криволинейным сектором.

Теорема 10.2. Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

Доказательство. Отрезок $[\alpha;\beta]$ разобьем на части точками $T:\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=\beta$. Обозначим $\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$, $\lambda_T=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\Delta\varphi_i$. На каждом частичном отрезке выберем точки $c_i\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]$ и построим круговые секторы с радиусами $r(c_i)$. Получим веерообразную фигуру, площадь которой равна $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} r^2(c_i)\Delta\varphi_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T\to 0$ получим $S=\lim\limits_{\lambda_T\to 0}\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} r^2(c_i)\Delta\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$. Теорема доказана.

Примеры. 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$ (рис.30).

Решение. $S=2\cdot\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi=$

$$=a^2\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

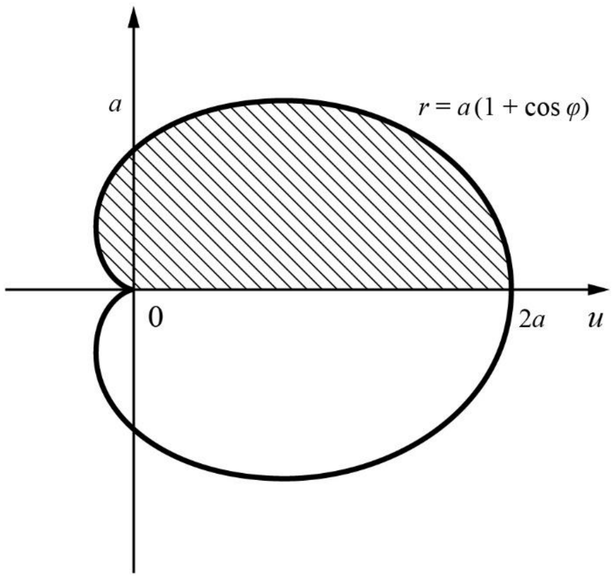

Рис.30.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r=2\sin 3\varphi$.

Решение. Исходя из условия неотрицательности полярного радиуса, находим $\sin 3\varphi \geq 0$, $2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n$, $\frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, что вся площадь равна (рис.31)

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3\varphi \, d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = 3\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi .$$

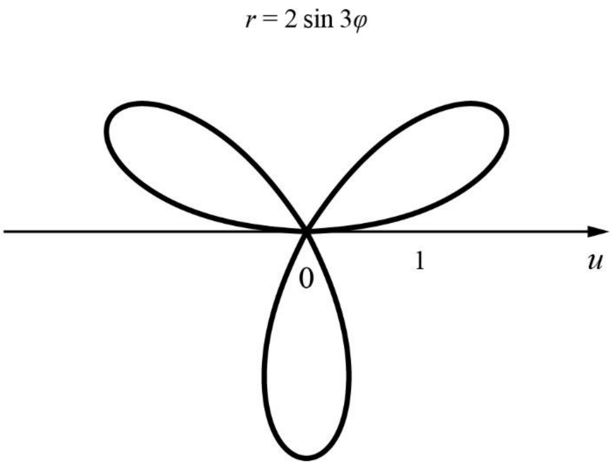

Рис.31.

§ 11. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Теорема 11.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (рис.32). Тогда объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси *Ox* равен $V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками деления *T*: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ и построим прямоугольник с высотой $f(c_i)$. При вращении этих прямоугольников вокруг оси *Ox* получим ступенчатое тело, составленное из цилиндров, объем которого равен $\sigma_T = \pi\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i$, который приближенно равен объему тела вращения. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $V_{Ox} = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

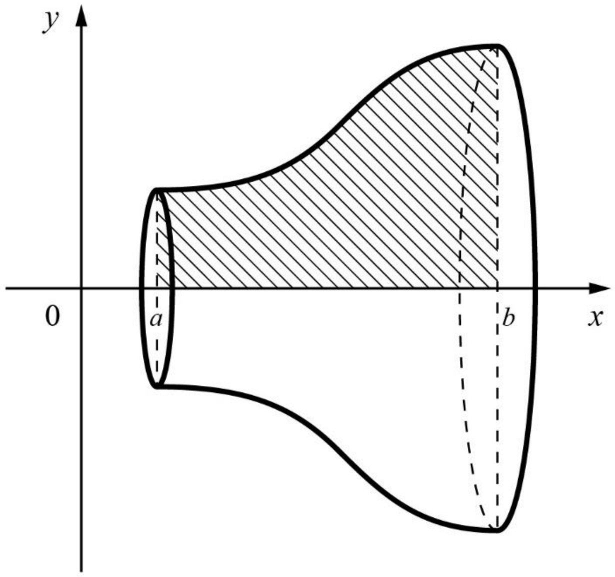

Рис. 32.

В более общем случае объем кольца, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $\{(x,y): a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le f(x)\}$, где $f(x)$ и $g(x)-$ непрерывные неотрицательные функции, равен $V_{Ox} = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции $\{(x,y): a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}$, где $f(x)-$ однозначная непрерывная функция, равен

$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)\,dx$.

Примеры. 1) Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис.33).

Решение. Так как $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, то $V_{Ox} = \pi\int_{-a}^{a}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx =$

$$=2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx=2\pi\int_0^a\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=$$

$$2\pi\left(a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=2\pi\left(a^3-\frac{9}{5}a^3+\frac{9}{7}a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{32\pi a^3}{105}.$$

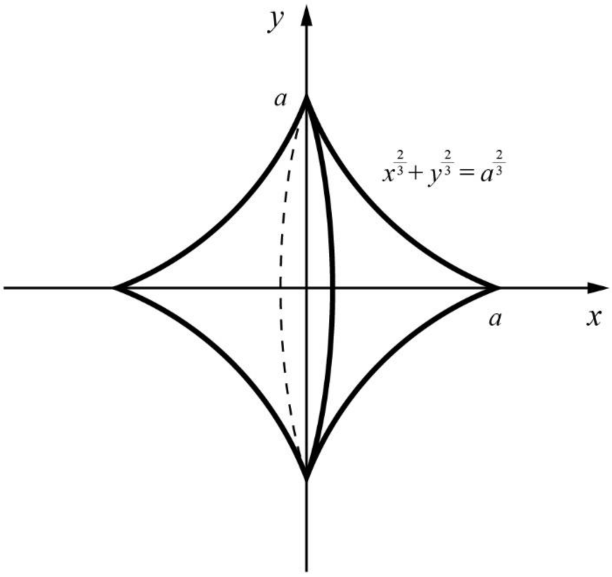

Рис.33.

2) Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, расположенной в правой полуплоскости и ограниченной линиями $y=x$, $y=2x-x^3$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy (рис.34).

Решение. а) $V_{Ox}=\pi\int_0^1\left(\left(2x-x^3\right)^2-x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(4x^2-4x^4+x^6-x^2\right)dx=$

$$=\pi\left(x^3-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(1-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{12\pi}{35}.$$

б) $V_{Oy}=2\pi\int_0^1 x\left(2x-x^3-x\right)dx=2\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=2\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi}{15}.$

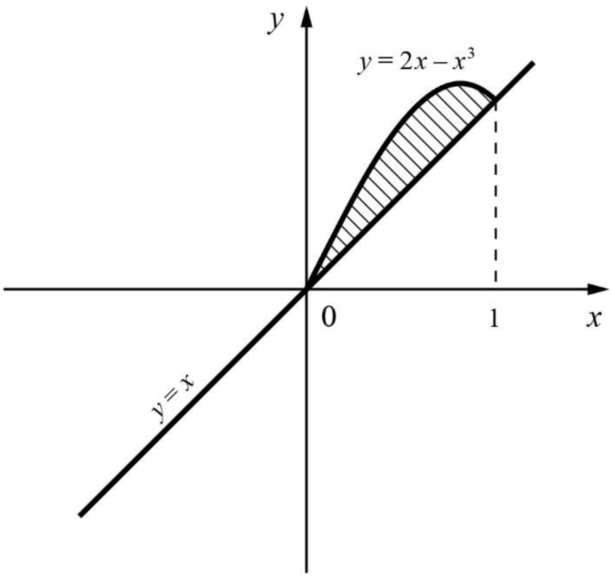

Рис.34.

Теорема 11.2. Пусть на плоскости задана гладкая кривая $\begin{cases} x = \varphi(t), & \alpha \le t \le \beta \\ y = \psi(t) \end{cases}$ и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные. При этих условиях длина дуги кривой равна
$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$.

Рассмотрим частные случаи этой формулы. Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Можно считать, что кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x, & a \le x \le b \\ y = f(x) \end{cases}$. Тогда $l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Пусть кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тогда

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, & \alpha \le \varphi \le \beta \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi, \end{cases}$$

$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2\cos^2\varphi - 2r'r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + (r')^2\sin^2\varphi + 2r'r\cos\varphi\sin\varphi +$

$+ r^2\cos^2\varphi = (r')^2 + r^2$. Тогда $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi$.

Примеры. 1) Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Решение. $\begin{cases} x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t \\ y' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t, \end{cases}$ $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{9a^2\cos^2 t \cdot \sin^2 t} = 3a\cos t \cdot \sin t$.

Тогда $l = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t \cdot \sin t\, dt = 6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1-1) = 6a$.

2) Найти длину дуги цепной линии $y = ch\, x$, $-1 \le x \le 1$.

Решение. Имеем $y' = sh\, x$, $l = 2\int\limits_0^1 \sqrt{1 + sh^2 x}dx = 2\int\limits_0^1 chx\, dx = 2shx\Big|_0^1 = 2sh1$.

3) Найти длину дуги логарифмической спирали $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Находим $r' = \dfrac{9}{4}e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $\sqrt{(r')^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{81}{16}e^{\frac{3\varphi}{2}} + 9e^{\frac{3\varphi}{2}}} = \dfrac{15}{4}e^{\frac{3\varphi}{4}}$. Тогда

$$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{15}{4}e^{\frac{3\varphi}{4}}d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{\frac{3\varphi}{4}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 5\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right).$$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.

Теорема 11.3. Если на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то площадь поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси Ox может быть вычислена по формуле $S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$. (10)

Следствие. Если поверхность получается посредством вращения вокруг оси Ox кривой, определяемой параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то осуществляя замену переменных под знаком определенного интеграла в формуле (10), получим следующее выражение для площади этой поверхности: $S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$.

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение. Находим $\begin{cases} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t \end{cases}$. Тогда

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right)} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} 2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -16\pi a^2\left(-2+\frac{2}{3}\right) = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

§ 12. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. **Вычисление массы стержня**.

Рассмотрим неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a, b]$ оси *Ox*. Пусть $\rho(x)-$ линейная плотность стержня, то есть $\rho(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} = m'(x)$, где $m(x+\Delta x) - m(x) = \Delta m-$ масса части стержня на отрезке $[x, x+\Delta x]$. Обозначим через *T* разбиение отрезка $[a, b]$ части: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Выберем точки $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$. Тогда $\rho(c_i)\Delta x_i \approx m_i$ – масса части стержня на $[x_{i-1}, x_i]$, а масса всего стержня $M \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\rho(c_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M = \lim\limits_{\lambda_T\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(c_i)\Delta x_i = \int_a^b \rho(x)dx$.

2. **Вычисление статических моментов и координат центра тяжести кривой**

Пусть на плоскости задан набор из *n* точек, в каждой из которых находится шарик массой m_i и задана направленная ось *l*.

Определение. Статическим моментом системы материальных точек относительно оси *l* называется сумма $M_l = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i d_i$, где d_i – расстояние от *i*-ой точки до оси, взятое со знаком «+», если точка лежит по левую сторону от оси и со знаком «-», если лежит по правую сторону.

Определение. Точка называется центром тяжести системы из n точек, если после помещения в эту точку шарика массой $m_1 + m_2 + \ldots m_n$ статический момент относительно любой оси для этой точки совпадает со статическим моментом всей системы точек.

Пусть на плоскости задана кривая $\begin{cases} x = x(t), & \alpha \le t \le \beta \\ y = y(t) \end{cases}$ и вдоль кривой распределена масса. Будем считать, что плотность распределения массы постоянна и равна 1, тогда масса любой части кривой совпадает с длиной этой части и $M = l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. Найдем статические моменты этой кривой относительно осей Ox и Oy и координаты центра тяжести. Обозначим $T\colon \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta t_i$. Тогда точки $M_i(x(t_i), y(t_i))$ разбивают кривую на части. Статический момент относительно оси Ox равен $M_x \approx \sum_{i=1}^{n} l_{M_{i-1}M_i} y(t_i)$, где $l_{M_{i-1}M_i} = l(t_i) - l(t_{i-1}) = l'(t_i)\Delta t_i$ (по теореме Лагранжа). Поэтому $M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2}\,\Delta t_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_x = \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

Аналогично, статический момент относительно оси Oy равен $M_y = \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

Найдем координаты центра тяжести кривой $P(\xi,\eta)$. По определению $M \cdot \xi = M_y \Rightarrow \xi = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{M_y}{l}$; $M \cdot \eta = M_x \Rightarrow \eta = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{M_x}{l}$.

Распишем $M \cdot \eta = \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. Умножим обе части последнего равенства на 2π, получим: $2\pi\eta l = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

В правой части стоит формула для вычисления площади поверхности вращения. Таким образом, доказана **первая теорема Гульдена**:

Площадь поверхности, полученной при вращении вокруг оси Ox кривой, равна произведению длины окружности, описываемой центром тяжести вокруг оси Ox на длину кривой.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, тогда $M = S = \int\limits_a^b f(x)dx$, так как $\rho(x) = 1$. Возьмем разбиение отрезка $[a,b]$ части: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Координаты центра тяжести заштрихованной части приближенно равны $\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}; \frac{\Delta y_i}{2}\right) \approx \left(x_{i-1}; \frac{\Delta y_i}{2}\right)$, $M_i = y_{i-1}\Delta x_i$. Тогда $M_x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(x_{i-1}) f(x_{i-1})\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_x = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(x)dx$. Аналогично, $M_y \approx \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1} f(x_{i-1})\Delta x_i$, или, переходя пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_y = \int\limits_\alpha^\beta x \cdot f(x)dx$.

Координаты центра тяжести $P(\xi,\eta)$ равны:

$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{\int\limits_\alpha^\beta x \cdot f(x)dx}{\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx}$, $\qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(x)dx}{\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx}$. Из последней формулы находим: $2\eta S = \int\limits_\alpha^\beta f^2(x)dx$, $2\pi\eta S = \pi\int\limits_\alpha^\beta f^2(x)dx$. В правой части последнего равенства стоит формула для вычисления объема тела вращения. Таким образом, доказана **вторая теорема Гульдена**:

Объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси *Ox*, равен площади криволинейной трапеции, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести.

Пример. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$

Решение. Находим $x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$, $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3a\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t} = 3a\sin t \cdot \cos t = \frac{3}{2}a\sin 2t$. Тогда

$$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \frac{3}{2}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -\frac{3}{4}a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}a(\cos\pi - \cos 0) = \frac{3}{2}a,$$

$$M_y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\,dt = -3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,d(\cos t) =$$

$= -\frac{3}{5}a^2\cos^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2$. Тогда абсцисса центра тяжести равна $\xi = \frac{M_y}{l} = \frac{3a^2}{5}\cdot\frac{2}{3a} = \frac{2a}{5}$. Аналогично находим

$$M_x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\,dt = 3a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,d(\sin t) =$$

$= \frac{3}{5}a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2$. Ордината центра тяжести равна $\eta = \frac{M_x}{l} = \frac{3a^2}{5}\cdot\frac{2}{3a} = \frac{2a}{5}$.

§ 13. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Дальнейшая цель состоит в распространении понятия интегрируемости функции по Риману на новые классы функций, а именно:

1) на функции, заданные на бесконечном промежутке;
2) на неограниченные функции.

Для первого случая интегралы типа $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются несобственными интегралами первого рода, во втором случае, когда функция $f(x)$ является неограниченной на конечном отрезке $[a;b]$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называются несобственным интегралом второго рода.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;A]$, где $a < A < +\infty$. Тогда, если существует предел $I = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$. Для интеграла I используется следующее обозначение: $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Если предел I существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, если этот предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty; a]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[A; a]$, где $-\infty < A < a$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)dx$.

Определение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

Примеры. 1) Пусть $a > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = (\alpha \neq 1) = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{a}^{A} x^{-\alpha}dx = \lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{a}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha < 1\\ \dfrac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1.\end{cases}$$

$$\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\ln|x|\Big|_{a}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\ln A - \ln a = \infty.$$

Таким образом, $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases}\text{схходитс}, & \text{если } \alpha < 1\\ \text{расходится}, & \text{если } \alpha \geq 1.\end{cases}$

2) При любом натуральном *n* интегрированием по частям получаем, что $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{n}\cdot e^{-x}dx = n!$

Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов.

Теорема 13.1. (критерий сходимости несобственного интеграла первого рода)

Для сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых чисел $A_1, A_2 > B \Rightarrow \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Рассмотрим вопрос о сходимости интегралов первого рода в случае положительной функции. Если функция $f(x)$ положительна, то интеграл $F(c) = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx$ представляет собой монотонно возрастающую функцию переменной *c*. Действительно, пусть $c_1 > c_2$, тогда

$F(c_1) - F(c_2) = \int\limits_{a}^{c_1} f(x)dx - \int\limits_{a}^{c_2} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c_2} f(x)dx + \int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)dx - \int\limits_{a}^{c_2} f(x)dx = \int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)dx \geq 0$, то есть $F(c_1) \geq F(c_2)$.

Поэтому для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ в случае положительной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int\limits_a^{c} f(x)dx$ при возрастании c оставался ограниченным сверху: $\int\limits_a^{c} f(x)dx \le M$. Если это условие не выполнено, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ имеет значение ∞.

Теорема 13.2. (признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на промежутке $[a;+\infty)$, интегрируемы на любом отрезке $[a;c]$, где $a < c < +\infty$. Предположим, что при $x \ge x_0$ $0 < f(x) \le g(x)$, тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$. Так как $0 < f(x) \le g(x)$, то по свойству определенного интеграла $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \le \int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx$. Если $\int\limits_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx \le M$, следовательно, $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \le M$. Поэтому $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \to +\infty$ при $c \to +\infty$, значит и $\int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx \to +\infty$, поэтому $\int\limits_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1-\cos bx}{x^2}dx$, $a > 0$.

Решение. Так как $\cos bx \ge -1$, то $\frac{1-\cos bx}{x^2} \le \frac{2}{x^2}$. А интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx$ сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

Теорема 13.3. (признак сравнения в предельной форме)
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на промежутке $[a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$, тогда:

1) при $0\le K<+\infty$ из сходимости $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$,

2) при $0<K\le+\infty$ из расходимости $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Таким образом, при $0<K<+\infty$ оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ имеем: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\Delta>0$ такое, что $\forall x: x>\Delta\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно $K-\varepsilon<\dfrac{f(x)}{g(x)}<K+\varepsilon$ или $(K-\varepsilon)g(x)<f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$. (*)

Пусть $0\le K<+\infty$, тогда $0\le f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$. По теореме 13.2 из сходимости $\int\limits_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Пусть $0<K<+\infty$. Выберем $\varepsilon=\dfrac{K}{2}$ и воспользуемся левой частью неравенства (*): $\dfrac{K}{2}g(x)<f(x)$. Если $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{K}{2}g(x)dx$ расходится, то по теореме 13.2 и $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ расходится.

Пусть $K=+\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. По определению предела имеем: $\forall E>0$ $\exists\Delta>0$ такое, что $\forall x: x>\Delta\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|>E$ или $f(x)>E\cdot g(x)$. Тогда из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x+1}}dx$.

Решение. В нашем случае $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x+1}}$. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{x}{x^2\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по признаку сравнения в предельной форме исходный интеграл тоже сходится.

Выбирая конкретную функцию для сравнения, можно получить частные признаки сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Практическое значение имеет сравнение с функцией $\frac{1}{x^\alpha}$, которая интегрируема от $a>0$ до $+\infty$ при $\alpha>1$ и не интегрируема при $\alpha\le 1$. На этом построены следующие признаки:

Пусть при достаточно больших x функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ ($\alpha>0$). Тогда:

1) если $\alpha>1$ и $\varphi(x)\le c<+\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

2) если $\alpha\le 1$ и $\varphi(x)\ge c>0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Для доказательства нужно воспользоваться теоремой 13.2, функцией сравнения является функция $\frac{c}{x^\alpha}$.

Если при $x\to+\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\alpha>0$ (по сравнению с $\frac{1}{x}$), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $\alpha>1$ или $\alpha\le 1$. Здесь следует сослаться на теорему 13.3, роль функции $g(x)$ играет $\frac{1}{x^\alpha}$.

Примеры. Исследовать на сходимость: 1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. 1) Подынтегральная функция при $x\to+\infty$ представляет собой бесконечно малую порядка $\frac{1}{2}$, следовательно, интеграл расходится.

2) Подынтегральная функция при $x\to+\infty$ представляет собой бесконечно малую порядка 2, следовательно, интеграл сходится.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Теорема 13.4. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то сходится также и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Доказательство. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то по критерию Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0>a$ такое, что для любых чисел $A_1,A_2>A_0\Rightarrow\int\limits_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx<\varepsilon$.

Но очевидно, что $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|\le\int\limits_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx<\varepsilon$. Отсюда в силу того же критерия Коши вытекает сходимость $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$, а функцию $f(x)$ называть абсолютно интегрируемой на $[a;+\infty)$. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ расходится, то будем говорить, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится условно.

Пример 1. (условно сходящегося интеграла)

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\begin{bmatrix} u=\dfrac{1}{x} & dv=\sin x \\ du=-\dfrac{dx}{x^2} & v=-\cos x \end{bmatrix}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Bigg|_{\pi}^{A}-\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=-\frac{1}{\pi}-\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ сходится абсолютно, так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится. Таким образом, $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится. Докажем, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ расходится. Так как $\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x}$, то достаточно доказать, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится. Имеем

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Мы доказывали, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. Если мы докажем, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ сходится, то их разность будет расходиться. Имеем

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx=\begin{bmatrix} u=\dfrac{1}{x} & dv=\cos 2xdx \\ du=-\dfrac{dx}{x^2} & v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}=\lim_{A\to+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\Bigg|_{\pi}^{A}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx.$$

Так как $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ сходится абсолютно.

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью бесконечного веретена, образованного вращением линии $y=\frac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

Решение. $V_{Ox}=2\pi\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\pi\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}+arctgx\right)\Bigg|_{0}^{A}=\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$.

Пример 3. Бесконечная дуга $y = e^{-x}$, соответствующая положительным значениям *x*, вращается вокруг оси *Ox*. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

Решение. $S = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}dx = \begin{bmatrix} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x}dx \\ x = 0, \quad t = 1 \\ x \to +\infty, \quad t \to 0 \end{bmatrix} = -2\pi \int\limits_1^0 \sqrt{1+t^2}\,dt =$

$$= \pi\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right)\Big|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right).$$

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b)$ и не ограничена на нем, $\forall c: a \le c < b$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$. Тогда если существует $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)dx = I$, то этот предел называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

В случае существования конечного предела, говорят, что интеграл сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a,b)$. В противном случае говорят, что интеграл расходится. Точка b называется особой.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $(a,b]$ и не ограничена на нем, $\forall c: a < c \le b$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$. Тогда $\lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках отрезка $[a,b]$ кроме точки d, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to d-} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{c \to d+} \int\limits_c^b f(x)dx$.

Примеры. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{c \to 1-} \int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{c \to 1-} \arcsin x\Big|_0^c = \frac{\pi}{2}$;

2) $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = (\alpha \ne 1) = \lim\limits_{c \to 0+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_c^a = \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \lim\limits_{c \to 0+} \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \begin{cases} \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$,

$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0+} \ln|x|\Big|_c^a = \ln|a| - \lim_{c\to 0+} \ln|c| = \infty$. Таким образом,

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если } \alpha < 1 \\ \text{расходится}, & \text{если } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим основные свойства несобственного интеграла второго рода на примере интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с единственной особой точкой b. Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода.

1) **Теорема 13.5.** (критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода)

Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно,

чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых чисел $c_1, c_2 \in (b-\delta, b) \Rightarrow$

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

2) Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в случае положительной функции необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_a^c f(x)dx$ $(a < c < b)$ оставался ограниченным сверху.
3) Теоремы сравнения 1 и 2 для положительных функций и здесь имеют место.
4) Несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ и условно сходящимся, если он сходится, а $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле

Теорема 13.6. Пусть производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и отлична от нуля на (α,β) и пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$. Тогда имеет место формула:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

как для собственных, так и для несобственных интегралов.

Доказательство. Пусть сначала α и β являются конечными. Тогда особыми точками функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))$ могут быть концы соответствующих отрезков. В силу монотонности функции $x=\varphi(t)$ каждое значение x принимается лишь один раз, когда переменная $t\in(\alpha,\beta)$. Тогда $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ по теореме о замене переменных для собственного интеграла имеем

$$\int_{\varphi(\alpha+\varepsilon_1)}^{\varphi(\beta-\varepsilon_2)} f(x)dx = \int_{\alpha+\varepsilon_1}^{\beta-\varepsilon_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\varepsilon_1\to 0, \varepsilon_2\to 0$, получим искомую формулу.

Если пределы α и β бесконечны, то, взяв $\alpha_1,\beta_1\in\boldsymbol{R}$ и вновь используя теорему о замене переменной для собственного интеграла, получим

$$\int_{\varphi(\alpha_1)}^{\varphi(\beta_1)} f(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Отсюда, переходя к пределу при $\alpha_1\to-\infty, \beta_1\to+\infty$, получаем искомое равенство. Теорема доказана.

Теорема 13.7. Пусть: 1) функции $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на промежутке $(a,+\infty)$;

2) сходится хотя бы один из несобственных интегралов $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ или $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx$;

3) существует предел $l_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$, а в случае, если a – особая, то существует предел $l_2 = \lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$. Тогда существуют оба интеграла и имеет место равенство $\int\limits_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} v\,du$.

Доказательство. Рассмотрим собственные интегралы на отрезке $[a+\varepsilon, b]$. По теореме об интегрировании по частям в собственном интеграле имеем

$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a+\varepsilon}^{b} - \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} v\,du$. Устремив в этом равенстве $\varepsilon \to 0, b \to +\infty$, получим искомую формулу. Теорема доказана.

Примеры. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $$\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{lll} \sqrt{x^2-1} = t, & x = \sqrt{2}, & t = 1 \\ x = \sqrt{t^2+1}, & x \to +\infty, & t \to +\infty \\ dx = \dfrac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} & & \end{array}\right] = \int\limits_1^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2+1)t} =$$

$$= \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = arctg\, t\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) $$\int\limits_0^{+\infty} x \cdot \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = -\lim_{x\to+\infty}(x \cdot \cos x) +$$

$+\sin x\Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty}(x \cdot \cos x + \sin x)$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Глава 4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ. ОБЩЕЕ, ЧАСТНОЕ, ОСОБОЕ РЕШЕНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

С тоски зрения формально-математической решение дифференциального уравнения есть задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления состоит в том, чтобы по заданной функции найти ее производную. Простейшая обратная задача встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти ее первообразную. Если искомую первообразную обозначить через y, то указанная задача может быть записана в форме уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$ или $y' = f(x)$. Это простейшее дифференциальное уравнение, которое мы решать умеем: $y = \int f(x)dx + C$. Например, $y' = x$, тогда $y = \frac{x^2}{2} + c$.

Определение. **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно записать следующим образом:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \qquad (1)$$

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями изучаются также уравнения в частных производных. Дифференциальным уравнением в частных производных называется соотношение между неизвестной функцией z, зависящей от двух или более переменных $x, y, \ldots$, этими переменными $x, y, \ldots$, и частными производными от z: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ Например, $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$. Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция $z = x^2 y^2$ (и еще много других функций).

Определение. **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Например, уравнение $y' - 2xy = e^x$ есть уравнение первого порядка, а $y''' - 2y'' - y' = \sin x$ есть уравнение третьего порядка.

Если уравнение (1) может быть приведено к такому виду, в котором левая часть есть целая рациональная относительно входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется степенью уравнения. Например, $(y'')^3 - 2xy' = e^x$ есть уравнение второго порядка третьей степени.

Иногда уравнение (1) удается переписать в виде $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ – нормальная форма записи дифференциального уравнения.

Определение. **Решением** или **интегралом** дифференциального уравнения n-го порядка называется функция, имеющая производные до n-го порядка включительно, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Интеграл дифференциального уравнения называется **общим**, если содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения. Функции, получаемые из общего интеграла при различных численных значениях постоянных, называются **частными решениями**.

Отыскание частного решения дифференциального уравнения n-го порядка, удовлетворяющего n начальным условия вида $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{10}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}$ называется задачей Коши.

График решения дифференциального уравнения на плоскости xOy называется интегральной кривой.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$, где F – функция трех переменных, определенная в некоторой области D. Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде $y' = f(x, y)$ или

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2)$$

Наряду с ним рассматривают так называемое перевернутое уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

Для уравнения (2) справедлива следующая теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема 1.1. Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в некоторой области *D* на плоскости *xOy*, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении *C*;
2) какого бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

В процессе нахождения общего решения дифференциального уравнения нередко приходят к решению в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$. Это равенство называют **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Определение. **Частным решением** называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения при конкретном значении $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом уравнения.

С геометрической точки зрения общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C. Эти кривые называют интегральными кривыми. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через заданную точку плоскости.

Уравнение (2) для каждой точки M с координатами (x, y) определяет значение производной $\frac{dy}{dx} = y' = tg\alpha$, то есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Проведя в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок для определенности единичной длины с центром в этой точке, образующей с положительным направлением оси Ox угол α такой, что $tg\alpha = f(x, y)$, получают так называемое **поле направлений**.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Если в точке (x_0, y_0) правая часть равенства (2) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси Oy. В этом случае нужно использовать перевернутое уравнение.

Если в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ обращается в неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, то говорят, что в этой точке поле не определено. Такую точку называют особой точкой дифференциального уравнения (2). Если при этом существует интегральная кривая $y = y(x)$ $\left(x = x(y)\right)$, обладающая свойством $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ ($x(y) \to x_0$ при $y \to y_0$), то говорят, что она примыкает к точке (x_0, y_0). В этом случае само уравнение (2) не указывает наклона касательной в точке (x_0, y_0) к интегральной кривой, примыкающей к этой точке. Это обстоятельство порождает особенности поведения интегральных кривых в окрестности особой точки, обусловленные аналитической структурой правой части уравнения (2).

Для дифференциального уравнения (2) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение $\frac{dy}{dx} = C = const$, называется

изоклиной данного уравнения. При разных значениях C получают разные изоклины. Уравнение изоклины $f(x, y) = C$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых.

Пример 1. Построить поле направлений дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Решение. Изоклины данного уравнения определяются уравнением $-\frac{x}{y} = C$ или $y = -\frac{x}{C}$, то есть представляют собой пучок прямых, проходящих через начало координат. При $C = 1$ получаем прямую $y = -x$, на которой строим маленькие отрезки, имеющие угловой коэффициент 1. При $C = -1$ получаем прямую $y = x$, на которой строим маленькие отрезки, имеющие угловой коэффициент -1 и так далее. Поле направлений изображено на рисунке 35.

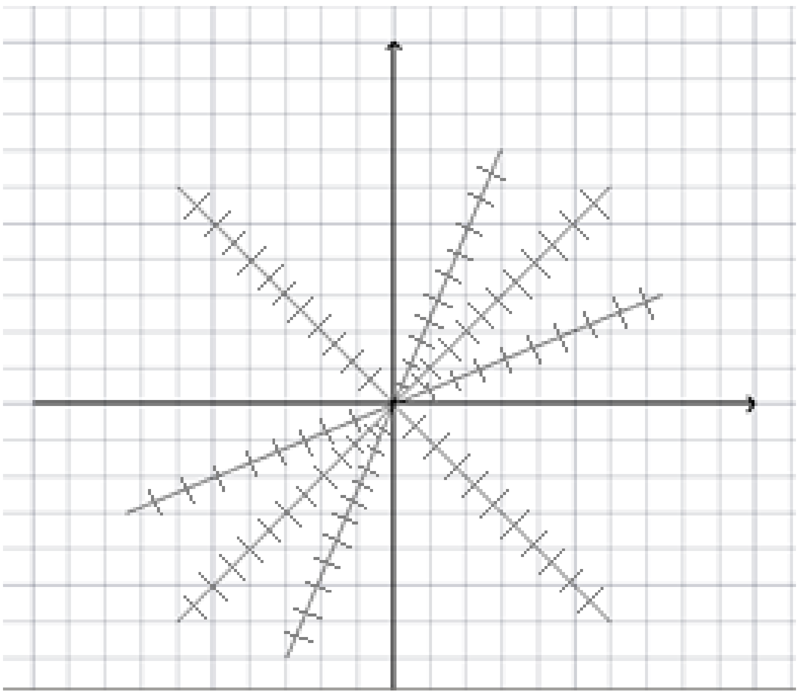

рис. 35

Определение. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым решением**.

Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении C, включая $C = \pm\infty$. Если правая часть равенства (2) непрерывна и имеет частную производную по y, то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность. Эти кривые называются подозрительными на особое решение.

Пример 2. Найти особые решения дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

Решение. Общим решением будут функции $y = (x + C)^2$. Особые решения ищем там, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$. В нашем примере $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, поэтому, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \to \infty$ когда $y \to 0$. Следовательно, особое решение $y = 0$ (рис. 36)

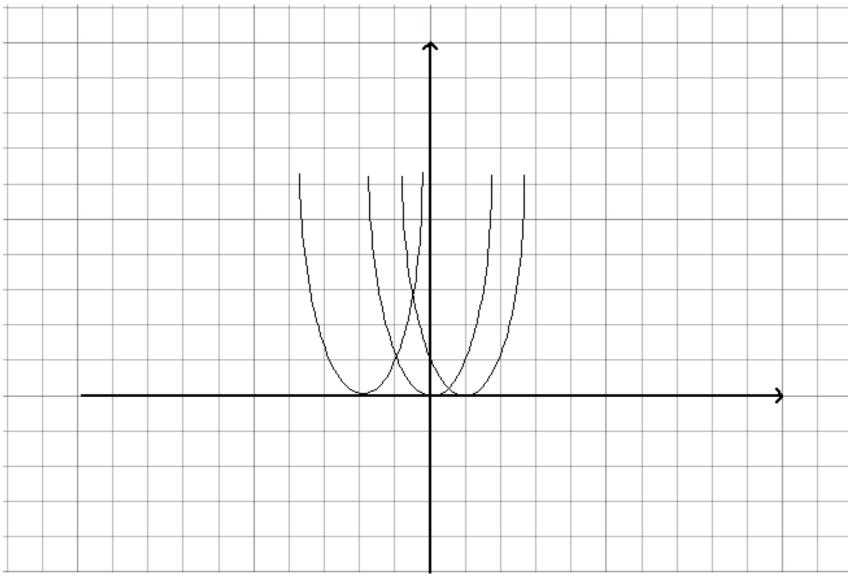

рис. 36.

Второй подход к нахождению особых решений состоит в следующем: если семейство интегральных кривых имеет огибающую, то есть такую кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках, то последняя всегда является особым решением дифференциального уравнения. Действительно, во-первых, огибающая является интегральной кривой, во-вторых, в каждой точке огибающей нарушается единственность решения задачи Коши (рис. 37).

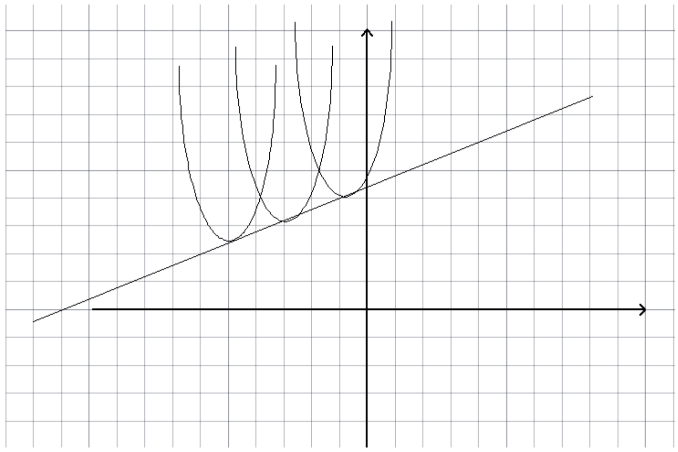

рис. 37.

§ 2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

С помощью дифференциальных уравнений строятся математические модели, описывающие разные процессы.

Пример 1. Уравнение радиоактивного распада.

Пусть $m(t)-$масса радиоактивного вещества в момент времени t. Известно, что скорость распада, то есть $\frac{dm}{dt}=m'(t)$ пропорциональна массе вещества, следовательно, $\frac{dm}{dt}=-k\cdot m(t)$, $k>0$. Легко проверить, что решением этого уравнения будет функция $m(t)=C\cdot e^{-kt}$. Чтобы выделить одно решение, нужно задать начальное условие, например, $m(0)=m_0$. Тогда $m_0=C$ и частное решение $m(t)=m_0\cdot e^{-kt}$.

Выясним, за какой промежуток времени количество вещества станет в два раза меньше: $\frac{m_0}{2}=m_0\cdot e^{-kt}$, $\frac{1}{2}=e^{-kt}$, $2=e^{kt}$, $\ln 2=kt$,

$k=\frac{\ln 2}{t}=\frac{\ln 2}{T_0}$, где T_0-период полураспада. Таким образом, частное решение имеет вид $m(t)=m_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_0}t}=m_0\cdot e^{\ln 2^{-\frac{t}{T_0}}}=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T_0}}$.

Пример 2. Уравнение роста.

Пусть на необитаемый остров, где достаточно пищи и нет хищников, доставили кроликов. Пусть $x(t)-$количество кроликов в момент времени t. Тогда естественно предположить, что скорость размножения кроликов $\frac{dx}{dt}=x'(t)$ пропорциональна их количеству, то есть $\frac{dx}{dt}=\alpha\cdot x(t)$. Получили дифференциальное уравнение, в котором $\alpha>0$. Решением будет функция $x(t)=C\cdot e^{\alpha t}$.

Пример 3. Пусть с некоторой высоты сброшено тело массой m. Требуется установить, по какому закону изменяется скорость падения v этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (с коэффициентом пропорциональности k).

По второму закону Ньютона $m\frac{dv}{dt}=mg-kv=F$, где $F-$сила, действующая на тело в направлении движения. Она складывается из двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха $-kv$ (берется с минусом, так как она направлена в сторону, противоположную направлению скорости).

Легко проверить, что решением будет функция $v(t)=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$ при любом значении C. Чтобы найти искомую зависимость v от t, нужно задать начальное условие: при сбрасывании тела ему была придана начальная скорость $v(0)=v_0$, которая, в частности, могла быть равной нулю. Тогда $v_0=C+\frac{mg}{k}$, отсюда $C=v_0-\frac{mg}{k}$.

Следовательно, искомая зависимость

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}. \qquad (*)$$

Из этой формулы следует, что при достаточно больших значениях t скорость v мало зависит от v_0. Заметим, что если $k=0$ (то есть сопротивление воздуха отсутствует или им можно пренебречь), то получается известный из физики результат: $v = v_0 + gt$. Она может быть получена из формулы (*) с помощью предельного перехода:

$$\lim_{k \to 0}\left(\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = v_0 + gt.$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение. Дифференциальное уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$ называют уравнением с **разделенными переменными**.

Общим интегралом такого уравнения будет $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$. Особых решений нет.

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $xdx + ydy = 0$.

Решение. Интегрируем $\int xdx + \int ydy = \int Cdx$, получаем $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}$ или $x^2 + y^2 = C$.

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его следующим образом (полагая, что $g(y) \neq 0$) $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$. Если уравнение $g(y) = 0$ имеет действительные решения вида $y = b$, то прямые $y = b$ будут решениями, которые могут оказаться особыми. Других особых решений быть не может.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Решение. Разделяем переменные и интегрируем $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$, $\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, $y = \frac{C}{x}$ – общее решение.

Общий вид уравнения с разделяющимися переменными $f(x)\cdot g(y)dy = m(x)\cdot n(y)dx$. Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{g(y)dy}{n(y)} = \frac{m(x)dx}{f(x)}$, $\int \frac{g(y)dy}{n(y)} = \int \frac{m(x)dx}{f(x)}$. Если уравнения $f(x)=0$, $n(y)=0$ имеют действительные решения вида $x=a$ $(y\neq b)$ и $y=b$ $(x\neq a)$ будут решениями уравнения. Только эти решения могут оказаться особыми.

Уравнение вида $y' = f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $ax+by=z(x)$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0$.

Решение. Разделяем переменные и интегрируем $\frac{x^2dx}{x^3-1}+\frac{(y-1)dy}{y+1}=0$,

$\int \frac{x^2dx}{x^3-1}+\int \frac{(y-1)dy}{y+1}=\int 0dx$. Найдем каждый из интегралов в отдельности:

$$\int \frac{x^2dx}{x^3-1} = \begin{bmatrix} t=x^3-1 \\ dt=3x^2dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + C,$$

$$\int \frac{(y-1)dy}{y+1} = \int \frac{(y+1-2)dy}{y+1} = \int \left(1-\frac{2}{y+1}\right)dy = y-2\ln|y+1|+C.$$

Окончательно получаем общий интеграл:

$\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+y-2\ln|y+1|=C$. Особыми решениями будут $x=1$, $y=-1$.

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решение. Делаем замену: $z=4x+2y-1$, отсюда $y=\frac{1}{2}(z-4x+1)$, $y'=\frac{1}{2}z'-2$. С учетом сделанной замены уравнение перепишется в виде:

$\frac{1}{2}z' - 2 = \sqrt{z}$ или $z' = 2(\sqrt{z} + 2)$, $\frac{dz}{dx} = 2(\sqrt{z} + 2)$. Разделяем переменные и интегрируем: $\int \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = 2\int dx$. Найдем отдельно интеграл в левой части равенства:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{z} \\ z = t^2 \\ dz = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\int \frac{(t+2-2)dt}{t+2} = 2\int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - 2\ln|t+2|\right) + C = 2\sqrt{z} - 4\ln\left|\sqrt{z}+2\right| + C.$$

Окончательно получаем общий интеграл уравнения:

$$2\sqrt{4x+2y-1} - 4\ln\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right| = 2x + 2C,$$

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right| - x = C.$$

Пример 5. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам? Решение. Уравнение касательной в любой точке (x, y) искомой кривой будет $Y - y = y'(X - x)$, где (X,Y) – координаты любой точки на касательной. Полагая в этом уравнении $Y = 0$, найдем абсциссу $X_0 = 0$ точки пересечения касательной с осью Ox: $X_0 = x - \frac{y}{y'}$. Согласно условию задачи $X_0 + x = 0$, то есть $0 = 2x - \frac{y}{y'}$. Решая это дифференциальное уравнение искомой кривой как уравнение с разделяющимися переменными, получим $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $2\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, $y^2 = Cx$.

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией степени k, если $F(tx, ty) = t^k F(x, y)$.

Например, $x^2 + y^2$ есть однородная функция степени два. Однородную функцию степени k можно записать $F(x,y) = F\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k F\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Определение. Дифференциальное уравнение называется однородным уравнением первого порядка, если оно имеет вид

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (3)$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)-$ однородные функции одинаковой степени k. Тогда $P(x,y) = x^k P\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $Q(x,y) = x^k Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$ и уравнение (3) можно переписать в виде $P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$ или $\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)}dx + dy = 0$. Обозначим $\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = R\left(\frac{y}{x}\right)$, тогда получим уравнение $R\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$. Будем искать решение этого уравнения в виде $y = z \cdot x$, где $z(x)-$функция, зависящая от x. Имеем $dy = zdx + xdz$, следовательно, приходим к уравнению $R(z)dx + zdx + xdz = 0$, $(R(z)+z)dx = -xdz$, $\int \frac{dz}{R(z)+z} = -\int \frac{dx}{x}$. Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными.

Поскольку однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = R\left(\frac{y}{x}\right)$, то поле направлений не задано в начале координат, то есть начало координат является особой точкой. Изоклинами являются прямые $y = kx$, $x \neq 0$. Особыми могут быть прямые $x = 0$ и $y = z_i x$, где z_i – особые решения уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему уравнению: $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$. Сделаем замену $z = \frac{y}{x}$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Подставим в уравнение, получим: $z'x+z=z(1+\ln z)$, $z'x=z\ln z$, $\frac{dz}{dx}x=z\ln z$. Разделяем переменные и интегрируем: $\int\frac{dz}{z\ln z}=\int\frac{dx}{x}$, $\int\frac{d(\ln z)}{\ln z}=\ln|x|+\ln|C|$, $\ln|\ln z|=\ln|Cx|$, $\ln z=Cx$, $z=e^{Cx}$. Делаем обратную замену: $\frac{y}{x}=e^{Cx}$, $y=xe^{Cx}$.

К однородным уравнениям сводятся уравнения типа: $y'=R\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$.

Рассмотрим систему: $\begin{cases}ax+by+c=0\\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\end{cases}$.

Возможны случаи:

1. $\alpha=ka$, $\beta=kb$, $\gamma=kc$. Тогда получим уравнение $y'=R\left(\frac{1}{k}\right)$ или $y'=d$, $y=d\cdot x+C$.
2. $\alpha=ka$, $\beta=kb$, $\gamma\neq kc$. Тогда получим уравнение $y'=R\left(\frac{ax+by+c}{k(ax+by)+\gamma}\right)$. Сделаем замену: $ax+by=z(x)$, тогда $a+by'=z'$. Отсюда $y'=\frac{1}{b}z'-\frac{a}{b}$. После замены получаем уравнение: $\frac{1}{b}z'-\frac{a}{b}=R\left(\frac{z+c}{kz+\gamma}\right)$, $z'=a+bR\left(\frac{z+c}{kz+\gamma}\right)$ – уравнение с разделяющимися переменными.
3. система имеет единственное решение (x_0,y_0).

В этом случае делаем замену $x-x_0=u, y-y_0=v$. Тогда $dx=du$, $dy=dv$, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$. Исходное уравнение переписывается в виде $\frac{dv}{du}=R\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right)$. Таким образом, получили однородное уравнение.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $(5x-7y+1)dy+(x+y-1)dx=0$.

Решение. Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 5x-7y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$. Система имеет единственное решение $x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{2}$. Делаем замену $x=u+\frac{1}{2}$, $y=v+\frac{1}{2}$. С учетом этой замены уравнение перепишется в виде: $(5u-7v)dv+(u+v)du=0$. Делаем еще одну замену: $u=z\cdot v$, $du=zdv+vdz$. Тогда уравнение перепишется в виде: $(5zv-7v)dv+(zv+v)(zdv+vdz)=0$,

$$(5zv-7v)dv+z^2vdv+vzdv+zv^2dz+v^2dz=0,$$

$$(z^2+6z-7)dv+(zv+v)dz=0,$$

$$(z^2+6z-7)dv=-(z+1)vdz,$$

$$-\int\frac{dv}{v}=\int\frac{(z+1)dz}{z^2+6z-7}.$$

Найдем интеграл в правой части последнего равенства. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{z+1}{z^2+6z-7}=\frac{z+1}{(z+7)(z-1)}=\frac{A}{z+7}+\frac{B}{z-1}=\frac{A(z-1)+B(z+7)}{(z+7)(z-1)},$$

$$z+1=A(z-1)+B(z+7).$$

При $z=1$ находим $2=8B$, $B=\frac{1}{4}$. При $z=-7$ находим $-6=-8A$, $A=\frac{3}{4}$. Тогда $\int\frac{(z+1)dz}{z^2+6z-7}=\frac{3}{4}\int\frac{dz}{z+7}+\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z-1}=\frac{3}{4}\ln|z+7|+\frac{1}{4}\ln|z-1|+C$.

Окончательно получаем:

$$\frac{1}{4}\ln|C|-\ln|v|=\frac{1}{4}\ln|z+7|^3|z-1|,$$

$$\ln\left|\frac{C}{v^4}\right|=\ln|z+7|^3|z-1|,$$

$$C=(z+7)^3(z-1)v^4,$$

$$C=\left(\frac{u}{v}+7\right)^3\left(\frac{u}{v}-1\right)v^4,$$

$$C=(u+7v)^3(u-v),$$

$C=\left(x-\frac{1}{2}+7y-\frac{7}{2}\right)^3\left(x-\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}\right),$

$C=(x+7y-4)^3(x+y).$

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной, то есть уравнение вида: $y'+p(x)y=q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)-$ непрерывные функции.

Одним из методов решения этого уравнения является метод Бернулли. Искомая функция ищется в виде $y=U(x)V(x)$, тогда $y'=U'V+UV'$. Подставим в уравнение, получим $U'V+UV'+p(x)UV=q(x)$,

$U'V+U\big(V'+p(x)V\big)=q(x)$. Разобьем это уравнение на два уравнения с разделяющимися переменными: $V'+p(x)V=0$ и $U'V=q(x)$.

Разделим переменные в первом уравнении и проинтегрируем: $\frac{dV}{dx}=-p(x)V$, $\int\frac{dV}{V}=-\int p(x)dx$, $\ln|V|=-\int p(x)dx$, $V=e^{-\int p(x)dx}$. При интегрировании этого уравнения константу C не добавляют. Подставим найденную функцию во второе уравнение, получим: $U'e^{-\int p(x)dx}=q(x)$, $U'=q(x)e^{\int p(x)dx}$, $U=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$. И окончательно находим общее решение исходного уравнения: $y=UV=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'-\frac{y}{x}=x^2$.

Решение. Ищем решение в виде $y=UV$, $y'=U'V+UV'$. Подставляем в уравнение: $U'V+UV'-\frac{UV}{x}=x^2$, $U'V+U\left(V'-\frac{V}{x}\right)=x^2$. Разбиваем на два

уравнения: $V' - \frac{V}{x} = 0$ и $U'V = x^2$. Разделим переменные в первом уравнении и проинтегрируем: $\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x}$, $\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|V| = \ln|x|$, $V = x$. Подставляем найденную функцию во второе уравнение, получаем:
$U'x = x^2$, $U' = x$, $U = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$. И окончательно получаем общее решение: $y = \frac{x^3}{2} + Cx$.

К линейным уравнениям приводятся уравнения видов:

1) $f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) f(y) = q(x)$

Положим здесь $f(y) = z(x)$, тогда $f'(y) \cdot y' = z'(x)$ и уравнение переписывается в виде: $z' + p(x)z = q(x)$.

2) $\frac{dy}{dx} + p(x) = q(x) \cdot e^{ny}$

В этом уравнении делают замену: $e^{-ny} = z(x)$, тогда $-ne^{-ny} y' = z'(x)$, $y' = -\frac{e^{ny}}{n} z'(x)$ и уравнение принимает вид $-\frac{e^{ny}}{n} z'(x) + p(x) = q(x) \cdot e^{ny}$, $-\frac{z'(x)}{n} + p(x) \cdot z = q(x)$.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n$, $n \neq 1$. Было предложено Яковом Бернулли в 1695 году, а метод решения опубликовал Иван Бернулли в 1697 году.

Разделим обе части уравнения на y^n, получим $\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x)$. Сделаем замену $\frac{1}{y^{n-1}} = z(x)$, $z'(x) = \left(y^{-(n-1)} \right)' = -(n-1) y^{-n} \cdot y'$. Отсюда $\frac{y'}{y^n} = -\frac{z'}{n-1}$. Тогда исходное уравнение переписывается в виде: $-\frac{z'}{n-1} + p(x)z = q(x)$ или $z' - (n-1)p(x)z = -(n-1)q(x)$. Получили линейное уравнение.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $(x+1)\left(y'+y^2\right)=-y$.

Решение. Считая, что $x\neq -1$, разделим обе части уравнения на $x+1$: $y'+\frac{y}{x+1}=-y^2$. Затем разделим на $-y^2$: $-\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{(x+1)y}=1$ и сделаем замену $z=\frac{1}{y}$, тогда $z'=-\frac{y'}{y^2}$ и уравнение переписывается в виде: $z'-\frac{z}{x+1}=1$. Далее ищем функцию z в виде $z=UV$, $z'=U'V+UV'$. Подставляем в уравнение: $U'V+UV'-\frac{UV}{x+1}=1$, $U'V+U\left(V'-\frac{V}{x+1}\right)=1$. Разбиваем на два уравнения с разделяющимися переменными: $V'-\frac{V}{x+1}=0$ и $U'V=1$. Из первого уравнения находим $\frac{dV}{dx}=\frac{V}{x+1}$, $\int\frac{dV}{V}=\int\frac{dx}{x+1}$, $\ln|V|=\ln|x+1|$, $V=x+1$. Подставляем во второе уравнение: $U'(x+1)=1$, $U'=\frac{1}{x+1}$, $U=\ln|x+1|+\ln|C|=\ln|C(x+1)|$, тогда $z=(x+1)\ln|C(x+1)|$, а $y=\frac{1}{z}=\frac{1}{(x+1)\ln|C(x+1)|}$.

Замечание. Решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде $y=U(x)V(x)$, где $U(x)-$ какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $U'+p(x)U=0$.

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Определение. Уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (4)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)-$ непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (5)$$

причем $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Докажем, что если левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции, то выполняется условие (5), и обратно, если выполнено условие (5), то левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть уравнение (4) имеет вид $dF(x,y)=0$ и, следовательно, его общий интеграл $F(x,y)=C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$. Тогда

$$P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{6}$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе – по x, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то есть равенство (5) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (4) была полным дифференциалом некоторой функции.

Покажем, что это условие является и достаточным, то есть при выполнении равенства (5) левая часть уравнения (4) является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$.

Из соотношения $P(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ находим $F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\varphi(y)$, где x_0 – абсцисса любой точки из области существования решения. При интегрировании по x считаем y константой и поэтому произвольная постоянная может зависеть от y. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (6). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по y и результат приравняем к $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$, т.е. $Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=Q(x,y)$ или $Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y)$. Следовательно, $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$ или $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dx+C_1$. Таким образом, функция $F(x,y)$ найдена: $F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1$. Приравнивая это выражение произвольной константе C, получим общий интеграл уравнения (4): $\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$.

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Решение. Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Здесь $P(x,y)=\frac{2x}{y^3}$, $Q(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)'_x=-\frac{6x}{y^4}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)=\frac{2x}{y^3}$, $F(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=Q(x,y)=\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}$. Отсюда $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=\int\frac{1}{y^2}dy=-\frac{1}{y}+C_1$. Общий интеграл уравнения $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.

Пусть левая часть уравнения (4) не является полным дифференциалом некоторой функции. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (4) становится полным дифференциалом. Такая функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель может привести к появлению лишних решений, обращающих этот множитель в нуль.

Для того чтобы найти интегрирующий множитель, поступим следующим образом: умножим обе части уравнения (4) на неизвестный пока интегрирующий множитель $\mu(x,y)$: $\mu\cdot P(x,y)dx+\mu\cdot Q(x,y)dy=0$. Для того чтобы последнее уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ или $\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Разделим обе части на $\mu(x,y)$: $P\frac{\partial\mu}{\mu\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\mu\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ и перепишем в эквивалентном виде

$$P\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}-Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{7}$$

Это уравнение является уравнением в частных производных с неизвестной функцией $\mu(x,y)$. В общем случае интегрирование этого уравнения является задачей не более простой, чем интегрирование исходного уравнения. Только в некоторых случаях удается найти функцию $\mu(x,y)$.

Пусть, например, интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента, тогда (7) можно без труда проинтегрировать. Пусть интегрирующий множитель зависит от x, $\mu=\mu(x)$, тогда $\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=0$ и уравнение (7) примет вид: $-Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Отсюда, считая $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ непрерывной функцией только от x, получим $\ln\mu=\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\ln C$,

$\mu=Ce^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$.

Можно считать *C=1*, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель. Если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ является функцией только x, то интегрирующий множитель, зависящий от x, существует, в противном случае его нет. Аналогично, если выражение $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ не зависит от x, а зависит от y, то легко находится интегрирующий множитель, зависящий от y: $\mu=Ce^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}$.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0$.

Решение. Здесь $P(x,y)=y+xy^2$, $Q(x,y)=-x$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$. Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя от y. Найдем $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-1-2xy-1}{y+xy^2}=\frac{-2(xy+1)}{y(xy+1)}=-\frac{2}{y}$, то есть интегрирующий множитель есть. Находим его:

$\mu=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$. Умножаем все члены уравнения на $\frac{1}{y^2}$:

$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$. Теперь $P(x,y)=\frac{1}{y}+x$, $Q(x,y)=-\frac{x}{y^2}$, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$, следовательно, мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

Находим $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = \frac{1}{y} + x$, $F(x,y) = \int \left(\frac{1}{y} + x \right) dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = Q(x,y) = -\frac{x}{y^2}$. Отсюда $\varphi'(y) = 0$,

$\varphi(y) = \int 0 dy = C_1$. Общий интеграл уравнения $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

§ 7. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Эту теорему мы будем доказывать с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении. Напомним ряд основных определений.
Пусть X – *метрическое пространство*, то есть множество, на котором задано отображение $(x, y) \to d(x, y) \in \boldsymbol{R}$, причем выполнены условия:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Например, множество $C_{[a,b]}$функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, в котором $d(x, y) = \max\limits_{[a,b]} \left| f(x) - g(x) \right|$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$натурального выполняется неравенство $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$.

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Определение. Пусть A – отображение $X \to X$. Отображение A называется сжимающим, если $\exists \ 0 < \Theta < 1$ такое, что $\forall x, y \in X \Rightarrow d(Ax, Ay) < d(x, y)$.

Теорема Банаха. Пусть X – полное метрическое пространство и $A : X \to X$ сжимающее отображение. Тогда существует и притом единственное решение уравнения $AX = X$. Это решение можно найти следующим образом: взять $x_0 \in X$ и рассмотреть последовательность $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, … Тогда $x_n \to x$.

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $D = \{x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$. Предположим, что она удовлетворяет условию Липшица по y, то есть $\exists N$ такое, что $\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|$ при $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Тогда на интервале $(x_0 - H, x_0 + H)$ существует и притом единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Здесь $H < \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{\Theta}{N}\right)$, $0 < \Theta < 1$, $M = \max\limits_{(x, y) \in D} \left| f(x, y) \right|$.

Доказательство. Докажем, что уравнение $y' = f(x, y)$ (8) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ эквивалентно интегральному уравнению $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ (9). Действительно, пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (9), тогда $y(x_0) = y_0$ и $y' = \left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right)' = f(x, y(x))$ по свойству интеграла с переменным верхним пределом. Обратно, пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (8), тогда $\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int\limits_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x_0) - y(x)$. Отсюда $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.

Таким образом, задача свелась к доказательству существования и единственности решения уравнения (9).

Рассмотрим отображение $A(y) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. Если $y(t)$ непрерывная функция и $f(x, y)$ непрерывная, то по свойству интеграла с переменным верхним пределом $A(y)$ будет непрерывной и дифференцируемой функцией. Рассмотрим пространство функций

$$X = \left\{ \begin{array}{l} f(x): \ f(x) \ \textit{непрерывны на} \ \lfloor x_0 - H, x_0 + H \rfloor, \\ d(f(x), y_0) = \max\limits_{[x_0 - H,\, x_0 + H]} \left| f(x) - y_0 \right| \le b \end{array} \right\}.$$

Пространство X – полное, так как является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на отрезке $\lfloor x_0 - H, x_0 + H \rfloor$. Наша задача подобрать H таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы Банаха. Отображение $A: X \to X$.

Обозначим через $M = \max\limits_{(x,y) \in D} \left| f(x,y) \right|$ и оценим

$$\left| A(y) - y_0 \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt \right| \le \max_{(x,y) \in D} \left| f(x,y) \right| \cdot \left| x - x_0 \right| \le M \cdot H \le b, \qquad \text{если}$$

$H \le \dfrac{b}{M}$. Убедимся, что $A: X \to X$ сжимающее отображение.

$$\left| A(y_1) - A(y_2) \right| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) dt \right| \le$$

$$\le \max_{(x,y) \in D} \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \cdot \left| x - x_0 \right| \le N \cdot H \cdot \max_{[x_0 - H,\, x_0 + H]} \left| y_1(t) - y_2(t) \right| =$$

$$= N \cdot H \cdot d(y_1, y_2).$$

Чтобы отображение было сжимающим нужно, чтобы $N \cdot H \le \Theta < 1$, $H \le \dfrac{\Theta}{N} < 1$. Мы доказали, что $A: X \to X$ сжимающее отображение, поэтому уравнение $A(y) = y$ имеет единственное решение. Его можно найти следующим образом: y_0, $y_1 = A(y_0)$, $y_2 = A(y_1)$, …, $y_n \to y$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие Липшица можно заменить на более легко проверяемое условие. Докажем, что условие Липшица вытекает из существования и непрерывности $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Действительно, если $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике, то она и ограничена в нем $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$. Тогда по теореме Лагранжа $\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| f'_y(x,\xi) \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \le N \cdot \left| y_1 - y_2 \right|$.

Замечание 2. Существование решения уравнения (8) можно доказать лишь в предположении непрерывности функции $f(x,y)$ без условия Липшица, однако одной непрерывности функции $f(x,y)$ недостаточно для доказательства единственности решения.

Пример. Построить последовательные приближения к решению уравнения $y' = y$, $y(0) = 1$.

Решение. Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению $y = 1 + \int\limits_0^x y(t)dt$. Сжимающее отображение имеет вид $A(y) = 1 + \int\limits_0^x y(t)dt$.

Тогда $y_1 = A(1) = 1 + \int\limits_0^x dt = 1 + x$, $y_2 = A(y_1) = 1 + \int\limits_0^x (1+t)dt = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$,

$y_3 = A(y_2) = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + t + \dfrac{t^2}{2} \right) dt = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$. Следовательно,

$y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$.

§ 8. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots y_n) \\ y_2' = f_1(x, y_1, \ldots y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_1(x, y_1, \ldots y_n) \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями:

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\dots,y_n(x_0)=y_{n0}. \qquad (11)$$

Действуя точно также, как для одного уравнения, можно доказать теорему существования и единственности решения системы (10).

Теорема 8.1. Пусть в области *D*, определяемой неравенствами: $x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_{i0}-b_i\le y\le y_0+b_i$, функции $f_i(x,y_1,\dots,y_n)$ непрерывны, а, следовательно, ограничены $\left|f_i(x,y_1,\dots,y_n)\right|\le M$ и удовлетворяют условию Липшица, то есть $\exists N$ такое, что $\left|f_i(x,y_1,\dots,y_n)-f_i(x,z_1,\dots,z_n)\right|\le N\sum\limits_{i=1}^{n}\left|y_i-z_i\right|$ при $\forall x\in\lfloor x_0-a,x_0+a\rfloor$. Тогда на интервале $\left(x_0-H,x_0+H\right)$ существует и притом единственное решение $y_1(x),\dots,y_n(x)$ системы (10), удовлетворяющее начальным условиям (11), где $H<\min\left(a,\frac{b_1}{M},\dots,\frac{b_n}{M},\frac{1}{nN}\right)$.

Доказательство. Система (10) с начальными условиями (11) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y_1=y_{10}+\int\limits_{x_0}^{x}f_1\left(t,y_1,\dots,y_n\right)dt \\ y_2=y_{20}+\int\limits_{x_0}^{x}f_2\left(t,y_1,\dots,y_n\right)dt \\ \dots \\ y_n=y_{n0}+\int\limits_{x_0}^{x}f_n\left(t,y_1,\dots,y_n\right)dt \end{cases} \qquad (12)$$

или в векторной форме $\vec{y}=\vec{y}_0+\int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\left(t,\vec{y}(t)\right)dt$, где $\vec{y}_0=(y_{10},\dots,y_{n0})$,

$$\vec{f}=(f_1,\dots,f_n),\ \int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\,dt=\left(\int\limits_{x_0}^{x}f_1\,dt,\ \dots,\int\limits_{x_0}^{x}f_n\,dt\right).$$

Точкой пространства X будет теперь система n непрерывных функций $(y_1,\ldots,y_n)$, то есть n-мерная вектор-функция $\vec{y}(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$. Расстояние в пространстве X определяется равенством $d(y(x),z(x))=\sum\limits_{i=1}^{n}\max\left|y_i-z_i\right|$. При таком определении расстояния множество X всех n-мерных вектор-функций $\vec{y}(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$ будет полным метрическим пространством. Оператор A определяется равенством: $A(\vec{y})=\vec{y}_0+\int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\left(t,\vec{y}(t)\right)dt$, то есть при действии оператора A на точку $(y_1,\ldots,y_n)$ получим точку того же пространства X с координатами, равными правым частям системы (12).

Точка $A(\vec{y})\in X$, так как все ее координаты являются непрерывными функциями, не выходящими из D, если координаты вектор-функции $\vec{y}$ не выходили из D. Действительно, $\left|\int\limits_{x_0}^{x}f_i\left(t,y_1,\ldots,y_n\right)dt\right|\le M\left|x-x_0\right|=M\cdot H\le b_i$, и, следовательно, $\left|y_i-y_{i0}\right|\le b_i$.

Остается проверить, что $A(\vec{y})-$сжимающее отображение.

$$d\left(A(\vec{y}),A(\vec{z})\right)=\sum_{i=1}^{n}\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left(f_i\left(t,y_1,\ldots,y_n\right)-f_i\left(t,z_1,\ldots,z_n\right)\right)dt\right|\le$$

$$\le N\sum_{i=1}^{n}\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-z_i\right|dt\right|\le N\sum_{i=1}^{n}\max\left|y_i-z_i\right|\cdot\sum_{i=1}^{n}\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}dt\right|=N\cdot n\cdot H\cdot d(\vec{y},\vec{z})$$

Чтобы отображение было сжимающим, нужно, чтобы $N\cdot n\cdot H\le\Theta<1$, то есть $H\le\frac{\Theta}{N\cdot n}<\frac{1}{N\cdot n}$. Следовательно, существует и притом единственное решение уравнения $A(\vec{y})=\vec{y}$, которое можно найти путем последовательных приближений. Но условие $A(\vec{y})=\vec{y}$ по определению отображения A эквивалентно тождествам (12). Теорема доказана.

Пример. Построить два последовательных приближения к решению системы: $\begin{cases} y' = 2x + z, & y(1) = 1 \\ z' = y, & z(1) = 0. \end{cases}$

Решение. Система интегральных уравнений, эквивалентных данной системе с начальными условиями, имеет вид:

$$\begin{cases} y(x) = 1 + \int_1^x (2t + z(t))dt, \\ z(x) = \int_1^x y(t)dt. \end{cases}$$

Последовательные приближения находим по рекуррентным формулам:

$y_{n+1}(x) = 1 + \int_1^x (2t + z_n(t))dt$, $z_{n+1}(x) = \int_1^x y_n(t)dt$, где $y_0 = 1$, $z_0 = 0$. Полагая в этих формулах $n = 0$, найдем

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x 2t\,dt = 1 + x^2 - 1 = x^2, \quad z_1(x) = \int_1^x dt = x - 1.$$

Затем последовательно находим:

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x (2t + t - 1)dt = 1 + \left(\frac{3}{2}t^2 - t\right)\Bigg|_1^x = 1 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2},$$

$$z_2(x) = \int_1^x t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^x = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

§ 9. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-ГО ПОРЯДКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Предположим, что это уравнение удалось разрешить относительно $y^{(n)}$, то есть $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. (13)

Теорема 9.1. Пусть в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна по всем своим аргументам, начиная со второго (или имеет ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам, начиная со второго). Тогда существует и притом единственное решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем, что уравнение (13) с начальными условиями (14) эквивалентно системе

$$\begin{cases} y' = y'_1, \\ y'_1 = y'_2, \\ \ldots \\ y'_{n-2} = y'_{n-1}, \\ y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) \end{cases} \tag{15}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y'_0, \ldots, y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Докажем, что решение системы (15) является решением уравнения (13). Действительно,

$y_2 = y'', \quad y_3 = y''', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}, \ y_n = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Чтобы из уравнения (13) получить систему (15) нужно ввести новые переменные: $y' = y_1, y'' = y_2, \ \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$. Для системы (15) выполнены все условия теоремы существования и единственности: функции $f_1 = y_1, \ f_2 = y_2, \ \ldots, f_n = f$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 1, \ \ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0, \ldots$

Отсюда и из теоремы существования и единственности для системы вытекает доказываемая теорема.

Пример. Построить два последовательных приближения к решению уравнения $y'' + (y')^2 - 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Положим $y' = z$, тогда получим

$$\begin{cases} z' = 2y - z^2, & y(0) = 1 \\ y' = z, & z(0) = 0. \end{cases}$$

Из рекуррентных формул $z_{n+1}(x)=\int\limits_0^x\left(2y_n(t)-z_n^2\right)dt$ и $y_{n+1}(x)=1+\int\limits_0^x z_n(t)dt$, где $y_0=1,\ z_0=0$, находим

$$z_1(x)=\int\limits_0^x 2dt=2x,\ y_1(x)=1+\int\limits_0^x 0\,dt=1,$$

$$z_2(x)=\int\limits_0^x\left(2-4t^2\right)dt=2x-\frac{4}{3}x^3,\ \ y_2(x)=1+\int\limits_0^x 2t\,dt=1+x^2.$$

Рассмотрим уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

1. Уравнение $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием. Умножаем обе части на dx и интегрируем: $\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx$, получаем $y^{(n-1)}=f_1(x)+C_1$. Снова умножаем обе части последнего равенства на dx и интегрируем: $\int y^{(n-1)}dx=\int\left(f_1(x)+C_1\right)dx$, $y^{(n-2)}=f_2(x)+C_1x+C_2$ и т.д. После n-кратного интегрирования получаем общее решение этого уравнения в виде явной функции от x и n произвольных постоянных: $y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=60x^2$.

Решение. $y''=\int 60x^2dx=20x^3+C_1$,

$$y'=\int\left(20x^3+C_1\right)dx=5x^4+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(5x^4+C_1x+C_2\right)dx=x^5+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2. Уравнение вида $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0$, то есть в уравнении отсутствуют производные до k-го порядка включительно. Делаем замену: $y^{(k)}=z$, тогда $y^{(k+1)}=z'$, …, $y^{(n)}=z^{(n-k)}$. Получим уравнение $(n-k)$-го порядка.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(5)}-\frac{1}{x}y^{(4)}=0$.

Решение. Делаем замену: $y^{(4)}=z$, тогда $y^{(5)}=z'$. Получаем уравнение $z'-\frac{1}{x}z=0$. Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}$, $\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln|z|=\ln|x|+\ln|C_1|$, $z=C_1x$. Делаем обратную замену: $y^{(4)}=C_1x$ и последовательно интегрируем $y'''=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$, $y''=C_1\frac{x^3}{6}+C_2x+C_3$,

$y'=C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$,

$y=C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5$.

3. Уравнение вида $F(y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$, то есть в уравнении отсутствуют независимая переменная x. Делают замену: $y'=p(y)$, тогда $y''=p'(y)\cdot y'=p'\cdot p$, $y'''=\left(p'(y)\right)'\cdot p+\cdot p'(y)\cdot p'(y)\cdot y'=$
$=p''(y)\cdot y'\cdot p+\left(p'(y)\right)^2\cdot p=p''(y)p^2+\left(p'\right)^2p$.

Пример. Найти решение задачи Коши: $4y^3y''=y^4-16$, $y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Делаем замену: $y'=p(y)$, тогда $y''=p'\cdot p$, получаем уравнение $4y^3p'p=y^4-16$. Разделяем уравнение и интегрируем: $\int pdp=\int\frac{y^4-16}{4y^3}dy$, $\frac{p^2}{2}=\frac{1}{4}\int ydy-4\int y^{-3}dy$, $\frac{p^2}{2}=\frac{y^2}{8}+\frac{2}{y^2}+C_1$. Согласно начальным условиям, находим: $\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}+C_1$, отсюда $C_1=-1$. Имеем $p^2=\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}-2$ или $p^2=\left(\frac{y}{2}-\frac{2}{y}\right)^2$, $p=\frac{y}{2}-\frac{2}{y}$ (согласно начальным условиям). Делаем обратную замену: $y'=\frac{y^2-4}{2y}$. Вновь разделяем уравнение и интегрируем: $\frac{2y\,dy}{y^2-4}=dx$, $\int\frac{d(y^2-4)}{y^2-4}=\int dx$,

$\ln\left|y^2-4\right|=\ln\left|C_2e^x\right|$, $y^2-4=C_2e^x$. Согласно начальным условиям, находим $4=C_2$. Тогда искомое решение: $y^2=4+4e^x$ или $y=2\sqrt{1+e^x}$.

§ 10. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО – ЛИУВИЛЛЯ

Определение. *Линейно-неоднородным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \qquad (16)$$

Определение. *Линейно-однородным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=0. \qquad (17)$$

Будем предполагать, что функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, …., $p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\,b]$ и, следовательно, ограничены на нем. Проверим, будут ли выполнены условия теоремы существования и единственности в этом случае. Перепишем уравнение в виде

$$y^{(n)}=f(x)-p_1(x)y^{(n-1)}-p_2(x)y^{(n-2)}-\ldots-p_n(x)y=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}).$$

Функция $F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ будет непрерывной, так как непрерывны функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, …., $p_n(x)$, $f(x)$. Кроме того,

$\frac{\partial F}{\partial y}=-p_n(x)$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=-p_{n-1}(x)$, …, $\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}=-p_1(x)$, то есть частные производные также непрерывны. Таким образом, условия теоремы существования и единственности выполнены. Из нее следует, что на отрезке $[x_0-H,x_0+H]$ существует и притом единственное решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0)=y_0,\;\; y'(x_0)=y_{10},\ldots,y^{n-1}(x_0)=y_{(n-1)0}$.

Рассмотрим уравнение (17). Положим $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y$. $L(y)$ называют линейным дифференциальным оператором. Он обладает свойствами:

1. $L(ky) = kL(y)$
2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Таким образом, множество решений уравнения (17) является линейным пространством. Из свойств 1-2 следует, что линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами решений уравнения (17) является решением того же уравнения.

Рассмотрим множество функций на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Если же это равенство справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции называются линейно независимыми на $[a, b]$.

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ имеют производные до $(n$-1)-го порядка включительно. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского.

Теорема 10.1. Если (n-1) раз дифференцируемые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W(x) = 0$.

Доказательство. Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Найдем производные от левой и правой частей последнего равенства до (n-1)-го порядка включительно:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \ldots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Если функции линейно зависимы, то система линейных однородных уравнений с определителем $W(x)$ имеет ненулевое решение. Тогда определитель этой системы равен нулю для всех $x \in [a,b]$. Теорема доказана.

Теорема 10.2. Если линейно независимые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (17), то $W(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. От противного. Пусть в некоторой точке $W(x_0) = 0$. Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (17), то их линейная комбинация $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = \tilde{y}(x)$ также будет решением уравнения (17). Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы $W(x_0) = 0$, то система линейных однородных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будет иметь ненулевое решение. Мы получаем, что функция $\tilde{y}(x)$ будет решением уравнения (17), удовлетворяющим начальным условиям: $\tilde{y}(x_0) = 0, \ \ \tilde{y}'(x_0) = 0, \ldots, \tilde{y}^{\,n-1}(x_0) = 0$. Кроме того, у уравнения (17) есть еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям: $y(x) \equiv 0$. Следовательно, из теоремы существования и единственности вытекает, что $\tilde{y}(x) \equiv 0$, то есть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ линейно зависимы. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 10.3. Если линейно независимые функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения (17), то общее решение уравнения (17) есть линейная комбинация частных решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$.

Доказательство. Пусть $y(x)-$ есть общее решение уравнения (17). Мы доказали, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = \tilde{y}(x)$ также является решением уравнения (17). Рассмотрим систему линейных относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) \neq 0$ ни в одной точке, поэтому система имеет решение. Таким образом, мы нашли два решения $\tilde{y}(x)$ и $y(x)$, которые удовлетворяют одним и тем же начальным условиям. Значит по теореме существования и единственности эти решения тождественно равны. Теорема доказана.

Следствие. Линейное однородное уравнение n-го порядка (17) может иметь не более чем n линейно независимых решений.

Определение. Совокупность n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения n-го порядка называется **фундаментальной системой решений.**

Докажем, что линейное однородное уравнение полностью определяется своей фундаментальной системой решений.

Теорема 10.4. Пусть два линейных однородных уравнения n-го порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ и $y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + q_n(x)y = 0$ имеют одну и ту же фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$. Тогда $p_i(x) = q_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Эта фундаментальная система решений будет решениями уравнения $\left(p_1(x)-q_1(x)\right)y^{(n-1)}+\left(p_2(x)-q_2(x)\right)y^{(n-2)}+\ldots+\left(p_n(x)-q_n(x)\right)y=0$.
Если $p_1(x)-q_1(x)\neq 0$, то это уравнение будет уравнением (n-1)-го порядка $y^{(n-1)}+\dfrac{p_2(x)-q_2(x)}{p_1(x)-q_1(x)}y^{(n-2)}+\ldots+\dfrac{p_n(x)-q_n(x)}{p_1(x)-q_1(x)}y=0$, имеющее n линейно независимых решений. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следовательно, можно поставить вопрос о нахождении уравнения (17), имеющего заданную фундаментальную систему решений. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$,…., $y_n(x)$ фундаментальная система решений уравнения (17) . Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0.$$

Убедимся, что $y_1(x)$, $y_2(x)$,…., $y_n(x)$ являются решениями этого уравнения. Если вместо $y(x)$ подставить $y_1(x)$, то в определителе получим два одинаковых столбца, а такой определитель равен нулю. Тоже самое произойдет при подстановке вместо $y(x)$ функций $y_2(x)$,…., $y_n(x)$.
Разложим по последнему столбцу:

$$W(x)y^{(n)}-\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}\cdot y^{(n-1)}+\ldots+q_n(x)\cdot y=0.$$

Полученное уравнение и является искомым линейным однородным уравнением, имеющим заданную фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,…., $y_n(x)$.

Разделив обе части на отличный от нуля коэффициент $W(y_1, y_2, \dots y_n)$ при старшей производной, приведем его к виду (17). Отсюда, в частности, следует, что $p_1(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \dots y_n)}$.

Заметим, что определитель
$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{18}$$
равен производной от определителя Вронского $W(y_1, y_2, \dots y_n)$. Действительно, по правилу дифференцирования определителя, производная $\dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$ равна сумме по i от 1 до n определителей, отличающихся от определителя Вронского тем, что в них продифференцированы элементы i-ой строки, а остальные строки определителя Вронского оставлены без изменения. В этой сумме только последний определитель при i=n, совпадающий с определителем (18), может быть отличен от нуля. Остальные определители равны нулю, так как их i-ая и $i+1$-ая строки совпадают. Следовательно, $p_1(x) = -\dfrac{W'}{W}$. Отсюда, умножая обе части на dx и интегрируя, получим $\ln|W| = -\int p_1(x)dx + \ln|C|$ или $W = Ce^{-\int p_1(t)dt}$, или
$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \tag{19}$$
При $x = x_0$ получим $C = W(x_0)$, откуда

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \qquad (20)$$

Формулы (19) и (20), впервые полученные М.В. Остроградским и независимо от него Лиувиллем, называются формулами Остроградского-Лиувилля.

Формула Остроградского-Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0, \qquad (21)$$

если известно его одно нетривиальное решение y_1.

Фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений y_1 и y_2. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}=0.$$

Или $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}y''-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}y'+\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}y=0$.

Определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(x)\neq 0$ ни в одной точке.

Тогда функции y_1 и y_2 будут решениями уравнения:

$$y''-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)}y'+\frac{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)}y=0. \qquad (22)$$

Так как уравнения (21) и (22) имеют одинаковую фундаментальную систему решений, то $\dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)}=-p_1(x)$. Убедимся, что $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=W'(x)$.

Действительно, $W'(x)=\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1'y_2'-y_1''y_2=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$.

Таким образом, мы доказали формулу $p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$.

Но $\frac{W'(x)}{W(x)} = (\ln|W(x)|)'$, поэтому $(\ln|W(x)|)' = -p_1(x)$. Отсюда

$\ln|W| = -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt + \ln|C|$, или $W = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Подставив вместо $x = x_0$,

получим $C = W(x_0)$, откуда $W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$.

Используя эту формулу, можно, зная одно решение линейного однородного уравнения, найти второе решение. Пусть y_1 есть одно решение, тогда $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Имеем $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Разделим обе части y_1^2, получим $\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$, или

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Отсюда $y_2 = y_1 \int \frac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt} dx + C_2 y_1$.

Примеры. 1) Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми: а) $y_1 = x+2$ и $y_2 = x-2$.

Решение. По определению должны существовать числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ или $\alpha_1 x + 2\alpha_1 + \alpha_2 x - 2\alpha_2 = 0$. Отсюда получаем систему: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$. Решением этой системы служат числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, следовательно, исходные функции линейно независимы.

б) $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$.

Решение. Имеем $\alpha_1\left(x^2-x+3\right)+\alpha_2\left(2x^2+x\right)+\alpha_3(2x-4)=0$. Это уравнение равносильно системе: $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ 3\alpha_1-4\alpha_3=0\end{cases}$. Решим ее методом Гаусса. Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -6 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Восстановим систему: $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ 3\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$. Отсюда находим $\alpha_1=-2\alpha_2$, $\alpha_3=-\dfrac{3}{2}\alpha_2$. Следовательно, данная система функций будет линейно зависима.

в) $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$, $y_3=\sin 2x$.

Решение. Составим определитель Вронского для этой системы функций:

$$\begin{vmatrix}\sin x & \cos x & \sin 2x\\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x\\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x\end{vmatrix}=\sin x(4\sin x\cdot\sin 2x+2\cos x\cdot\cos 2x)-$$

$$-\cos x(-4\cos x\cdot\sin 2x+2\sin x\cdot\cos 2x)+\sin 2x\left(-\cos^2 x-\sin^2 x\right)=$$

$$=\sin x(2\sin x\cdot\sin 2x+2\cos x)-\cos x(-2\cos x\cdot\sin 2x-2\sin x)-\sin 2x=$$

$$=2\sin^2 x\cdot\sin 2x+\sin 2x+2\cos^2 x\cdot\sin 2x+\sin 2x-\sin 2x=3\sin 2x\neq 0.$$

Таким образом, данные функции линейно независимы (если бы они были линейно, определитель Вронского был бы тождественно равен нулю для всех действительных x).

2) Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, имеющее данные частные решения: $y_1=1$ и $y_2=\cos x$.

Решение. Очевидно, что функции $y_1 = 1$ и $y_2 = \cos x$ линейно независимы, поэтому искомое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0,\ -\sin x \cdot y'' + \cos x \cdot y = 0,\ \sin x \cdot y'' - \cos x \cdot y = 0.$$

3) Найти второе частное решение уравнения $xy'' + 2y' + xy = 0$, если известно одно нетривиальное решение $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$.

Решение. По формуле Остроградского-Лиувилля имеем:

$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int p_1(x)dx}$, где $p_1(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$. Тогда $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-2\ln|x|}$, $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \dfrac{C}{x^2}$. Отсюда, разделив обе части на y_1^2, получим $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{y_1^2 x^2}$. Следовательно,

$$y_2 = y_1 \int \frac{C_1}{y_1^2 x^2} dx = \frac{C_1 \sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = \frac{C_1 \sin x}{x}\left(-ctgx + C_2\right).$$

Общее решение $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 \dfrac{\sin x}{x} - \alpha_2 C_1 \dfrac{\cos x}{x} +$

$$+\alpha_2 C_1 C_2 \frac{\sin x}{x} = \tilde{C}_1 \frac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2 \frac{\cos x}{x}.$$

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{24}$$

где $p_i \in \boldsymbol{R},\ i = \overline{1,n}$.

Его частные решения могут быть найдены в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = const$. Действительно, подставляя в (24) $y = e^{\lambda x}$, $y^{(p)} = \lambda^p e^{\lambda x}$, $p = \overline{1,n}$, будем иметь $\lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + p_n e^{\lambda x} = 0$. Сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим так называемое *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0. \qquad (25)$$

Это уравнение *n*-ой степени определяет те значения λ, при которых $y = e^{\lambda x}$ является решением исходного уравнения (24) . Если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ характеристического уравнения различны, то, тем самым, найдено n решений $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots e^{\lambda_n x}$ уравнения (24). Следовательно, $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$, где C_i – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (24). Покажем, что они линейно независимы. Допустим противное, тогда $\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0$, (*) где хотя бы одно их $\alpha_i \neq 0$, например, для определенности, $\alpha_n \neq 0$. Разделим тождество (*) на $e^{\lambda_1 x}$ и продифференцировав, получим $\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \ldots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} = 0$ линейную зависимость между (n-1) показательными функциями вида e^{px} с различными показателями. Деля полученное тождество на $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ и дифференцируя, получим линейную зависимость между (n-2) показательными функциями с различными коэффициентами. Повторяя процесс n-1 раз, получим:
$\alpha_n (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)(\lambda_n - \lambda_3) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} \equiv 0$, что невозможно, так как $\alpha_n \neq 0$ по предположению, а $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Следовательно,
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$, где C_i – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (24).

Пример. Решить уравнение $y''' - y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - \lambda = 0$ имеет корни

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Следовательно, общее решение $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

Пусть среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Докажем, что если характеристическое уравнение имеет корень λ_i кратности *k*, то решениями исходного уравнения будут функции $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots x^{k-1}e^{\lambda_n x}$. Пусть уравнение (25) имеет корень $\lambda_i = 0$ кратности *k*, тогда оно имеет вид: $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-k}\lambda^k = 0$. Соответствующее линейное однородное уравнение $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-k} y^{(k)} = 0$ имеет, очевидно, частные решения $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Итак, кратному корню $\lambda_i = 0$ кратности *k* соответствует *k* линейно независимых решений: $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Если уравнение (25) имеет корень $\lambda_i \neq 0$ кратности *k*, то сделаем замену $y = e^{\lambda_i x} z$. Это преобразование сохраняет линейность и однородность уравнения, а также постоянство коэффициентов, т.к.

$$y^{(p)} = \left(e^{\lambda_i x} z\right)^{(p)} = e^{\lambda_i x}\left(z^{(p)} + p \cdot z^{(p-1)}\lambda_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)}\lambda_i^2 + \ldots + z\lambda_i^p\right)$$

и после подстановки в уравнение (24) и сокращения на $e^{\lambda_i x}$ при $z, z', \ldots, z^{(n)}$ остаются лишь постоянные коэффициенты.

Итак, преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \ldots + b_n z = 0. \qquad (26)$$

Корни характеристического уравнения (25) отличаются от корней характеристического уравнения для преобразованного уравнения (26)

$$\mu^n + b_1\mu^{n-1} + b_2\mu^{n-2} + \ldots + b_n\mu = 0 \qquad (27)$$

на слагаемое λ_i, так как между решениями $y = e^{\lambda x}$ уравнения (25) и $z = e^{\mu x}$ уравнения (26) должна быть зависимость $y = ze^{\lambda_i x}$ или $e^{\lambda x} = e^{\mu x} \cdot e^{\lambda_i x}$, откуда $\lambda = \mu + \lambda_i$. Следовательно, корню $\lambda = \lambda_i$ уравнения (26) соответствует корень $\mu_i = 0$ уравнения (27). При этом соответствии сохраняется и кратность корня, то есть корень $\mu_i = 0$ будет иметь кратность *k*.

Корню $\mu = 0$ кратности *k* соответствуют частные решения $z = 1,\ z = x,\ \ldots, z = x^{k-1}$. Следовательно, в силу зависимости $y = ze^{\lambda_i x}$ корню λ_i кратности *k* будут соответствовать *k* частных решений $y = e^{\lambda_i x}$, $y = xe^{\lambda_i x},\ \ldots,\ y = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$.

Остается показать, что решения $e^{\lambda_i x},\ xe^{\lambda_i x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_i x},\ i = \overline{1,m}$, где *m*-число различных корней λ_i характеристического уравнения, линейно независимы. Пусть функции

$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x},$

$e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_2 x},$

$\ldots$

$e^{\lambda_m x},\ xe^{\lambda_m x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_m x}$

линейно зависимы, тогда $P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_m(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0$, где $P_i(x) -$ многочлены степени *k*.

Следовательно, общее решение уравнения (24) имеет вид $y = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(C_{0i} + C_{1i}x + C_{2i}x^2 + \ldots + C_{(k-1)i}x^{k-1}\right)e^{\lambda_i x}$, где $C_{ij} -$ произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^3 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 3. Следовательно, общее решение $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)e^x$.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть комплексные числа. Так коэффициенты уравнения (24) предполагаются действительными, то комплексные корни могут быть только сопряженными: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Им соответствуют два решения $e^{(\alpha + i\beta)x},\ e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Или по формуле Эйлера $e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ и $e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Подберем линейную комбинацию так, чтобы получились действительные функции:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Докажем их линейную независимость:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha}{2}\sin 2\beta x + \beta\cos^2\beta x - \frac{\alpha}{2}\sin 2\beta x + \beta\sin^2\beta x\right) = \beta e^{\alpha x} \neq 0.$$

Таким образом, паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ соответствует решение $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda = -2 \pm i$. Следовательно, общее решение $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности *k*. Соответствующие корню $\alpha + i\beta$ решения $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $xe^{(\alpha+i\beta)x}$, $x^2e^{(\alpha+i\beta)x}$, …, $x^{(k-1)}e^{(\alpha+i\beta)x}$ можно преобразовать по формуле Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$ и, отделяя действительную и мнимую части, получим $2k$ действительных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (28)$$

Взяв действительные и мнимые части решений, соответствующих сопряженному корню $\alpha - i\beta$, мне не получим новых линейно независимых решений. Таким образом, паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности *k* соответствуют $2k$ действительных решений (28).

Пример. Решить уравнение $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i$ кратности 2. Следовательно, общее решение $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$.

§ 12. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С КВАЗИМНОГОЧЛЕНОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f(x), \qquad (29)$$

где $p_i \in \boldsymbol{R},\ i = \overline{1,n}$. Общее решение этого уравнения: $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$ есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то можно найти частные решения уравнений $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f_1(x)$ и $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f_2(x)$, тогда частное решение уравнения (29) будет равно сумме частных решений.

Рассмотрим несколько видов правой части уравнения (29).

1) Пусть правая часть уравнения (29) является многочленом степени s:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = a_0 x^S + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s, \qquad (30)$$

где $a_i \in \boldsymbol{R},\ i = \overline{0,n}$.

Если $p_n \neq 0$ (то есть $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения), то частное решение уравнения (30) можно найти в виде $y = b_0 x^S + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s$. Найдем производные:

$y' = s b_0 x^{S-1} + b_1 (s-1) x^{s-2} + \ldots + b_{s-1}$,

$y'' = s(s-1) b_0 x^{S-2} + b_1 (s-1)(s-2) x^{s-3} + \ldots + 2b_{s-2}$,

…,

подставим в уравнение (30) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений:

при x^s: $p_n b_0 = a_0 \Rightarrow b_0 = \dfrac{a_0}{p_n}$,

при x^{s-1}: $p_n b_1 + s p_{n-1} b_0 = a_1 \Rightarrow b_1 = \dfrac{a_1 - s p_{n-1} b_0}{p_n}$,

при x^{s-2}: $p_n b_2 + (s-1) p_{n-1} b_1 + s(s-1) p_{n-2} b_0 = a_2$,

из которой последовательно находим неизвестные постоянные b_i.

Пример. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$. Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = ax^2 + bx + c$, тогда $y'_{ч.н.} = 2ax + b$, $y''_{ч.н.} = 2a$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$2a - 12ax - 6b + 9ax^2 + 9bx + 9c = 2x^2 - x + 3$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

при x^2: $9a = 2$,

при x: $-12a + 9b = -1$,

при x^0: $2a - 6b + 9c = 3$.

Отсюда последовательно находим $a = \dfrac{2}{9}$, $b = \dfrac{5}{27}$, $c = \dfrac{11}{27}$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

2) Пусть $\lambda = 0$ является корнем кратности k характеристического уравнения, то есть уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-k} y^{(n-k)} = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s. \quad (31)$$

Сделав замену $y^{(k)} = z$, придем к предыдущему случаю, следовательно, существует частное решение уравнения (31), для которого $y^{(k)} = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s$, а, значит, y является многочленом степени

$s+k$, причем члены, начиная со степени $k-1$ и ниже, у этого многочлена будут иметь произвольные постоянные коэффициенты, которые могут быть выбраны равными нулю. Тогда частное решение уравнения (31) примет вид: $y = x^k\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + ... + b_s\right)$.

Пример. Решить уравнение $y'' - y' = 2 - 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^x$. Так как $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = x(ax+b) = ax^2 + bx$, тогда $y'_{ч.н.} = 2ax + b$, $y''_{ч.н.} = 2a$. Подставим эти выражения в исходное уравнение: $2a - 2ax - b = 2 - 2x$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x: $-2a = -2$,

при x^0: $2a - b = 2$.

Отсюда последовательно находим $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = 2x^2$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = C_1 + C_2 e^x + 2x^2$.

3) Пусть правая часть уравнения (29) имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = e^{px}\left(a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s\right). \quad (32)$$

Замена переменной $y = e^{px} \cdot z$ преобразует уравнение (32) к виду:

$$e^{px}\left(z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_n z\right) = e^{px}\left(a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s\right),$$ где

$q_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$ или

$$z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_n z = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s. \quad (33)$$

Частное решение уравнения (33), если $q_n \neq 0$ означает, что $\mu = 0$ не является корнем характеристического уравнения

$$\mu^n + q_1 \mu^{n-1} + q_2 \mu^{n-2} + \ldots + q_n = 0, \quad (34)$$

а, следовательно, $\lambda = p$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0$, (35)

так как корни этих уравнений связаны зависимостью $\lambda = \mu + p$.

Если $\mu = 0$ является корнем кратности k характеристического уравнения (34) , то $\lambda = p$ будет корнем кратности k характеристического уравнения (35). Тогда частные решения уравнений (32) и (33) имеют вид:

$y = x^k e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$.

Таким образом, если правая часть уравнения (29) имеет вид $e^{px}\left(a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s\right)$, то, если $\lambda = p$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение нужно искать в виде: $y = e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$. Если же $\lambda = p$ является корнем кратности k характеристического уравнения, то частное решение нужно искать в виде: $y = x^k e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$. Этот случай называют особым или резонансным.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}$. Так как $\lambda = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = e^x(ax^2 + bx + c)$, тогда $y'_{ч.н.} = e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)$ и $y''_{ч.н.} = e^x(ax^2 + 2bx + c + 4ax + b)$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$e^x(ax^2 + bx + c + 4ax + 2b + 2a - 2ax^2 - 2bx - 2c - 4ax - 2b) = e^x(x^2 + x - 3)$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^2: $-2a = 1$,

при x: $-b = 1$,

при x^0: $2a - c = -3$.

Отсюда последовательно находим $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=2$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.}=e^{x}\left(-\frac{1}{2}x^2-x+2\right)$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.}=C_1+C_2e^{2x}+e^{x}\left(-\frac{1}{2}x^2-x+2\right)$.

4) Пусть правая часть уравнения (29) имеет вид:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right), \quad (36)$$

$P(x)$ и $Q(x)-$ некоторые многочлены, $s=\max(\deg P(x),\deg Q(x))$. Преобразуем правую часть по формулам Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x}R_s(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}T_s(x), \quad (37)$$

где $R_s(x)$ и $T_s(x)-$многочлены степени s. Для каждого слагаемого правой части можно применить указанное выше правило, а именно, если $\alpha\pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в таком же виде, как и правая часть уравнения (37). Если же $\alpha\pm i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение приобретает еще множитель x^k.

Если опять вернуться к тригонометрическим функциям, то это правило можно сформулировать следующим образом: частное решение уравнения (37) ищется в виде $x^k e^{\alpha x}\left(P_s(x)\cos\beta x+Q_s(x)\sin\beta x\right)$, где $k-$кратность корня $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения, $P_s(x)$ и $Q_s(x)-$ многочлены степени s с неопределенными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение $y''+y=-\sin 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=0$ имеет чисто мнимые комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.}=C_1\cos x+C_2\sin x$. Так как $\lambda=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.}=A\cos 2x+B\sin 2x$, тогда $y'_{ч.н.}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $y''_{ч.н.}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=-\sin 2x$$

и приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

при $\cos 2x$: $-3A = -1, A = \frac{1}{3}$,

при $\sin 2x$: $-3B = 0$, $B = 0$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = \frac{1}{3}\cos 2x$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\cos 2x$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Правая часть представляет собой сумму двух квазимногочленов $3xe^{-3x}$ и $-2e^{3x}\cos x$. Так как $\lambda = -3$ и $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде суммы двух частных решений $y_{ч.н.1} = (Ax + B)e^{-3x}$ и $y_{ч.н.2} = e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$, тогда $y'_{ч.н.1} = (A - 3Ax - 3B)e^{-3x}$, $y''_{ч.н.1} = (-3A - 3A + 9Ax + 9B)e^{-3x}$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$(-6A + 9Ax + 9B)e^{-3x} + 6(A - 3Ax - 3B)e^{-3x} + 10(Ax + B)e^{-3x} = 3xe^{-3x}$, сокращаем на e^{-3x} и приравниваем коэффициенты при x и x^0:

при x: $A = 3$,

при x^0: $B = 0$. Следовательно, первое частное решение $y_{ч.н.1} = 3e^{-3x}$.

Аналогично находим $y'_{ч.н.2} = (-C\sin x + D\cos x + 3C\cos x + 3D\sin x)e^{3x}$, $y''_{ч.н.2} = (8C\cos x + 8D\sin x - 6C\sin x + 6D\cos x)e^{3x}$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$(8C\cos x + 8D\sin x - 6C\sin x + 6D\cos x)e^{3x} +$

$+ 6(-C\sin x + D\cos x + 3C\cos x + 3D\sin x)e^{3x} + 10e^{3x}(C\cos x + D\sin x) =$

$= -2e^{3x}\cos x$. Сокращаем на e^{3x} и приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

при $\cos x$: $36C + 12D = -2$,

при $\sin x$: $36D-12C=0$.

Отсюда находим $D=-\dfrac{1}{60}, C=-\dfrac{1}{20}$. Следовательно, второе частное решение $y_{ч.н.2}=e^{3x}\left(-\dfrac{1}{20}\cos x-\dfrac{1}{60}\sin x\right)$. А общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.}=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-3x}+e^{3x}\left(-\dfrac{1}{20}\cos x-\dfrac{1}{60}\sin x\right)$.

§ 13. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \tag{38}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=0, \tag{39}$$

функции $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_n(x), f(x)$ непрерывны на (a,b).

*Свойство 1.*Если $y_1, y_2,\ldots, y_n$ –фундаментальная система решений уравнения (39) и $\tilde{y}-$ частное решение уравнения (38), то $y(x)=\tilde{y}(x)+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ будет решение уравнения (38).

Доказательство.

Действительно, $L(y)=L(\tilde{y})+C_1L(y_1)+C_2L(y_2)+\ldots+C_nL(y_n)=0$. Свойство доказано.

Свойство 2. Если $\tilde{y}-$ частное решение уравнения (38), $y_1, y_2,\ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (39) и $y(x)-$ произвольное решение уравнения (38), то найдутся постоянные $C_1, C_2,\ldots, C_n$ такие, что $y(x)=\tilde{y}(x)+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, то есть это и есть общее решение уравнения (38).

Доказательство. Если $\tilde{y}(x)$ и $y(x)-$ решения уравнения (38), то $y-\tilde{y}$ будет решением уравнения (39), так как $L(y-\tilde{y})=L(y)-L(\tilde{y})=f(x)-f(x)=0$. А любое решение однородного уравнения есть линейная комбинация его фундаментальной системы решений. Свойство доказано.

Свойство 3. (метод суперпозиции)

Если $\tilde{y}_1$ – решение уравнения $L(y) = f_1(x)$, а $\tilde{y}_2$ – решение уравнения $L(y) = f_2(x)$, то $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ – решение уравнения $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Метод вариации постоянной

Рассмотрим уравнение (38). Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (39), тогда общее решение уравнения (39) будет иметь вид $y_{o.o}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$. Будем искать решение уравнения (38) в виде $y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n$. Тогда $y'(x) = C_1'(x) y_1 + \ldots + C_n'(x) y_n + C_1(x) y_1' + \ldots + C_n(x) y_n'$. Накладываем условие $C_1'(x) y_1 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0$. Далее находим

$y''(x) = C_1'(x) y_1' + \ldots + C_n'(x) y_n' + C_1(x) y_1'' + \ldots + C_n(x) y_n''$. Опять накладываем условие: $C_1'(x) y_1' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0$. И так далее

$y^{(n-1)}(x) = C_1'(x) y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} + C_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(n-1)}$.

Накладываем условие: $C_1'(x) y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0$,

$y^{(n)}(x) = C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} + C_1(x) y_1^{(n)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(n)}$. В последнем равенстве ничего не будем приравнивать к нулю и подставим выражения для всех производных в уравнение (38):

$$C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} + C_1(x) y_1^{(n)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(n)} +$$
$$p_1(x)\left(C_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(n-1)} \right) + \ldots + p_n(x)\left(C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n \right) =$$
$$= C_1 L(y_1) + \ldots + C_n L(y_n) + C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0 \\ C_1'(x) y_1' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы – определитель Вронского $W(x) \neq 0$, следовательно, можно найти $C_1', \ldots C_n'$, а, затем и сами функции $C_1, \ldots C_n$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$y_{о.н.} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Система метода вариации постоянных:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, второе уравнение – на $\cos x$ и сложим, получим $C_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, отсюда $C_2 = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} dx = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} =$

$= \ln|\sin x| + \tilde{C}_2$. Тогда $C_1' = -C_2' \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1$, $C_1 = -\int dx = -x + \tilde{C}_1$. Окончательно получаем

$y_{о.н.} = (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x$.

§ 14. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. *Общие понятия*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n), \end{cases} \tag{40}$$

удовлетворяющую начальным условиям $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = \overline{1,n}$. Систему (40) можно записать в векторном виде $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}, t)$, где $F(\vec{x}, t)$ – вектор-функция с координатами $(f_1, f_2, \ldots f_n)$, а начальные условия в виде

$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$, где $\vec{x}_0=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})$. Решением системы (40) является n-мерная вектор-функция $\vec{x}=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$. Если правые части системы (40) не зависят явно от t, то в евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $x_1,x_2,\ldots,x_n$ решение $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ определяет закон движения по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра t, который мы будем считать временем. Производная $\frac{d\vec{x}}{dt}$ будет скоростью движения точки, а $\frac{dx_1}{dt},\frac{dx_2}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt}$ – координатами скорости той же точки. При этой интерпретации система (40) называется динамической, пространство с координатами $x_1,x_2,\ldots,x_n$ фазовым, а кривая $\vec{x}=\vec{x}(t)-$фазовой траекторией.

Динамическая система (40) в заданный момент времени t определяет в пространстве $x_1,x_2,\ldots,x_n$ векторное поле скоростей. Если вектор-функция $F(\vec{x},t)$ явно зависит от t, то поле скоростей меняется с течением времени и фазовые траектории могут пересекаться. Если же вектор-функция $F(\vec{x},t)$ не зависит явно от t, то поле скоростей будет стационарно и движение будет установившемся. В этом случае, если выполнены условия теоремы существования и единственности, то через каждую точку фазового пространства будет проходить лишь одна траектория.

2. *Интегрирование системы дифференциальных уравнений.*

Рассмотрим систему (40). Ее интегрирование проводят следующим образом: дифференцируют первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{df_1}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}$$

или $$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{df_1}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}f_i$$

и, обозначив правую часть последнего равенства $F_2(t,x_1,\ldots,x_n)$, получим $\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,\ldots,x_n)$. Дифференцируя полученное равенство по t и поступая аналогично предыдущему, найдем $\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, \ldots, x_n)$. Продифференцировав $n-1$, придем к уравнению $\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, получена система из n уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{41}$$

Выражая из первых $n-1$ уравнений $x_2, \ldots, x_n$ через $t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}$ и подставляя в последнее, получим уравнение n-го порядка относительно x_1: $\frac{d^n x_1}{dt^n} = Q(t, x_1, x_1' \ldots, x_n^{(n-1)})$. (42)

Решая это уравнение, находим $x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Дифференцируя это выражение $n-1$ раз, находим $x_1', x_1'' \ldots, x_1^{(n-1)}$ и подставляем в выражение для $x_2, \ldots, x_n$, находим $x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, …, $x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Замечание 1. Если система (40) линейна, то и уравнение (42) будет линейным.

Замечание 2. В приведенных рассуждениях мы предполагали, что из первых $n-1$ уравнений системы (41) можно выразить $x_2, \ldots, x_n$. Может случиться, что $x_2, \ldots, x_n$ исключаются из меньшего числа уравнений. Тогда для определения x_1 получается уравнение, порядок которого ниже n.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + x, & y(0) = 1 \\ \frac{dz}{dy} = -4y - 3z + 2x, & z(0) = 0 \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение $y'' = y' + z' + 1$. Подставим вместо y' и z' выражения из первого и второго уравнений системы, получим: $y'' = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$, $y'' = -3y - 2z + 3x + 1$. Выразим z из первого уравнения системы: $z = y' - y - x$. Тогда $y'' = -3y - 2y' + 2y + 2x + 3x + 1$, $y'' + 2y' + y = 5x + 1$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_{1,2} = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$. Правая часть представляет собой линейную функцию. Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = Ax + B$, $y'_{ч.н.} = A$, $y''_{ч.н.} = 0$. Подставляем в уравнение: $2A + Ax + B = 5x + 1$ и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x: $A = 5$,

при x^0: $2A + B = 1$, $B = -9$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 5x - 9$. Найдем $y'_{о.н.} = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 5$, тогда $z = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 5 - e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 5x + 9 - x$ или $z = e^{-x}(C_2 - 2C_1 - C_2 x) - 6x + 14$. Подставим начальные условия: $1 = C_1 - 9$, $10 = C_1$ и $0 = C_2 - 2C_1 + 14$, $6 = C_2$. Тогда окончательно получим: $y = e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9$, $z = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14$.

3. *Системы линейных уравнений первого порядка.*

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система n линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{43}$$

Ее можно записать в матричном виде $\dot{X} = A(t)X + F(t)$, вводя обозначения: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

Эта система называется однородной, если $F(t)\equiv 0$ и неоднородной в противном случае. Если все функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ в (43) непрерывны на $[a,b]$, то в малой окрестности точки $(t_0,x_{10},\ldots,x_{n0})$, где $t_0\in[a,b]$, выполнены условия теоремы существования и единственности и, следовательно, через каждую точку проходит единственная интегральная кривая системы (43). Действительно, в этом случае правые части системы (43) непрерывны и их частные производные по всем x_j ограничены, так как они равны непрерывным на отрезке $[a,b]$ коэффициентам $a_{ij}(t)$.

Теорема 14.1. Решения однородной системы *n* линейных уравнений первого порядка образуют *n*-мерное линейное пространство.

Базис этого пространства называется *фундаментальной системой решений*. Таким образом, если $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ фундаментальная система решений линейной однородной системы, то ее общее решение имеет вид $X(t)=c_1X_1(t)+\ldots+c_nX_n(t)$ или $X(t)=C\cdot\Phi(t)$, где $\Phi(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t))$, а $C=\begin{pmatrix}c_1\\ \ldots\\ c_n\end{pmatrix}$ – постоянный вектор столбец. Матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d\Phi}{dt}=A(t)\cdot X$. Определителем Вронского набора вектор-функций $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ называется определитель матрицы $\Phi(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t))$. Имеет место теорема Лиувилля: определитель Вронского $W(t)$ набора решений системы уравнений $\dfrac{dX}{dt}=A(t)\cdot X$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{dW}{dt}=Tr\,A(t)\cdot W$ и, в частности, $W(t)=W(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} TrA(\tau)d\tau}$, (формула Остроградского-Лиувилля)

где $Tr\,A(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ – след матрицы, сумма диагональных элементов.

Из формулы Остроградского-Лиувилля следует, что определитель Вронского набора решений либо не обращается в нуль, либо равен нулю тождественно. Эти два случая в точности означают линейную зависимость и независимость набора решений соответственно. Определитель Вронского фундаментальной системы решений не обращается в нуль. В этом случае матрица $\Phi(t)$ обратима. Верно и обратное, что столбцы матричного решения $\Phi(t)$ уравнения $\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\cdot\Phi$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы, если определитель этого решения отличен от нуля хотя бы в одной точке (то есть матрица обратима хотя бы в одной точке).

Теорема 14.2. Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

Как и в случае линейного однородного уравнения, общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных в виде $X(t) = C(t)\cdot\Phi(t)$. Подстановка в систему (43) $X(t) = C(t)\cdot\Phi(t)$ и $\frac{dX}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C(t) + \frac{dC}{dt}\Phi(t)$, приводит к системе:

$\dot{\Phi}(t)\cdot C(t) + \dot{C}(t)\cdot\Phi(t) = A(t)\cdot\Phi(t)\cdot C(t) + F(t)$ или $\dot{C}(t) = \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)$.

Последнюю систему называют системой метода вариации произвольных постоянных. Из последнего уравнения интегрированием находят вектор $C(t)$. Его подстановка в общее решение однородной системы дает общее решение неоднородной системы. В указанной процедуре есть один вопрос – как найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Рассмотрим этот вопрос для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (44)$$

или $\dfrac{dX}{dt}=AX$, где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij}\in\boldsymbol{R}$, $t-$аргумент. Будем искать частное решение системы (44) в виде $x_1=b_1e^{\lambda t}$, $x_2=b_2e^{\lambda t}$, …, $x_n=b_ne^{\lambda t}$ или $X=Be^{\lambda t}$, где $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\lambda - const$.

Подставим выражения для $x_1,\dots,x_n$ и их производных в систему (44), получим $\lambda Be^{\lambda t}=ABe^{\lambda t}$. Сокращая на $e^{\lambda t}$ и перенося в одну часть, получим

$$(A-\lambda E)B=0. \tag{45}$$

Это система однородных уравнений относительно $b_1,\dots,b_n$. Для того, чтобы этой системе удовлетворяла ненулевая матрица $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ необходимо и достаточно, чтобы $\det(A-\lambda E)=0$. Это уравнение называется характеристическим уравнением системы (44), его корни называются характеристического уравнения. Рассмотрим несколько случаев.

1. Характеристическое уравнение имеет n различных действительных корней $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Для каждого корня $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ напишем систему (45) и определим коэффициенты $b_{1i},\dots,b_{ni}$. Можно показать, что один из них произвольный, его можно считать равным 1. Таким образом, получаем n решений $X_1=B_1e^{\lambda_1 t}$, $X_2=B_2e^{\lambda_2 t}$, …, $X_n=B_ne^{\lambda_n t}$, где $B_i=\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n}$.

Эти решения линейно независимы, следовательно, общее решение системы (44) имеет вид $X=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iB_ie^{\lambda_i t}$, или $x_j=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ib_{ij}e^{\lambda_i t}$, $j=\overline{1,n}$, где c_i-произвольные постоянные.

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Им соответствуют решения $X_1 = B_1 e^{(\alpha + i\beta)t}$, $X_2 = B_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$, которые могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями: $x_1 = e^{\alpha t}(b_{11}\cos\beta t + b_{12}\sin\beta t)$, $x_2 = e^{\alpha t}(b_{21}\cos\beta t + b_{22}\sin\beta t)$.
3. Среди корней характеристического уравнения есть корень λ_s кратности $k \geq 2$. Тогда соответствующее вектор-решение имеет вид:

$$X_s = \left(E + (A - \lambda_s E)t + \frac{1}{2!}(A - \lambda_s E)^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(A - \lambda_s E)^{k-1} t^{k-1} \right) A_s e^{\lambda_s t}$$

где A_s – вектор, удовлетворяющий уравнению $(A - \lambda_s E)^k \cdot A_s = 0$.

В этом случае произвольная линейная комбинация векторов вида $x_1 = b_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = b_2 e^{\lambda t}$, …, $x_n = b_n e^{\lambda t}$ и X_s составляет общее решение системы (44).

Примеры. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

Решение. Запишем систему в матричном виде: $\dot{X} = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем корни характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + 2 - \lambda - 1 - 2 + 2\lambda =$$

$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, $\quad \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, $\quad \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0$, $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Тогда частные решения:

$x_1 = b_{11}e^{2t}$, $x_2 = b_{12}e^{t}$, $x_3 = b_{13}e^{-t}$,

$y_1 = b_{21}e^{2t}$, $y_2 = b_{22}e^{t}$, $y_3 = b_{23}e^{-t}$,

$z_1 = b_{31}e^{2t}$, $z_2 = b_{32}e^{t}$, $z_3 = b_{33}e^{-t}$.

При $\lambda_1 = 2$ получаем следующую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} -b_{11} - b_{21} + b_{31} = 0 \\ -2b_{21} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{21} = 0$, $b_{11} = b_{31} = 1$.

Аналогично, при $\lambda_2 = 1$ получаем следующую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_{12} - b_{32} = 0 \\ -b_{22} + b_{32} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{12} = b_{22} = b_{32} = 1$.

И при $\lambda_3 = -1$ получаем следующую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_{13} + 2b_{23} - b_{33} = 0 \\ -5b_{23} + 3b_{33} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{33} = \frac{5}{3}b_{23}$, $b_{13} = -\frac{1}{3}b_{23}$. Можно взять $b_{23} = 3$, тогда $b_{13} = -1$, $b_{33} = 5$. Следовательно, получаем

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{t} - C_3e^{-t} \\ y = C_2e^{t} + 3C_3e^{-t} \\ z = C_1e^{2t} + C_2e^{t} + 5C_3e^{-t} \end{cases} \quad \text{или } X = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} & -e^{-t} \\ 0 & e^{t} & 3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{t} & 5e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

2) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$.

Решение. Запишем систему в матричном виде: $\dot{X} = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдем корни характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 5 + \lambda + 6 -$$

$-2(-3 + 6 + 3\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$, $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$. Подберем первый корень среди делителей свободного члена. Им будет $\lambda_1 = -1$. Разделим по схеме Горнера, получим $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$. Отсюда находим $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

При $\lambda_1 = -1$ получаем следующую матрицу:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Это соответствует одному уравнению: $a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$. Отсюда находим $a_1 = a_2 - 2a_3$. Вектор-решение, соответствующее корню $\lambda_1 = -1$ имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_2 - 2a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Аналогично, при $\lambda_2 = 3$ получаем следующую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 8 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_1 - 5b_2 + 2b_{33} = 0 \\ 3b_2 - b_{33} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_3 = 3b_2$, $b_1 = -b_2$. Можно взять $b_{23} = 1$, тогда $b_1 = -1$, $b_3 = 3$. Вектор-решение, соответствующее корню $\lambda_2 = 3$ имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Окончательно получаем

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = \begin{pmatrix} C_1(a_2 - 2a_3) \\ C_1a_2 \\ C_1a_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \\ 3C_3 \end{pmatrix} e^{3t} =$$

$= \begin{pmatrix} C_1(a_2 - 2a_3)e^{-t} - C_2e^{3t} \\ C_1a_2e^{-t} + C_2e^{3t} \\ C_1a_3e^{-t} + 3C_2e^{3t} \end{pmatrix}$, или, положив $C_1a_2 = \tilde{C}_1$, $C_1a_3 = \tilde{C}_3$, получим

$$\begin{cases} x = (\tilde{C}_1 - 2\tilde{C}_3)e^{-t} - C_2e^{3t} \\ y = \tilde{C}_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ z = \tilde{C}_3e^{-t} + 3C_2e^{3t} \end{cases}.$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений первого порядка: $\dot{X} = A(t)X$. (45)

Пусть $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ \ldots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, $\ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ являются решениями системы (45).

Теорема 14.3. Линейная комбинация решений однородной системы $\sum_{i=1}^{n} c_iX_i(t)$ также является решением этой системы.

Определение. Вектор-функции $X_1(t)$, …, $X_n(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не равные одновременно нулю такие, что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i(t)=0$. Если же это тождество справедливо лишь при $\alpha_i=0$, $i=\overline{1,n}$, то векторы называются линейно независимыми.

Определение. Определитель $W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$ называется определителем Вронского для системы вектор-функций $X_1(t)$, …, $X_n(t)$.

Теорема 14.4. Если функции $X_1(t)$, …, $X_n(t)$ линейно зависимы, то $W(t)\equiv 0$.

Теорема 14.5. Если функции $X_1(t)$, …, $X_n(t)$ являются решениями системы (45) и $W(t)=0$ хотя бы в одной точке $t=t_0$, то эти вектор функции линейно зависимы.

Доказательство. Если $W(t_0)=0$, то векторы $X_1(t_0)$, …, $X_n(t_0)$ линейно зависимы и, следовательно, найдутся числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не равные одновременно нулю, для которых $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i(t_0)=0$. Составим вектор-функцию $X^*(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i(t)$. По теореме 14.3. она удовлетворяет системе (45) и при $t=t_0$ обращается в нуль-вектор. Но по теореме существования и единственности есть только одно решение системы (45), которое при $t=t_0$ обращается в нуль. Это будет функция, тождественно равная нулю. Поэтому $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i(t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если определитель Вронского, составленный для решений системы (45) равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю.

Определение. Система n линейно независимых решений системы (45) называется ее фундаментальной системой решений.

Теорема 14.6. Фундаментальные системы решений существуют.

Доказательство. Возьмем n^2 таких чисел b_{ij}, что $\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, например, $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Составим теперь n решений системы (45), которые удовлетворяют условиям $x_{ij}(t_0) = b_{ij}, \ i, j = \overline{1, n}$, где $t_0 \in (a, b)$. Тогда определитель Вронского для этих решений не равен нулю при $t = t_0$, а поэтому по теореме 14.5. эти решения линейно независимы. Теорема доказана.

Теорема 14.7. Общее решение линейной однородной системы (45) есть линейная комбинация ее фундаментальной системы решений.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь решение $X(t)$ системы (45). Пусть при некотором значении $t = t_0$ эта вектор-функция принимает значение $X(t_0)$. Этот вектор можно разложить по векторам $X_1(t_0)$, ..., $X_n(t_0)$, так как эта система векторов линейно независима. Получим $X(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0)$. Составим теперь вектор-функцию

$X^*(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$. По теореме 14.3. она удовлетворяет системе (45) и при $t = t_0$ принимает такое же значение, как $X(t)$. Значит по теореме существования и единственности они совпадают, то есть $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$. Теорема доказана.

Теорема 14.8. Определитель Вронского $W(t)$ набора решений системы (45) удовлетворяет уравнению $\dfrac{dW(t)}{dt} = TrA(t) \cdot W(t)$ и, в частности,

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} TrA(\tau)d\tau}, \qquad (46)$$

где $TrA(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ – след матрицы.

Доказательство. По правилу дифференцирования определителей имеем:

$$\frac{dW(t)}{dt}=\begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \dots & \frac{dx_{1n}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_{n1}}{dt} & \dots & \frac{dx_{nn}}{dt} \end{vmatrix}.$$

В силу того, что $\frac{dx_{ij}}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}$, подставляя в правую часть выражения для $\frac{dx_{ij}}{dt}$ и, пользуясь тем, что определитель не меняется, если к элементам строки прибавить величины, пропорциональные элементам других строк, получим

$$\frac{dW(t)}{dt}=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & \dots & a_{11}x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}x_{n1} & \dots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)W(t).$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, получим формулу (46), которая называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Теорема 14.9. Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма любого ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

Как и в случае линейного однородного уравнения, общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Пусть $X_1(t), \dots, X_n(t)$ фундаментальная система решений однородной системы, тогда общее решение $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$.

Будем искать общее решение неоднородной системы в виде $X(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)X_i(t)$. Тогда

$\dot{X}(t)=\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\dot{X}_i(t)$. Подставляем в уравнение (45), получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\dot{X}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}A(t)c_i(t)X_i(t)+F(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\left(\dot{X}_i(t)-A(t)X_i(t)\right)=F(t).$$

Полагая $\dot{X}_i(t)-A(t)X_i(t)=0$, получим $\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)=F(t)$ систему неоднородных уравнений относительно $\dot{c}_i(t)$. Определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, есть определитель Вронского для системы функций $X_1(t)$, …, $X_n(t)$, поэтому он отличен от нуля. Значит из этой системы единственным образом определяются $\dot{c}_i(t)$. Пусть $\dot{c}_i(t)=\psi(t)$. Отсюда интегрированием находим $c_i(t)$.

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t\\ \dot{y}=2x-y-2\cos t\end{cases}.$$

Решение. Соответствующая однородная система $\begin{cases}\dot{x}=4x-3y\\ \dot{y}=2x-y\end{cases}$.

Найдем корни характеристического уравнения:

$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-1-\lambda)+6=-4-3\lambda+\lambda^2+6=\lambda^2-3\lambda+2$. Корни

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Тогда $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$,

$$x=\frac{1}{2}(\dot{y}+y)=\frac{1}{2}(C_1e^t+2C_2e^{2t}+C_1e^t+C_2e^{2t})=C_1e^t+\frac{3}{2}C_2e^{2t}.$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде:

$\begin{cases} x = A\sin t + B\cos t \\ y = C\sin t + D\cos t \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} \dot{x} = A\cos t - B\sin t \\ \dot{y} = C\cos t - D\sin t \end{cases}$. Подставляем в исходную систему:

$$\begin{cases} A\cos t - B\sin t = 4A\sin t + 4B\cos t - 3C\sin t - 3D\cos t + \sin t \\ C\cos t - D\sin t = 2A\sin t + 2B\cos t - C\sin t - D\cos t - 2\cos t \end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$:

$\begin{cases} A = 4B - 3D \\ -B = 4A - 3C + 1 \\ C = 2B - D - 2 \\ -D = 2A - C \end{cases}$. Отсюда находим $A = -2$, $B = 1$, $C = -2$, $D = 2$.

Тогда общее решение системы

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + \dfrac{3}{2} C_2 e^{2t} - 2\sin t + \cos t \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 2\sin t + 2\cos t \end{cases}.$$

Глава 5. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА И СУММЫ РЯДА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и бесконечную сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Эта сумма называется числовым рядом и обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$, a_n называется общим членом ряда.

Рассмотрим новую последовательность: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$. Эта последовательность называется последовательностью частичных сумм ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то он называется суммой ряда, а сам ряд в этом случае называется сходящимся. Пишут: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если предела не существует или он равен бесконечности, то ряд называется расходящимся.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $1-1+1-1+\ldots$

Распишем последовательность его частичных сумм: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$. То есть $S_{2k+1} = 1$, а $S_{2k} = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует, поэтому ряд расходится.

2) Рассмотрим ряд геометрической прогрессии:

$b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^{n-1} + \ldots$.

Имеем $S_n = b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^{n-1}$, $S_n q = b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^n$. Вычтем из первого равенства второе, получим $S_n - S_n q = b_0 - b_0 q^n$. Отсюда

$S_n = \dfrac{b_0(1-q^n)}{1-q}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{b_0}{1-q}, & \textit{если} \quad |q|<1 \\ \infty, & \textit{если} \quad |q|>1 \\ \textit{не сущ.}, & \textit{если} \quad q=-1. \end{cases}$$

Если $q=1$, то получаем ряд с постоянными членами: $b_0+b_0+b_0+\ldots+b_0+\ldots$. Его n-ая частичная сумма равна $S_n = nb_0 \to \infty$ при $n\to\infty$, то есть ряд расходится. Таким образом, ряд геометрической прогрессии, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_0 q^n$ сходится, если $|q|<1$ и его сумма равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_0 q^n = \frac{b_0}{1-q}$, и расходится, если $|q|\ge 1$.

3) Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n-5}$.

Разложим знаменатель на множители: $4n^2+8n-5=(2n-1)(2n+5)$, а затем общий член разложим на сумму двух дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{4n^2+8n-5} = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+5} = \frac{A(2n+5)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Приравняем числители в левой и правой частях последнего равенства: $1 = A(2n+5)+B(2n-1)$. Отсюда при $n=\frac{1}{2}$ находим $1=6A$, $A=\frac{1}{6}$. А при $n=-\frac{5}{2}$ находим $1=-6B$, $B=-\frac{1}{6}$. Тогда n-ая частичная сумма равна

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right).$$ Следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{23}{15}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right) = \frac{23}{90}.$$

Теорема 1.1. (необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится , то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1}$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. Теорема доказана.

Замечание. С помощью необходимого признака можно доказать только расходимость ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, то есть необходимое условие выполнено. Найдем n-ую частичную сумму $S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то есть ряд расходится.

§ 2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Теорема 2.1. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ причем $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и ряд сходится.

Частичная сумма первого ряда равна $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, второго ряда $S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$.

Поскольку n-ая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ равна $S''_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=S_n+S'_n$, отсюда получаем $\lim_{n\to\infty} S''_n=S+S'$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Доказательство проведем для случая с отбрасыванием. Рассмотрим следующие ряды:

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ - ряд (1),

$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}+\ldots$ - ряд (2).

Ряд (2) получен из ряда (1) путем отбрасывания m первых членов. Докажем, что они сходятся или расходятся одновременно. Рассмотрим n-ые частичные суммы этих рядов:

$S_n^{(1)}=a_1+a_2+\ldots+a_n$,

$S_n^{(2)}=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}$.

Очевидно, что $S_n^{(2)}=S_{n+m}^{(1)}-S_m^{(1)}$.

Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_{n+m}^{(1)}=S$, следовательно,

$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}=S-S_m^{(1)}$ (3), следовательно, ряд (2) тоже сходится. Если ряд (1) расходится, то ряд (2) тоже расходится. Теорема доказана.

Обозначим через $r_m=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+n}+\ldots$. Этот ряд называется m-ым остатком ряда (1). В теореме 2.2. мы доказали, что ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится m-ый остаток ряда.

Теорема 2.3. Ряд сходится тогда и только тогда, когда m-ый остаток ряда стремится к нулю при $m\to\infty$, то есть $\lim_{m\to\infty} r_m=0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, тогда по теореме 2.2. ряд $r_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+m}$ тоже сходится. Из равенства (3) вытекает, что

$r_m = S - S_m^{(1)}$. Устремим m к бесконечности, тогда $\lim\limits_{m\to\infty} S_m^{(1)} = S$ и $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$. Таким образом, если остаток сходится, то и сам ряд сходится. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$.

Докажем, что этот ряд расходится. Рассмотрим m-ый остаток ряда: $r_m = \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots > \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots\frac{1}{m+m} > m\cdot\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$, то есть $\lim\limits_{m\to\infty} r_m \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

§ 3. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. Тогда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, то есть $S_n \geq S_{n-1}$. Последовательность частичных сумм в этом случае возрастает. А возрастающая последовательность имеет предел, если она ограничена сверху. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда его последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Теорема 3.2. (первый признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд (2), причем $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Пусть $S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^{(2)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Если ряд (2) сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S = \sup\left\{S_n^{(2)}\right\}$, и $S_n^{(2)} \leq S$, но $S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \leq S$, поэтому по теореме 3.1. первый ряд сходится.

Пусть ряд (1) расходится, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^{(1)} = +\infty$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^{(2)} = +\infty$, так как $S_n^{(2)} \geq S_n^{(1)}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. (второй признак сравнения)

Пусть заданы два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд (2), причем $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Обозначим $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$. Тогда:

1) если $0 \leq K < +\infty$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
2) если $0 < K \leq +\infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Доказательство. Пусть $0 \leq K < +\infty$, то есть конечное число. По определению предела $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left| \dfrac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon$, или, $b_n(K-\varepsilon) < a_n < b_n(K+\varepsilon)$. Воспользуемся неравенством $a_n < b_n(K+\varepsilon)$ при $\forall n > N$. То есть выполнены условия теоремы 3.2., правда, начиная с некоторого номера N. Но отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда. Таким образом, из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Пусть теперь $0 < K < +\infty$. Воспользуемся неравенством $a_n > b_n(K-\varepsilon)$. Положим $\varepsilon = \dfrac{K}{2}$, тогда $a_n > \dfrac{K}{2} b_n$ при $\forall n > N$. Отсюда и из теоремы 3.2. вытекает, что если ряд (2) расходится, то и ряд (1) тоже расходится.

Пусть $K = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, то есть $\forall E > 0 \; \exists N$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} > E$, или $a_n > E b_n$, поэтому из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). Теорема доказана.

Замечание. Если $0 < K < +\infty$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Имеем $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Имеем $\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n}$ начиная с $n=2$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд тоже сходится.

§ 4. ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА, РАДИКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ, ПРИЗНАК РААБЕ

Признаки Даламбера и радикальный признак Коши основаны на сравнении ряда с положительными членами с рядом геометрической прогрессии: ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ сходится, если $|q|<1$ и расходится, если $|q|\ge 1$.

Теорема 4.1. (радикальный признак Коши)

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительные числа и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тогда:

- если $0\le q<1$, то ряд сходится;
- если $q>1$, то ряд расходится;
- если $q=1$, то неизвестно.

Доказательство. Распишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N\Rightarrow\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon$ или $q-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon$.

Пусть $0 \le q < 1$, тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q + \varepsilon = q_1 < 1$. Следовательно, $\sqrt[n]{a_n} < q_1$ или $a_n < q_1^n$ при $n > N$, где $q_1 < 1$. Таким образом, члены нашего ряда, начиная с некоторого номера N меньше членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_1 < 1$, то есть меньше членов сходящегося числового ряда, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пусть $q > 1$, тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon = q_2 > 1$. Тогда получим $\sqrt[n]{a_n} > q_2$ или $a_n > q_2^n$ при $n > N$, где $q_2 > 1$. При этом $q_2^n \to \infty$ при $n \to \infty$, следовательно, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

Пусть $q = 1$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Он расходится. Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}} =$

$$= \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\ln x}} = (\textit{по правилу Лопиталя}) \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}} = 1.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Он сходится. Найдем для него $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. (признак Даламбера)

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительные числа и существует $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:

- если $0 \le q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;

- если $q=1$, то неизвестно.

Доказательство. Распишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon$ или $q-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$.

Пусть $0\le q<1$, тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $q+\varepsilon=q_1<1$. Тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q_1$ при $\forall n>N$. Следовательно,

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q_1,\ \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<q_1,\ \dots,\ \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}<q_1.$$

Перемножим левые и правые части этих неравенств, получим:

$$\frac{a_{N+m}}{a_{N+1}}<q_1^{m-1},\ \ a_{N+m}<a_{N+1}\cdot q_1^{m-1}=a_{N+1}\cdot\frac{q_1^{N+m}}{q_1^{N+1}}.$$

Отсюда видно, что $a_n<C\cdot q_1^n$ при $\forall n>N$, причем $q_1<1$. Таким образом, члены нашего ряда, начиная с некоторого номера N меньше членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_1<1$, то есть меньше членов сходящегося числового ряда, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пусть $q>1$, тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $q-\varepsilon=q_2>1$. Тогда получим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>q_2$ при $n>N$, где $q_2>1$. Имеем

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}>q_2,\ \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}>q_2,\ \dots,\ \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}>q_2.$$

Перемножим левые и правые части этих неравенств, получим: $\dfrac{a_{N+m}}{a_{N+1}}>q_2^{m-1}$, $\quad a_{N+m}>a_{N+1}\cdot q_2^{m-1}$. Отсюда видно, что $a_{N+m}\to\infty$ при $m\to\infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости, поэтому исходный ряд расходится.

Пусть $q=1$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Он расходится. Найдем $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Он сходится. Найдем для него $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. (признак Раабе)

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ положительные числа и существует $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q$. Тогда:

- если $q>1$, то ряд сходится;
- если $q<1$, то ряд расходится;
- если $q=1$, то неизвестно.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$.

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{2}\frac{1}{2}<1,$$ следовательно, ряд сходится.

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{100^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n+1}=0<1,$$ следовательно, ряд сходится.

3) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)!}$.

Применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+1)!(2n)!(2n+1)}{(2n+2)!(2n-1)!(2n+3)}\right)=$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{6n+5}{(2n+2)(2n+3)}=\dfrac{3}{2}>1$, следовательно, ряд сходится.

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ – МАКЛОРЕНА

Теорема 5.1. Пусть функция $f(x)$ убывает на $[k;+\infty)$ и $f(x)\geq 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению имеем $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{k}^{a} f(x)dx$. Если $f(x)\geq 0$, то $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\int\limits_{k}^{a} f(x)dx$ ограничен сверху. Пусть $m\geq k$, тогда для $m\leq x\leq m+1$ имеем $f(m+1)\leq f(x)\leq f(m)$ (4).

Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$:

$f(k)+f(k+1)+\ldots f(k+n)=S_{n+1}$. Из неравенства (4) следует, что

$\int\limits_{m}^{m+1} f(m+1)dx\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(m)dx$, или, $f(m+1)\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx\leq f(m)$.

При $m=k$ имеем $f(k+1)\leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx\leq f(k)$, при $m=k+1$ имеем $f(k+2)\le \int\limits_{k+1}^{k+2} f(x)dx \le f(k+1)$,

…

при $m=k+n$ имеем $f(k+n+1)\le \int\limits_{k+n}^{k+n+1} f(x)dx \le f(k+n)$.

Сложим левые и правые части этих неравенств, получим:

$$S_{n+2}-f(k)\le \int\limits_{k}^{k+n+1} f(x)dx \le S_{n+1}. \qquad (5)$$

Если ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}=S$, $S_{n+1}\le S$. Из правой части неравенства (5) следует, что $\int\limits_{k}^{k+n+1} f(x)dx\le S$, то есть интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Если ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ расходится, то $S_{n+2}\to\infty$. Тогда из левой части неравенства (5) следует, что $\int\limits_{k}^{k+n+1} f(x)dx\to\infty$, то есть интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Теорема доказана.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$, поэтому можно по интегральному признаку Коши можно рассмотреть соответствующий несобственный интеграл: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^A=\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha}-1\right)=$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1},\ \textit{если}\ \alpha>1\\ \infty,\ \textit{если}\ \alpha<1.\end{cases}$$

Если $\alpha=1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln|x|\Big\|_1^A=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln|A|=\infty$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}\textit{сходится, если}\ \alpha>1\\ \textit{расходится, если}\ \alpha\le 1.\end{cases}$

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[2;+\infty)$, поэтому по интегральному признаку Коши можно рассмотреть соответствующий несобственный интеграл: $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln|\ln x|\Big\|_2^A=\infty$, который расходится, значит и ряд расходится.

§ 6. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. **Знакочередующимся рядом** называется ряд вида $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$ (или $-a_1+a_2-a_3+a_4-\ldots$), где $a_i\ge 0$. Его можно записать в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ (или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$).

Теорема 6.1. (признак Лейбница)

Пусть задан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geq 0$ и последовательность $\{a_n\}$, убывая, стремится к нулю при $n \to \infty$, тогда ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда с четными номерами: $S_2 = a_1 - a_2$, $S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4), \ldots$, $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots (a_{2m-1} - a_{2m})$, $S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m}$, то есть эта последовательность возрастает. Докажем, что эта последовательность ограничена сверху:

$S_{2m} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}) \leq a_1$, так как из a_1 вычитается положительное число. Мы доказали, что последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастает и ограничена сверху, следовательно, существует $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m} = S$. Далее, $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, но по условию, $\lim\limits_{m \to \infty} a_{2m+1} = 0$, поэтому $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m \to \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = S$. Последовательности частичных сумм с четными и нечетными номерами имеют одинаковый предел, следовательно, ряд сходится. Теорема доказана.

Определение. Ряды, удовлетворяющие признаку Лейбница, называются **рядами Лейбница**.

Оценим остаток ряда Лейбница.

Теорема 6.2. Для ряда Лейбница модуль n-го остатка не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов: $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Доказательство. Распишем n-й остаток ряда Лейбница: $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots$. Рассмотрим два случая:

1) $n=2m$, тогда $r_{2m} = (a_{2m+1} - a_{2m+2}) + (a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \ldots \geq 0$,
   $r_{2m} = a_{2m+1} - ((a_{2m+2} - a_{2m+3}) + (a_{2m+4} - a_{2m+5}) + \ldots) \leq a_{2m+1}$, то есть $0 \leq r_{2m} \leq a_{2m+1}$ и для четных номеров мы формулу доказали.
2) $n=2m+1$, тогда $r_{2m+1} = -a_{2m+2} + a_{2m+3} - a_{2m+4} + \ldots =$
   $= -((a_{2m+2} - a_{2m+3}) + (a_{2m+4} - a_{2m+5}) + \ldots) \leq 0$,

$r_{2m+1} = -a_{2m+2} + ((a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \ldots) \geq -a_{2m+2}$, то есть $-a_{2m+2} \leq r_{2m+1} \leq 0$ или по определению модуля $\left| r_{2m+1} \right| \leq a_{2m+2}$.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы по-разному расставляли скобки, то есть группировали члены. Можно доказать, что для сходящихся рядов это можно делать, при этом сумма ряда не меняется.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)^3}$.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $1 > \dfrac{1}{3^3} > \dfrac{1}{5^3} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(2n-1)^3} = 0$, то есть ряд сходится.

Критерий Коши для последовательностей и рядов

Теорема 6.3. (Критерий Коши для последовательностей)

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Дано: последовательность $\{x_n\}$ сходится, то есть $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. По определению предела имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left| x_n - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $\forall n > N$ и $m -$ натуральное число, то $n + m > N$, поэтому $\Rightarrow \left| x_{n+m} - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$\left| x_{n+m} - x_n \right| = \left| x_{n+m} - a + a - x_n \right| \leq \left| x_{n+m} - a \right| + \left| x_n - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $\forall n > N$ и $\forall m -$ натуральном. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < \varepsilon$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < 1$.

Возьмем $n = N+1$, тогда $\left|x_{N+m+1}\right| = \left|x_{N+m+1} - x_{N+1} + x_{N+1}\right| \le$
$\le \left|x_{N+m+1} - x_{N+1}\right| + \left|x_{N+1}\right| < 1 + \left|x_{N+1}\right|$. Мы доказали, что $\left|x_n\right| \le 1 + \left|x_{N+1}\right|$ для $n \ge N+1$. При $\forall n$ имеем $\left|x_n\right| \le \max\left(\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, \ldots, \left|x_n\right|, 1 + \left|x_{N+1}\right|\right)$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = a$. Вернемся к неравенству $\left|x_{n+m} - x_n\right| < \varepsilon$. Будем выбирать m так, чтобы $x_{n+m} = x_{n_k}$, тогда $\left|x_{n_k} - x_n\right| < \varepsilon$. В неравенстве можно переходить к пределу. Перейдем к пределу при $n_k \to \infty$, получим $\lim\limits_{n_k \to \infty}\left|x_{n_k} - x_n\right| = \left|a - x_n\right| \le \varepsilon$ для $\forall n > N$, а это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Теорема доказана.

Теорема 6.4. (Критерий Коши для рядов)

Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Применим критерий Коши для последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда. Последовательность $\{S_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon$. Но $\left|S_{n+m} - S_n\right| =$
$= \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}\right|$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$. Применим критерий Коши для рядов: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}\right|>\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+m}+\ldots+\frac{1}{n+m}=$ $=\frac{m}{n+m}$. Возьмем $m=n$, тогда $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}>\frac{1}{2}$, то есть для $\varepsilon\le\frac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется, значит ряд расходится.

Теорема 6.5. Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

Доказательство. Так как ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то по критерию Коши $\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow\left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\ldots+\left|a_{n+m}\right|<\varepsilon$. Но по свойству модуля $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right|\le\left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\ldots+\left|a_{n+m}\right|<\varepsilon$, то есть опять по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Теорема доказана.

Определение. Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то будем говорить, что сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно. Если ряд из модулей расходится, а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то будем говорить, что он сходится условно.

Пример. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Этот ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд из модулей расходится как гармонический, следовательно, этот ряд сходится условно.
Доказанная теорема 6.5. позволяет к любым рядам применять доказанные ранее признаки, например, радикальный признак Коши: если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$, то

1) если $0<q<1$, то ряд сходится абсолютно;
2) если $q>1$, то ряд расходится;
3) если $q=1$, то неизвестно.

§ 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Пусть дана последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots,u_n(x),\ldots$. Предположим, что все они определены на некотором множестве *D*. Если взять любую точку $x_0\in D$, то получится числовая последовательность $\{u_n(x_0)\}$. Можно выяснить, существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_0)$.

Определение. Множество тех *x*, для которых существует предел числовой последовательности $\{u_n(x)\}$, называется областью сходимости функциональной последовательности.
Функция $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$ называется предельной функцией.

Пример. Рассмотрим последовательность функций $\{x^n\}$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & если \quad |x|<1\\ \infty, & если \quad |x|>1\\ 1, & если \quad x=1\\ не\ сущ., & если \quad x=-1.\end{cases}$$

Следовательно, областью сходимости является промежуток (-1;1].

Предельная функция $f(x)=\begin{cases}0, & если \quad |x|<1\\ 1, & если \quad x=1.\end{cases}$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Определение. Областью сходимости функционального ряда называется множество тех x, для которых ряд сходится, то есть существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^2}}=\frac{|x|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=|x|$.

Следовательно, при $|x|<1$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ ряд расходится, при $|x|=1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится. Таким образом, областью сходимости будет отрезок [-1;1].

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве D, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in D\ \Rightarrow \left|u_n(x)-u(x)\right|<\varepsilon$.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность функций $u_n(x)=x^n$ на отрезке $|x|\le q<1$. Тогда $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. Докажем, что сходимость будет равномерной: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x: |x|\le q\Rightarrow \left|x^n\right|<\varepsilon$.

Пусть $|x|^n\le q^n<\varepsilon$. Прологарифмируем последнее неравенство: $n\ln q<\ln\varepsilon$, тогда $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}$ и в качестве N возьмем $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}\right]+1$.

2) Рассмотрим последовательность функций $u_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$.

Она определена при любых x, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0$. Докажем, что сходимость будет равномерной: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in\boldsymbol{R}$

$\Rightarrow\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|<\varepsilon$ или $\dfrac{|x|}{1+n^2x^2}<\varepsilon$. Возьмем $\forall x\in[0;+\infty)$, тогда нужно решить неравенство $\dfrac{x}{1+n^2x^2}<\varepsilon$. Найдем максимум функции $f(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ на промежутке $[0;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $f'(x)=0$ при $1-n^2x^2=0$, $x^2=\dfrac{1}{n^2}$, $x=\pm\dfrac{1}{n}$. Далее, $f'(x)>0$ при $x\in\left(0;\dfrac{1}{n}\right)$, $f'(x)<0$ при $x\in\left(\dfrac{1}{n};+\infty\right)$, следовательно, $x=\dfrac{1}{n}-$ точка максимума функции. Поэтому

$$\frac{x}{1+n^2x^2}\le\frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2n}<\varepsilon.$$ Отсюда $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$, тогда $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на множестве *D*, если его последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве.

Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости для последовательностей и рядов

Теорема 7.1. (Критерий Больцано-Коши для последовательностей) Для того, чтобы последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходилась равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D* необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$, $\forall m-$ натурального и $\forall x\in D$ $\Rightarrow\left|u_{n+m}(x)-u_n(x)\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D*. По определению это означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in D$ $\Rightarrow \left|u_n(x)-u(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $m-$ натуральное число, тогда $n+m>N$ тоже натуральное число и $\left|u_{n+m}(x)-u(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим

$\left|u_{n+m}(x)-u_n(x)\right|=\left|u_{n+m}(x)-u(x)+u(x)-u_n(x)\right|\le\left|u_{n+m}(x)-u(x)\right|+$
$+\left|u(x)-u_n(x)\right|<\varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$, $\forall m-$ натурального и $\forall x\in D$ $\Rightarrow\left|u_{n+m}(x)-u_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для любого фиксированного $x\in D$ последовательность $\{u_n(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши для числовых последовательностей и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=u(x)$. В неравенстве $\left|u_{n+m}(x)-u_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ зафиксируем $n>N$ и $x\in D$. После этого перейдем к пределу при $m\to\infty$, $u_{n+m}(x)\to u(x)$ и мы получим неравенство $\left|u(x)-u_n(x)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ при $n>N$ и $x\in D$, а это и означает, что последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D*. Достаточность доказана.

Теорема 7.2. (Критерий Больцано-Коши для рядов)

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на множестве *D*, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$, $\forall m-$ натурального и $\forall x\in D$ $\Rightarrow\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+m}(x)\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на множестве *D* к функции $S(x)$. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве к функции $S(x)$. Далее критерий Больцано-Коши для рядов вытекает из критерия Больцано-Коши для последовательностей, если учесть, что $S_{n+m}(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+m}(x)$. Теорема доказана.

Теорема 7.3. (признак Вейерштрасса)

Пусть члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ удовлетворяют неравенству $|u_n(x)|\le b_n$ на множестве D и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, тогда функциональный ряд сходится равномерно. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ называется рядом мажоранта для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то по критерию Коши для числовых рядов $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$, $\forall m-$ натурального $\Rightarrow b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{n+m}<\varepsilon$ (модуль опускаем, так как члены ряда являются положительными числами). Поскольку $|u_n(x)|\le b_n$ на множестве D, то $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+m}(x)|\le|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\ldots|u_{n+m}(x)|\le$
$\le b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{n+m}<\varepsilon$ $\forall n>N$, $\forall m-$ натурального и $\forall x\in D$. И по критерию Больцано-Коши ряд сходится равномерно. Теорема доказана.

Пример. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на отрезке [-1;1].

Так как $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на отрезке [-1;1] по признаку Вейерштрасса.

Непрерывность предельной функции и суммы ряда

Теорема 7.4. Пусть все члены последовательности $\{u_n(x)\}$ непрерывны на промежутке $(a;b)$ и последовательность сходится равномерно к функции $u(x)$, тогда функция $u(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$.

Доказательство. Так как последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на промежутке $(a;b)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in (a;b) \Rightarrow \left|u_n(x) - u(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Возьмем $n > N$ и зафиксируем, тогда функция $u_n(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in (a;b)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x : \left|x - x_0\right| < \delta$ $\Rightarrow \left|u_n(x) - u_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $\left|x - x_0\right| < \delta$.

Рассмотрим $\left|u(x) - u(x_0)\right| = \left|u(x) - u_n(x) + u_n(x) - u_n(x_0) + u_n(x_0) - u(x_0)\right| \le$ $\le \left|u(x) - u_n(x)\right| + \left|u_n(x) - u_n(x_0)\right| + \left|u_n(x_0) - u(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Здесь первое и третье слагаемые меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу равномерной сходимости, второе – в силу непрерывности $u_n(x)$. Теорема доказана.

Теорема 7.5. Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывные функции на промежутке $(a;b)$ и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет функцией, непрерывной на $(a;b)$.

Доказательство. Так как ряд сходится равномерно, то последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве к функции $S(x)$. Функция $S_n(x)$ будет непрерывной функцией как сумма конечного число непрерывных функций. Далее теорема вытекает из теоремы 7.4. Теорема доказана.

Теорема 7.6. Пусть все члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и ряд сходится равномерно на этом отрезке, тогда сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет интегрируемой на этом отрезке и $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(t)dt$, то есть равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2nx)}{n^2}$.

Так как $\left|\dfrac{\sin(2nx)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Рассмотрим ряд, составленный из производных: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{n^2} \cdot 2n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{n}$.

Подставим вместо $x = \pi$, получим числовой ряд $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который расходится. То есть равномерно сходящиеся ряды почленно дифференцировать нельзя.

Теорема 7.7. Пусть все члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные и ряд, составленный их производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $S(x)$. Ряд без производных сходится в какой-нибудь точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $S(x)$;

2) сумма этого ряда $S(x)$ будет функцией дифференцируемой и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, то есть ряд можно почленно дифференцировать.

Пример. Законно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{x}{n^2}$.

Найдем $\left(arctg\,\frac{x}{n^2}\right)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4+x^2}$ непрерывная на $\boldsymbol{R}$. Рассмотрим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$. Имеем $\frac{n^2}{n^4+x^2} \le \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно по признаку Вейерштрасса ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$ сходится равномерно. Исходный ряд сходится, например, в точке $x=1$. Действительно, так как $arctg\,\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому по второму признаку сравнения исходный ряд сходится. Следовательно, исходный ряд можно почленно дифференцировать.

§ 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды – одни из самых простейших функциональных рядов.

Определение. **Степенным рядом** называется ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Рассмотрим частный случай $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 8.1. (Абеля)

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке $|x| \le r$, где $r < |x_1|$.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_1, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Мы знаем, что сходящаяся последовательность будет ограничена, то есть существует константа M такая, что $\left|a_n x_1^n\right| \le M$ при $\forall n$. Пусть $|x| \le r$, где $r < |x_1|$, тогда $\left|a_n x^n\right| \le |a_n| r^n = |a_n| \cdot |x_1|^n \cdot \left(\frac{r}{|x_1|}\right)^n \le$

$$\le M \cdot \left(\frac{r}{|x_1|}\right)^n = M \cdot q^n, \text{ где } q = \frac{r}{|x_1|} < 1.$$

Таким образом мы доказали, что члены нашего ряда по абсолютной величине не превосходят членов геометрической прогрессии со знаменателем меньше 1, которая сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно.

Следствие. Существует число $R \ge 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости. В точках $\pm R$ нужны дополнительные исследования, так как ряд может сходиться и расходиться. Промежуток $(-R; R)$ называется интервалом сходимости.

Выведем формулы для вычисления радиуса сходимости.

Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если} < 1 \\ \text{расходится}, & \text{если} > 1. \end{cases}$$

При $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ряд сходится, при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ряд расходится.

Таким образом, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Теперь применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = |x| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \text{сходится}, & \text{если} < 1 \\ \text{расходится}, & \text{если} > 1. \end{cases}$$

При $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится, при $|x| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится. Таким образом, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Примеры. 1) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Имеем $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, то есть ряд сходится на всей числовой оси.

2) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$.

Имеем $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$.

Следовательно, при $|x-2|<1$ ряд сходится, при $|x-2|>1$ ряд расходится. Неравенство $|x-2|<1$ равносильно $-1<x-2<1$ или $1<x<3$. Исследуем сходимость ряда в концевых точках: при $x=3$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. При $x=1$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, областью сходимости будет промежуток [1;3).

3) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Имеем $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, то есть ряд сходится в одной точке $x=0$.

Теорема 8.2. Внутри промежутка сходимости сумма степенного ряда будет функцией непрерывной и поэтому интегрируемой. Ряд, полученный путем почленного интегрирования, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x a_n t^n dt$ будет сходиться к интегралу $\int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$. То есть степенной ряд можно почленно интегрировать.

Примеры. 1) Применяя почленное интегрирование, найти сумму ряда $x+2x^2+3x^3+\ldots$.

Вынесем x за скобку: $x+2x^2+3x^3+\ldots=x(1+2x+3x^2+\ldots)$ и рассмотрим ряд $1+2x+3x^2+\ldots$. Обозначим его сумму через $S_1(x)$. Проинтегрируем почленно этот ряд, получим $x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{x}{1-x}$ при $|x|<1$. Тогда $S_1(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно, сумма исходного ряда равна $x+2x^2+3x^3+\ldots=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

2) Применяя почленное интегрирование, найти сумму ряда $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$.

Имеем $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots=x(1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots)$.

Почленно проинтегрируем ряд $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots$, получим $2x+3x^2+4x^3+\ldots$. Вновь почленно проинтегрируем полученный ряд, получим $x^2+x^3+x^4+\ldots=\dfrac{x^2}{1-x}$ при $|x|<1$.

Тогда $2x+3x^2+4x^3+\ldots=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

А сумма ряда $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots=\left(\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=$

$$=\frac{(2-2x)(1-x)^2+2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2(1-x)^2+2(2x-x^2)}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Сумма исходного ряда равна $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$.

Теорема 8.3. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x|<R$, тогда внутри интервала сходимости сумма степенного ряда $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ будет функцией дифференцируемой. Ее производную можно находить

путем почленного дифференцирования, то есть $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

Ряд, полученный путем почленного дифференцирования, имеет тот же радиус сходимости, что и первоначальный.

Доказательство. Докажем сначала, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ имеют одинаковый радиус сходимости. Пусть R – радиус первого ряда, R' – радиус второго ряда из производных. Нужно доказать, что $R=R'$.

Пусть $|x|<R'$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_n x^{n-1}\right|$, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_n x^{n}\right|$, полученный путем умножения на x.

Так как $\left|a_n x^n\right|\le n\left|a_n x^n\right|$, то первый ряд будет сходиться как ряд с меньшими членами. При этом мы доказали, что $R'\le R$. Предположим, что $R'<R$. Выберем две точки x_1 и x_2 такие, что $R'<x_2<x_1<R$, тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_1^n\right|$ сходится, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n x_1^n\right|=0$, поэтому существует число M такое, что $\left|a_n x_1^n\right|\le M$ при $\forall n$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|na_n x_2^{n-1}\right|$. Оценим

$$n\left|a_n x_2^{n-1}\right|=n\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{|x_1|}\cdot\left|a_n x_1\right|^n\le n\cdot q^{n-1}\cdot\frac{M}{|x_1|},\text{ где } q=\left|\frac{x_2}{x_1}\right|<1.$$

Убедимся, что ряд $\frac{M}{|x_1|}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ сходится. Действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{nq^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot q^{1-\frac{1}{n}} = q<1$, то есть ряд сходится по радикальному признаку Коши. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n x_2^{n-1}\right|$ сходится, но $R'<x_2$, где R' – радиус сходимости любого ряда. В этой точке ряд должен расходиться. Получили противоречие, то есть $R=R'$. Далее теорема вытекает из соответствующей теоремы для функциональных рядов, так как члены степенного ряда будут функциями дифференцируемыми и на любом отрезке $|x|\le r<R$ оба степенных ряда сходятся равномерно. Теорема доказана.

Следствие. Сумма степенного ряда $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ внутри интервала сходимости будет иметь производные любого порядка, то есть будет бесконечно дифференцируемой. Производные можно находить путем почленного дифференцирования.

Доказательство. Пусть ряд $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ сходится при $\left|x-x_0\right|<R$. В предыдущей теоремы мы доказали, что $S(x)$ дифференцируема и $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$ и этот ряд тоже сходится при $\left|x-x_0\right|<R$. Снова применим теорему. Получим, что $S''(x)$ дифференцируема и $S''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ и этот ряд тоже сходится при $\left|x-x_0\right|<R$ и т.д. Следствие доказано.

Пример. Найти сумму ряда $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$.

Продифференцируем этот ряд: $1-x^2+x^4-\ldots=\dfrac{1}{1+x^2}$ при $|x|<1$. Тогда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\int\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x.$$

§ 9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Вспомним теорему Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке [a,b];
2) дифференцируема на (a,b);
3) $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Теорема 8.1. (формула Тейлора)

Пусть на отрезке $[x_0-H,x_0+H]$, где $H>0$, функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го включительно, тогда $\forall x\in(x_0-H,x_0+H)$ существует точка $c\in(x_0,x)$ такая, что

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$+r_{n+1}(x)$, где $r_{n+1}(x)=\left(\dfrac{x-x_0}{x-c}\right)^p(x-c)^{n+1}\dfrac{1}{n!\,p}f^{(n+1)}(c)$, $p>0-$остаточный член.

Рассмотрим частные случаи:

$p=n+1$, $r_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $-$остаточный член в форме Лагранжа,

$p=1$, $r_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n$ $-$остаточный член в форме Коши.

Доказательство. Имеем $r_{n+1}(x)=f(x)-$

$$-\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right).$$

Нужно найти $r_{n+1}(x)$. Возьмем $x_0<x<x_0+H$ и зафиксируем. Рассмотрим следующую функцию:

$\varphi(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, тогда $r_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x_0)$. Найдем

$$\varphi'(t)=f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-$$

$$-\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\psi(t)=f(x)-\varphi(t)-(x-t)^pQ(x)$, где $Q(x)=\dfrac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p}$.

Пусть $x_0\le t\le x$. Проверим выполнение условий теоремы Ролля. Функция $\psi(t)$ непрерывна как разность непрерывных функций. Она дифференцируема и $\psi'(t)=-\varphi'(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x)$. Найдем значения этой функции на концах отрезка $[x_0,x]$:

$$\psi(x_0)=f(x)-\varphi(x_0)-(x-x_0)^p\frac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p}=r_{n+1}(x)-r_{n+1}(x)=0,$$

$\psi(x)=f(x)-\varphi(x)=f(x)-f(x)=0$. Применим теорему Ролля: существует точка $c\in(x_0,x)$ такая, что $\psi'(c)=0$, то есть $-\varphi'(c)+p(x-c)^{p-1}Q(x)=0$, откуда $Q(x)=\dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}$. Тогда

$\dfrac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p}=\dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}$. Отсюда $r_{n+1}(x)=\dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}(x-x_0)^p$,

$$r_{n+1}(x)=\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^n\cdot\frac{(x-x_0)^p}{(x-c)^{p-1}}.$$

Запишем по другому остаточный член: $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$, тогда форма Лагранжа остаточного члена принимает вид:

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

а форма Коши: $r_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$. Теорема доказана.

Частный случай, когда $x_0 = 0$, называется формулой Маклорена.

Пример. Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n. Тогда $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = 0$ и формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

то есть $r_{n+1}(x) = 0$.

Пусть $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, $x_0 = 1$. Тогда $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $f''(x) = 6x + 4$, $f'''(x) = 6$. Вычислим $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, $f''(1) = 10$.

Следовательно, $f(x) = 3 + 6(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3$.

Задача о разложении функции в ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является суммой сходящегося степенного ряда, то есть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$.

Ряд сходится при $|x - x_0| < R$. Внутри интервала сходимости сумма ряда имеет производные любого порядка, которые можно находить путем почленного дифференцирования:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$f''(x) = 2\cdot 1 a_2 + 3\cdot 2 a_3(x - x_0) + 4\cdot 3 a_4(x - x_0)^2 + \ldots,$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1 a_3 + 4\cdot 3\cdot 2 a_4(x - x_0) + \ldots,$$

…

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x - x_0) + \ldots.$$

Подставим вместо $x = x_0$, получим $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2!a_2$,

$f'''(x_0) = 3!a_3, \ldots, f^{(n)}(x_0) = n!a_n$. В дальнейшем считаем, что 0!=1, $f^{(0)}(x) = f(x)$. Тогда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка.

Составим ряд: $f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$. Этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(x)$. В частном случае, когда $x_0 = 0$, его называют рядом Маклорена. Таким образом, доказана

Теорема 8.2. Если функция $f(x)$ есть сумма степенного ряда

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, то есть этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.

Выясним, всегда ли ряд Тейлора сходится. Покажем, что не всегда.
По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$+ r_{n+1}(x)$. Первые n+1 слагаемые представляют собой (n+1)-ую частичную сумму ряда. Ряд Тейлора будет сходиться к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) - S_{n+1}(x) = r_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 8.3. Для того чтобы ряд Тейлора сходился к функции необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора $r_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Приведем пример функции, для которой ряд Тейлора к ней не сходится. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что все производные в точке $x=0$ обращаются в нуль.

Пусть $x\neq 0$, тогда $f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{\frac{1}{e^{(\Delta x)^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

То есть $f'(0)=0$. Далее

$$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^{-3}e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=\left(\frac{1}{\Delta x}=t\right)=$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{t\to\infty}\frac{4t^3}{2te^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{2te^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t^2}}=0.$$

Мы получили, что $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$. Если использовать тот факт, что $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{t^2}}=0$, то можно доказать, что любая производная в нуле равна нулю и все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю. Если бы ряд Тейлора сходился к функции в какой-нибудь точке $x\neq 0$, то $f(x)=0$, а у нас $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0$. То есть ряд Тейлора ни в какой точке не сходится к функции.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

Разложение функции $y=e^x$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции: $y'=y''=\ldots=y^{(n)}=e^x$. Тогда $a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$ и ряд Тейлора принимает вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Найдем область сходимости ряда:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, то есть ряд сходится при всех x. Отсюда, в частности, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}=0$.

Докажем, что ряд Маклорена сходится к функции $y=e^x$. Воспользуемся формулой Маклорена:

$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\left|\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\dfrac{|x|^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, мы доказали, что $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Разложение функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции $y=\sin x$**:**

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,\ y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$y^{(n)}(0)=\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$. Если $n=2k$, то $y^{(2k)}(0)=\sin(\pi k)=0$, если $n=2k+1$, то $y^{(2k+1)}(0)=\sin\left(\pi k+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\pi k=(-1)^k$. Далее, так как $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, то находим $a_{2k}=0$, $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. Поэтому,

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Найдем область сходимости ряда:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)=\infty$, то есть ряд сходится при всех x.

Докажем, что ряд Маклорена сходится к функции $y=\sin x$. Оценим остаточный член: $r_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sin\left(\theta x+\dfrac{\pi(n+1)}{2}\right)\cdot\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\left|r_{n+1}(x)\right|=\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$. Таким образом, мы доказали, что $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Продифференцируем левую и правую части предыдущего равенства, получим:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\ \text{для } \forall x\in\boldsymbol{R}.$$

Пример. Вычислить $\cos 1$ с точностью до 0,001.

$\cos 1=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{8!}-\ldots=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{720}+r$, причем $|r|<\dfrac{1}{8!}$. Тогда $\cos 1\approx 1-0{,}5+0{,}042=0{,}542\pm 0{,}001$.

Разложение логарифмической функции $y=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции

$y'=(1+x)^{-1}$, $y''=-(1+x)^{-2}$, $y'''=2\cdot 1(1+x)^{-3}$, $y^{(4)}=-3\cdot 2\cdot 1(1+x)^{-4}$, …, $y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Тогда $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $a_0=\ln 1=0$. То есть

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

Выясним, где ряд сходится:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$. При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=-1$ получаем ряд $-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\ldots-\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\ldots=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится. Следовательно, область сходимости $(-1;1]$.

Докажем, что на всей области он сходится к функции $y=\ln(1+x)$.
Найдем остаточный член:

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n n!(1+\theta x)^{-(n+1)}x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|r_{n+1}(x)\right|=\frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{|1+\theta x|}\right)^{n+1}.$$

Нужно доказать, что $\left(\dfrac{|x|}{|1+\theta x|}\right)^{n+1}$ ограничена.

Если $0\le x\le 1$, то $\dfrac{|x|}{|1+\theta x|}\le 1$ и, значит, $r_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$. То есть на этом промежутке мы доказали, что ряд сходится к функции.

Пусть $-1<x<0$. Воспользуемся формулой Коши для остаточного члена:

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}=\frac{(-1)^n n!(1+\theta x)^{-(n+1)}(1-\theta)x^{n+1}}{n!},$$

$$\left|r_{n+1}(x)\right|=\frac{(1-\theta)^n|x|^n}{|1+\theta x|^n}\cdot\frac{|x|}{|1+\theta x|}\le\left|\frac{(1-\theta)|x|}{1+\theta x}\right|\cdot\frac{|x|}{|1+\theta x|}.$$

При $-1<x<0$ $\dfrac{(1-\theta)|x|}{1+\theta x}\le\dfrac{1-\theta}{1-\theta}=1$, так как $1+\theta x>1-\theta$, поэтому $r_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$ при $x\in(-1;1]$.

Примеры. 1) Разложить функцию $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд по степеням x и указать область сходимости.

Имеем $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots$ при $-1<-x\le 1$, то есть $-1\le x<1$. Тогда $y=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ при $-1<-x<1$.

2) Вычислить приближенно $\ln 3$.

Пусть $\ln 3=\ln\frac{1+x}{1-x}$, тогда $\frac{1+x}{1-x}=3$, $1+x=3-3x$, $4x=2$, $x=\frac{1}{2}$, следовательно, $\ln 3=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8\cdot 3}+\frac{1}{32\cdot 5}+\frac{1}{128\cdot 7}+\ldots\right)=$

$$=2(0{,}5+0{,}042+0{,}00625+0{,}0011+\ldots)\approx 1{,}099.$$

Биномиальный ряд

Рассмотрим функцию $y=(1+x)^{\alpha}$. Найдем ее производные:

$y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, y''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\ldots,$

$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Тогда

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Пусть $\alpha=m$, где $m-$натуральное число. Тогда $y^{(m+1)}=y^{(m+2)}=\ldots 0$. В этом случае формула Тейлора дает точную формулу:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots + x^m.$$

Пусть α – ненатуральное число. Получим биномиальный ряд

$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. Выясним, где он сходится. Найдем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|} = 1.$$

Биномиальный ряд сходится при любом α и $|x|<1$. На концах исследовать не будем, так как это зависит от α.

Докажем, что биномиальный ряд сходится к функции $y=(1+x)^\alpha$. Оценим остаток ряда в форме Коши:

$$\left|r_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)x^{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x^n\right|\cdot|\alpha|\cdot|x|\cdot|1+\theta x|^{\alpha-1}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n.$$

Заметим, что $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x^n\right| \to 0$ при $n\to\infty$ и $|x|<1$ как общий член ряда с показателем $\alpha-1$. Докажем, что остальные сомножители ограничены, тогда ряд будет сходиться к функции. Имеем

$|\alpha|\cdot|x|\cdot|1+\theta x|^{\alpha-1} \le C$, $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \left|\frac{1-\theta}{1-\theta}\right|^n = 1$. Таким образом,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \text{ при } |x|<1.$$

Применение степенных рядов для приближенных вычислений

Пусть число A представлено в виде ряда $A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$. Взяв конечное число слагаемых, можно приближенно найти A: $A \approx a_1$, $A \approx a_1 + a_2$, $A \approx a_1 + a_2 + a_3, \ldots$. Нужно научиться оценивать ошибку, беря конечное число слагаемых.

Пусть $A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + r_{n+1}$. Нужно оценить $\left|r_{n+1}\right|$. Легко оценивается остаток для рядов Лейбница: $\left|r_{n+1}\right| \le \left|a_{n+1}\right|$. Остаток можно оценить, используя формулу Тейлора.

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Имеем $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots.$$

Так как $\frac{1}{35280} < 0{,}001$, то $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - 0{,}0556 + 0{,}0017 = 0{,}946 \pm 0{,}001$.

2)Разложить в ряд Тейлора функцию $y = arctg\, x$ и вычислить приближенно π.

Найдем

$$y' = (arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

$|x| < 1$. Тогда

$$arctg\, x = \int_0^x (arctg\, t)' dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \text{ при } |x| < 1.$$

Пусть $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $arctg\, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 + \ldots =$

$= 0{,}57735 - 0{,}06415 + 0{,}01283 - 0{,}00305 + r_5$, где $r_5 < \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9$.

Тогда $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52298$, а $\pi \approx 3{,}13788$.

3)Вычислить приближенно *e*.

Имеем $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \ldots =$$

$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}166667 + 0{,}041667 + 0{,}008333 + 0{,}001389 + 0{,}000198 +$$

$$+ 0{,}000025 + 0{,}000003 + r_{10}.$$

$$e \approx 2{,}718282 .$$

.

ПРИЛОЖЕНИЕ

<table>
<tr><th colspan="5">ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ</th></tr>
<tr><th colspan="4">ФОРМУЛЫ (c, n = const – постоянные)</th><th>ПРАВИЛА</th></tr>
<tr><th colspan="2">Элементарные функции</th><th colspan="2">Сложные функции</th><th></th></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$f'(x)$</td><td>$f(u)$</td><td>$f'(u)$</td><td rowspan="4">Постоянный множитель можно выносить за знак производной:
$(c \cdot u)' = c \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>c</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$n\,x^{n-1}$</td><td>u^n</td><td>$n\,u^{n-1} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$\sqrt{u}$</td><td>$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$</td><td>Производная суммы/разности
$(u \pm v)' = u' \pm v'$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x} = x^{-1}$</td><td>$-\frac{1}{x^2}$</td><td>$\frac{1}{u} = u^{-1}$</td><td>$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$</td><td></td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>e^x</td><td>e^u</td><td>$e^u \cdot u'$</td><td></td></tr>
<tr><td>a^x $(a>0)$</td><td>$a^x \cdot \ln a$</td><td>a^u $(a>0)$</td><td>$a^u \cdot \ln a \cdot u'$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\ln x$</td><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$\ln u$</td><td>$\frac{1}{u} \cdot u'$</td><td rowspan="2">Производная произведения
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$</td></tr>
<tr><td>$\log_a x$</td><td>$\frac{1}{x \cdot \ln a}$</td><td>$\log_a u$</td><td>$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\sin x$</td><td>$\cos x$</td><td>$\sin u$</td><td>$\cos u \cdot u'$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\cos x$</td><td>$-\sin x$</td><td>$\cos u$</td><td>$-\sin u \cdot u'$</td><td rowspan="4">Производная частного
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg} x$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$\operatorname{tg} u$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{ctg} x$</td><td>$-\frac{1}{\sin^2 x}$</td><td>$\operatorname{ctg} u$</td><td>$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\arcsin x$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$\arcsin u$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\arccos x$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td><td>$\arccos u$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$</td><td rowspan="3">Производная сложной функции
$y = f(g(x)), \quad u = g(x),$
$y' = f'_u(g'_x(x))$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{arctg} x$</td><td>$\frac{1}{1+x^2}$</td><td>$\operatorname{arctg} u$</td><td>$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{arcctg} x$</td><td>$-\frac{1}{1+x^2}$</td><td>$\operatorname{arcctg} u$</td><td>$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$</td></tr>
</table>

Функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Логарифмическое дифференцирование (функция в степени функции)

$$\ln y = \ln u^{v} = v \cdot \ln u \quad => \quad (\ln y)' = (v \cdot \ln u)' \quad =>$$

$$\boldsymbol{y' = y \cdot (v' \cdot \ln u + v \cdot u'/u)}$$

Уравнение касательной:	**Уравнение нормали:**
$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$	$\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{(x - x_0)}{y_0'}}$

Угловой коэффициент, тангенс угла наклона: $y_x' = tg\varphi = k$

Дифференциалы функции: $dy = y_x'\, dx$

$dy^2 = y_{xx}''\, dx^2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный курс лекций – долголетний опыт работы автора со студентами очной формы обучения технических специальностей.

Опыт показал, что для студентов очной форы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала, поэтому большое внимание уделено доступному изложению именно теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса.

Студенты первых двух курсов сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим детально разобраны примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа, т. 1. – СПб. : Лань, 2001. 978-5-8112-775-3

2. Ильин, В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М. : Физматлит, 2014. – 648 с. – ISBN 978-5-9221-0902-4.

3. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В.А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-8334-X.

4. Валиков, К. В. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2004. – 200 с. – ISBN 5-89368-479-6.

5. Виноградова, И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : пособие для университетов, пед. вузов : в 2 ч. / под ред. В.А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2001. – Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – 725 с. : ил. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-4294-5 (ч. 1).

6. Скляренко, В. А., Трубина О. И. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: практикум. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2008. – 72 с. – ISBN 978-5-89368-844-3.

7. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 8-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 576 с. : ил. – (Высшее образование) – ISBN 978-5-8112-3681-7.

8. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие в 3 ч. Ч. 2 / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть В. Е. – Мн. : Выс. шк., 1991. – 352 с. : ил. – ISBN 5-339-00327-2.

9. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения – М. : ЛКИ, 2013. – 312 с. – ISBN 978-5-382-01491-3.

10. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М. : ЛКИ, 2016. – 512 с. – ISBN 978-5-382-01622-1.

11. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Едиториал УРСС, 2018. – 336 с. – ISBN 978-5-971-05729-1.

12. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 2000. – 100 с. – ISBN 5-93972-008-0.

13. Собакин, В. П., Трубина О. И., Филинова Е. В. Числовые и функциональные ряды : практикум / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 56 с. – ISBN 5-89368-443-5.

Учебное электронное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

Автор-составитель
КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт прикладной математики, физики и информатики
кафедра функционального анализа и его приложений
krashola2012@yandex.ru