Владимирский государственный университет

М. С. БЕСПАЛОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Практикум

Владимир 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

М. С. БЕСПАЛОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Практикум

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2023

УДК 517.9
ББК 22.161.8
Б53

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математики Национального исследовательского
технологического университета «МИСИС»
А. А. Давыдов

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры физико-математического образования и
информационных технологий
Владимирского государственного университета имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Беспалов, М. С.
Б53 Решение задач по методам оптимизации и вариационному исчислению : практикум / М. С. Беспалов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : ВлГУ, 2023. – 104 с.

ISBN 978-5-9984-1550-0

Приводятся решения типовых задач по разделам курса “Методы оптимизации и вариационное исчисление”, а также задачи для самоподготовки.

Предназначено для студентов направления подготовки 02.03.01 и 02.04.01 – Математика и компьютерные науки, а также аспирантов математических, информационных, технических и экономических специальностей, занимающихся методами оптимизации сложных систем и теорией управления.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 517.9
ББК 22.161.8

ISBN 978-5-9984-1550-0

Предисловие

Процесс оптимизации составляет основу научных исследований в технике, экономике, естествознании и математике. Теория оптимизации продолжает бурно развиваться, что отражается на формировании разделов курса математики для преподавания в экономических вузах, втузах и университетах. Базовые понятия теории оптимизации как основы современного математического образования закладываются при изучениии дисциплины "Методы оптимизации и вариационное исчисление", которая встречается и под другими названиями.

Методы оптимизации в пособии рассматриваются в классическом варианте в виде экстремальных задач функций многих переменных. Рассматриваются безусловная и условная оптимизации для гладких задач. В качестве примера современного подхода представлены элементы выпуклого анализа.

Основную часть дисциплины составляет вариационное исчисление. В качестве введения в курс вариационного исчисления предложены элементы функционального анализа. Задачи расположены в порядке их усложнения, начиная с простейшей задачи и постепенным добавлением новых условий. При решении вариационных задач также подключается метод Лагранжа, который рассмотрен в первых параграфах главы "Экстремальные задачи".

Предмет "Методы оптимизации и вариационное исчисление" традиционно изучается на старших курсах бакалавриата или в магистратуре, так как для его восприятия нужны базовые знания нескольких математических дисциплин: математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, функционального анализа.

Полученные знания и компетенции проявляются в умении решать задачи. Особенностью данного курса служит то, что внешне схожие задачи с единой общей схемой решения в процессе изучения материала начинают включать в себя новые дополнительные моменты анализа и построения схемы решения. Таким образом, идет процесс активации прежних знаний и подключения новых. Причем студенты приучаются к использованию сокращенных обозначений тех понятий, которые на младших курсах они привыкли расписывать подробно. Следовательно, данный курс является естественной продвинутой ступенью глубокого математического образования.

Теоретическая часть курса содержит простые и естественные математические основы, которые сопровождаются довольно громоздкими выкладками при проведении подробных доказательств. Поэтому в процессе преподавания дисциплины для подготовки специалистов более широкого профиля делается упор не на теорию, а на практику.

В условиях дистанционного обучения весь материал, который обычно излагается в аудитории преподавателем, был подготовлен в виде образцов решения задач с объяснением тех вопросов, которые возникали у слушателей. Поскольку возможны разные подходы к решению задач по выбранной теме, то в качестве примеров приведены несколько задач с разными приемами решения. Именно этим данное пособие и отличается от традиционных учебников, где тема сопровождается, как правило, одним примером. По каждой теме также приведены примеры задач для самостоятельного решения с указаниями и ответами в конце главы. Вместе с разобранными примерами предложено более 200 задач. Многие из них встречаются в различных курсах и книгах и закрепились как основные примеры на данную тему. В пособии много новых оригинальных примеров; например, задачи первого параграфа второй главы.

При преподавании дисциплины за основу взята книга Э. М. Галеева [4], которая является переработкой учебника В. М. Алексеева, Э. М. Галеева, В. М. Тихомирова [1]. Вместе с ней данное пособие составляет полный комплекс учебно-методических материалов для преподавания дисциплины “Методы оптимизации и вариационное исчисление” магистрантам-математикам. Задания для контрольных мероприятий берутся из набора предложенных задач.

Глава 1

Экстремальные задачи

1.1. Безусловная гладкая оптимизация

Задачей *гладкой оптимизации* называется задача на экстремум для класса дифференцируемых функций.

К простейшему типу таких задач относятся задачи оптимизации на всем рассматриваемом пространстве. Задачи оптимизации без дополнительных ограничений называются задачами *безусловной* оптимизации.

Следующая ступень классификации данных задач – по размерности пространства X, на котором рассматривается исследуемая функция (или функционал). Задачи для функций одной переменной были представлены в курсе математического анализа. Дальнейшим их обобщением служат конечномерные экстремальные задачи без ограничений.

1.1.1. Постановка задачи

Итак, рассматривается $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция нескольких (или одной при $n = 1$) действительных переменных. В более общем случае $f : X \to \mathbb{R}$. Задание исследовать функцию на экстремум будем записывать $f(x) \to extr$, что означает требование найти все локальные экстремумы (минимумы и максимумы) и глобальные (абсолютные) экстремумы.

Точка $\tilde{x} \in X$ называется точкой *локального минимума* данной задачи и обозначается $\tilde{x} \in locmin f$, если существует окрестность $U_{\tilde{x}}$ этой точки такая, что $f(x) \geq f(\tilde{x})$ для всех x из этой окрестности. Если же $f(x) \leq f(\tilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности $U_{\tilde{x}}$, то пишем $\tilde{x} \in locmax f$ и называем $\tilde{x}$ точкой *локального максимума* . Все точки локального минимума и локального максимума составляют множество точек локального экстремума, что обозначаем $\tilde{x} \in locextr f$ для каждой точки (слово “локальный” часто опускают).

Для нормированного пространства X окрестность обычно берется в виде открытого шара $U_{\tilde{x}} = \{x \mid \|x - \tilde{x}\| < \epsilon\}$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ берется евклидова норма $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$.

Точка $\tilde{x} \in X$ называется точкой *глобального минимума* этой задачи, если $f(x) \geq f(\tilde{x})$ для всех $x \in X$, что обозначаем $\tilde{x} \in absmin$. В этом случае $f_{\min} = f(\tilde{x})$. Во многих задачах $f_{\min}$ не достигается в конкретной точке, может быть конечным числом (тогда корректней обозначать f_{inf} – точная нижняя грань) или $-\infty$. Аналогично $\tilde{x} \in X$ называется точкой *глобального максимума* этой задачи, если $f(x) \leq f(\tilde{x})$ для всех $x \in X$, что обозначаем $\tilde{x} \in absmax$, а $f_{\max} = f(\tilde{x})$.

1.1.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной переменной

Полагаем $f(x)$ дифференцируемой, что обозначаем $f \in D(\mathbb{R})$.

Теорема 1, Ферма (необходимое условие экстремума).

Если $\tilde{x} \in locextrf$, то $f'(\tilde{x}) = 0$.

Условие равенства нулю производной не является достаточным, что демонстрируется примером $f(x) = x^3$, для которого $f'(0) = 0$.

Определение 1. Требование $f'(x) = 0$ называется *условием стационарности*, а точки, удовлетворяющие этому требованию, называются *стационарными точками.*

Теорема 2 (достаточное условие экстремума второго порядка).

Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$. Если $f'(\tilde{x}) = 0$ и $f''(\tilde{x}) > 0$, то $\tilde{x} \in locminf$. Если $f'(\tilde{x}) = 0$ и $f''(\tilde{x}) < 0$, то $\tilde{x} \in locmaxf$.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума второго порядка).

Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$. Если $\tilde{x} \in locminf$, то $f'(\tilde{x}) = 0$ и $f''(\tilde{x}) \geq 0$. Если $\tilde{x} \in locmaxf$, то $f'(\tilde{x}) = 0$ и $f''(\tilde{x}) \leq 0$.

Обобщением теоремы 2 служит следующая теорема.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума).

Пусть $f \in D^{2m}(\mathbb{R})$ и $f'(\tilde{x}) = f''(\tilde{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\tilde{x}) = 0$. Если $f^{(2m)}(\tilde{x}) > 0$, то $\tilde{x} \in locminf$. Если $f^{(2m)}(\tilde{x}) < 0$, то $\tilde{x} \in locmaxf$.

Аналогично строится обобщение теоремы 3 с заменой строгого неравенства на нестрогое: при условии $f'(\tilde{x}) = f''(\tilde{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\tilde{x}) = 0$ из $\tilde{x} \in locminf$ вытекает $f^{(2m)}(\tilde{x}) \geq 0$, а из $\tilde{x} \in locmaxf$ вытекает $f^{(2m)}(\tilde{x}) \leq 0$.

Схема решения задачи для дважды дифференцируемой функции.

1. Составляем условие стационарности $f'(x) = 0$ и находим все стационарные точки x_k.

2. Для каждой стационарной точки вычисляем $f''(x_k)$.

Если $f''(x_k) > 0$, то $x_k \in locmin$; если $f''(x_k) < 0$, то $x_k \in locmax$; если $f''(x_k) = 0$, то требуется дополнительное исследование (через старшие производные).

3. Исследуем функцию на глобальный экстремум. Для этого обычно приходится считать $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Также часто применяем теорему Вейерштрасса для непрерывных функций на компакте.

Теорема 5, Вейерштрасса. *Непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на замкнутом ограниченном множестве V (на компакте) достигает в некоторых точках своего наибольшего и наименьшего значений на V.*

Для функции одной переменной используем следующее следствие.

Следствие 1. *Если $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, то $f_{\min}$ достигается в одной из точек локального минимума. Если $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, то $f_{\max}$ достигается в одной из точек локального максимума.*

Приведем примеры решения задач.

Пример 1.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \to extr.$

Решение. Из условия стационарности $6x^2 - 6x = 0$ найдем стационарные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Найдем $f''(x) = 12x - 6$ и ее знак в каждой из стационарных точек $f''(0) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$. Значит, $0 \in locmax$, $1 \in locmin$.

Вычислим $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 3x^2) = -\infty$ и $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 3x^2) = +\infty$.

Ответ. $0 \in locmax$, $1 \in locmin$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 2.

$f(x) = x^4 + x^3 \to extr.$

Решение. Из условия стационарности $4x^3 + 3x^2 = 0$ найдем стационарные точки $x_1 = -\frac{3}{4}$ и $x_2 = 0$.

Найдем $f''(x) = 12x^2 + 6x$ и ее знак в каждой из стационарных точек: $f''(-3/4) = 9/4 > 0$, $f''(0) = 0$. Значит, $-\frac{3}{4} \in locmin$. В точке $x = 0$ продолжим исследование $f'''(x) = 24x + 6$, $f'''(0) = 6 > 0$.

Поскольку первая ненулевая производная в точке $x = 0$ нечетного порядка, то $0 \notin locextr$.

На глобальный экстремум считаем $\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 + x^3) = +\infty$. По следствию 1 точка $-\frac{3}{4}$ служит точкой глобального минимума. Вычислим $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{27}{256}$.

Ответ. $0 \notin locextr$, $-\frac{3}{4} \in absmin$; $f_{\min} = -\frac{27}{256}$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 3.

$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x \to extr.$

Решение. $f'(x) = (x^2+x+1)'e^x + (x^2+x+1)(e^x)' = (x^2+3x+2)e^x$; приравняв ее к нулю, найдем стационарные точки $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$.

Найдем $f''(x) = (x^2+5x+5)e^x$ и ее знак в каждой из стационарных точек $f''(-2) = -e^{-2} < 0$, $f''(-1) = \frac{1}{e} > 0$. Значит, $-2 \in locmax$, $-1 \in locmin$.

Вычислим $\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^x = 0$ и $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)e^x = +\infty$. Заметим, что $f(x) > 0$ всегда.

Ответ. $-2 \in locmax$, $-1 \in locmin$; $f_{inf} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

1.1.3. Необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных

В сокращенном виде для $f \in D^2(\mathbb{R}^n)$ необходимые и достаточные условия экстремума записываются теми же теоремами 1, 2 и 3. Существенно меняется трактовка применяемых обозначений.

Запись $f'(x) = 0$ для функции n переменных трактуется как равенство нулю градиента этой функции в точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или равенства нулю всех ее частных производных (в этой точке)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{1.1}$$

Условие (1.1) называется *условием стационарности*. Решения системы (1.1) называются *стационарными точками*.

Если $f'(x)$ – это вектор градиента, то $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ – матрица вторых производных (матрица Гессе), которая симметрична. Будем обозначать буквой A ее значение в стационарной точке. И рассмотрим толкование сокращенных обозначений $A > 0$, $A < 0$, $A \geq 0$

и $A \le 0$ для нее (а точнее, для квадратичной формы, заданной этой матрицей).

Симметричная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ задает *квадратичную форму*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = (Ax, x) = x^T A x,$$

где предложен ее развернутый вид, векторный вид через скалярное произведение и матричный вид для x в виде столбца.

Определение 2.

Матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если

$$(Ah, h) > 0 \qquad \text{для всех ненулевых } h \in \mathbb{R}^n.$$

Матрица A называется *отрицательно определенной* ($A < 0$), если

$$(Ah, h) < 0 \qquad \text{для всех ненулевых } h \in \mathbb{R}^n.$$

Матрица A называется *неотрицательно определенной* ($A \ge 0$), если

$$(Ah, h) \ge 0 \qquad \text{для всех } \ h \in \mathbb{R}^n.$$

Матрица A называется *неположительно определенной* ($A \le 0$), если

$$(Ah, h) \le 0 \qquad \text{для всех } \ h \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть матрица A диагональная. Все ее диагональные элементы положительны при $A > 0$, все ее диагональные элементы отрицательны при $A < 0$, на диагонали кроме положительных есть нулевые элементы при $A \ge 0$, на диагонали кроме отрицательных есть нулевые элементы при $A \le 0$. Если же на диагонали встречаются элементы разных знаков, то матрица A общего вида (*знакопеременная*).

В общем случае тип матрицы можно определить по критерию Сильвестра без вычисления ее собственных чисел. Для этого введем следующие понятия.

Главным минором порядка k матрицы A называется определитель ее подматрицы, выделенной из нее k строками и k столбцами с одинаковыми номерами. *Последовательными главными минорами* матрицы A (которые будем обозначать M_k) называются определители ее подматриц, выделенных из нее начальными строками и столбцами.

Теорема 6, критерий Сильвестра. *Пусть A симметрична. Матрица A положительно определена ($A > 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры положительны $M_k > 0$.*

Матрица A отрицательно определена ($A < 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с минуса, то есть $(-1)^k M_k > 0$.

Матрица A неотрицательно определена ($A \geq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны.

Матрица A неположительно определена ($A \leq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры нечетного порядка неположительны, а четного – неотрицательны.

Схема решения задачи на безусловную оптимизацию.

1. Составляем условие стационарности $f'(x) = 0$ и находим все стационарные точки $S_k \in \mathbb{R}^n$.

2. Вычисляем матрицу Гессе $f''(x)$ и ее конкретный вид A для каждой стационарной точки S_k.

Если $A > 0$, то точки $S_k \in locmin$; если же $A < 0$, то $S_k \in locmax$; если $A \geq 0$, то в точке S_k может быть $locmin$, если $A \leq 0$, то в точке S_k может быть $locmax$, но еще требуется дополнительное исследование; если A знакопеременная, то $S_k \notin locextr$.

3. Исследуем функцию на глобальный экстремум. Для этого считаем $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ по всем направлениям. Если этот предел равен ∞ с фиксированным знаком, то применяем следствие 1 из теоремы Вейерштрасса.

1.1.4. Примеры решения гладких задач на экстремум

Пример 4.

$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy \to extr.$

Решение. I. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3x.$$

Запишем условие стационарности, приравняв их к нулю,

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0, \\ -3y^2 + 3x = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} y = -x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$ Подставим первое во второе $x - x^4 = 0$, или $x(1-x^3) = 0$. Получим два возможных значения для x и два решения системы (стационарные точки): $(0,0)$ и $(1,-1)$.

II. Составим матрицу Гессе (матрицу вторых производных)

$$G = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Исследуем в стационарных точках.

В точке $(0,0)$: $G|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ последовательные главные миноры равны $M_1 = 0$, $M_2 = -9 < 0$. Значит, матрица общего вида, она не относится ни к одному из четырех выделенных типов. Поэтому точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума (т. е. $(0,0) \notin locextr$).

В точке $(1,-1)$: $G|_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ главные миноры $M_1 = 6 > 0$, $M_2 = 36 - 9 = 27 > 0$. Поскольку они все положительны, то матрица положительно определенная. Поэтому $(1,-1) \in locmin$.

III. Исследуем на глобальный экстремум.

Устремим $x \to +\infty$ при $y = 0$ и получим $f \to +\infty$.

Устремим $x \to -\infty$ при $y = 0$ и получим $f \to -\infty$.

Ответ. $(0,0) \notin locextr$, $(1,-1) \in locmin$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 5.

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to extr.$

Решение. I. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2.$$

Запишем условие стационарности, приравняв их к нулю,

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$ – координаты стационарной точки.

II. Составим матрицу Гессе (матрицу вторых производных)

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последовательные главные миноры равны $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = 3 > 0$, $M_3 = 6 > 0$. Значит, $G > 0$ и $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) \in locmin$.

III. Исследуем на глобальный экстремум. Выделим полные квадраты у функции

$$f = (\frac{x}{2} - y)^2 + (\frac{3x^2}{4} + x) + (z^2 - 2z) = (\frac{x}{2} - y)^2 + (\frac{x}{2} + 1)^2 + (z-1)^2 + \frac{x^2}{2} - 2.$$

Очевидно, что $f(x, y, z) > -2$ всюду и $\lim_{|(x,y,z)| \to \infty} = +\infty$. Значит, точка $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ локального минимума доставляет и глобальный минимум. Вычислим $f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.

Ответ. $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) \in absmin$; $f_{\min} = -\frac{4}{3}$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 6.

$f(x, y) = x^2 - 4xy^2 + 3y^4 \to extr$.

Решение. I. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -8xy + 12y^3.$$

Запишем и решим условие стационарности

$$\begin{cases} 2x - 4y^2 = 0, \\ -8xy + 12y^3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y^2, \\ 4y(2x - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения при $y = 0$ получим стационарную точку $(0, 0)$, а при $2x - 3y^2 = 0$ сравнением с первым уравнением придем к ней же.

II. Составим матрицу Гессе $G = \begin{pmatrix} 2 & -8y \\ -8y & 36y^2 \end{pmatrix}$ и ее вид в стационарной точке $(0, 0)$: $A = G|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку матрица неотрицательно определена ($A \geq 0$), то необходимое (но не достаточное) условие минимума выполнено. Причем $f(0, 0) = 0$.

III. В малой окрестности стационарной точки $(0, 0)$ вычислим значение $f(2y^2, y) = 4y^4 - 8y^4 + 3y^4 = -y^4 < 0$ в точках на параболе $x = 2y^2$. Значит, $(0, 0) \notin locmax$.

Предостережем от упрощенного (и неверного) исследования по всем прямым, проходящим через стационарную точку $(0,0)$: $y = kx$ и $x = 0$. Для $y = kx$ имеем $f(x, kx) = x^2(3k^4x^2 - 4k^2x + 1) > 0$ при x, отличных от нуля, но малых по модулю. На прямой $x = 0$ имеем $f = y^4$. Из этого исследования напрашивается (неверный) вывод о том, что (якобы) $(0,0)$ есть точка локального минимума.

То же наблюдение $f(2y^2, y) = -y^4 < 0$ применим при исследовании на глобальный экстремум для вывода $f_{\min} = -\infty$. С другой стороны, $f(0, y) = y^4 > 0$ влечет $f_{\max} = \infty$.

Ответ. $(0,0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.1.5. Задачи безусловной гладкой оптимизации

В задачах без ограничений найти все стационарные точки (или оценить их количество и расположение в задаче 1.8), исследовать их на экстремум, указать все локальные и глобальные точки минимума и максимума, вычислить максимальное и минимальное значения функции (или точную верхнюю и нижнюю грани).

1.1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \to extr.$

1.2. $f(x) = x^6 - 6x^5 \to extr.$

1.3. $f(x) = x^5 - 5x^4 \to extr.$

1.4. $f(x) = x^2 e^x \to extr.$

1.5. $f(x) = x^3 e^x \to extr.$

1.6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \to extr.$

1.7. $f(x) = (arctg\, x)^3 \to extr.$

1.8. $f(x) = arctg\, x \, \sin x \to extr.$

1.9. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 4x \to extr.$

1.10. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y \to extr.$

1.11. $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2 - 12x - 8y \to extr.$

1.12. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \to extr.$

1.13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 \to extr.$

1.14. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2} \to \ extr.$

1.15. $f(x,y) = \sin x - y^2 \to \ extr.$

1.16. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - x + 2z \to \ extr.$

1.17. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy + 2xz + 3yz - x \to \ extr.$

1.18. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy + 2yz - x \to \ extr.$

1.19. $f(x,y) = 3x + 2y - x^3 - y^2 \to \ extr.$

1.20. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^4 \to \ extr.$

1.21. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \to \ extr.$

1.22. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2 \to \ extr.$

1.23. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 \to \ extr.$

1.24. $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y) \to \ extr.$

1.25. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) \to \ extr.$

1.26. $f(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z) \to \ extr.$

1.2. Условная гладкая оптимизация

Условная гладкая оптимизация на прямой – это задачи на наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, которые в рамках этого курса не рассматриваем.

Общая постановка задачи для некоторой замкнутой $D \subset \mathbb{R}^n$

$$f(x) \to extr \quad \text{при условии } x \in D.$$

К данному типу задач относятся задачи линейного программирования, которые также не включены в этот курс. Рассмотрим задачи, где область D задается набором уравнений или неравенств, а для решения применяется *метод множителей Лагранжа.*

1.2.1. Условная оптимизация с ограничениями в виде равенств

Постановка задачи

$$f_0(x) \to extr \quad \text{при ограничениях } f_i(x) = 0, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Схема решения задачи.

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x; \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x).$$

В этой сумме не могут все множители Лагранжа λ_k (которые считаем параметрами функции L, зависящей от x) равняться нулю.

2. Записываем условие стационарности $L'(x) = 0$, которое расписывается в виде системы $\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$.

3. Дополняем условие $L'(x) = 0$ уравнениями связи $f_i(x) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Решаем систему сначала в особом случае $\lambda_0 = 0$ (при котором обычно не получаем решение), а потом – в основном случае $\lambda_0 = 1$ (для задачи на минимум, вместо единицы можно взять любое положительное число) и $\lambda_0 = -1$ (для задачи на максимум). Каждое решение представляет собой стационарную точку $\tilde{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ и набор множителей Лагранжа λ_k.

4. Исследуем все стационарные точки на экстремум. Это можно сделать непосредственной проверкой близлежащих точек, выписав при-

ращение функции. Другой способ – проверкой условия второго порядка: вычисляем матрицу Гессе в стационарной точке $A = L''(\tilde{x})$ и касательное пространство $K = \{h \in \mathbb{R}^n \mid (f_i'(\tilde{x}), h) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$.

Если матрица Гессе A положительно определена на касательном пространстве

$$(Ah, h) > 0 \quad \text{для всех ненулевых } h \in K,$$

то $\tilde{x} \in locextr$ (locmin в случае $\lambda_0 = 1$ и locmax в случае $\lambda_0 = -1$).

Если это достаточное условие неверно, то проверяем необходимое условие неотрицательной определенности матрицы Гессе A на касательном пространстве K. Невыполнение этого условия будет означать, что $\tilde{x} \notin locextr$. В случае его выполнения возвращаемся к непосредственной проверке в близлежащих точках.

5. Исследуем на глобальный экстремум. Если область D, заданная условиями связи $f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m$, ограниченная и замкнутая (компакт), то по теореме Вейерштрасса считаем значения во всех точках локального минимума (отдельно максимума) и сравниваем для выбора точки глобального минимума (максимума). Если область D неограраниченная, то вычисляем предел целевой функции $f(x)$ при стремлении по всем допустимым направлениям в бесконечность. Это нужно для обнаружения ограниченности целевой функции снизу или сверху. Если таковая есть, то применяем следствие 1 из теоремы Вейерштрасса.

Следует учитывать, что какие-то из этих пунктов в отдельных случаях окажутся труднорешаемыми. Тогда ответ задачи будет неполным.

1.2.2. Решения задач на экстремум с ограничениями в виде равенств

Пример 7. Задача с одним равенством.
$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 \to extr$
при условии $x + y = 1$.
Решение. I. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0(x^2 + 2xy + 2y^2) + \lambda_1(x + y - 1).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0(2x + 2y) + \lambda_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0(2x + 4y) + \lambda_1.$$

Запишем условие стационарности

$$\begin{cases} \lambda_0(2x + 2y) + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_0(2x + 4y) + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

и повторим условие связи $x + y = 1$.

II. Решим сначала особый случай $\lambda_0 = 0$. Получим $\lambda_1 = 0$, что невозможно (не могут все множители Лагранжа равняться нулю).

Для основного случая возьмем, например, $\lambda_0 = 1$

$$\begin{cases} 2(x + y) + \lambda_1 = 0, \\ (2x + 4y) + \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Подставим в эту систему также условие связи и получим

$$\begin{cases} 2 + \lambda_1 = 0, \\ 2 + 2y + \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Итак, $\lambda_1 = -2$, $y = 0$. Из условия связи $x = 1$.

Вычислим $f(1, 0) = 1$ – значение в стационарной точке.

Если возьмем $\lambda_0 = -1$, то аналогично $\lambda_1 = 2$ и та же стационарная точка.

III. Исследуем на экстремум в стационарной точке через матрицу Гессе

$$G = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 & 2\lambda_0 \\ 2\lambda_0 & 4\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_0 = 1$ получим $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = 4 > 0$; значит, матрица $A > 0$ положительно определенная. В стационарной точке $(1, 0)$ локальный минимум.

Значит, при $\lambda_0 = -1$ эти вычисления можно не повторять.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Перепишем целевую функцию $f = (x + y)^2 + y^2$ с выделением полного квадрата. Отсюда $f(x, y) \geq 0$ всегда.

При стремлении к бесконечности в каждом из двух направлений вдоль условия связи получим из этого же представления $f \to +\infty$. Значит, $(1,0) \in absmin$ и $f_{\max} = +\infty$.

Ответ. $(1,0) \in absmin$; $f_{\min} = 1$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 8. Задача с двумя ограничениями.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 \to extr$$

при условиях

$$x + y + z = 1, \quad 2x + 2y - 2z = 1.$$

Решение. I. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(2x + 2y - 2z - 1).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda_0 y + \lambda_1 + 2\lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda_0 z + \lambda_1 - 2\lambda_2.$$

Запишем условие стационарности

$$\begin{cases} 2\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 y + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 z + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

и повторим условия связи

$$x + y + z = 1, \quad 2x + 2y - 2z = 1.$$

II. Решим сначала особый случай $\lambda_0 = 0$. Получим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что невозможно (не могут все множители Лагранжа равняться нулю).

Для случая $\lambda_0 = 1$ получим $x = y = -\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2$, $z = -\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2$. Подставим $x = y$ в условия связи: $2x + z = 1$, $4x - 2z = 1$. Решим их как систему уравнений и получим $x = \frac{3}{8}$, $z = \frac{1}{4}$. Нашли $M(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$.

Из системы

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -\frac{3}{4}, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

найдем множители Лагранжа $\lambda_1 = -\frac{5}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{16}$.

Для случая $\lambda_0 = -1$ меняются знаки всех множителей Лагранжа, а стационарная точка та же.

III. Составим матрицу Гессе

$$G = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_0 = 1$ эта матрица $A = G|_M$ положительно определенная. Значит, в стационарной точке $M(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$ локальный минимум.

При $\lambda_0 = -1$ имеем $A < 0$, что ничего не дает.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Имеем $f = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ всегда.

При стремлении к бесконечности в каждом из двух направлений вдоль условия связи (по прямой как линии пересечения двух плоскостей) получим $f \to +\infty$. Значит, точка M есть точка и глобального минимума, а $f_{\max} = +\infty$. Вычислим $f(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}) = \frac{11}{32}$.

Ответ. $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}) \in absmin$; $f_{\min} = \frac{11}{32}$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 9. Иллюстрация особого случая.

$$f(x, y) = x - y \to extr$$

при условии

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0.$$

Решение. I. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0(x - y) + \lambda_1(x^2 - 2xy + y^2).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 + \lambda_1(2x - 2y), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\lambda_0 + \lambda_1(-2x + 2y).$$

Запишем условие стационарности $\lambda_0 + 2\lambda_1(x - y) = 0$, где оба уравнения совпали. Повторим условие связи $x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

При особом случае $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$ имеем $x = y$. При этом условие связи выполняется, а целевая функция равна нулю.

Предлагается самостоятельно показать, что случай $\lambda_0 = 1$, названный основным, противоречит условию связи.

Ответ. Вдоль прямой $y = x$ целевая функция постоянна и равна нулю, $f_{\min} = f_{\max} = 0$.

Этот немного странный пример демонстрирует, что и особым случаем $\lambda_0 = 0$ пренебрегать не следует. В более сложных примерах взаимосвязь целевой функции и условий связи может существовать, но не быть столь наглядной.

1.2.3. Условная оптимизация с ограничениями в виде неравенств

Постановка задачи

$f_0(x) \to extr$ при ограничениях
$f_i(x) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, m_1$ (в виде равенств; могут отсутствовать),
$f_i(x) \leq 0$, где $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m$ (и в виде неравенств).

Схема решения задачи

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x; \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x).$$

В этой сумме не могут все множители Лагранжа λ_k равняться нулю.

2. Записываем набор условий:

а) стационарности $L'(x) = 0$;

б) дополняющей нежесткости $\lambda_i f_i(x) = 0$ только для неравенств при $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m$;

в) неотрицательности множителей Лагранжа $\lambda_i \geq 0$ для неравенств при $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m$.

3. Дополняем этот набор условий соотношениями связи $f_i(x) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m_1$ и $f_i(x) \leq 0$ при $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m$. Систему полученных уравнений (неравенства проверяются потом) решаем сначала в особом случае $\lambda_0 = 0$ (что соответствует локальным как минимуму, так и максимуму), а потом – в двух основных случаях: $\lambda_0 = 1$ (для задачи на минимум) и $\lambda_0 = -1$ (для задачи на максимум). Каждое решение представляет собой стационарную точку $\tilde{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ и набор множителей Лагранжа λ_k, удовлетворяющих выписанным неравенствам.

Замечание. Каждое условие дополняющей нежесткости рассматриваем как два альтернативных варианта равенства нулю одного из сомножителей. При одном условии вида *б* решение распадается на два случая; при двух условиях вида *б* решение распадается на четыре случая; при трех условиях вида *б* решение распадается на восемь случаев и т. д. При этом часто возникают повторы полученных решений.

4. Исследуем все стационарные точки на экстремум. Первый способ – непосредственной проверкой близлежащих точек: выписываем приращение функции и оцениваем.

Второй способ – проверкой условия второго порядка: вычисляем матрицу Гессе в стационарной точке $A = L''(\tilde{x})$ и составляем конус допустимых направлений $K = \{h \mid (f_i'(\tilde{x}), h) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m_1$, $(f_i'(\tilde{x}), h) \leq 0$ при $i = m_1 + 1, \ldots, m\}$.

Если матрица Гессе A (строго) положительно определена на конусе допустимых направлений, что записывается

$$(Ah, h) \geq \alpha \|h\|^2 \quad \text{для всех } h \in K$$

для некоторого набора множителей Лагранжа, удовлетворяющих условиям *а, б, в*, то $\tilde{x} \in locextr$ (locmin в случае $\lambda_0 = 1$ и locmax в случае $\lambda_0 = -1$), так как выполнено достаточное условие экстремума.

Замечание. Проверка условия $A > 0$ понятна, так как проводится по критерию Сильвестра, а проверка ограничения этого условия на конус допустимых направлений K не имеет четкой схемы решения.

Если достаточное условие экстремума не имеет место, то проверяем необходимое условие неотрицательной определенности матрицы A на конусе допустимых направлений $(Ah, h) \geq 0 \quad \text{для всех } h \in K$. Невыполнение этого условия означает, что $\tilde{x} \notin locextr$. В случае его выполнения возвращаемся к непосредственной проверке в близлежащих точках.

5. Исследуем на глобальный экстремум. Если область D, заданная условиями связи, ограниченная и замкнутая (компакт), то по теореме Вейерштрасса считаем значения во всех точках локального минимума (отдельно максимума) и сравниваем между собой для выбора точки глобального минимума (максимума). Если область D неограниченная, то вычисляем предел целевой функции $f(x)$ при стремлении по всем допустимым направлениям в бесконечность. Это нужно для обнаружения ограниченности целевой функции снизу или сверху. Если таковая есть, то применяем следствие 1 из теоремы Вейерштрасса.

1.2.4. Решения задач на экстремум с ограничениями в виде неравенств

Пример 10. Задача с одним неравенством.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \to extr$$

при условии $\quad x + 2y \leq 1.$

Решение. I. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0(x^2 + y^2) + \lambda_1(x + 2y - 1).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 2x + \lambda_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 2y + 2\lambda_1.$$

Запишем три условия: стационарности

$$\begin{cases} 2x\lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ 2y\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости

$$\lambda_1(x + 2y - 1) = 0$$

и неотрицательности для множителя Лагранжа

$$\lambda_1 \geq 0.$$

II. Решим особый случай $\lambda_0 = 0$. Получим $\lambda_1 = 0$, что невозможно (не могут все множители Лагранжа равняться нулю).

Для основного случая возьмем сначала $\lambda_0 = 1$ для исследования на минимум. Получим из условия стационарности

$$x = -\frac{\lambda_1}{2}, \quad y = -\lambda_1.$$

Из условия дополняющей нежесткости получим два случая *(а, б)*, которые рассмотрим отдельно:

$$\text{а)}\quad \lambda_1 = 0$$

влечет стационарную точку $(0, 0)$, которая служит точкой глобального минимума, так как $f(0, 0) = 0$ и $f(x, y) \geq 0$ всегда;

$$\text{б)}\quad x + 2y - 1 = 0,$$

решение которого

$$-\frac{\lambda_1}{2} - 2\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{2}{5} < 0,$$

что противоречит условию неотрицательности множителя Лагранжа.

Теперь для основного случая возьмем $\lambda_0 = -1$ для исследования на максимум. Получим из условия стационарности

$$x = \frac{\lambda_1}{2}, \quad y = \lambda_1.$$

Из условия дополняющей нежесткости получим два случая:
а) $\lambda_1 = 0$ влечет стационарную точку $(0, 0)$, которая уже исследована;
б) $x + 2y - 1 = 0$, решение которого

$$\frac{\lambda_1}{2} + 2\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{2}{5}, \quad x = \frac{1}{5},\ y = \frac{2}{5}.$$

III. Для второй стационарной точки $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ проверим условия второго порядка. Составим матрицу Гессе

$$A = G|_{(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})} = \left.\begin{pmatrix} 2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}\right|_{\lambda_0 = -1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Она отрицательно определенная, а достаточным условием служит противоположное – неотрицательная определенность. Значит, это не точка максимума.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Имеем $f = x^2 + y^2 \geq 0$ всегда.

При стремлении к бесконечности в каждом из возможных направлений получаем, что $f \to +\infty$. Значит, $f_{\max} = +\infty$.

Ответ. $(0, 0) \in absmin$, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \notin locmax$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

Пример 11. Задача с несколькими неравенствами.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \to extr$$

при условиях $\quad x + 2y \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$

Решение. I. Функция Лагранжа (где условия: $-x \leq 0$ и $-y \leq 0$)

$$L = \lambda_0(x^2 + y^2) + \lambda_1(x + 2y - 1) - \lambda_2 x - \lambda_3 y.$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0 2x + \lambda_1 - \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 2y + 2\lambda_1 - \lambda_3.$$

Запишем три условия: стационарности

$$\begin{cases} 2x\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ 2y\lambda_0 + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости

$$\begin{cases} \lambda_1(x + 2y - 1) = 0, \\ \lambda_2 x = 0, \\ \lambda_3 y = 0 \end{cases}$$

и неотрицательности для множителей Лагранжа

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0.$$

II. Решим особый случай $\lambda_0 = 0$. Получим

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1, \\ \lambda_3 = 2\lambda_1. \end{cases}$$

При этом варианте $\lambda_1 = 0$ невозможно, так как это влечет равенство нулю всех множителей Лагранжа.

Альтернатива в виде $\lambda_1 > 0$ влечет равенство нулю вторых множителей в каждом уравнении системы дополняющей нежесткости

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Полученная система несовместна.

Для основного случая возьмем сначала положительное $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ для исследования на минимум. Получим из условия стационарности

$$x = \lambda_2 - \lambda_1, \quad y = \lambda_3 - 2\lambda_1.$$

Из условия дополняющей нежесткости получим восемь случаев, которые следует рассмотреть отдельно. Первые четыре случая

$$a) \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0; \end{cases} \quad b) \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad c) \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ x = 0, \\ \lambda_3 = 0; \end{cases} \quad d) \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

приведут к одной и той же стационарной точке $(0, 0)$ с тремя нулевыми множителями Лагранжа. Как и в предыдущей задаче это точка глобального минимума.

Следующие четыре случая получим заменой первого условия системы (1.2)

$$e) \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0; \end{cases} \qquad f) \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ x = 0, \\ \lambda_3 = 0; \end{cases} \qquad h) \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Случай *e* соответствует случаю *б* из примера 10 и приводит к стационарной точке $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ и $\lambda_1 = -\frac{1}{5} < 0$, что противоречит условию неотрицательности множителя λ_1.

Случай *f* приводит к стационарной точке $(1, 0)$ и $\lambda_1 = -1 < 0$, что противоречит условию неотрицательности множителя λ_1.

Случай *g* приводит к стационарной точке $(0, \frac{1}{2})$ и $\lambda_1 = -\frac{1}{4} < 0$, что противоречит условию неотрицательности множителя λ_1.

Случай h рассмотрен выше и не приводит к стационарной точке (противоречивая система).

Итак, других локальных минимумов, кроме $(0, 0)$, нет.

Теперь для основного случая возьмем отрицательное $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ для исследования на максимум. Получим из условия стационарности

$$x = \lambda_1 - \lambda_2, \quad y = 2\lambda_1 - \lambda_3.$$

Из условия дополняющей нежесткости получим восемь случаев, которые рассмотрим отдельно. Первые четыре из них (1.2) приводят к одной и той же стационарной точке $(0, 0)$, которая уже исследована как точка минимума.

Следующие четыре случая e, f, g, h выписаны выше.

Случай e приводит к стационарной точке $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ и $\lambda_1 = \frac{1}{5} > 0$.

Случай f приводит к стационарной точке $(1, 0)$ и $\lambda_1 = 1$.

Случай g приводит к стационарной точке $(0, \frac{1}{2})$ и $\lambda_1 = \frac{1}{4}$.

Случай h рассмотрен выше и не приводит к стационарной точке (противоречивая система).

III. С помощью матрицы Гессе исследование полностью не проходит. Поэтому проверим в трех полученных стационарных точках непосредственно, рассматривая возможные смещения от стационарной точки.

Стационарная точка с координатами $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$. Конус допустимых направлений определяется как развернутый угол со сторонами по прямой $x - 2y = 1$ с вершиной в этой точке. Крайние смещения соответствуют перемещению по сторонам этого угла и выражаются переходом к близлежащим точкам на прямой влево и вправо

$$x = \frac{1}{5} - 2\varepsilon,\ y = \frac{2}{5} + \varepsilon,$$

где ε малое, но с разными знаками (в зависимости от выбранной стороны угла). Подставим в целевую функцию

$$f = (\frac{1}{5} - 2\varepsilon)^2 + (\frac{2}{5} + \varepsilon)^2 = \frac{1}{5} + 5\varepsilon^2 > \frac{1}{5} = f(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}).$$

Значит, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \notin locmax$, так как происходит рост значения функции.

Стационарная точка с координатами $x = 1$, $y = 0$ служит вершиной треугольника допустимых планов (который желательно нарисовать).

Крайние смещения или по оси Ox влево, или по наклонной $x+2y-1$ влево и вверх имеют вид

$$x = 1-\varepsilon,\ y = 0 \quad \text{или } x = 1-\varepsilon,\ y = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этих крайних смещений при малых $\varepsilon > 0$

$$f(1-\varepsilon, 0) < f(1-\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}) = (1-\varepsilon)^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2 = 1 - 2\varepsilon + \frac{5\varepsilon^2}{4} < 1 = f(1,0).$$

Значит, $(1,0) \in locmax$.

Аналогично для точки $(0, \frac{1}{2})$ наиболее проблемные близлежащие точки на границе конуса: $x = 2\varepsilon,\ y = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$. Для них

$$f(2\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{5\varepsilon^2}{4} < \frac{1}{4} = f(0, \frac{1}{2}).$$

Значит, $(0, \frac{1}{2}) \in locmax$.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Область допустимых планов – компакт (замкнутая и ограниченная). Поэтому глобальный экстремум достигается в точках локального экстремума и вычисляется простым сравнением значений функции в этих точках

$$f(1,0) = 1 < f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Ответ. $(0,0) \in absmin$, $(1,0) \in absmax$, $(0, \frac{1}{2}) \in locmax$, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \notin locmax$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 1$.

Пример 12. Ограничения в виде равенства и неравенства.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 \to extr$$

при условиях $x + y + z = 3,\ 2x + y - 3z \leq 5$.

Решение. I. Функция Лагранжа

$$L = \lambda_0(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_1(x + y + z - 3) + \lambda_2(2x + y - 3z - 5).$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda_0 y + \lambda_1 + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda_0 z + \lambda_1 - 3\lambda_2.$$

Запишем три условия: стационарности

$$\begin{cases} 2\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 y + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 z + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости

$$\lambda_2(2x + y - 3z - 5) = 0$$

и неотрицательности для множителя Лагранжа

$$\lambda_2 \geq 0.$$

II. Решим особый случай $\lambda_0 = 0$. Получим из условия стационарности $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что недопустимо.

Для основного случая возьмем сначала $\lambda_0 = 1$ для исследования на минимум. Получим из условия стационарности

$$\begin{cases} 2x = -\lambda_1 - 2\lambda_2, \\ 2y = -\lambda_1 - \lambda_2, \\ 2z = -\lambda_1 + 3\lambda_2. \end{cases}$$

Условие дополняющей нежесткости разобьем на два случая:
а) $\lambda_2 = 0$ и б) $2x + y - 3z - 5 = 0$.

Для случая *а* имеем $x = y = z = -\frac{\lambda_1}{2}$. Подставим в условие связи $x + y + z = 3$ и получим стационарную точку $S(1, 1, 1)$ с $\lambda_1 = -2$.

Для случая *б* имеем систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y - 3z = 5, \end{cases} \tag{1.3}$$

в которой переменные выразим через лямбду

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(-\lambda_1 - 2\lambda_2) + \frac{1}{2}(-\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{1}{2}(-\lambda_1 + 3\lambda_2) = 3, \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(-\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{3}{2}(-\lambda_1 + 3\lambda_2) = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}\lambda_1 = 3, \\ -7\lambda_2 = 5. \end{cases}$$

Это решение не подходит, так как $\lambda_2 < 0$.

Другой вариант основного случая $\lambda_0 = -1$ для исследования на максимум. Получим из условия стационарности

$$\begin{cases} 2x = \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 2y = \lambda_1 + \lambda_2, \\ 2z = \lambda_1 - 3\lambda_2. \end{cases}$$

Условие дополняющей нежесткости разобьем на те же два случая: а) $\lambda_2 = 0$ и б) $2x + y - 3z - 5 = 0$.

Для случая *а* имеем равенство $x = y = z = \frac{\lambda_1}{2}$, которое подставим в условие $x + y + z = 3$ и получим ту же стационарную точку $S(1, 1, 1)$, но с другим $\lambda_1 = 2$.

Для случая *б* в той же системе (1.3) выразим переменные через лямбду

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 3\lambda_2) = 3, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{3}{2}(\lambda_1 - 3\lambda_2) = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}\lambda_1 = 3, \\ 7\lambda_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{5}{7}$. Получим стационарную точку $Q(\frac{12}{7}, \frac{19}{14}, -\frac{1}{14})$.

III. Вычислим матрицу Гессе, которая окажется диагональной, с $2\lambda_0$ на диагонали. Если $\lambda_0 = 1$, то $G|_S > 0$ и $(1, 1, 1) \in locmin$.

Для стационарной точки Q при $\lambda_0 = -1$ имеем $A = G|_Q < 0$. Значит, по всем малым смещениям (а не только в конусе K) от точки Q значение целевой функции уменьшается, следовательно, $Q \notin locmax$.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Целевая функция ограничена снизу нулем, а область не ограничена. Поэтому глобальный минимум достигается в точке локального минимума $f_{\min} = f(1, 1, 1) = 3$ и функция неограниченно растет.

Ответ. $(1, 1, 1) \in absmin$, $(\frac{12}{7}, \frac{19}{14}, -\frac{1}{14}) \notin locmax$; $f_{\min} = 3$, $f_{\max} = +\infty$.

1.2.5. Задачи условной гладкой оптимизации

В задачах с ограничениями найти все стационарные точки, исследовать их на локальный и глобальный экстремумы.

2.1. $x^2 + y^2 \to extr$ при $4x + 3y = 1$.

2.2. $4x + 3y \to extr$ при $x^2 + y^2 = 25$.

2.3. $xy - x^2 - y^2 \to extr$ при $x + y = 1$.

2.4. $x^2 + y^2 \to extr$ при $xy = 4$.

2.5. $xy \to\ extr$ при $9x^2 + 4y^2 = 25$.

2.6. $2xy - x^2 - y^2 \to\ extr$ при $x^2 - y^2 = 1$.

2.7. $x^2 + 12xy + 2y^2 \to\ extr$ при $4x^2 + y^2 = 25$.

2.8. $x^2 + y^2 + z^2 \to\ extr$ при $x + y + z = 3$.

2.9. $x + 2y + 3z \to\ extr$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

2.10. $x^3 + y^3 \to\ extr$ при $x^2 + y^2 = 2$.

2.11. $x^2 + y^2 \to\ extr$ при $x^4 + y^4 = 16$.

2.12. $x + y + z \to\ extr$ при $x + y - z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.13. $x^3 + y^3 + z^3 \to\ extr$ при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

2.14. $x^2 + y^2 + z^2 \to\ extr$ при $x^4 + y^4 + z^4 \leq 1$.

2.15. $x^2 + y^2 - 2x - 2y \to\ extr$ при $x + y \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

2.16. $x^2 + y^2 - 2x + 2y \to\ extr$ при $x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0$.

2.17. $x + y + z \to\ extr$ при $x + y - z = 1,\ x^2 + y^2 \leq 2$.

2.18. $e^{x-y} - x - y \to\ extr$ при $x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

2.19. $x^2 + y \to\ extr$ при $x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

2.20. $2x^2 + 2x + 4y - 3z \to\ extr$ при $8x - 3y + 3z \leq 40$, $-2x + y + z = -3,\ y \geq 0$.

2.21. $2x^2 + 2x + 4y - 3z \to\ extr$ при $8x - 3y + 3z \leq 40$, $-2x + y + z \leq -3,\ y \geq 0$.

2.22. $3x^2 - 11x - 3y - z \to\ extr$ при $x - 7y + 3z + 7 \leq 0$, $5x + 2y - z \leq 2,\ z \geq 0$.

2.23. $3y^2 - 11x - 3y - z \to\ extr$ при $x - 7y + 3z + 7 \leq 0$, $5x + 2y - z \leq 2,\ z \geq 0$.

1.3. Основы выпуклого анализа

1.3.1. Главные понятия выпуклого анализа

Полагаем, что X – линейное нормированное пространство (в качестве которого для простоты будем брать $\mathbb{R}^n$).

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ все точки отрезка (с концами в этих точках) лежат в A

$$ta + (1-t)b \in A \quad \text{для всех } t \in [0,1].$$

Терминология. Выпуклой (линейной) комбинацией конечного множества $C := \{c_1, c_2, \ldots, c_m\} \subset X$ называется элемент

$$v = \sum_{i=1}^{m} t_i c_i,$$

где $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$.

Объединение всех выпуклых комбинаций всех конечных подмножеств множества $C \subset X$ называется *выпуклой оболочкой* C и обозначается *conv* C. Выпуклая оболочка конечного числа точек называется *выпуклым многогранником.*

Утверждение 1. *Выпуклая оболочка C совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих C.*

Будем рассматривать расширенное понятие функции (функционала) $f \ : \ X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Определение 4. Множество

$$epi f = \{(a,x) \in \mathbb{R} \times X \mid a \geq f(x)\}$$

как элемент пространства $\mathbb{R} \times X$ называется *надграфиком* функции f.

Функция f называется *выпуклой*, если ее надграфик – выпуклое множество.

Функция f называется *замкнутой*, если ее надграфик – замкнутое множество.

Функция f называется *собственной*, если имеем $f(x) > -\infty$ для всех x, а также $f(x)$ не равна всюду $+\infty$.

Работать будем с выпуклыми собственными функциями (опуская слово собственные).

Утверждение 2. *Функция выпукла тогда и только тогда, когда выполнено неравенство Йенсена*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

для всех $a, b \in X$, $t \in [0,1]$.

Графическое толкование неравенства Йенсена: *секущая выпуклой функции лежит выше графика функции.*

Утверждение 3. *Сумма двух выпуклых функций выпукла.*

Теорема 7. *Критерием выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции служит условие неотрицательности второй производной* $f''(x) \geq 0$, *которое в случае функции многих переменных трактуется как неотрицательная определенность матрицы вторых производных.*

В случае недифференцируемых функций для исследования на экстремум используется следующее понятие.

Определение 5. *Субдифференциалом* выпуклой функции f в точке $\tilde{x}$ называется следующее множество в сопряженном пространстве X^*:

$$\partial f(\tilde{x}) = \{x^* \in X^* \mid (x - \tilde{x}, x^*) \leq f(x) - f(\tilde{x}) \text{ для всех } x \in X\}.$$

Напомним, что *сопряженным* к X пространством X^* называется линейное пространство линейных непрерывных функционалов на X. В случае $X = \mathbb{R}^n$ имеем $X^* = \mathbb{R}^n$.

Утверждение 4. *Субдифференциал есть выпуклое замкнутое множество.*

Утверждение 5. *Субдифференциал дифференцируемой функции совпадает с ее производной.*

Для функции одной переменной субдифференциал $\partial f(\tilde{x})$ – это совокупность всех угловых коэффициентов k, при которых все прямые $y = kx + b$, проходящие через $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$, лежат под графиком функции $y = f(x)$. Известно, что в точках дифференцируемости $k = f'(x)$. В качестве геометрической иллюстрации отметим, что *все касательные лежат ниже графика выпуклой функции.* Объединяет их субдифференциал.

В некотором смысле это наблюдение позволяет обобщить понятие субдифференциала на выпуклую функцию двух переменных. В точках, где функция дифференцируема, субдифференциал равен градиенту $f'(x)$, а в точках излома по прямой субдифференциал представляет собой отрезок с концами в виде двух векторов градиента.

Теорема 8, Моро – Рокафеллара. *Пусть* f_1, f_2 *– выпуклые функции и существует точка* $x_0 \in X$*, в которой* $|f_1(x_0)| < \infty$ *(то есть* f_1 *конечна), а* f_2 *непрерывна. Тогда для всех* $x \in X$

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x).$$

Теорема 9, Дубовицкого – Милютина. *Пусть* f_1, f_2 *– выпуклые функции, которые в точке* $\tilde{x}$ *непрерывны и совпадают. Тогда*

$$\partial \max(f_1, f_2)(\tilde{x}) = conv(\partial f_1(\tilde{x}) \cup \partial f_2(\tilde{x})).$$

Постановка задачи. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – выпуклая функция из линейного нормированного пространства X в расширенную прямую. *Выпуклой задачей без ограничений* называется задача

$$f(x) \ \to \ \min .$$

Теорема 10 (аналог теоремы Ферма). *Необходимым и достаточным условием глобального минимума* $\tilde{x}$ *в выпуклой задаче без ограничений* $f(x) \ \to \ \min$ *является условие*

$$0 \in \partial f(\tilde{x}).$$

1.3.2. Примеры и задачи выпуклого анализа

Сначала покажем примеры вычисления субдифференциала.

Пример 13. Для функции $f(x) = |x|$ имеем $\partial\ f(0) = [-1, 1]$, а также $\partial f(x) = f'(x) = -1$ при $x < 0$, $\partial f(x) = f'(x) = 1$ при $x > 0$.

Пример 14. Вычислить субдифференциал функции двух переменных $h(x, y) = |x + y + 2|$.

Решение. В открытых полуплоскостях субдифференциал считается вычислением градиента или частных производных

$$\partial h = (-1,-1) \text{ при } x+y+2<0; \quad \partial h = (1,1) \text{ при } x+y+2>0.$$

Пусть общий вид субдифференциала $\partial h = (\alpha, \beta)$ в точках (x_0, y_0) на граничной прямой, то есть с условием $x_0 + y_0 + 2 = 0$. Тогда (по определению) для всех (x, y) имеем

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \le |x + y + 2|.$$

Чтобы оценить α, подставим $y = 0$: из неравенства $\alpha x + C_1 \le |x+2|$ вытекает $-1 \le \alpha \le 1$.

Чтобы теперь оценить β, подставим $x = -y$: $(\alpha - \beta)x + C_2 \le 2$. Значит, $\beta = \alpha$.

Итак, $\partial h = (\alpha, \alpha)$, где $|\alpha| \le 1$, в точках прямой $x + y + 2 = 0$.

Ответ. $\partial h = (-1,-1)$ при $x+y+2<0$, $\partial h = (1,1)$ при $x+y+2>0$; $\partial h = (\alpha, \alpha)$, где $|\alpha| \le 1$, в точках прямой $x + y + 2 = 0$.

Пример 15. Вычислить субдифференциал функции двух переменных $h(x, y) = \max\{x, y\}$.

Решение. В открытых полуплоскостях субдифференциал считается вычислением частных производных

$$\partial h = (1,0) \text{ при } x > y; \quad \partial h = (0,1) \text{ при } x < y.$$

По теореме Дубовицкого – Милютина субдифференциал максимума есть отрезок (выпуклая оболочка) этих градиентов $(1, 0)$ и $(0, 1)$

$$\partial h = (1-\alpha, \alpha), \text{ где } \alpha \in [0,1],$$

в точках излома $x = y$.

Переходим от вычисления субдифференциала к задачам выпуклого анализа, то есть к задачам безусловной негладкой оптимизации.

Пример 16.

$$f(x) = x^2 + |x| \to \min.$$

Решение. Для $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = |x|$ имеем $f_1'(x) = 2x$, а субдифференциал f_2 вычислен выше (пример 13). По теореме Моро – Рокафеллара

$$\partial f(x) = \begin{cases} 2x-1, \text{если } x<0, \\ [\text{ -1,1}], \text{ если } x=0, \\ 2x+1, \text{если } x>0. \end{cases}$$

Значит, $0 \in \partial f(0)$. Поэтому $0 \in absmin$, $f(0)=0$.

Пример 17.

$$f(x) = |x-2| + |2x-1| \to \min.$$

Решение. Для $f_1(x) = |x-2|$ и $f_2(x) = |2x-1|$ имеем

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x<2, \\ [\text{ -1,1}], \text{ если } x=2, \\ 1, \text{ если } x>2; \end{cases} \qquad \partial f_2(x) = \begin{cases} -2, \text{ если } x<\frac{1}{2}, \\ [\text{ -2,2}], \text{ если } x=\frac{1}{2}, \\ 2, \text{ если } x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Как сумма этих двух субдифференциалов

$$\partial f(x) = \begin{cases} -3, \text{ если } x<\frac{1}{2}, \\ [\text{ -3,1}], \text{ если } x=\frac{1}{2}, \\ 1, \text{если } \frac{1}{2}<x<2, \\ [\text{ 1,3}], \text{ если } x=2, \\ 3, \text{ если } x>2. \end{cases}$$

Значит, $0 \in \partial f(\frac{1}{2})$. Поэтому $\frac{1}{2} \in absmin$, $f_{\min} = \frac{3}{2}$.

Пример 18.

$$f(x) = x^2 + \max\{0, x+1\} \to \min.$$

Решение. Вычислим субдифференциал

$$\partial f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x<-1, \\ [\text{ -2, -1}], \text{ если } x=-1, \\ 2x+1, \text{если } x>-1. \end{cases}$$

Решая уравнение $\partial f(x) = 0$, приходим к $2x+1=0$ и $x = -\frac{1}{2} > -1$.

Ответ. $-\frac{1}{2} \in absmin$, $f_{\min} = \frac{3}{4}$.

Пример 19.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + |x+y+2| \to \min.$$

Решение. Вычислим субдифференциал по теореме Моро – Рокафеллара, опираясь на пример 14 (здесь $|\alpha| \leq 1$),

$$\partial f(x,y) = \begin{cases} (2x-1, 2y-1), \text{если } x+y+2<0, \\ (2x+\alpha, 2y+\alpha), \text{ если } x+y+2=0, \\ (2x+1, 2y+1), \text{если } x+y+2>0. \end{cases}$$

Идем сверху вниз. Точка $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не принадлежит области $x+y+2<0$.

Если приравняем градиент к нулю во втором случае, то получим $x = y = -\frac{\alpha}{2}$ и подставим это в условие $x+y+2=0$. Найдем $\alpha = 2$ и точку $(-1,-1)$, в которой $(0,0) \in \partial f$. Но данное $\alpha = 2$ выходит за границы от -1 до 1.

Приравняв градиент к нулю в третьем случае, получим $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ из области $x+y+2>0$. Далее $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$.

Ответ. $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.

Пример 20.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\max\{x,y\} \to \min.$$

Решение. Вычислим субдифференциал по теореме Моро – Рокафеллара, опираясь на пример 15 (здесь $\alpha \in [0,1]$),

$$\partial f(x,y) = \begin{cases} (2x+2, 2y), \text{если } x>y, \\ (2x+2-2\alpha, 2y+2\alpha), \text{ если } x=y, \\ (2x, 2y+2), \text{если } x<y. \end{cases}$$

Приравняем к нулю градиент для области $x>y$ и получим $x=-1$, $y=0$, что противоречит условию области. Приравняем к нулю градиент для области $x<y$ и получим $x=0$, $y=-1$, что противоречит условию области.

Для случая $x=y$ решим систему $2x+2-2\alpha=0$, $2y+2\alpha=0$. Получим $x=\alpha-1$, $y=-\alpha$. Откуда $\alpha-1=-\alpha$ и $\alpha=\frac{1}{2}$. Значит, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in absmin$, $f_{\min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$.

1.3.3. Задачи выпуклого анализа

Найти субдифференциалы функций и исследовать на минимум.

3.1. $f(x) = |x| + |x+2| \to \min$.

3.2. $f(x) = |x| + 2x \to \min$.

3.3. $f(x) = |x| + |x+1| + |x+2| \to \min$.

3.4. $f(x) = |x-2| + \max\{0, x^3\} \to \min$.

3.5. $f(x,y) = x^2 + y^2 + |x - y| \to \min$.

3.6. $f(x,y) = x^2 + y^2 + |x + y + 6| \to \min$.

3.7. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4\max\{x,y\} \to \min$.

3.8. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3|x - y - 2| \to \min$.

3.9. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2} \to \min$.

3.10. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \to \min$.

1.4. Ответы к главе “Экстремальные задачи”

Задачи раздела 1.1.5 безусловной гладкой оптимизации

1.1. $0 \in absmin$, $1 \in locmax$, $2 \in absmin$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

1.2. $0 \notin locextr$, $5 \in absmin$; $f_{\min} = -3125$, $f_{\max} = +\infty$.

1.3. $0 \in locmax$, $4 \in locmin$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.4. $-2 \in locmax$, $0 \in absmin$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

1.5. $-3 \in absmin$, $0 \notin locextr$; $f_{\min} = -\frac{27}{e^3}$, $f_{\max} = +\infty$.

1.6. $0 \in absmax$; $f_{inf} = 0$, $f_{\max} = 1$.

1.7. $0 \notin locextr$; $f_{inf} = -\frac{\pi^3}{8}$, $f_{sup} = \frac{\pi^3}{8}$.

1.8. $\{0, \pm(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k + \epsilon_k)\} \in locmin$, $\{\pm(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + \delta_k)\} \in locmax$, $k \in \mathbb{N}$; $f_{inf} = -\frac{\pi}{2}$, $f_{sup} = \frac{\pi}{2}$. Бесконечно много локальных, но нет глобальных экстремумов.

1.9. $(2,-2) \in absmin$; $f_{\min} = -4$, $f_{\max} = +\infty$.

1.10. $(2,3) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.11. $(-10,8) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.12. $(0,0) \notin locextr$ (так как $f(h,-h) = 2h^4 > 0$), $(1,1) \in absmin$, $(-1-,1) \in absmin$; $f_{\min} = -2$, $f_{\max} = +\infty$.

1.13. $(1,-1,2) \in absmin$; $f_{\min} = 2$, $f_{\max} = +\infty$.

1.14. $(0,0) \in locmax$, $(\pm\sqrt{ln 2}, 0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.15. $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0) \in absmax$,$(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = 1$.

1.16. $(1, \frac{1}{2}, -1) \in absmin$; $f_{\min} = -\frac{3}{2}$, $f_{\max} = +\infty$.

1.17. $(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.18. $(1, -1, \frac{1}{2}) \in absmin$; $f_{\min} = -\frac{1}{2}$, $f_{\max} = +\infty$.

1.19. $(1,1) \in locmax$, $(-1,1) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.20. $(0,0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.21. $(1,1) \in locmin$, $(0,0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.22. $(1,1) \in locmax$, $\{(0,0),(0,3),(3,0)\} \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.23. $(\pm\frac{1}{2},\pm 1) \in absmin$, $(0,0) \in locmax$, $(0,\pm 1),(\pm\frac{1}{2},0) \notin locextr$; $f_{\min} = -\frac{9}{8}$, $f_{\max} = +\infty$.

1.24. $(2,3) \in locmax$, $(0,y) \in locmax$ при $y \in (-\infty,0) \cap (6,+\infty)$, $(0,y) \in locmin$ при $y \in (0,6)$, $\{(0,0),(0,6),(x,0)\} \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

1.25. $(0,0) \in absmin$, $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}) \notin locextr$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

1.26. $(1,1,1) \in locmax$, $(0,y,\frac{7-2y}{3}),(x,y,0) \notin locextr$, стац. точки $(x,0,z)$ допускают разные случаи ; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

Задачи раздела 1.2.5 условной гладкой оптимизации

2.1. $(\frac{4}{25},\frac{3}{25}) \in absmin$; $f_{\min} = \frac{1}{25}$, $f_{\max} = +\infty$.

2.2. $(-4,-3) \in absmin$, $(4,3) \in absmax$; $f_{\min} = -25$, $f_{\max} = 25$.

2.3. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in absmax$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = -\frac{1}{4}$.

2.4. $(2,2) \in absmin$, $(-2,-2) \in absmin$; $f_{\min} = 8$, $f_{\max} = +\infty$.

2.5. $\{(-\frac{5\sqrt{2}}{6},\frac{5\sqrt{2}}{4}),(\frac{5\sqrt{2}}{6},-\frac{5\sqrt{2}}{4})\} \in absmin$, $f_{\min} = -\frac{25}{12}$; $\{(\frac{5\sqrt{2}}{6},\frac{5\sqrt{2}}{4}),(\frac{-5\sqrt{2}}{6},-\frac{5\sqrt{2}}{4})\} \in absmax$, $f_{\max} = \frac{25}{12}$.

2.6. Стационарных точек нет. $f_{\min} = -\infty$, $f_{sup} = 0$.

2.7. $(-2,3) \in absmin$, $(2,-3) \in absmin$, $\{(\frac{3}{2},4),(-\frac{3}{2},-4)\} \in absmax$; $f_{\min} = -50$, $f_{\max} = \frac{425}{4}$.

2.8. $(1,1,1) \in absmin$; $f_{\min} = 3$, $f_{\max} = +\infty$.

2.9. $(-1,-2,-3) \in absmin$, $(1,2,3) \in absmax$; $f_{\min} = -14$, $f_{\max} = 14$.

2.10. $\{(-\sqrt{2},0),(0,-\sqrt{2})\} \in absmin$, $\{(\sqrt{2},0),(0,\sqrt{2})\} \in absmax$, $(1,1) \in locmin$, $(-1,-1) \in locmax$; $f_{\min} = -2\sqrt{2}$, $f_{\max} = 2\sqrt{2}$.

2.11. Четыре точки $\{\pm 2,0),(0,\pm 2) \in absmin$; $\quad f_{\min} = 4$.
Четыре точки $(\pm\sqrt[4]{8},\pm\sqrt[4]{8}) \in absmax$; $\quad f_{\max} = 4\sqrt{2}$.

2.12. $(0,0,-1) \in absmin$, $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \in absmax$; $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = \frac{5}{3}$.

2.13. $\{(0,0,-\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0,0)\} \in absmin$, $(0,0,0) \notin locextr$, $\{(-1,-1,-1),(0,-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}),(-\sqrt{\frac{3}{2}},0,-\sqrt{\frac{3}{2}}),(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},0)\} \notin locmin$, $\{(0,0,\sqrt{3}),(0,\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0,0)\} \in absmax$, $\{(1,1,1),(0,\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(\sqrt{\frac{3}{2}},0,\sqrt{\frac{3}{2}})$, $(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},0)\} \notin locmax$; $\quad f_{\min} = -3\sqrt{3}$, $f_{\max} = 3\sqrt{3}$.

2.14. $(0,0,0) \in absmin$, восемь точек $(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}) \in absmax$, точки типа $(0,\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}})$ и $(0,0,\pm 1) \notin locextr$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = \sqrt{3}$.

2.15. $(1,1) \in absmin$, $\{(8,0),(0,8)\} \in absmax$, $(0,0) \in locmax$, $\{(4,4),(1,0),(0,1)\} \notin locmax$; $f_{\min} = -2$, $f_{\max} = 48$.

2.16. $(1,0) \in absmin$, $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}) \in absmax$, $\{(3,0),(-3,0))\} \notin locmax$; $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 9+6\sqrt{2}$.

2.17. $(-1,-1,-3) \in absmin$, $(1,1,1) \in absmax$; $f_{\min} = -5$, $f_{\max} = 3$.

2.18. $(0,1) \in absmin$, $(1,0) \in absmax$, $(0,0) \notin locextr$; $f_{\min} = e^{-1}-1$, $f_{\max} = e-1$.

2.19. $(0,0) \in absmin$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \in absmax$, $(0,1) \notin locextr$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = \frac{5}{4}$.

2.20. $(-2,0,7) \in absmin$; $f_{\min} = -17$, $f_{\max} = +\infty$.

2.21. $(-\frac{5}{2},0,20) \in absmin$; $f_{\min} = -52,5$, $f_{\max} = +\infty$.

2.22. $(16,257,592) \notin locextr$; $f_{\min} = -\infty$, $f_{\max} = +\infty$.

2.23. $(0,1,0) \in absmin$; $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = +\infty$.

Задачи раздела 1.3.3 выпуклого анализа

3.1. $\partial f: -2$ при $x < -2$, $[-2,0]$ при $x=-2$, 0 при $x \in [-2,0]$, $[0,2]$ при $x=0$, 2 при $x>0$; $[-2,0] \in absmin$; $f_{\min} = 2$.

3.2. $\partial f: 1$ при $x<0$, $[1,3]$ при $x=0$, 3 при $x>0$; $f_{\min} = -\infty$.

3.3. $\partial f: -3$ при $x<-2$, $[-3,-1]$ при $x=-2$, -1 при $x \in (-2,-1)$, $[-1,1]$ при $x=-1$, 1 при $x \in (-1,0)$, $[1,3]$ при $x=0$, 3 при $x>0$; $-1 \in absmin$; $f_{\min} = 2$.

3.4. $\partial f: -1$ при $x<0$, $3x^2-1$ при $0 \le x < 2$, $[11,13]$ при $x=2$, $3x^2+1$ при $x>2$; $\frac{\sqrt{3}}{3} \in absmin$; $f_{\min} = \frac{18-2\sqrt{3}}{9}$.

3.5. $\partial f: (2x+1, 2y-1)$ при $x>y$, $(2x-1,2y+1)$ при $x<y$, $(2x+\alpha, 2y-\alpha)$ при $x=y$, где $\alpha \in [-1,1]$; $(0,0) \in absmin$; $f_{\min} = 0$.

3.6. $\partial f: (2x+1,2y+1)$ при $x+y>-6$, $(2x-1,2y-1)$ при $x+y<-6$, $(2x+\alpha, 2y+\alpha)$ при $x+y=-6$ и $\alpha \in [-1,1]$; $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \in absmin$; $f_{\min} = \frac{11}{2}$.

3.7. $\partial f: (2x+4,2y)$ при $x>y$, $(2x+2+2\alpha, 2y+2-2\alpha)$ при $x=y$ и $\alpha \in [-1,1]$, $(2x,2y+4)$ при $x<y$; $(-1,-1) \in absmin$; $f_{\min} = -2$.

3.8. $\partial f: (2x+y+3, -x+2y-3)$ при $x-y>2$, $(2x-y-3,-x+2y+3)$ при $x-y<2$, $(2x-y+3\alpha, -x+2y-3\alpha)$ при $x-y=2$, где $\alpha \in [-1,1]$; $(1,-1) \in absmin$; $f_{\min} = 3$.

3.9. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in absmin$; $f_{\min} = \frac{1}{2}$.

3.10. $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \in absmin$; $f_{\min} = 2\sqrt{5}-1$.

Глава 2

Элементы функционального анализа

2.1. Норма функционала

Отображение из линейного нормированного пространства X в $\mathbb{R}$ называется *функционалом.* Функционал $J : X \to \mathbb{R}$ называется *линейным*, если $J(x + y) = J(x) + J(y)$ и $J(\alpha x) = \alpha J(x)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Доказывается, что непрерывный линейный функционал ограничен, и наоборот.

Норма линейного непрерывного функционала определяется

$$\|J\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|J(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |J(x)|.$$

Согласно этому определению вычисление нормы функционала можно отнести к задачам на оптимизацию. В дальнейшем будут задачи вариационного исчисления, где исследование на глобальный экстремум не имеет четкой единой схемы и часто проводится построением соответствующих примеров последовательностей ломаных или других стандартных функций. Задачи на вычисление нормы функционала позволяют получить начальный навык подобных построений.

Линейный функционал можно рассматривать как частный случай линейного непрерывного отображения $A : X \to Y$ в линейных нормированных пространствах (то есть из X в Y, при $Y = X$ это линейный оператор). Аналогично определяется норма этого отображения

$$\|A\|_{X \to Y} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

2.1.1. Простейший пример нормы функционала

Функцию одной или нескольких переменных можно рассматривать в качестве простого примера функционала. Линейным функционалом в $\mathbb{R}^n$ служит линейная форма $J(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$, которую удобнее представить в виде скалярного произведения (x, a) с фиксированным $a \in \mathbb{R}^n$.

Обычно в $\mathbb{R}^n$ принята евклидова норма $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Но можно ввести и другие нормы: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ для пространства $\mathbb{R}_1^n$, $\|x\|_\infty = \max |x_k|$ для пространства $\mathbb{R}_\infty^n$. Модуль скалярного произведения сверху оценивается по неравенству Коши – Буняковского

$$|(x, y)| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \tag{2.1}$$

или по неравенству Гельдера

$$|(x, y)| \le \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty. \tag{2.2}$$

Общая схема вычисления нормы функционала следующая. По одному из неравенств (2.1) или (2.2) находим оценку сверху

$$|J(x)| = |(x, a)| \le \|a\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|J\| \le \|a\| = K.$$

Для получения аналогичной ($\|J\| \ge K$) оценки снизу подбираем конкретный пример $x \in X$, на котором эта оценка достигается. Отсюда делаем вывод, что $\|J\| = K$. Если соответствующий пример невозможно подобрать, то ищем последовательность элементов $\{x_n\} \in X$ таких, что $\lim_{n\to\infty} \frac{|J(x_n)|}{\|x_n\|} = K$.

Пример 21. Вычислить норму функционала, заданного функцией двух переменных $f(x) = x_1 - 2x_2$, в трех вариантах отображений:
а) $f : \mathbb{R}_1^2 \to \mathbb{R}$, б) $f : \mathbb{R}_\infty^2 \to \mathbb{R}$, в) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Решение. Случай *а*. Оценим сверху

$$|f(x)| = |x_1 - 2x_2| \le |x_1| + 2|x_2| \le 2(|x_1| + |x_2|) = 2\|x\|_1,$$

что равносильно $\|f\| \le 2$.

Для элемента $\tilde{x} = (0, -1)$, норма которого $\|\tilde{x}\|_1 = 1$, имеем $f(\tilde{x}) = 2$. Значит, $\|f\| \ge 2$. Из двух неравенств вытекает $\|f\| = 2$.

Случай *б*. Оценим сверху

$$|f(x)| = |x_1 - 2x_2| \le |x_1| + 2|x_2| \le \max |x_k| + 2 \max |x_k| = 3\|x\|_\infty,$$

что равносильно $\|f\| \le 3$.

Для элемента $\tilde{x} = (1, -1)$ с нормой $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ имеем $f(\tilde{x}) = 3$. Значит, $\|f\| \ge 3$. Из двух неравенств вытекает $\|f\| = 3$.

Случай *в*. Оценим сверху по неравенству (2.1)

$$|f(x)| = |x_1 - 2x_2| \le \sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{5}\|x\|_2,$$

что равносильно $\|f\| \le \sqrt{5}$.

Для элемента $\tilde{x} = (1, -2)$ с нормой $\|\tilde{x}\|_2 = \sqrt{5}$ имеем $f(\tilde{x}) = 5$. Значит, $\|f\| \ge \sqrt{5}$. Из двух неравенств вытекает $\|f\| = \sqrt{5}$.

Ответ. $\|f\|_{\mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}} = 2$, $\|f\|_{\mathbb{R}^2_\infty \to \mathbb{R}} = 3$, $\|f\|_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} = \sqrt{5}$.

Замечание к решению. Рассматривали функционал $f(x) = (x, a)$ с вектором $a = (1, -2)$, для которого $\|a\|_1 = 3$, $\|a\|_2 = \sqrt{5}$, $\|a\|_\infty = 2$. Значит, оценки сверху по неравенствам (2.1) и (2.2).

Принцип подбора примеров $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n_p$: при $p = 1$ вектор $\pm e_j$ стандартного базиса с номером, соответствующим максимальной (по модулю) координате вектора a (из сопряженного пространства); при $p = \infty$ вектор с координатами $sign\ a_k = \pm 1$; при $p = 2$ выбирают $\tilde{x} = a$.

2.1.2. Норма функционала в пространствах функций

В качестве основных пространств X будем брать пространства функций $L[a, b]$, $L^2[a, b]$ и $C[a, b]$ с нормами соответственно

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt \qquad \text{в } L[a, b];$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \qquad \text{в } L^2[a, b];$$

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \qquad \text{в } C[a, b].$$

В вариационном исчислении чаще встречается пространство $C^1[a, b]$ с нормой

$$\|x\|_{C^1[a,b]} = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\},$$

но для него норма ищется сложнее и соответствующие задачи труднее.

Пространства $L[a, b]$ и $C[a, b]$ рассматриваем как взаимно сопряженные, и для них строится скалярное произведение (x, y) для элементов из разных пространств, для которых применяем неравенство Гельдера (2.2). Пространство $L^2[a, b]$ является гильбертовым (самосопряженным), в нем задано скалярное произведение двух элементов, через которое вводится норма $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$.

Основной вид функционала $J(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)c(t)dt$ задается в виде скалярного произведения (x, c) с фиксированной функцией $c(t)$ из сопряженного пространства. В задачах вариационного исчисления встречаются более сложные функционалы $B(x) = J(x)+l(x(a), x(b))$, где добавляется терминальное слагаемое в виде функции двух переменных, в качестве которых берутся значения функции в концах интегрирования. В общем случае в терминальном слагаемом могут присутствовать значения функции и в других точках из интервала интегрирования. Добавление терминального слагаемого имеет смысл только для пространства непрерывных функций и делает задачу содержательной.

Приведем пример проверки функционала $J(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)c(t)dt$ на линейность. Проверим первое условие

$$J(x+y) = \int_a^b (x(t)+y(t))c(t)dt = \int_a^b x(t)c(t)dt + \int_a^b y(t)c(t)dt = J(x)+J(y).$$

Проверим второе условие

$$J(\alpha x) = \int_a^b (\alpha x(t))c(t)dt = \alpha \int_a^b x(t)c(t)dt = \alpha J(x).$$

Сохраняется общий принцип вычисления нормы функционала:
1) по неравенству (2.1) или (2.2) найдем оценку сверху вида $\|J\| \leq K$;
2) подбором конкретного $x \in X$ покажем возможность достижения этой границы $\frac{|J(x)|}{\|x\|} = K$. Если же один такой пример подобрать невозможно, то покажем, что к этой границе снизу мы можем подойти как угодно близко. Для этого подберем последовательность элементов $x_n \in X$ так, что $\lim_{n\to\infty} \frac{|J(x_n)|}{\|x_n\|} = K$.

Это будет означать, что $\|J\| \geq K$. Тогда из двух противоположных неравенств вытекает, что $\|J\| = K$.

Слегка видоизменяются рекомендации по подбору примера для оценки снизу функционала $J(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)c(t)dt$.

Пример 22. Найти норму функционала $J : X \to \mathbb{R}$ в виде скалярного произведения функций

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)c(t)dt$$

для различных пространств X вида $L[a, b]$, $L^2[a, b]$ и $C[a, b]$.

Решение. I. Случай $X = L[a,b]$.

1. Оценим сверху по неравенству (2.2), приведя его доказательство,

$$|J(x)| = \left|\int_a^b x(t)c(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\cdot|c(t)|dt \le \int_a^b |x(t)|\cdot\max_\tau|c(\tau)|dt,$$

или $|J(x)| \le \|x\|_1 \cdot \|c\|_\infty$. Значит, $\|J\| \le \|c\|_\infty$.

2. Найдем оценку снизу. Для этого построим функции $x_M(t)$ следующего вида. Если максимум модуля функции $c(t)$ достигается в точке t_0 внутри отрезка $[a,b]$, то $x_M(t) = \pm M$ при $t \in [t_0 - \frac{1}{2M}, t_0 + \frac{1}{2M}] \subset [a,b]$ и $x_M(t) = 0$ вне этого отрезка $[t_0 - \frac{1}{2M}, t_0 + \frac{1}{2M}]$ (знак перед M совпадает со знаком $c(t_0)$). Тогда $\|x_M\|_1 = 1$. Далее покажем, что $J(x_M)$ при M, стремящемся к $+\infty$, стремится к $|c(t_0)|$. Отсюда вытекает, что $\|J\| \ge \|c\|_\infty$. Значит, $\|J\| = \|c\|_\infty$.

Например, пусть $a = -2$, $b = 2$, $c(t) = t^2 - 3$.

Тогда $\|c\|_\infty = \max_t |c(t)| = |c(0)| = |-3| = 3$; $x_M(t) = -M$ при $t \in [-\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M}]$, $x_M(t) = 0$ вне отрезка.

Вычислим $\|x_M\|_1 = 1$ и

$$J(x_M) = \int_{-\frac{1}{2M}}^{\frac{1}{2M}} M(3-t^2)dt = 3 - \frac{1}{12M^2} \to 3 \quad \text{при } M \to +\infty.$$

Следовательно, $\|J\| \ge 3$.

Итак, $\|J\| = 3$.

II. Случай $X = C[a,b]$.

1. Оценим сверху по неравенству Гельдера

$$|J(x)| = \left|\int_a^b x(t)c(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\cdot|c(t)|dt \le \int_a^b \max_\tau|x(\tau)|\cdot|c(t)|dt,$$

или $|J(x)| \le \|x\|_\infty \cdot \|c\|_1$. Значит, $\|J\| \le \|c\|_1$.

2. Найдем оценку снизу. Для этого подберем множество функций $x_M(t)$ следующего вида. Без требования непрерывности $x(t)$ или при сохранении функцией $c(t)$ знака выбирали бы $x(t) = sign(c(t))$. Тогда $\|x\|_\infty = 1$, а $J(x) = \|c\|_1$. Если знак $c(t)$ меняется, то строим последовательность ломаных, сходящуюся к $x(t) = sign(c(t))$. А вдруг для

других пробных функций x значение модуля функционала окажется больше? Значит, $\|J\| \geq \|c\|_1$. Отсюда вытекает, что $\|J\| = \|c\|_1$.

Общий случай покажем на примере функции $c(t)$, меняющей знак. Пусть $a = -2$, $b = 2$, $c(t) = t$. Тогда $\|c\|_1 = \int_{-2}^{2} |t| dt = 4$.

Экстремальную функцию $x(t) = sign\ t$ заменим последовательностью сходящихся к ней ломаных

$$x_n(t) = \begin{cases} -1\ , & \text{если } t \in [-2, -1/n], \\ nt\ , & \text{если } t \in [-1/n, 1/n], \\ 1\ , & \text{если } t \in [1/n, 2]. \end{cases}$$

Вычислим

$$J(x_n) = \int_{-2}^{-\frac{1}{n}} (-t) dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} nt\, t\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{2} t dt = 4 - \frac{1}{3n^2} \to 4$$

при $n \to \infty$. Значит, $\|J\| \geq 4$. Отсюда вытекает, что $\|J\| = 4$.

III. Случай $X = L^2[a, b]$.

По неравенству Коши – Буняковского (2.1)

$$|J(x)| \leq \|x\|_2 \cdot \|c\|_2.$$

Значит, $\|J\| \leq \|c\|_2$.

В качестве экстремального элемента $x(t)$ возьмем функцию $c(t)$.

$$J(c) = (c, c) = (\|c\|_2)^2; \qquad \frac{J(c)}{\|c\|_2} = \|c\|_2.$$

Отсюда $\|J\| \geq \|c\|_2$.

Итак, $\|J\| = \|c\|_2$.

Для построения примеров функций вида игольчатых вариаций интересны задачи на вычисление нормы функционала, содержащего кроме интегрального еще и терминальные слагаемые. Такие задачи уместны только для пространства непрерывных функций (из трех рассмотренных пространств). Приведем пример такой задачи.

Пример 23. Найти норму функционала $J : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ вида

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 x(t) dt - x(\frac{1}{2}).$$

Решение. 1. Найдем оценку сверху

$$|J(x(\cdot))| = \left|\int_0^1 x(t)dt - x(\frac{1}{2})\right| \le \left|\int_0^1 x(t)dt\right| + \left|x(\frac{1}{2})\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \max_t |x(t)|\, dt + \max_t |x(t)| = \max_t |x(t)|(\int_0^1 \, dt + 1) = 2\|x\|_\infty.$$

Значит, $\|J\| \le 2$.

2. В качестве пробной функции для оценки снизу подошла бы функция $x_0(t) = 1$ при $x \ne \frac{1}{2}$ и $x_0(\frac{1}{2}) = -1$, которая разрывна. Построим последовательность непрерывных ломаных, к ней сходящихся,

$$x_n(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1], \\ -2nt + n - 1, & \text{если } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], \\ 2nt - n - 1, & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Интеграл $\int_0^1 x_n(t)dt$ вычислим по геометрическому свойству определенного интеграла как площадь квадрата минус площадь треугольника с высотой 2 и с основанием $\frac{1}{2n}$: $J(x_n) = 1 - \frac{1}{2n} - (-1) = 2 - \frac{1}{2n}$. Поэтому $\|J\| \ge 2$. Итак, $\|J\| = 2$.

2.1.3. Задачи на вычисление нормы функционала

1.1. Проверить, что функционал $J(x(\cdot)) = \int_0^2 x(t)dt$ линеен, и найти его норму в трех случаях исходного пространства X: $L[0,2]$, $L^2[0,2]$ и $C[0,2]$.

1.2. Проверить, что функционал $J(x(\cdot)) = \int_{-2}^2 x(t)dt$ линеен, и найти его норму в трех случаях исходного X: $L[-2,2]$, $L^2[-2,2]$ и $C[-2,2]$.

1.3. Проверить, что функционал $J : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, заданный в виде $J(x(\cdot)) = x(-1) - \int_{-1}^1 x(t)dt$, линеен, и найти его норму.

В задачах 1.4 - 1.11, показав линейность, найти норму функционала

1.4. $J : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = x(0) + \int_0^1 x(t)\,dt - x(1)$.

1.5. $J : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 (t+t^2)x(t)\,dt$.

1.6. $J : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 (t-t^2)x(t)\,dt + x(1)$.

1.7. $J : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = 2\int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt$.

1.8. $J : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = -2x(0) + \int_{1/2}^1 x(t)\,dt + x(1)$.

1.9. $J : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 (t-t^2)x(t)\,dt$.

1.10. $J : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^1 (t-t^2)x(t)\,dt - x(1/2)$.

1.11. $J : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad J\big(x(\cdot)\big) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - 2\int_{1/2}^1 x(t)\,dt$.

2.2. Дифференцирование в функциональных пространствах

2.2.1. Виды производных в пространствах функций

Рассмотрим отображение $f : X \to Y$ в линейных нормированных пространствах.

Определение 6. Отображение f имеет в точке $x \in X$ *производную по направлению* $h \in X$ (где $\|h\| = 1$), если существует предел справа

$$\delta_+ f(x, h) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Если производные по противоположным направлениям согласуются $\delta_+ f(x, h) = -\delta_+ f(x, -h)$, то эта величина обозначается $\delta f(x, h)$ (равняется $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}$) и называется вариацией по Лагранжу в точке x относительно направления h.

Определение 7. Отображение $h \to \delta f(x, h)$ (при условии его существования при всех $h \in X$) называется *вариацией по Лагранжу* в точке $x \in X$.

Определение 8. Если отображение $\delta f(x, \cdot) : X \to Y$ линейно и непрерывно по (пропущенному) аргументу h, то говорят, что исходное отображение f *дифференцируемо по Гато* в точке $x \in X$; отображение $\delta f(x, \cdot) : X \to Y$ называется для отображения $f : X \to Y$ *производной Гато* в точке x и обозначается $f'_G(x)$.

Пример 24. Для функции $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$
которая непрерывна всюду, производные по направлениям $h = 1$ и $h = -1$ не существуют

$$\delta_+ f(0, \pm 1) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(0 + \lambda h) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\lambda \sin \frac{1}{\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \sin \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 25. Для функции $f(x) = |x|$ имеем $f'(x) = 1$ при $x > 0$ и $f'(x) = -1$ при $x > 0$. Поэтому для всех $x \geq 0$ имеем $\delta_+ f(x, 1) = 1$ и для всех $x \leq 0$ имеем $\delta_+ f(x, -1) = 1$. Значит, для $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ существуют производные по всем направлениям (которых всего два: $h = 1$ и $h = -1$), но не существует вариации по Лагранжу $\delta f(0, h)$, так как нет согласования $\delta_+ f(0, 1) \neq -\delta_+ f(0, -1)$.

Пример 26. Для функции $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{в точке } (0,0) \end{cases}$ вычислим ее значение $f(x,0) = f(0,y) = 0$ на горизонтальной и вертикальной прямых, а также на наклонных прямых $y = kx$: введем функцию $\varphi(x) = f(x,kx) = \frac{kx}{x^2+k^2}$. Производная последней $\varphi'(x) = \frac{k(k^2-x^2)}{(x^2+k^2)^2}$ и $\varphi'(0) = \frac{1}{k}$. Значит, для данной функции двух переменных существует в точке $(0,0)$ вариация по Лагранжу

$$\delta f((0,0),h) = \begin{cases} t/k, & \text{если } h = (t,kt), k \neq 0, \\ 0, & \text{если } h = (1,0) \text{ или } h = (0,1), \end{cases}$$

которая зависит не только от направления h (заданного параметром k), но и от длины h (параметр t). Так как вариация по Лагранжу не линейна по h: $\delta f((0,0),(1,0)) + \delta f((0,0),(0,1)) = 0 \neq \delta f((0,0),(1,1)) = 1$, то производной по Гато в точке $(0,0)$ для этой функции не существует.

Интересно, что данная функция разрывна в начале координат, хотя она непрерывна по всем прямым, проходящим через начало координат. Действительно, на параболе $y = x^2$ имеем $f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$.

В наборе следующих понятий: производная по направлению, вариация по Лагранжу, производная по Гато и производная по Фреше (для которого выделен следующий параграф) – есть упорядоченность. Последующее понятие вытекает из предыдущего, следовательно, оно более сильное. Различие этих важных понятий демонстрируется примерами 24 – 27 (пример 27 ниже).

2.2.2. Дифференцирование по Фреше

Определение 9. Отображение $J : X \to Y$ из некоторого банахова пространства X в банахово пространство Y называют *дифференцируемым по Фреше* в точке $\tilde{x} \in X$ (обозначение $J \in D(\tilde{x})$), если существуют линейный непрерывный оператор $J'(\tilde{x}) : X \to Y$, называемый *производной Фреше* в точке, и отображение $r : X \to Y$ такие, что

$$J(\tilde{x}+h) = J(\tilde{x}) + J'(\tilde{x})[h] + r(h), \tag{2.3}$$

где $\|r(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ при $||h||_X \to 0$.

Линейная часть приращения $J(\tilde{x}+h) - J(\tilde{x})$, равная $J'(\tilde{x})[h]$ значению этого оператора на произвольном элементе $h \in X$, носит название *дифференциал Фреше* и предъявляется в виде ответа на предложенные задачи (так как сам оператор проявляется только в процессе своего действия).

Теорема 11 о суперпозиции (основная ее часть).

Если $J : X \to Z$ имеет вид $J(x) = \psi(\varphi(x))$ суперпозиции отображений $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ таких, что $\varphi \in D(\tilde{x})$, $\psi \in D(\tilde{y})$, где $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$, то $J \in D(\tilde{x})$ и

$$J'(\tilde{x}) = \psi'(\tilde{y}) \circ \varphi'(\tilde{x}),$$

что в дифференциалах записывается в виде

$$J'(\tilde{x})[h] = \psi'(\tilde{y})[H] = \psi'(\tilde{y})[\varphi'(\tilde{x})[h]].$$

Пример 27. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{во всех точках параболы } y = x^2, \text{ кроме точки } (0,0), \\ 0, & \text{в остальных точках плоскости.} \end{cases}$$

Для нее $f'_G(0,0) = 0$, а производной по Фреше в точке $(0,0)$ не существует.

В следующих задачах символом G обозначаем гильбертово пространство.

Пример 28. Найти производную Фреше функционала $J : G \to \mathbb{R}$ вида $J(x) = (a, x)$ для фиксированного $a \in G$.

Решение. Вычислим значение функционала на варьированном аргументе

$$J(x+h) = (a, x+h) = (a, x) + (a, h)$$

и приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = (a, h).$$

Это выражение линейно по h, остаток $r(h)$ отсутствует.

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = (a, h)$ во всех $x \in G$.

Пример 29. Найти производную Фреше функционала $J : G \to \mathbb{R}$ вида $J(x) = (x, x)$.

Решение. Вычислим значение функционала на варьированном аргументе

$$J(x+h)=(x+h,x+h)=(x,x)+(x,h)+(h,x)+(h,h) = (x,x)+2(x,h)+(h,h)$$

и приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = 2(x,h) + (h,h).$$

Первое слагаемое линейно по h, остаток $r(h) = (h,h) = \|h\|^2$ второго порядка по h.

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = 2(x,h)$.

Пример 30. Найти производную Фреше функционала $J : G \to \mathbb{R}$ вида $J(x) = (x,x)^3$.

Решение. Первый способ. Вычислим значение функционала на варьированном аргументе

$$J(x+h) = (x+h, x+h)^3 = ((x,x) + 2(x,h) + (h,h))^3 =$$

$$= (x,x)^3 + 3(x,x)^2 A + 3(x,x)A^2 + A^3,$$

где $A = 2(x,h) + (h,h)$. Поскольку $A^2 = O(\|h\|^2)$, $A^3 = O(\|h\|^3)$, то эти слагаемые отправляются в остаток и нас не интересуют.

Отсюда приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = 3(x,x)^2 A + r_1(h) = 3(x,x)^2(2(x,h) + (h,h)) + r_1(h) =$$

$$= 6(x,x)^2(x,h) + r(h).$$

Первое слагаемое линейно по h, остаток $r(h) = 3(x,x)^2(h,h) + r_1(h)$ второго порядка по h.

Второй способ. Имеем $J(x) = \psi(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x) = (x,x)$ – первое, $\psi(y) = y^3$ – второе отображение.

Из примера 29 имеем $H = \varphi`(x)[h] = 2(x,h)$, $\psi'(y) = 3y^2$, то есть $\psi'(y)[H] = 3y^2 H$. Отсюда по теореме 11

$$J'(x)[h] = 3(x,x)^2 H = 3(x,x)^2 2(x,h).$$

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = 6(x,x)^2(x,h)$.

Пример 31. Найти производную Фреше функционала
$J : G \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ вида $J(x) = \|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Решение. Имеем $J(x) = \psi(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x) = (x,x)$ – первое, $\psi(y) = \sqrt{y}$ – второе отображение.

По теореме 11 имеем $H = \varphi`(x)[h] = 2(x,h)$, $\psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, то есть $\psi'(y)[H] = \frac{H}{2\sqrt{y}}$ при $y \neq 0$.

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = \frac{(x,h)}{\|x\|}$.

Пример 32. Найти производную Фреше отображения $J : G \setminus \{0\} \to G$ вида $J(x) = x\|x\|$.

Решение. Вычислим значение функционала на варьированном аргументе

$$J(x+h) = (x+h)\|x+h\|.$$

Воспользуемся результатом примера 31, записанным в виде

$$\|x+h\| = \|x\| + \frac{(x,h)}{\|x\|} + r_1(h),$$

подставив его при вычислении приращения

$$J(x+h) - J(x) = x(\|x\| + \frac{(x,h)}{\|x\|} + r_1(h)) + h(\|x\| + \frac{(x,h)}{\|x\|} + r_1(h)) - x\|x\| =$$

$$= \frac{x(x,h)}{\|x\|} + \|x\|h + r(h).$$

В последнее слагаемое собрали все, кроме линейных по h слагаемых, что составляет остаток $r(h)$ второго и более высокого порядков по h.

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = \frac{x(x,h)}{\|x\|} + \|x\|h$.

Пример 33. Найти дифференциал Фреше для $J(x) = \int_0^1 x^3(t)dt$.

Решение. Вычислим значение функционала на варьированном аргументе

$$J(x+h) = \int_0^1 (x(t)+h(t))^3 dt = \int_0^1 x^3(t) + 3x^2(t)h(t) + 3x(t)h^2(t) + h^3(t)dt.$$

Отсюда приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = \int_0^1 3x^2(t)h(t)dt + \int_0^1 \left(3x(t)h^2(t) + h^3(t)\right) dt.$$

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = 3\int_0^1 x^2(t)h(t)dt$.

Пример 34. Найти производную Фреше функционала $J : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $J(x) = \sin x(0)$.

Решение. Вычислим

$$J(x+h) - J(x) = \sin(x(0)+h(0)) - \sin x(0) = \sin x(0)\cos h(0) +$$

$$+ \cos x(0)\sin h(0) - \sin x(0) = \cos x(0)\sin h(0) - \sin x(0)(1-\cos h(0)).$$

Для линеаризации воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми (или формулой Тейлора) $\sin\alpha \sim \alpha$, $1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$. Получим

$$J(x+h) - J(x) = \cos x(0)\ h(0) + r(h).$$

Ответ. Дифференциал Фреше $J'(x)[h] = h(0)\cos x(0)$.

2.2.3. Задачи на вычисление производных

2.1. Функцию $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ в точках $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 0$ исследовать на непрерывность в точке $(0,0)$ и найти ее производные в $(0,0)$ по всем направлениям. Существует ли вариация Лагранжа $\delta f((0,0),h)$?

2.2. Для функции $f(x) = \max\{0,x\}$ найти производные в нуле по всем направлениям и вариацию по Лагранжу.

2.3. Функцию $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ в точках $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ исследовать на непрерывность в точке $(0,0)$, найти вариацию по Лагранжу $\delta f((0,0),h)$ и производную по Гато $f'_G(0,0)$.

2.4. Для функции $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ в точках $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ найти производные по Гато и Фреше в точке $(0,0)$.

В задачах 2.5 – 2.9, которые служат аналогами примеров 28 – 32, найти дифференциал Фреше.

2.5. Линейная функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y,z) = x - 2y + 3z$.

2.6. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = x^2 + y^2$.

2.7. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = (x^2+y^2)^3$.

2.8. Функция $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

2.9. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot(x,y)$ в точке $(3,4)$.

В задачах 2.10 – 2.14, которые тоже служат аналогами примеров 28 – 32, найти дифференциал Фреше.

2.10. Линейный функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \int_0^1 tx(t)dt$.

2.11. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \int_0^1 x^2(t)\,dt$.

2.12. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^3$.

2.13. Функционал $f : L^2[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}$.

2.14. Отображение $f : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ вида
$f(x(t)) = x(t)\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}$.

Вычислить производную Фреше следующих отображений.

2.15. Линейное отображение $A : X \to Y$ линейных пространств.

2.16. Нормировка в гильбертовом пространстве G: $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

2.17. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = x(1)$.

2.18. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = x^2(0) - x(1)$.

2.19. Отображение $f : C[0,1] \to C[0,1]$ вида $f(x(t)) = x(1)x(t)$.

2.20. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = e^{x(0)}$.

2.21. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида $f(x,y) = (xy, x^2 + y^2)$.

2.22. Функционал $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \int_0^1 x(t)\,dt + 2x(1)$.

2.23. Функционал $f : C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \int_0^1 (x^2(t) + \dot{x}(t))\,dt$.

2.24. Функционал $f : C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ вида $f(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt - e^{x(1)}$.

2.3. Ответы к главе “Элементы функционального анализа”

Задачи на вычисление нормы функционала

1.1. $\|J\|_{L[0,2]\to\mathbb{R}} = 1$, $\|J\|_{L^2[0,2]\to\mathbb{R}} = \sqrt{2}$, $\|J\|_{C[0,2]\to\mathbb{R}} = 2$.

1.2. $\|J\|_{L[-2,2]\to\mathbb{R}} = 1$, $\|J\|_{L^2[-2,2]\to\mathbb{R}} = 2$, $\|J\|_{C[-2,2]\to\mathbb{R}} = 4$.

1.3. $\|J\| = 3$.

1.4. $\|J\| = 3$.

1.5. $\|J\| = \sqrt{\frac{31}{30}}$.

1.6. $\|J\| = \frac{7}{6}$.

1.7. $\|J\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

1.8. $\|J\| = \frac{7}{2}$.

1.9. $\|J\| = \sqrt{\frac{1}{30}}$.

1.10. $\|J\| = \frac{7}{6}$.

1.11. $\|J\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Задачи на вычисление производных

2.1. $f \notin C(0,0)$, так как $f(x,kx) = \frac{k}{1+k^2} \neq 0$ при $k \neq 0$. $\delta f((0,0),(1,0)) = 0$, $\delta f((0,0),(0,1)) = 0$ и $\delta f((0,0),h)$ не существует по наклонным направлениям h. $\delta_+ f((0,0),(t,kt)) = \pm\infty$, где знак не зависит от знака t.

2.2. $\delta_+ f(0,-1) = 0 \neq \delta_+ f(0,1) = 1$, поэтому $\delta f(0,h)$ не существует.

2.3. $f \in C(0,0)$, $\delta f((0,0),(\cos\varphi,\sin\varphi)) = \cos^2\varphi\sin\varphi$; нет $f'_G(0,0)$.

2.4. $f'_G(0,0)[h] = f'(0,0)[h] = 0$.

2.5. $f'(x,y,z)[h] = h_1 - 2h_2 + h_3$.

2.6. $f'(x,y)[h] = 2xh_1 + 2yh_2$.

2.7. $f'(x,y)[h] = 6(x^2+y^2)^2(xh_1+yh_2)$.

2.8. $f'(x,y)[h] = \frac{xh_1 + yh_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.9. $f'(x,y)[h] = \frac{1}{5}(34h_1 + 12h_2, 12h_1 + 41h_2)$.

2.10. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_0^1 th(t)\,dt$.

2.11. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2\int_0^1 x(t)h(t)\,dt$.

2.12. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 6\left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^2 \int_0^1 x(t)h(t)\,dt$.

2.13. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \frac{\int_0^1 x(t)h(t)\,dt}{\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}}$.

2.14. $f'(x)[h] = \left(x(t)\int_0^1 x(t)h(t)\,dt + h(t)\int_0^1 x^2(t)\,dt\right) \Big/ \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}$.

2.15. $A' = A$.

2.16. $f'(x(\cdot))[h] = \frac{h(t)}{\|x\|} - \frac{x(t)\cdot<x,h>}{\|x\|^3}$.

2.17. $f'(x)[h] = h(1)$.

2.18. $f'(x)[h] = 2x(0)h(0) - h(1)$.

2.19. $f'(x)[h] = x(t)h(1) + x(1)h(t)$.

2.20. $f'(x)[h] = e^{x(0)}h(0)$.

2.21. $f'(x,y)[h] = \{yh_1 + xh_2, 2xh_1 + 2yh_2\}$.

2.22. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_0^1 h(t)\,dt + 2h(1)$.

2.23. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_0^1 (2x(t)h(t) + \dot{h}(t))\,dt$.

2.24. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{h}(t)\,dt - e^{x(1)}h(1)$.

Глава 3

Вариационное исчисление

3.1. Задача с закрепленными концами

3.1.1. Основные понятия и порядок решения

Простейшей задачей вариационного исчисления называется задача оптимизации функционала $J : C^1[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ вида

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to extr; \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \quad (3.1)$$

Функция трех переменных $L(t, x, v)$, две из которых: $x = x(t)$ и $v = \dot{x}(t)$ – зависят от варьируемого аргумента функционала, называется *интегрантом*. Экстремум (максимум и минимум) ищем на классе $C^1[t_0, t_1]$ непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$, называемых *допустимыми функциями*.

Определение 10. Допустимая $\tilde{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (3.1), что обозначается $\tilde{x} \in wlocmin$, если существует $\delta > 0$ такое, что $J(x) \geq J(\tilde{x})$ для любой допустимой $x(t)$, удовлетворяющей условию $\|x - \tilde{x}\|_{C^1[t_0,t_1]} < \delta$.

Так как традиционно ищется *слабый* экстремум задачи (3.1), то этот термин и букву w опускают (то есть обозначают $\tilde{x} \in locmin$ или $\tilde{x} \in locmax$ в случае противоположного неравенства $J(x) \leq J(\tilde{x})$). Исключение составляет случай, когда наряду со слабым экстремумом ищется сильный, о чем мы будем говорить в отдельном параграфе. В большинстве случаев понятия сильного и слабого (weak – слабый) экстремумов совпадают.

Определение 11. Допустимая $\tilde{x} \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет (слабый) *глобальный минимум* в задаче (3.1), что обозначается $\tilde{x} \in absmin$, если $J(x) \geq J(\tilde{x})$ для любой допустимой $x(t)$.

Пишем $\tilde{x} \in absmax$ тогда и только тогда, когда $J(x) \leq J(\tilde{x})$ для любой допустимой $x(t)$.

Напомним сокращенное обозначение $L_x = \frac{\partial L}{\partial x}$, $L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ частных производных, которые являются также функциями трех переменных. При подстановке в каждую из L, L_x и $L_{\dot{x}}$ конкретной $\tilde{x}(t)$ (и ее производной) получим функцию одной переменной t, которую будем обозначать $\hat{L} = L(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$, $\hat{L}_x = \hat{L}_x(t)$ и $\hat{L}_{\dot{x}} = \hat{L}_{\dot{x}}(t)$ соответственно.

Теорема 12. *Пусть L, L_x и $L_{\dot{x}}$ непрерывны, а $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$. Если $\tilde{x} \in wlocmin$ в задаче (3.1), то функция $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера на отрезке* $[t_0, t_1]$

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0. \tag{3.2}$$

Уравнение Эйлера служит необходимым условием экстремума – *условием стационарности* для интегранта $L(t, x(t), \dot{x}(t))$, а его решения называют *экстремалями.* Экстремали, удовлетворяющие граничным условиям (и условиям гладкости), называют *допустимыми экстремалями.*

Все найденные допустимые экстремали необходимо исследовать на экстремум. Основной прием состоит в анализе знака остаточного члена $r(h)$ в формуле приращения функционала, полученного из формулы (2.3),

$$J(\tilde{x} + h) - J(\tilde{x}) = J'(\tilde{x})[h] + r(h)$$

для $h(t)$ с условием $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Это обусловлено тем, что уравнение Эйлера (3.2) соответствует обращению в нуль дифференциала Фреше $J'(\tilde{x})[h]$. Неочевидные по знаку $r(h)$ случаи дополнительного исследования проводятся с привлечением условий второго (или более высокого) порядка и будут выделены в отдельный параграф.

3.1.2. Примеры задач с закрепленными концами

Пример 35. Исследовать на экстремум функционал $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2\, dt$ с закрепленными концами $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.

Решение. Интегрант данного функционала $L = \dot{x}^2$.

Его частные производные $L_x = 0$, $L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$.

Уравнение Эйлера $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0$ для данного интегранта примет вид

$$2\ddot{x} = 0.$$

Решим уравнение $\ddot{x} = 0$ последовательным интегрированием

$$\dot{x} = C_1, \qquad x = C_1 t + C_2.$$

Подставим в это общее решение граничные условия $x(0) = 1$, $x(1) = 0$ и получим систему уравнений

$$C_2 = 1, \quad C_1 + C_2 = 0.$$

Получили $C_1 = -1, C_2 = 1$, то есть допустимую экстремаль

$$\tilde{x} = 1 - t.$$

Второй этап решения состоит в проверке допустимой экстремали на экстремум. Вычислим приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = \int_0^1 (\dot{x} + \dot{h})^2 \, dt - \int_0^1 \dot{x}^2 \, dt = 2\int_0^1 \dot{x}\dot{h} \, dt + \int_0^1 \dot{h}^2 \, dt.$$

Покажем, что первое слагаемое (дифференциал Фреше) на допустимой экстремали обращается в нуль.

Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 \dot{x}\dot{h} \, dt = \int_0^1 \dot{x} \, d(h(t)) = \dot{x}(t)h(t)|_0^1 - \int_0^1 \ddot{x}h \, dt.$$

Первое слагаемое равно нулю за счет условия $h(0) = h(1) = 0$, обеспечивающего требование закрепления концов, а второе равно нулю за счет уравнения Эйлера $2\ddot{x} = 0$ на допустимой экстремали.

Получили для приращения (на допустимой экстремали)

$$J(\tilde{x}+h) - J(\tilde{x}) = \int_0^1 \dot{h}^2 \, dt \geq 0$$

для всех допустимых $h(t)$ (а не только малых по норме). Значит, экстремаль $\tilde{x} = 1 - t$ доставляет глобальный (абсолютный) минимум.

Вычислим $J_{\min} = J(\tilde{x}) = \int_0^1 (-1)^2 \, dt = 1$.

Сверху ограничений для функционала $J(x)$ нет.

Ответ. $1 - t \in absmin$, $J_{\min} = 1$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 36. Решить $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt \to extr$ с закрепленными концами $x(0) = x(1) = 0$.

Решение. Первый этап. Для интегранта $L = \dot{x}^2 - x$ уравнение Эйлера $2\ddot{x} + 1 = 0$.

Решим уравнение $\ddot{x} = -\frac{1}{2}$ последовательным интегрированием

$$\dot{x} = -\frac{t}{2} + C_1, \qquad x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Подставим в это общее решение граничные условия $x(0) = 0$, $x(1) = 0$: $C_2 = 0$, $-\frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 0$. Получим $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = 0$, то есть допустимую экстремаль

$$\tilde{x} = \frac{t - t^2}{4}.$$

Второй этап решения. Приращение функционала $J(x+h) - J(x) =$

$$= \int_0^1 ((\dot{x} + \dot{h})^2 - (x + h))\, dt - \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\, dt = \int_0^1 (2\dot{x}\dot{h} - h)\, dt + \int_0^1 \dot{h}^2\, dt.$$

Первое слагаемое есть дифференциал Фреше, а второе слагаемое составляет остаток $r(h)$. Если докажем, что дифференциал Фреше на допустимой экстремали обращается в нуль (а это всегда так), то, как и в предыдущем примере, $\tilde{x} = \frac{t-t^2}{4} \in absmin$.

Дифференциал Фреше состоит из двух слагаемых $2\int_0^1 \dot{x}\dot{h}\, dt - \int_0^1 h\, dt$, первое из которых интегрируем по частям

$$2\int_0^1 \dot{x}\dot{h}\, dt = 2\int_0^1 \dot{x}\, dh = 2\dot{x}(t)h(t)|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{x}h\, dt = 0 - 2\int_0^1 \ddot{x}h\, dt.$$

Итак, дифференциал Фреше превратился в интеграл

$$-\int_0^1 (2\ddot{x} + 1)h\, dt,$$

который равен нулю для допустимой экстремали согласно уравнению Эйлера.

Далее $J_{\min} = J(\tilde{x}) = \int_0^1 ((\frac{1-2t}{4})^2 - \frac{t-t^2}{4})\, dt = \int_0^1 \frac{1-8t+8t^2}{16} dt = -\frac{1}{48}$.

Ответ. $\frac{t-t^2}{4} \in absmin$, $J_{\min} = -\frac{1}{48}$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 37. Решить $J(x) = \int_1^e (x - t\dot{x}^2)\,dt \to extr$ с закрепленными концами $x(1) = 1$, $x(e) = 2$.

Решение. Первый этап. Для интегранта $L = x - t\dot{x}^2$ имеем $L_x = 1$, $L_{\dot{x}} = -2t\dot{x}$ и уравнение Эйлера $2t\ddot{x} + 2\dot{x} + 1 = 0$.

Для его решения сделаем замену $y = \dot{x}$, понижающую порядок,

$$2t\dot{y} + 2y = -1, \quad \text{или} \quad \dot{y} + \frac{1}{t}y = -\frac{1}{2t}.$$

Это линейное уравнение первого порядка, которое решается подстановкой $y = uv$:

$$\dot{u}v + (u\dot{v} + \frac{uv}{t}) = -\frac{1}{2t}.$$

Объединили два слагаемых для того, чтобы найти вспомогательную функцию $v(t)$ из аналогичного однородного уравнения

$$\dot{v} + \frac{v}{t} = 0, \quad \text{или} \ \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{t}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{t}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{t}.$$

Получим $\ln v = -\ln t$, $\ln v = \ln t^{-1}$, $v = \frac{1}{t}$. Полученную вспомогательную функцию подставляем в оставшуюся часть уравнения

$$\dot{u}v = -\frac{1}{2t}, \ \frac{\dot{u}}{t} = -\frac{1}{2t}, \ \dot{u} = -\frac{1}{2}.$$

Интегрируем $u = -\frac{t}{2} + C_1$. Итак, получили $y = (C_1 - \frac{t}{2})\frac{1}{t}$, что согласно замене $\dot{x} = \frac{C_1}{t} - \frac{1}{2}$. Еще раз интегрируем

$$x = C_1 \ln t - \frac{t}{2} + C_2.$$

Подставим сюда граничные условия

$$x(1) = 1 \to \ -\frac{1}{2} + C_2 = 1, \qquad x(e) = 2 \to \ C_1 - \frac{e}{2} + C_2 = 2.$$

Итак, $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_1 = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$. Получили допустимую экстремаль

$$\tilde{x} = \frac{e+1}{2}\ln t + \frac{3-t}{2}.$$

Второй этап решения. Приращение функционала $J(x+h) - J(x) =$

$$= \int_1^e (x+h-t(\dot x+\dot h)^2)\,dt - \int_1^e (x-t\dot x^2)\,dt = \int_1^e (h-2t\dot x\dot h)\,dt - \int_1^e t\dot h^2\,dt.$$

Первое слагаемое есть дифференциал Фреше, а второе слагаемое составляет остаток $r(h)$. Дифференциал Фреше тоже состоит из двух слагаемых. Выпишем второе из них

$$-2\int_1^e t\dot x\dot h\,dt = -2\int_1^e t\dot x\,dh = -2(t\dot x h|_1^e - \int_1^e h\frac{d}{dt}(t\dot x)dt) =$$

$$= -2(e\dot x(e)h(e) - \dot x(1)h(1) - \int_1^e h(\dot x + t\ddot x)dt) = 2\int_1^e (t\ddot x + \dot x)hdt.$$

Весь дифференциал Фреше равен $\int_1^e (2t\ddot x + 2\dot x + 1)hdt$.

Он, согласно уравнению Эйлера, обращается в нуль. Итак, приращение функционала на допустимой экстремали равно остатку

$$J(x+h) - J(x) = -\int_1^e t\dot h^2\,dt \le 0$$

для всех $h(t)$, так как $t > 0$ при $t \in [1,e]$ и $\dot h^2(t) \ge 0$. Значит,

$$\tilde x = \frac{e+1}{2}\ln t + \frac{3-t}{2} \in absmax.$$

Вычислим $J(\tilde x) = \int_1^e (\frac{e+1}{2}\ln t + \frac{3-t}{2} - t(\frac{e+1}{2t} - \frac{1}{2})^2)dt = -\frac{1}{8}(e^2 - 12e + 11)$.

Ответ. $\frac{e+1}{2}\ln t + \frac{3-t}{2} \in absmax$, $J_{\min} = -\infty$, $J_{\max} = -\frac{e^2-12e+11}{8}$.

3.1.3. Простейшие задачи КВИ

1.1. $J(x) = \int_0^1 \dot x^2\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

1.2. $J(x) = \int_0^1 (\dot x^2 - x)\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$

1.3. $J(x) = \int_0^2 (x - \dot x^2)\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(2) = 1.$

1.4. $J(x) = \int_0^1 (\dot x^2 + tx)\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$

1.5. $J(x) = \int_0^1 (\dot x^2 - t^2x)\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = 0.$

1.6. $J(x) = \int_1^e t\dot x^2\,dt$; $\quad x(1) = 0,\ x(e) = 1.$

1.7. $J(x) = \int_1^e (t\dot x^2 + 2x)\,dt$; $\quad x(1) = 0,\ x(e) = 0.$

1.8. $J(x) = \int_0^1 (t^2\dot x^2 + 12x^2)\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

1.9. $J(x) = \int_0^1 x^2\dot x^2\,dt$; $\quad x(0) = 1,\ x(1) = \sqrt{2}.$

1.10. $J(x) = \int_0^1 e^x\dot x^2\,dt$; $\quad x(0) = 0,\ x(1) = \ln 4.$

3.2. Задача Больца

Постановка задачи

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr,$$

где граничные значения включены в функционал в виде слагаемого *терминанта* $l(u, v)$ от двух переменных: $u = x(t_0)$, $v = x(t_1)$. Решение задачи ищется в классе $C^1([t_0, t_1])$.

Допустимая экстремаль удовлетворяет:

а) условию стационарности – уравнению Эйлера для интегранта L

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0;$$

б) условию трансверсальности – частная производная интегранта L по последнему аргументу $\dot{x}$, вычисленная в концах интегрирования, приравнивается к соответствующей частной производной терминанта (со знаком "минус" для верхнего предела интегрирования)

$$L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)}, \quad L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)}.$$

Из дифференциального уравнения Эйлера находим общее решение для экстремалей, а условие трансверсальности используем при вычислении констант для частного решения – допустимой экстремали.

3.2.1. Примеры задачи Больца

Пример 38.

$$B(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + 2x)dt + x^2(0) \to extr.$$

Решение. I. Интегрант $L = \dot{x}^2 + 2x$, а терминант $l = x^2(0)$. Вычислим от них частные производные

$$L_x = 2, \quad L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, \qquad l_{x(0)} = 2x(0), \quad l_{x(1)} = 0.$$

Составим уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0 \Rightarrow\ 2\ddot{x} - 2 = 0.$$

Его общее решение получим интегрированием

$$\dot{x}(t) = t + C_1, \quad x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Составим условие трансверсальности

$$2\dot{x}(0) = 2x(0), \quad 2\dot{x}(1) = 0.$$

Подставим в эту систему уравнений найденное общее решение (сократив на два)

$$C_1 = C_2, \quad 1 + C_1 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = -1$. Нашли допустимую экстремаль

$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2}{2} - t - 1.$$

II. Для этой допустимой экстремали найдем приращение функционала Больца

$$B(x+h) - B(x) = \int_0^1 ((\dot{x} + \dot{h})^2 + 2(x+h))dt + (x(0) + h(0))^2 -$$

$$-\int_0^1 (\dot{x}^2 + 2x)dt - x^2(0) = \int_0^1 (2\dot{x}\dot{h} + 2h)dt + 2x(0)h(0) + (\int_0^1 \dot{h}^2 dt + h^2(0)).$$

Первые два слагаемых составляют дифференциал Фреше, а правая скобка содержит остаток, состоящий из двух неотрицательных слагаемых. Как и ранее, наша задача состоит в том, чтобы показать, что дифференциал Фреше обращается в нуль на допустимой экстремали.

Выпишем отдельно первое слагаемое под знаком интеграла из дифференциала Фреше и проинтегрируем его по частям

$$\int_0^1 2\dot{x}\dot{h}\; dt = 2\dot{x}h|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{x}hdt = 2\dot{x}(1)h(1) - 2\dot{x}(0)h(0) - \int_0^1 2\ddot{x}hdt.$$

Подставим из условия трансверсальности $\dot{x}(1) = 0$ и добавим остальные слагаемые дифференциала Фреше

$$-2\dot{x}(0)h(0) - \int_0^1 2\ddot{x}hdt + \int_0^1 2hdt + 2x(0)h(0) =$$

$$= -\int_0^1 (2\ddot{x} - 2)h dt + (-2\dot{x}(0) + 2x(0))h(0).$$

Интегральное слагаемое обращается в нуль согласно уравнению Эйлера, а терминальное – согласно первому условию трансверсальности. Доказали, что допустимая экстремаль доставляет глобальный минимум. Найдем этот минимум подстановкой $\tilde{x}(t)$ в исходный функционал

$$B(\tilde{x}) = \int_0^1 \left[(t-1)^2 + t^2 - 2t - 2\right] dt + (-1)^2 = -\frac{4}{3}.$$

Глобальный максимум находим подбором конкретного примера растущих постоянных функций $x_n(t) = n$, на которых

$$B(x_n) = \int_0^1 (0 = 2n)\, dt + n^2 = n^2 + 2n \to +\infty.$$

Ответ. $\frac{t^2}{2} - t - 1 \in absmin$, $B_{\min} = -\frac{4}{3}$, $B_{\max} = +\infty$.

Пример 39.

$$B(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) + 4x(\frac{\pi}{2}) \to extr.$$

Решение. I. Интегрант $L = \dot{x}^2 - x^2$, а терминант функционала Больца $l = x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) + 4x(\frac{\pi}{2})$. Вычислим от них частные производные

$$L_x = -2x, \quad L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, \qquad l_{x(0)} = 2x(0), \quad l_{x(\frac{\pi}{2})} = -2x(\frac{\pi}{2}) + 4.$$

Составим уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0 \Rightarrow \quad 2\ddot{x} + 2x = 0$$

и условие трансверсальности

$$2\dot{x}(0) = 2x(0), \quad 2\dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 2x(\frac{\pi}{2}) - 4.$$

Общее решение уравнения Эйлера $\ddot{x} + x = 0$ как уравнения с постоянными коэффициентами найдем через характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ с корнями $k = \pm i$

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Отсюда

$$\dot{x}(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Подставим в эту систему уравнений условие трансверсальности (сократив на два)

$$0 + C_2 = C_1 + 0, \quad -C_1 + 0 = C_2 - 2.$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Нашли допустимую экстремаль

$$\tilde{x}(t) = \sin t + \cos t.$$

II. Для этой допустимой экстремали найдем приращение функционала Больца $B(x+h) - B(x) =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\dot{x}+\dot{h})^2 - (x+h)^2)dt + (x(0)+h(0))^2 - (x(\frac{\pi}{2})+h(\frac{\pi}{2}))^2 + 4(x(\frac{\pi}{2})+h(\frac{\pi}{2})) -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt - x^2(0) + x^2(\frac{\pi}{2}) - 4x(\frac{\pi}{2}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\dot{x}\dot{h} - 2xh)dt + 2x(0)h(0) - 2x(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2}) + 4h(\frac{\pi}{2}) +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{h}^2 - h^2)dt + h^2(0)) - h^2(\frac{\pi}{2}).$$

Покажем, что дифференциал Фреше

$$B'(x)[h] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\dot{x}\dot{h} - 2xh)dt + 2x(0)h(0) - 2x(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2}) + 4h(\frac{\pi}{2})$$

равен нулю. Проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\dot{x}\dot{h}\, dt = 2\dot{x}h\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ddot{x}h\, dt = 2\dot{x}(\frac{\pi}{2})h(\frac{\pi}{2}) - 2\dot{x}(0)h(0) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ddot{x}h\, dt.$$

Получим по уравнению Эйлера и условию трансверсальности $B'(x)[h] =$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\ddot{x} + 2x)h\, dt + 2(x(0) - \dot{x}(0))h(0) + 2(\dot{x}(\frac{\pi}{2}) - x(\frac{\pi}{2}) + 2)h(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

III. Будем анализировать остаток, обращая внимание на то, что в него входят слагаемые разных знаков,

$$r(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{h}^2 - h^2)dt + h^2(0) - h^2(\frac{\pi}{2}).$$

Поэтому подберем примеры, дающие разные знаки всего остатка $r(h)$.

Если возьмем $h(t) = \sin t$, то $r(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt + 0 - 1 = 0 - 1 = -1$. Если $h(t) = \cos t$, то $\dot{h}(t) = -\sin t$, $r(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \cos^2 t)dt + 1 - 0 = 1$.

Чтобы добавка была малой по норме, домножим каждую из пробных добавок $h(t)$ на малое положительное δ:

для $h(t) = \delta \cos t$ остаток $r(h) = \delta^2 > 0$;

для $h(t) = \delta \sin t$ остаток $r(h) = -\delta^2 < 0$.

Значит, допустимая экстремаль $\tilde{x}(t) = \sin t + \cos t$ не доставляет локальный экстремум.

IV. Исследуем на глобальный экстремум.

Возьмем в качестве пробных функций постояные растущего уровня $h_n(t) = n$. Тогда $\dot{h}_n = 0$ и $r(h_n) = -n^2 \frac{\pi}{2} + n^2 - n^2 = -n^2 \frac{\pi}{2} \to -\infty$.

Теперь возьмем в качестве пробных функций $h_n(t) = \sin nt$. Причем пусть n четное. Тогда $\dot{h}_n(t) = n \cos nt$ и $r(h_n) = \frac{n^2-1}{2} \frac{\pi}{2} \to +\infty$.

Ответ. $\sin t + \cos t \notin locextr$, $B_{\min} = -\infty$, $B_{\max} = +\infty$.

Поскольку вариантов подбора пробных функций для глобального экстремума очень много, то предложенные варианты можно внести в ответ.

3.2.2. Задачи Больца

2.1. $B(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to extr.$

2.2. $B(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 \, dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr.$

2.3. $B(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 \, dt + x^2(0) - 2x(1) \to extr.$

2.4. $B(x(\cdot)) = \int_0^2 (2x - \dot{x}^2) \, dt - x^2(0) + x(2) \to extr.$

2.5. $B(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt - \frac{x^2(1)}{2} \to extr.$

2.6. $B(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt - 2x(1) \operatorname{sh} 1 \to extr.$

2.7. $B(x(\cdot)) = \int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x \sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr.$

2.8. $B(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)dt - 2x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) \to extr.$

2.9. $B(x(\cdot)) = \int_0^{e-1} (t+1)\dot{x}^2 \, dt + 2x(0)(x(e-1) + 1) \to extr.$

2.10. $B(x(\cdot)) = \int_1^2 t^2 \dot{x}^2 \, dt - 2x(1) + x^2(2) \to extr.$

3.3. Задача с подвижными концами

Постановка задачи, относящейся к условной оптимизации,

$$J(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr$$

при условиях связи $l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, m$.

Здесь искомый элемент $\xi = (x(t), t_0, t_1)$; причем $(t_0, t_1) \in \Delta$, где Δ – некоторый заданный конечный отрезок.

Замечание. Частным случаем этой задачи служит задача, в которой закреплен один конец, а второй подвижен лишь по вертикали (тогда $\xi = x(t)$). Другой тип рассматриваемых ниже задач – с незакрепленным верхним пределом интегрирования T, когда искомый элемент $\xi = (x(t), T)$. Решение этих задач ищется для $x \in C^1([t_0, t_1]) \subset C^1(\Delta)$.

3.3.1. Два основных случая

Поэтому общее правило решения [4] распишем для этих двух частных случаев.

Первый случай. Составляется функция Лагранжа

$$\Lambda(x; \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

для которой $L = \lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t))$ и $l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ – интегрант и терминант соответственно.

Допустимая экстремаль $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет:

а) условию стационарности по x, то есть уравнению Эйлера для интегранта L

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0,$$

б) условию трансверсальности (связывающему интегрант L с терминантом l) для нахождения констант

$$L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)}, \quad L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)},$$

в) условиям связи $l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, m$.

Второй случай подвижного верхнего предела T и задачи

$$J(\xi) = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt \to extr \text{ при } l_1(t_0, x(t_0)) = 0,\ l_2(T, x(T)) = 0.$$

Составляется функция Лагранжа

$$\Lambda(\xi; \lambda) = \int_{t_0}^{T} \lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), T, x(T)),$$

где $L = \lambda_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)\ )$ – интегрант, $l = \lambda_1 l_1(t_0, x(t_0)) + \lambda_2 l_2(T, x(T))$ – терминант (одно из слагаемых может отсутствовать).

Допустимая экстремаль $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет

а) условию стационарности по x

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0.$$

Весь допустимый элемент $\tilde{\xi} = (\tilde{x}, T)$ удовлетворяет:

б) условию трансверсальности

$$L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)}, \quad L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)},$$

в) условию стационарности по подвижному концу T

$$\Lambda_T = 0\ \sim \quad \lambda_0 f(T) + l_T + l_{x(T)} \dot{x}(T) = 0,$$

г) условиям связи $l_1(t_0, x(t_0)) = 0,\ l_2(T, x(T)) = 0.$

3.3.2. Фиксированные пределы интегрирования

Задачу с одним закрепленным концом решаем методом Лагранжа.

Пример 40.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2\ dt \to extr,$$

удовлетворяющее условию $x(1) = 1$.

Решение. Функция Лагранжа $\Lambda(x; \lambda) = \int_0^1 \lambda_0 \dot{x}^2(t)\ dt + \lambda_1(x(1) - 1)$.

I. Интегрант $L = \lambda_0 \dot{x}^2$, а терминант $l = \lambda_1(x(1) - 1)$.

Вычислим от них частные производные

$$L_x = 0, \quad L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}, \qquad l_{x(0)} = 0, \quad l_{x(1)} = \lambda_1,$$

а) составим уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0 \Rightarrow \; 2\lambda_0\ddot{x} = 0,$$

б) составим условие трансверсальности

$$2\lambda_0\dot{x}(0) = 0, \quad 2\lambda_0\dot{x}(1) = -\lambda_1,$$

в) повторим условие связи $x(1) = 1$.

II. Особый случай $\lambda_0 = 0$ из условия *б* приводит к $\lambda_1 = 0$, что невозможно (не могут все множители Лагранжа равняться нулю).

Основной случай $\lambda_0 = 1$ приводит к набору уравнений

а) $\ddot{x} = 0$, б) $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(1) = -\frac{\lambda_1}{2}$, в) $x(1) = 1$.

Решим *а*

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2.$$

Из условия *б* имеем $C_1 = 0$, а из условия *в* имеем $C_2 = 1$. Заметим, что $\lambda_1 = 0$.

Итак, допустимая экстремаль $\tilde{x}(t) = 1$.

Вычислим значение функционала на допустимой экстремали

$$J(\tilde{x}) = \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Поскольку всегда $J(x) \geq 0$, то $\tilde{x} \in absmin$ (глобальный минимум).

III. Для исследования на глобальный максимум подберем пример допустимых функций

$$x_n(t) = nt - n + 1,$$

удовлетворяющих условию свяи $x(1) = 1$. Для них

$$J(x_n) = \int_0^1 n^2 \, dt = n^2 \to +\infty.$$

Ответ. $1 \in absmin$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 41.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 \, dt - 2x^2(1) \to extr, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Составим $\Lambda(x; \lambda) = \int_0^1 \lambda_0\dot{x}^2(t) \, dt - 2\lambda_0 x^2(1) + \lambda_1 x(0)$.

I. Интегрант $L = \lambda_0\dot{x}^2$, а терминант $l = -2\lambda_0 x^2(1) + \lambda_1 x(0)$.

Вычислим от них частные производные

$$L_x = 0, \quad L_{\dot{x}} = 2\lambda_0\dot{x}, \qquad l_{x(0)} = \lambda_1, \quad l_{x(1)} = -4\lambda_0 x(1),$$

а) составим уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0 \Rightarrow \; 2\lambda_0\ddot{x} = 0,$$

б) составим условие трансверсальности

$$2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1, \quad 2\lambda_0\dot{x}(1) = 4\lambda_0 x(1),$$

в) повторим условие связи $x(0) = 0$.

II. Особый случай $\lambda_0 = 0$ из условия *б* приводит к $\lambda_1 = 0$, что невозможно (не могут все множители Лагранжа равняться нулю).

Основной случай $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ приводит к набору уравнений

а) $\ddot{x} = 0$, б) $\dot{x}(0) = \lambda_1$, $\dot{x}(1) = 2x(1)$, в) $x(0) = 0$.

Для общего решения $x = C_1 t + C_2$ по условию *в* найдем $C_2 = 0$. По условию *б* получим $C_1 = \lambda_1$, $C_1 = 2C_1$. Отсюда $C_1 = \lambda_1 = 0$.

Итак, допустимая экстремаль $\tilde{x}(t) = 0$ и значение функционала на ней $J(\tilde{x}) = 0$.

III. Если возьмем $h(t)$ в виде ломаной с условием $h(0) = h(1) = 0$ и $h(\frac{1}{2}) > 0$, то $J(h) > 0$.

Если $h(t) = \delta t$, то $J(h) = -\delta^2 < 0$. Значит, $0 \notin locextr$.

При исследовании на глобальный экстремум возьмем $x_n(\frac{1}{2}) = n$ для той же ломаной и $x_n(t) = nt$ – для глобального минимума.

Ответ. $0 \notin locextr$; $J_{\min} = -\infty$, $J_{\max} = +\infty$.

3.3.3. Подвижный верхний предел

Пример 42.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T \dot{x}^2 \, dt \to extr,$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = 0$, $(T-1)x^2(T) + 2 = 0$.

Решение. Функция Лагранжа

$$\Lambda(\xi;\lambda) = \int_0^T \lambda_0\dot{x}^2(t)\, dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2((T-1)x^2(T) + 2).$$

I. Интегрант $L = \lambda_0\dot{x}^2$, а терминант $l = \lambda_1 x(0) + \lambda_2((T-1)x^2(T)+2)$. Вычислим от них частные производные

$$L_x = 0,\ L_{\dot x} = 2\lambda_0 \dot x, \quad l_{x(0)} = \lambda_1,\ l_{x(T)} = 2\lambda_2(T-1)x(T),\ l_T = \lambda_2 x^2(T),$$

составим: а) уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}L_{\dot x} - L_x = 0 \Rightarrow \quad 2\lambda_0 \ddot x = 0,$$

б) условие трансверсальности

$$2\lambda_0 \dot x(0) = \lambda_1, \quad 2\lambda_0 \dot x(T) = -2\lambda_2(T-1)x(T),$$

в) условие стационарности по подвижному верхнему концу T

$$\lambda_0 \dot x^2(T) + \lambda_2 x^2(T) + 2\lambda_2(T-1)x(T)\dot x(T) = 0.$$

II. Особый случай $\lambda_0 = 0$ из условия *б* приводит к $\lambda_1 = 0$ и уравнению $\lambda_2(T-1)x(T) = 0$. Поскольку в этом случае не может быть $\lambda_2 = 0$ (не могут все множители Лагранжа равняться нулю), то $T = 1$ или $x(T) = 0$. Вариант $T = 1$ (из условия *в*) влечет $x(T) = 0$. Считаем доказанным $x(T) = 0$. Но это условие противоречит граничному условию $(T-1)x^2(T) + 2 = 0$.

Основной случай $\lambda_0 = 1$ приводит к набору уравнений:

$$\text{а) } \ddot x = 0, \quad \text{б) } 2\dot x(0) = \lambda_1,\ \dot x(T) = -\lambda_2(T-1)x(T),$$

$$\text{в) } \dot x^2(T) + \lambda_2 x^2(T) + 2\lambda_2(T-1)x(T)\dot x(T) = 0,$$

$$\text{г) } x(0) = 0,\ (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$$

Из уравнения Эйлера $\ddot x = 0$ имеем $\dot x(t) = C_1$, $x(t) = C_1 t + C_2$. Из условия $x(0) = 0$ сразу получим $C_2 = 0$. Значит, $x(t) = Ct$. Остальные три условия придут к виду (где $C \neq 0$): $2C = \lambda_1$, $C = -\lambda_2(T-1)CT$,

$$(T-1)C^2T^2 + 2 = 0,\ C^2 + \lambda_2 C^2 T^2 + 2\lambda_2(T-1)CTC = 0.$$

Сократим на C (второе) и на C^2 (последнее)

$$1 = -\lambda_2(T-1)T, \quad 1 + \lambda_2 T^2 + 2\lambda_2(T-1)T = 0.$$

Из этих двух уравнений, подставив первое из них в последнее слагаемое второго из них, получим $1 + \lambda_2 T^2 - 2 = 0$, или $\lambda_2 T^2 = 1$. Полученное соотношение подставим в первое из этих двух $\lambda_2 T = 2$, откуда вытекает $T = \frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = 4$.

Подставим $T = \frac{1}{2}$ в третье соотношение и получим, что $C^2 = 16$, или $C = \pm 4$.

Итак, допустимая экстремаль $\tilde{x}(t) = \pm 4t$, а весь допустимый элемент

$$\tilde{\xi} = (\tilde{x}(t) = \pm 4t; \tilde{T} = \frac{1}{2}).$$

Вычислим значение функционала на нем $J(\tilde{\xi}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 16\ dt = 8$ и справедливость заданного граничного условия для него

$$(T-1)x^2(T) + 2 = (-1/2)(\pm 2)^2 + 2 = 0.$$

III. Исследуем сначала на локальный экстремум допустимый элемент.

Традиционный путь вычисления приращения и его анализ

$$J(\tilde{x}+h, T) - J(\tilde{x}, \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{T} \dot{x}^2\ dt + 2\int_0^T \dot{x}\dot{h}\ dt + \int_0^T \dot{h}^2\ dt =$$

$$= 16(T - \frac{1}{2}) + 2\dot{x}h|_0^T - \int_0^T 2\ddot{x}h\ dt + r(h)$$

в данной задаче сложен. Хотя неотрицательность $r(h)$ очевидна.

Предложим другой путь. Согласно уравнению Эйлера $\ddot{x} = 0$ с граничным условием $x(0) = 0$ анализ проведем в классе допустимых функций вида $x(t) = Ct$. Значение функционала на элементах $\xi = (Ct, T)$ равно $J(\xi) = \int_0^T C^2\ dt = C^2T$. Второе ограничение на этих элементах выглядит

$$(T-1)C^2T^2 + 2 = 0.$$

Из него вытекает $T < 1$ (ограничение $T > 0$ по определению задачи). Перепишем его в виде $C^2T = \frac{2}{T-T^2}$ и найдем минимум этой функции на интервале $(0,1)$ через производную, равную

$$\left(\frac{2}{T-T^2}\right)' = \frac{2(2T-1)}{(T-T^2)^2}.$$

Минимум достигается при $T = \frac{1}{2}$ и равен 8. Естественно, что это и глобальный минимум на данном классе линейных функций.

IV. Для определения глобального максимума возьмем последовательность ломаных $x_n(t)$, проходящих через точки $(0,0)$, $(\frac{1}{4}, n)$, $(\frac{1}{2}, 2)$. Тогда $J(x_n, \frac{1}{2}) > \frac{n^2}{4} \to +\infty$.

Ответ. $(\tilde{x}(t) = \pm 4t; \tilde{T} = \frac{1}{2}) \in absmin$, $J_{\min} = 8$, $J_{\max} = +\infty$.

3.3.4. Задачи с подвижными концами

3.1. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad x(1) = 0.$

3.2. $J(x(\cdot)) = \int_0^2 (\dot{x}^2 - x)\, dt \to extr, \quad x(0) = 0.$

3.3. $J(x(\cdot)) = \int_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\, dt \to extr, \quad x(1) = 0.$

3.4. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt - x^2(1) \to extr, \quad x(0) = 1.$

3.5. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} dt \to extr, \quad x(0) = 1.$

3.6. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)\, dt \to extr, \quad x(0) = 0.$

3.7. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2\, dt \to extr, \quad x(0) = x(1).$

3.8. $J(\xi) = \int_0^T \dot{x}^2\, dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

3.9. $J(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)\, dt \to extr, \quad x(0) = 0.$

3.10. $J(\xi) = \int_0^T \dot{x}^3\, dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) = 1.$

3.11. $J(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad x(0) = 1.$

3.12. $J(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 + x)\, dt \to extr, \quad x(T) = T.$

3.13. $J(x(\cdot), T) = \int_0^T (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to extr, \quad x(0) = 0.$

Указание. Разные ответы при $T < \frac{\pi}{2}$, при $T = \frac{\pi}{2}$, а также при $T > \frac{\pi}{2}$.

3.4. Изопериметрическая задача

Название, видимо, обусловлено классической задачей царицы Дидоны о проведении линии фиксированной длины, отсекающей максимальную площадь (см. историю основания города Карфагена).

Постановка задачи

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr$$

при интегральных ограничениях

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

и граничных условиях $\quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.$

Здесь α_k – заданные числа. Указанные ограничения называются изопериметрическими. Ищется слабый экстремум, то есть допустимой считается $x(t)$ из класса $C^1[t_0, t_1]$ с закрепленными концами.

Схема решения задачи. Составляем функцию Лагранжа (лагранжиан), образующую новый интегрант,

$$L(t, x, \dot{x}; \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}).$$

Ищем допустимую экстремаль так же, как в простейшей задаче вариационного исчисления, но для функции Лагранжа в качестве интегранта.

При этом отдельно рассматриваем особый случай $\lambda_0 = 0$, который обычно приводит к невозможной ситуации: например, все множители Лагранжа равны нулю. В качестве основного случая обычно берем $\lambda_0 = 1$.

Пример 43.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$$

при условиях

$$\int_0^1 x dt = 0, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Решение. Составим лагранжиан

$$L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x.$$

Вычислим частные производные

$$L_x = \lambda_1, \quad L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$$

и составим уравнение Эйлера для лагранжиана $-\frac{d}{dx} L_{\dot{x}} + L_x = 0$

$$-2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0.$$

Решим уравнение Эйлера, рассматривая разные случаи.

Особый случай $\lambda_0 = 0$ приводит к $\lambda_1 = 0$, что невозможно.

Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\ddot{x} = \lambda_1$. Дважды интегрируем

$$\dot{x} = \lambda_1 t + C_2, \quad x = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

где обозначим $C_1 = \frac{\lambda_1}{2}$.

Подставим все три условия (сначала два граничных, потом интегральное)

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \; x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$$

$$\int_0^1 x dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0.$$

Решая систему, найдем $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. При этом $\lambda_1 = 6$. Итак, нашли допустимую экстремаль

$$\hat{x} = 3t^2 - 2t.$$

Перейдем ко второй части решения: непосредственной проверке для найденной допустимой экстремали того факта, что она доставляет локальный (глобальный) минимум функционала в нашей задаче.

Произвольную допустимую функцию представим в виде вариации допустимой экстремали $x(t) = \hat{x}(t) + h(t)$, где $h \in C_0^1[0,1]$ (нижний индекс 0 означает, что $h(0) = h(1) = 0$) и $\int_0^1 h(t)dt = 0$.

Представим приращение функционала в виде суммы дифференциала Фреше и остатка

$$J(x+h)-J(x)=\int_0^1(\dot x+\dot h)^2dt-\int_0^1\dot x^2dt=\int_0^1 2\dot x\dot h dt+\int_0^1\dot h^2dt.$$

Если дифференциал Фреше (первое слагаемое) проинтегрируем по частям, то получим по требованиям для $h(t)$ на допустимой экстремали

$$\int_0^1 2\dot x\dot h dt=2\dot x h|_0^1-2\int_0^1\ddot x h dt=-12\int_0^1 h(t)dt=0.$$

Поскольку остаток есть интеграл от квадрата некой величины, то найденная допустимая экстремаль есть глобальный (и локальный, естественно) минимум. Непосредственной подстановкой найденной допустимой экстремали в заданный функционал найдем

$$J_{\min}=J(\hat x=3t^2-2t)=\int_0^1(6t^2-2)^2dt=4.$$

При исследовании на глобальный максимум предложим последовательность $x_n(t)=\hat x(t)+n\sin 2\pi t$, на которой $J(x_n)\to+\infty$.

Ответ. $3t^2-2t\in absmin,\ J_{\min}=4, J_{\max}=+\infty.$

3.4.1. Изопериметрические задачи

4.1. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 xdt=1,\ x(0)=0,\ x(1)=0.$

4.2. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 xdt=0,\ x(0)=1,\ x(1)=0.$

4.3. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 xdt=3,\ x(0)=1,\ x(1)=6.$

4.4. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 txdt=1,\ x(0)=0,\ x(1)=0.$

4.5. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr; \int_0^1 txdt=\int_0^1 xdt=0, x(0)=0, x(1)=1.$

4.6. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 txdt=0,\ \int_0^1 xdt=1,$
$x(0)=0,\ x(1)=0.$

4.7. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi\dot x^2dt\to extr;\ \int_0^\pi x\cos t dt=\frac{\pi}{2},\ x(0)=1, x(\pi)=-1.$

4.8. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi x\sin t\, dt\to extr; \int_0^\pi\dot x^2dt=\frac{3\pi}{2},\ x(0)=0,\ x(\pi)=\pi.$

4.9. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2\,dt\to extr; \int_0^1 xe^{-t}dt=e, x(0)=2e+1, x(1)=2.$

4.10. $J(x(\cdot))=\int_0^1(\dot x^2+x^2)\,dt\to extr;\quad \int_0^1 xe^tdt=\frac14(e^2+1),$
$x(0)=0,\ x(1)=e.$

4.11. $J(x(\cdot))=\int_0^1\dot x^2dt\to extr;\quad \int_0^1 x^2dt=1,\ x(0)=x(1)=0.$

4.12. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi(\dot x^2-x^2)dt\to extr;\ \int_0^\pi x\cos t dt=1, x(0)=x(\pi)=0.$

3.5. Условия второго порядка в задачах КВИ

Первый этап решения задачи классического вариационного исчисления (КВИ) стандартный и проводится в виде решения (дифференциального) уравнения Эйлера. В засисимости от типа задачи немного отличается принцип нахождения констант общего решения, приводящих к допустимой экстремали. Второй этап исследования, состоящий в проверке допустимой экстремали на экстремум, имеет общую схему решения лишь для ограниченного круга задач, в которых знак остатка $r(h)$ постоянен. Формализацию второго этапа решения позволяет провести применение условий Лежандра и Якоби. Есть еще условие (второго порядка) Вейерштрасса, которое затрагивать не будем.

Рассмотрим простейшую задачу КВИ (3.1), где интегрант дважды непрерывно дифференцирован в некоторой окрестности расширенного графика (в плоскости переменных x и $\dot{x}$). Применительно к решению задач это означает существование (и непрерывность) частных производных второго порядка от интегранта

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}, \quad L_{x\dot{x}} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}, \quad L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}.$$

Договоримся простейшую задачу КВИ (3.1) рассматривать более узко – на минимум. Исследование на максимум сводится к решению задачи $-J(x(\cdot)) \to \min$ с повтором (с соответствующими оговорками) приводимого ниже исследования второго порядка. Как и ранее символами с крышкой $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$, $\hat{L}_{x\dot{x}}(t)$, $\hat{L}_{xx}(t)$ обозначаем функции одной переменной t, полученные подстановкой в функции трех переменных $L_{\dot{x}\dot{x}}$, $L_{x\dot{x}}$, L_{xx} данной допустимой экстремали $\hat{x}(t)$ (и ее производной).

Вариацию функционала выразим в виде функции одной переменной

$$\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt,$$

для которой необходимое условие минимума первого порядка (теорема Ферма $\varphi'(0) = 0$) имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t))\, dt = 0 \quad \text{для всех } h \in C_0^1[t_0, t_1].$$

Это условие равносильно уравнению Эйлера (3.2), составляющего *необходимое условие слабого минимума.*

Для функции одной переменной φ для стационарной точки 0 (по теореме Ферма) необходимое условие второго порядка для минимума $\varphi''(0) \geq 0$, а достаточное $\varphi''(0) > 0$.

В нашем случае для функции φ условие $\varphi''(0) \geq 0$ выглядит как следующее неравенство для всех $h \in C_0^1[t_0, t_1]$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t))\,dt \geq 0. \tag{3.3}$$

3.5.1. Условие Лежандра

Среди слагаемых (в виде частных производных) второго дифференциала в выражении (3.3) главным является первое слагаемое. Доказывается, что *условие Лежандра*:

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_1]$$

служит необходимым условием слабого минимума для $\hat{x}(t)$.

Следующий его вид называется *усиленным условием Лежандра*:

$$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_1].$$

Оно составляет часть достаточного условия слабого минимума для $\hat{x}(t)$. Если условие Лежандра не выполняется, то $\hat{x} \notin locmin$.

Замечание. При решении задачи (3.1) *на максимум* переходим к анализу функционала $-J(x)$ на минимум, где условие Лежандра вида $-\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0$ преобразуется в $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \leq 0$ (а усиленное условие – в $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} < 0$).

Поэтому условие знакопеременной на $[t_0, t_1]$ повторной производной $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ влечет $\hat{x} \notin locextr$.

3.5.2. Условие Якоби

Для формулировки достаточного условия второго порядка анализируем весь второй дифференциал (3.3). Пусть $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}, \hat{L}_{x\dot{x}}, \hat{L}_{xx} \in C^1[t_0, t_1]$ и выполнено усиленное условие Лежандра $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} > 0$.

Подынтегральное выражение в (3.3) называем новым интегрантом (или интегрантом для h) и обозначаем $\tilde{L} = \tilde{L}(t, h, \dot{h})$. Уравнение Эйлера по h для нового интегранта $\tilde{L}$ называется *уравнением Якоби* для исходной задачи на экстремали $\hat{x}(t)$. Вид уравнения Якоби (при сокращении на два)

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t)h(t)) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{xx}(t)h(t) = 0.$$

Для исходной задачи с закрепленными концами выбираем приращение $h \in C_0^1[t_0, t_1]$, то есть $h(t_0) = 0$, и точка t_0 есть первый нуль функции $h(t)$ на отрезке интегрирования $[t_0, t_1]$.

Точка τ называется *сопряженной* к точке t_0, если для уравнения Якоби с начальными данными $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$ его решение $h(t)$ в точке τ обращается в нуль: $h(\tau) = 0$. Говорят, что на $\hat{x}(t)$ выполнено *условие Якоби*, если в интервале интегрирования (t_0, t_1) нет сопряженных с t_0 точек. Говорят, что на $\hat{x}(t)$ выполнено *усиленное условие Якоби*, если в полуинтервале интегрирования $(t_0, t_1]$ нет сопряженных с t_0 точек.

Теорема 13. *Если интегрант L задачи (3.1) трижды непрерывно дифференцируем, а допустимая экстремаль $\hat{x}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, то выполнение усиленных условий Лежандра и Якоби на $\hat{x}$ служит достаточным условием слабого локального минимума для $\hat{x}$.*

Итак, **схема проверки** на локальный экстремум найденной допустимой экстремали $\hat{x}(t)$.

1. Проверяем на усиленное условие Лежандра вида $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ или $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) < 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Если оно не выполняется, то первой альтернативой служит условие Лежандра $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$ или $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \leq 0$, при которой проверку на минимум (в первом случае) или максимум (во втором) проводят другими методами. Если же условие Лежандра не выполняется, то $\hat{x} \notin locextr$.

2. Если выполнено усиленное условие Лежандра, то проверяют условие Якоби. Если сопряженных точек нет или первая сопряженная точка справа от отрезка интегрирования, то $\hat{x} \in wlocextr$ (с известным по условию Лежандра направлением max или min). Если же первая сопряженная с t_0 точка совпадает с верхним пределом интегрирования, то множество $\hat{x} + Ch \in wlocextr$ для всех $C \in \mathbb{R}$, где $h(t)$ – решение уравнения Якоби с начальным условием $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$. Если же первая сопряженная точка внутри интервала интегрирования, то $\hat{x} \notin locextr$, так как не выполнено необходимое условие Якоби.

Замечание. Если исходный интегрант $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ есть квадратичная форма относительно последних двух переменных

$$L = a(t)\dot{x}^2(t) + 2b(t)\dot{x}(t)x(t) + c(t)x^2(t),$$

то новый интегрант $\tilde{L}$ его повторяет, но от новых переменных,

$$\tilde{L}(t, h(t), \dot{h}(t)) = a(t)\dot{h}^2(t) + 2b(t)\dot{h}(t)h(t) + c(t)h^2(t).$$

Тогда уравнение Якоби повторяет (с заменой x на h) уравнение Эйлера.

3.5.3. Пример гармонического осциллятора

Рассмотрим применение условий Лежандра и Якоби в задачах КВИ на примере задачи гармонического осциллятора. Трижды рассмотрим одну и ту же задачу с разным верхним пределом интегрирования.

Пример 44.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Решение. I. Интегрант $L = \dot{x}^2 - x^2$.

Вычислим от него частные производные

$$L_x = -2x, \quad L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$$

и составим уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow \quad 2\ddot{x} + 2x = 0.$$

Его общее решение $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Из граничных условий

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = 0$. На этом элементе $J(\hat{x}) = 0$.

II. Для этой допустимой экстремали форма приращения функционала приводит к той же задаче, но относительно $h(t)$ вместо $x(t)$. Поэтому стандартный метод дальнейшего исследования не подходит.

Исследуем с помощью вторых производных.

Вычислим частные производные второго порядка

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = 2, L_{\dot{x}x} = 0, L_{xx} = -2.$$

Поскольку $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$, то выполнено усиленное условие Лежандра.

Проверим условие Якоби.

Составим новый интегрант (второй дифференциал)

$$\tilde{L} = \tilde{L}(t, h, \dot{h}) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}(t)h(t) + \hat{L}_{xx}h^2(t) = 2\dot{h}^2 - 2h^2$$

и запишем для него уравнение Эйлера по h

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{h}} + L_h = 0 \Rightarrow \ddot{h} + h = 0.$$

Решим это уравнение (которое называется уравнением Якоби для исходной задачи) с начальными (а не граничными) условиями

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 1.$$

Его общее решение

$$h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

приводит к частному решению $h(t) = \sin t$.

Первый положительный корень этой функции $\tau = \pi$ служит сопряженной к точке $t_0 = 0$ точкой. Поскольку $\tau = \pi \notin [0, \frac{\pi}{2}]$, то выполнено усиленное условие Якоби.

Из справедливости двух условий – усиленное условие Лежандра вида $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ плюс усиленное условие Якоби – вытекает, что допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = 0$ есть точка локального минимума в пространстве $C^1[t_0, t_1]$. Этот локальный минимум является и глобальным.

Для $x = C \sin 2t$ имеем $J(x) = C^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 2t - \sin^2 2t)\ dt \to +\infty$ при $C \to \infty$.

Ответ. $0 \in absmin$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 45.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = x(\pi) = 0.$$

Решение. I. Интегрант $L = \ddot{x}^2 - x^2$. Вычислим от него частные производные первого и второго порядков

$$L_x = -2x,\ L_{\dot{x}} = 2\dot{x};\quad L_{xx} = -2, L_{x\dot{x}} = 0, L_{\dot{x}\dot{x}} = 2.$$

Составим уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow\ 2\ddot{x} + 2x = 0.$$

Его общее решение

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Из граничных условий

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,\quad x(\pi) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Значит, в качестве допустимой экстремали можно брать

$$\hat{x}(t) = C \sin t$$

с любой константой C.

Действительно,

$$J(\hat{x}) = \int_0^\pi C^2(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = C^2 \int_0^\pi \cos 2t\, dt = 0.$$

II. Повторяя третий пункт примера 44, сделаем вывод: в данной задаче выполнены усиленное условие Лежандра и условие Якоби (но не усиленное). Это необходимое, но не достаточное условие слабого локального минимума. Дополнительным исследованием можно показать, что

$$J_{\min} = 0.$$

Ответ. $C \sin t \in absmin$, где любое $C \in \mathbb{R}$; $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 46.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = x(\frac{3\pi}{2}) = 0.$$

Решение. I. Интегрант $L = \ddot{x}^2 - x^2$.

Для него частные производные $L_x = -2x$, $\quad L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ и уравнение Эйлера $\ddot{x} + x = 0$.

Его общее решение

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Из граничных условий

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = 0$. На этом элементе $J(\hat{x}) = 0$.

II. Вычислим $L_{xx} = -2, L_{x\dot{x}} = 0, L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$ и составим второй дифференциал

$$\tilde{L}(t, h, \dot{h}) = 2\dot{h}^2 - 2h^2$$

и уравнение Эйлера для него, то есть уравнение Якоби $\ddot{h} + h = 0$. Решим уравнение Якоби при начальных условиях $h(0) = 0,\ \dot{h}(0) = 1$ и получим $h(t) = \sin t$. Первая сопряженная к точке $t_0 = 0$ точка $\tau = \pi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Значит, не выполнено условие Якоби и найденная допустимая экстремаль не доставляет локальный (и тем более глобальный) минимум.

Действительно, вычисления в качестве контрпримера для допустимой (то есть гладкой и удовлетворяющей граничным условиям) функции $x = K \sin \frac{2t}{3}$ показывают, что

$$J_{\min} = K^2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\frac{4}{9} \cos^2 \frac{2t}{3} - \sin^2 \frac{2t}{3}) dt \to -\infty$$

при $k \to \infty$.

Ответ. $0 \notin wlocmin,\ J_{\min} = -\infty,\ J_{\max} = +\infty.$

3.5.4. Задачи КВИ на условия второго порядка

Задачи для исследования на слабый экстремум с помощью условий Лежандра и Якоби второго порядка.

5.1.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

5.2.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/4} (4x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 1, \quad x(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

5.3.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

5.4.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{3\pi/4} (\dot{x}^2 - 4x^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{4}) = -1.$$

5.5.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/2} (2x + x^2 - \dot{x}^2)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

5.6.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0.$$

5.7.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

5.8.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 4x\sin t)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0.$$

3.6. Слабый и сильный локальный экстремум

Непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{x}(t)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to inf, \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,$$

что обозначаем $\tilde{x} \in wlocmin$ (или $\tilde{x} \in locmin$), если существует $\delta > o$ такое, что $J(x) \geq J(\tilde{x})$ для любой $x \in C^1[t_0, t_1]$ с условием на концах $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$ и удовлетворяющей условию близости по норме

$$\|x - \tilde{x}\|_{C^1[t_0,t_1]} < \delta.$$

Кусочно дифференцируемая функция $\tilde{x}(t)$ доставляет *сильный локальный минимум* в той же задаче, что обозначаем $\tilde{x} \in strlocmin$, если существует $\delta > o$ такое, что $J(x) \geq J(\tilde{x})$ для любой кусочно дифференцируемой функции с тем же закреплением на концах, удовлетворяющей условию близости по другой норме

$$\|x - \tilde{x}\|_{C[t_0,t_1]} < \delta.$$

Поскольку $C^1[t_0, t_1] \subset C[t_0, t_1]$, то из условия $\tilde{x} \in strlocmin$ в предположении $\tilde{x} \in C^1[t_0, t_1]$ вытекает $\tilde{x} \in wlocmin$. Значит, необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного экстремума, а достаточное условие сильного экстремума служит достаточным условием слабого экстремума.

Пример 47 (слабого, но не сильного экстремума).

Исследовать на слабый и сильный экстремум функционал

$$J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt \quad \text{с условием } x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Решение. I. Интегрант данного функционала $L = \dot{x}^3$.

Его частные производные $L_x = 0$, $L_{\dot{x}} = 3\dot{x}^2$.

Необходимым условием как слабого, так и сильного экстремума является уравнение Эйлера $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 0$, которое для данного интегранта примет вид

$$\frac{d}{dt}\dot{x}^2 = 0.$$

Решим уравнение $\dot{x}^2 = const$, $\dot{x} = C_1$, $x = C_1 t + C_2$. Подставим в это общее решение граничные условия $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ и получим

$$C_2 = 0, \quad C_1 + C_2 = 1.$$

Получили допустимую экстремаль $\tilde{x} = t$.

II. Покажем, что найденная допустимая экстремаль доставляет слабый локальный экстремум. Вычислим приращение функционала

$$J(x+h)-J(x) = \int_0^1 (\dot{x}+\dot{h})^3\, dt - \int_0^1 \dot{x}^3\, dt = 3\int_0^1 \dot{x}^2\dot{h}\, dt + \int_0^1 (3\dot{x}+\dot{h})\dot{h}^2\, dt.$$

На допустимой экстремали ($\dot{x} = 1$, $h(0) = h(1) = 0$)

$$J(\tilde{x}+h) - J(\tilde{x}) = 3\int_0^1 \dot{h}\, dt + \int_0^1 (3+\dot{h})\dot{h}^2\, dt = \int_0^1 (3+\dot{h})\dot{h}^2\, dt.$$

Для малой по норме добавки $\|h\|_{C^1[0,1]} < \delta < 3$ получим $3 + \dot{h} > 0$ и $r(h) > 0$. Значит, $t \in wlocmin$.

III. Покажем, что найденная допустимая экстремаль не доставляет сильный локальный экстремум.

Введем последовательность ломаных

$$h_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}t\ , & \text{если } t \in [0, 1/n), \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}\ \ , & \text{если } t \in (1/n\, , 1/2), \\ \frac{2t}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}, & \text{если } t \in [1/2\, , 1]. \end{cases}$$

Заметим, что $\|h_n\|_{C[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ и $x_n(t) = \tilde{x}(t) + h_n(t) \to \tilde{x}(t)$ при $n \to \infty$ в метрике пространства $C[0,1]$. Однако

$$J(x_n)-J(\tilde{x}) = \int_0^1 \dot{h}_n^2(3+\dot{h}_n)\, dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n(3-\sqrt{n})\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{4}{n}(3+\frac{2}{\sqrt{n}})\, dt =$$

$$= 3 - \sqrt{n} + \frac{6}{n} + \frac{4}{n\sqrt{n}} \to -\infty.$$

Значит, $t \notin strlocmin$ и $J_{\min} = -\infty$.

IV. Выясним глобальный экстремум.

Для анализа на глобальный минимум в классе кусочно дифференцируемых функций подойдет предыдущий контрпример. Для анализа на глобальный максимум в классе кусочно дифференцируемых функций возьмем последовательность функций

$$x_n(t) = nt \text{ при } t \in [0, \frac{1}{n}] \quad \text{и} \quad x_n(t) = 1 \text{ при } t \in [\frac{1}{n}, 1].$$

Тогда

$$J(x_n) = \int_0^{1/n} n^3\, dt = n^2 \to +\infty.$$

Один из приемов получения аналогичных контрпримеров класса $C^1[t_0, t_1]$ состоит в сглаживании углов в предложенных примерах. Предложим явную формулу контрпримеров. Если выберем допустимые функции с условиями $x_n(0) = 0$, $x_n(1) = 1$ и гладкие, а именно

$$x_n(t) = -nt^3 + nt^2 + t,$$

то $\dot{x}_n(t) = n(2t - 3t^2) + 1$ и значения функционала на них

$$J(x_n) = \int_0^1 (n(2t - 3t^2) + 1)^3\, dt = n^3 \int_0^1 (2t - 3t^2)^3 dt + An^2 + Bn + C.$$

$$J(x_n) = n^3 \int_0^1 (8t^3 - 36t^4 + 54t^5 - 27t^6) dt + o(n^3) =$$

$$= n^3 (2 - \frac{36}{5} + 9 - \frac{27}{7}) + o(n^3) = -\frac{2}{35} n^3 + 0(n^2) \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Пример допустимых функций $x_n(t) = nt^3 - nt^2 + t$ аналогично приводит к

$$J(x_n) = \frac{2}{35} n^3 + 0(n^2) \to +\infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Ответ. $t \in wlocmin$, $t \notin strlocmin$, $J_{\min} = -\infty$, $J_{\max} = +\infty$.

Замечание. Второй пункт исследования примера 47 (задача 5.1) можно провести с помощью условий второго порядка.

Повторная производная от интегранта

$$L_{\dot{x}\,\dot{x}} = 6\dot{x}.$$

На допустимой экстремали $\tilde{x} = t$ она примет вид $\tilde{L}_{\dot{x}\,\dot{x}} = 6 > 0$. Ее положительность означает выполнение усиленного условия Лежандра. Проверим условие Якоби. Для этого вычислим остальные частные производные второго порядка

$$L_{x\,\dot{x}} = 0,\ L_{x\,x} = 0$$

и составим дифференциал второго порядка (он же интегрант по h)

$$\mathcal{L} = \tilde{L}_{\dot{x}\,\dot{x}} h^2(t) + 2\tilde{L}_{x\,\dot{x}} \dot{h}(t) h(t) + \tilde{L}_{x\,x} h^2(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = 6\dot{h}^2.$$

Составим для нового интегранта уравнение Эйлера (уравнение Якоби)

$$\mathcal{L}_h = 0,\ \mathcal{L}_{\dot{h}} = 12\dot{h}\ \Rightarrow 12\ddot{h} = 0$$

и решим его с начальными условиями $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$. Получим общее решение $h(t) = C_1 t + C_2$ и частное решение $h(t) = t$.

Поскольку других нулей у этого решения нет, то у него нет сопряженных с $t_0 = 0$ точек. Значит, выполнено усиленное условие Якоби.

Выполнение усиленных условий Лежандра и Якоби есть достаточное условие слабого локального экстремума.

3.6.1. Задачи на сильный экстремум

Исследовать на слабый и сильный локальный и глобальный экстремум.

6.1. $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(1) = -1$.

6.2. $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(1) = 0$.

6.3. $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^3 - \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(1) = 1$.

6.4. $J(x) = \int_0^4 (\dot{x}^3 - \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(4) = 1$.

6.5. $J(x) = \int_0^3 (\dot{x}^3 - \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(3) = 1$.

6.6. $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^3 + \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(1) = -1$.

6.7. $J(x) = \int_0^4 (\dot{x}^3 + \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(4) = -1$.

6.8. $J(x) = \int_0^3 (\dot{x}^3 + \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(3) = -1$.

6.9. $J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^3 + 4\dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(1) = -1$.

6.10. $J(x) = \int_0^{\pi/6} (9x^2 - \dot{x}^2)\, dt$ с условием $x(0) = 0, x(\frac{\pi}{6}) = 1$.

3.7. Задача Лагранжа

Задача Лагранжа объединяет ранее разобранные задачи: простейшую задачу КВИ, задачу Больца, задачу с подвижными концами и изопериметрическую задачу.

Постановка задачи

$$B_0(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \min$$

при условиях

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + l(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m',$$

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t)\ )\ dt + l(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = m' + 1, \ldots, m,$$

$$\dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in \Delta,$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $x \in C^1(\Delta)$, $[t_0, t_1] \subset \Delta$ – заданный отрезок.

Замечание 1. Последнее условие, называемое дифференциальной связью, может быть обозначено $F(\xi) = \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))$. В тех случаях, когда x – вектор-функция, дифференциальная связь может быть наложена не на все координаты (что и закодировано индексом α).

Схема решения задачи при условии, что дифференциальная связь отсутствует.

Составим функцию Лагранжа

$$\Lambda(\xi) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, x, \dot{x}) dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

в которой выделяем интегральное слагаемое с интегрантом

$$L(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$$

и терминант

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).$$

Для вычисления допустимой экстремали условия связи дополняем следующими условиями. Составляем условия:

а) стационарности для интегранта – уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0;$$

б) трансверсальности по x

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)}, \\ L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)}; \end{cases}$$

в) стационарности по подвижным концам (выписываем только для подвижных концов интервала интегрирования)

$$\Lambda_{t_0} = 0 \Rightarrow -L(t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)) + l_{t_0} + l_{x(t_0)}\dot{x}(t_0) = 0,$$

$$\Lambda_{t_1} = 0 \Rightarrow L(t_1, x(t_1), \dot{x}(t_1)) + l_{t_1} + l_{x(t_1)}\dot{x}(t_1) = 0;$$

г) дополняющей нежесткости (для неравенств в ограничениях)

$$\lambda_i B_i(\xi) = 0 \quad i = 1, \ldots, m';$$

д) неотрицательности (для тех же множителей Лагранжа)

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m'.$$

Замечание 2. В случае наличия условия дифференциальной связи $\dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)) = 0$ для переменных, выделенных выборкой α, выборкой β обозначаем остальные переменные. Интегрант изменится на следующий:

$$L(t, x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}_\beta) + p(t) \cdot (\dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))).$$

Поэтому поменяется расшифровка условий *а* и *б*.

При поиске допустимой экстремали рассматриваем особый случай $\lambda_0 = 0$ (который в большинстве случаев не дает решения, но подходит как для минимума, так и для максимума), а также два основных случая: λ_0 положительно (для исследования на минимум) и λ_0 отрицательно (для исследования на максимум). Если среди ограничений нет неравенств, то можно ограничиться одним основным случаем.

Пример 48.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$$

при условиях

$$\int_0^1 x dt = 0, \quad x(1) = 1.$$

Решение. Данная задача не относится к изопериметрическим, так как граничное условие задано только для одной границы. Поэтому это задача Лагранжа с двумя ограничениями в виде равенств, одно из которых чисто интегральное, а другое – чисто терминальное.

I. Составим функцию Лагранжа

$$\Lambda = \lambda_0 \int_0^1 \dot{x}^2 dt + \lambda_1 \int_0^1 x dt + \lambda_2 (x(1) - 1),$$

где интегрант

$$L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x,$$

а терминант

$$l = \lambda_2 (x(1) - 1).$$

Вычислим частные производные

$$L_x = \lambda_1, \quad L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}, \qquad l_{x(0)} = 0, \quad l_{x(1)} = \lambda_2;$$

а) составим уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$:

$$-2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0;$$

б) запишем условие трансверсальности

$$\begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0, \\ 2\lambda_0 \dot{x}(1) = -\lambda_2; \end{cases}$$

е) перепишем условия задачи

$$\int_0^1 x dt = 0, \quad x(1) = 1.$$

Условия *в, г, д* отсутствуют.

II. Особый случай $\lambda_0 = 0$. Из *а* получим $\lambda_1 = 0$, из *б* получим $\lambda_2 = 0$. А это невозможно (все множители Лагранжа равны нулю).

Основной случай $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Из *а* получим $\ddot{x} = \lambda_1$. Интегрируем два раза

$$\dot{x} = \lambda_1 t + C_2, \quad x = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

где обозначим $C_1 = \frac{\lambda_1}{2}$.

Из условия *б* имеем $C_2 = 0, \quad 2C_1 + C_2 = -\lambda_2$. Итак, $x = C_1 t^2 + C_3$.

Из условия *в* имеем $\frac{C_1}{3} + C_3 = 0, \quad C_1 + C_3 = 1$.

Значит, $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$.

Нашли допустимую экстремаль

$$\hat{x} = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Замечание. Случай $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ не рассматриваем, так как все лямбда поменяют знак, а решение останется прежним.

III. Непосредственным анализом приращения функционала проверяем на экстремум

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \int_0^1 (\dot{x}+\dot{h})^2 dt - \int_0^1 \dot{x}^2 dt = \int_0^1 2\dot{x}\dot{h} dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt.$$

Дифференциал Фреше проинтегрируем по частям

$$\int_0^1 2\dot{x}\dot{h} dt = 2\dot{x}h|_0^1 - 2\int_0^1 \ddot{x} h dt = 2\dot{x}(1)h(1) - 2\dot{x}(0)h(0) - 6\int_0^1 h(t)dt = 0$$

на допустимой экстремали $\hat{x}$ с допустимыми вариациями h: $h(1) = 0$, $\dot{\hat{x}}(0) = 0$, $\int_0^1 h(t)dt = 0$.

Поскольку $r(h) \geq 0$, то $\hat{x} = \frac{3t^2-1}{2} \in absmin$ и $J_{\min} = \int_0^1 9t^2 dt = 3$.

В качестве примера для нахождения глобального максимума можно предложить последовательность $x_n(t) = \hat{x}(t) + n \sin 2\pi t$, на которой $J(x_n) \to +\infty$.

Ответ. $\frac{3t^2-1}{2} \in absmin$, $J_{\min} = 3$, $J_{\max} = +\infty$.

Пример 49.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$$

при условиях

$$\int_0^1 x dt \geq 0, \quad x(0) = 0.$$

Решение. I. Функция Лагранжа (поменяли знак неравенства)

$$\Lambda = \lambda_0 \int_0^1 \dot{x}^2 dt - \lambda_1 \int_0^1 x dt + \lambda_2 x(0),$$

где интегрант $L = \lambda_0 \dot{x}^2 - \lambda_1 x$, а терминант $l = \lambda_2 x(0)$.

Вычислим частные производные

$$L_x = -\lambda_1, \quad L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}, \qquad l_{x(0)} = \lambda_2, \quad l_{x(1)} = 0;$$

а) составим уравнение Эйлера $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = 0$:

$$2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0;$$

б) запишем условие трансверсальности

$$\begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_2, \\ 2\lambda_0 \dot{x}(1) = 0; \end{cases}$$

г) условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_1 \int_0^1 x dt = 0;$$

д) условие неотрицательности $\lambda_1 \geq 0$;

е) перепишем условия задачи

$$\int_0^1 x dt \geq 0, \qquad x(0) = 0.$$

Условие *в* отсутствует, поскольку нет подвижных концов.

II. Особый случай $\lambda_0 = 0$. Из *а* получим $\lambda_1 = 0$, из *б* получим $\lambda_2 = 0$. А это невозможно (все множители Лагранжа равны нулю).

Вариант исследования на минимум основного случая: $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Из *а* получим $\ddot{x} = -\lambda_1$. Проинтегрируем два раза

$$\dot{x} = -\lambda_1 t + C_2, \quad x = -\frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3.$$

Из условия *б* имеем $C_2 = \lambda_2, \quad -\lambda_1 + C_2 = 0$, а из условия *е* имеем $C_3 = 0$. Таким образом, $x(t) = -\frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_2 t$.

Условие *г* раскрывать будем дважды. Сначала $\lambda_1 = 0$. Тогда $C_2 = 0$ и $\hat{x}(t) = 0$ – допустимая экстремаль.

Если же $\lambda_1 > 0$, то $\int_0^1 xdt = 0$ влечет $-\frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_2}{2} = 0$. Из последнего уравнения $-\lambda_1 + C_2 = 0$ придем к $\lambda_1 = C_2 = 0$ и той же допустимой экстремали $\hat{x}(t) = 0$.

Причем $J(\hat{x}) = \int_0^1 0dt = 0$, а $J(x) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \geq 0$ всегда. Поэтому $\hat{x} = 0 \in absmin$, $J_{\min} = 0$.

Вариант исследования на максимум случая $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$ приводит к а) $\ddot{x} = \lambda_1$, б) $-\dot{x}(0) = \lambda_2, -\dot{x}(1) = 0$, г) $\lambda_1 \int_0^1 xdt = 0$, д) $\lambda_1 \geq 0$, е) $\int_0^1 xdt \geq 0$, $x(0) = 0$.

Раскроем условие *г* в в виде $\lambda_1 = 0$.

Тогда $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_2, x = C_2 t + C_3$. Из условия $x(0) = 0$ вытекает $C_3 = 0$, а из $-\dot{x}(1) = 0$ вытекает $C_2 = 0$. Снова пришли к той же допустимой экстремали, которая уже исследована до конца.

Теперь раскроем условие *г* в в виде $\lambda_1 > 0$ и $\int_0^1 xdt = 0$. Решение уравнения Эйлера $x(t) = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3$, где $C_3 = 0$ по условию $x(0) = 0$. Условия *б* и *е* приводят к системе $\lambda_1 + C_2 = 0$, $\frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_2}{2} = 0$, решение которой $\lambda_1 = C_2 = 0$. Опять та же допустимая экстремаль.

III. В качестве примера для нахождения глобального максимума предложим последовательность $x_n(t) = nt$, на которой $J(x_n) \to +\infty$.

Ответ. $0 \in absmin$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

3.7.1. Задачи Лагранжа

7.1. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условии $\int_0^1 xdt = 1$.

7.2. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 xdt = 1,\ x(0) = 0$.

7.3. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 tx\, dt = 1,\ x(0) = 0$.

7.4. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 tx\, dt = 0,\ x(0) = 1$.

7.5. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$; где $\int_0^1 tx\, dt = 0, \int_0^1 x\, dt = 0,\ x(0) = 1$.

7.6. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 x\, dt \geq 0,\ x(0) = 0$.

7.7. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 x\, dt \geq 2,\ x(0) = 0$.

7.8. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^1 x\, dt \leq 2,\ x(1) = 0$.

7.9. $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr$ при условии $\int_0^1 x^2\, dt \leq 1$.

7.10. $J(\xi) = \int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^T x\, dt = 1,\ x(0) = 3$.

7.11. $J(\xi) = \int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr$ при условиях $\int_0^T x\, dt \leq 2,\ x(0) = 3$.

3.8. Задачи со старшими производными

Задачи классического вариационного исчисления допускают обобщение для случая, когда интегрант берется не от трех переменных, а зависит от производных более высокого порядка. В этом случае уравнение Эйлера преобразуется в *уравнение Эйлера – Пуассона.*

Если увеличим на один порядок $L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$, то получим уравнение Эйлера – Пуассона

$$\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0.$$

Если $L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), x^{(3)}(t))$, то уравнение Эйлера – Пуассона

$$-\frac{d^3}{dt^3}L_{x^{(3)}} + \frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$$

и так далее. При постановке обобщения простейшей задачи КВИ формулируются граничные условия на все производные, кроме самой старшей. Это позволяет вычислить константы в общем решении уравнения Эйлера – Пуассона, то есть найти допустимую экстремаль. Схема проверки на экстремум схожая.

Пример 50.

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)dt \to extr$$

при условиях

$$x(0) = x(1) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$$

Решение. I. Интегрант $L = \ddot{x}^2 - 48x$.

Вычислим от него частные производные

$$L_x = -48, \quad L_{\dot{x}} = 0, \quad L_{\ddot{x}} = 2\ddot{x}.$$

Составим уравнение Эйлера – Пуассона

$$\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow \ 2x^{(4)} - 48 = 0.$$

Вычислим интегрированием предыдущие производные и функцию

$$x^{(3)} = 24t + 6C_1, \quad \ddot{x} = 12t^2 + 6C_1 t + 2C_2, \quad \dot{x} = 4t^3 + 3C_1 t^2 + 2C_2 t + C_3,$$

$$x = t^4 + C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

Подставим граничные данные

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0, \quad x(1) = 0 \Rightarrow 1 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \quad \dot{x}(1) = 0 \Rightarrow 4 + 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0.$$

Решим систему

$$C_1 + C_2 = -1, \quad 3C_1 + 2C_2 = -4 \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 1.$$

Получили допустимую экстремаль

$$\hat{x}(t) = t^4 - 2t^3 + t^2.$$

II. Непосредственная проверка на экстремум.

Вычислим приращение функционала

$$J(x+h) - J(x) = \int_0^1 ((\ddot{x} + \ddot{h})^2 - 48(\hat{x} + h))dt - \int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48\hat{x})dt =$$

$$= \int_0^1 2\ddot{x}\ddot{h}dt - 48\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 \ddot{h}^2 dt.$$

Получили дифференциал Фреше $L'(x)[h] = \int_0^1 2\ddot{x}\ddot{h}dt - 48\int_0^1 h(t)dt$ и остаток $r(h) = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt$. Если первое слагаемое дифференциала Фреше проинтегрируем один раз по частям, то получим ($\dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0$)

$$\int_0^1 2\ddot{x}\ddot{h}dt = 2\ddot{x}\dot{h}|_0^1 - 2\int_0^1 \dot{h}d(\ddot{x}) = 0 - 2\int_0^1 x^{(3)}\dot{h}(t)dt =$$

$$= -2(x^{(3)}h|_0^1 - \int_0^1 h(t)d(x^{(3)})) = 2\int_0^1 x^{(4)}h(t)dt,$$

где продолжили интегрировать по частям ($h(0) = h(1) = 0$).

На допустимой экстремали ($\hat{x}^{(4)} = 24$) ищем приращение функционала

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = L'(\hat{x})[h] + r(h) = 2\int_0^1 \hat{x}^{(4)}h(t)dt - 48\int_0^1 h(t)dt + r(h) = r(h).$$

Итак,
$$J(\hat{x}+h)-J(\hat{x})=\int_0^1 \ddot{h}^2 dt \geq 0.$$
Значит,
$$\hat{x}(t)=t^4-2t^3+t^2 \in absmin.$$
Далее вычислим
$$J_{\min}=J(\hat{x})=\int_0^1 \left((12t^2-12t+2)^2-48(t^4-2t^3+t^2)\right) dt =$$
$$=\int_0^1 (96t^4-192t^3+144t^2-48t+4)\, dt=\frac{96}{5}-48+48-24+4=-\frac{4}{5}.$$
Очевидно, что $J_{\max}=+\infty$.

Ответ. $t^4-2t^3+t^2 \in absmin$, $J_{\min}=-\frac{4}{5}$, $J_{\max}=+\infty$.

3.8.1. Задачи со старшими производными

8.1. $J(x(\cdot))=\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0, \quad x(1)=1.$

8.2. $J(x(\cdot))=\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=x(1)=\dot{x}(0)=0, \quad \dot{x}(1)=1.$

8.3. $J(x(\cdot))=\int_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=x(1)=0,\ \dot{x}(0)=-1, \quad \dot{x}(1)=1.$

8.4. $J(x(\cdot))=\int_0^1 (\ddot{x}^2-48x)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=1,\ \dot{x}(0)=-4,\ x(1)=\dot{x}(1)=0.$

8.5. $J(x(\cdot))=\int_0^1 (48x-\ddot{x}^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=\dot{x}(0)=0, \quad x(1)=1,\ \dot{x}(1)=4.$

8.6. $J(x(\cdot))=\int_0^1 (240tx-\ddot{x}^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=x(1)=\dot{x}(0)=0, \quad \dot{x}(1)=1.$

8.7. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi (\ddot{x}^2-x^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=x(\pi)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(\pi)=-1.$

8.8. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi (\ddot{x}^2+4x^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=x(\pi)=0, \quad \dot{x}(0)=1,\ \dot{x}(\pi)=-\operatorname{ch}\pi.$

8.9. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi (\ddot{x}^2-\dot{x}^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=\dot{x}(0)=\dot{x}(\pi)=0,\ x(\pi)=1.$

8.10. $J(x(\cdot))=\int_0^\pi (\ddot{x}^2-2\dot{x}^2+x^2)\, dt \to extr$
при условиях $\quad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ x(\pi)=-\pi,\ \dot{x}(\pi)=-1.$

3.9. Ответы к главе “Вариационное исчисление”

Задачи с закрепленными концами

1.1. $t \in absmin$; $J_{\min} = 1$, $J_{\max} = +\infty$.

1.2. $\frac{t - t^2}{4} \in absmin$; $J_{\min} = -\frac{1}{48}$, $J_{\max} = +\infty$.

1.3. $t - \frac{t^2}{4} \in absmax$; $J_{\min} = -\infty$, $J_{\max} = \frac{2}{3}$.

1.4. $\frac{t^3 - t}{12} \in absmin$; $J_{\min} = -\frac{1}{180}$, $J_{\max} = +\infty$.

1.5. $\frac{t - t^4}{24} \in absmin$; $J_{\min} = \frac{65}{4032}$, $J_{\max} = +\infty$.

1.6. $\ln t \in absmin$; $J_{\min} = 1$, $J_{\max} = +\infty$.

1.7. $t - 1 - (e-1)\ln t \in absmin$; $J_{\min} = 1$, $J_{\max} = +\infty$.

1.8. $t^3 \in absmin$; $J_{\min} = 3$, $J_{\max} = +\infty$.

1.9. $\sqrt{t+1} \in absmin$; $J_{\min} = \frac{1}{4}$, $J_{\max} = +\infty$.

1.10. $2\ln(t+1) \in absmin$; $J_{\min} = 4$, $J_{\max} = +\infty$.

Задачи Больца

2.1. $\frac{3 - t^2}{4} \in absmin$; $B_{\min} = -\frac{1}{3}$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n)$.

2.2. $0 \notin locextr$; $B_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = n)$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n(1-t))$.

2.3. $t + 1 \in absmin$; $B_{\min} = -2$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n)$.

2.4. $\frac{5 + 5t - t^2}{2} \in absmax$; $B_{\min} = -\infty$ $(x_n(t) = n)$, $B_{\max} = \frac{197}{12}$.

2.5. $-\frac{t^2+3}{4} \notin locextr$; $B_{\min} = -\infty$,$B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n(1-t))$.

2.6. $\operatorname{ch} t \in absmin$; $B_{\min} = -\frac{\operatorname{sh} 2}{2}$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n)$.

2.7. $e^t + \sin t \in absmin$; $B_{\min} = -\pi - 1$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n)$.

2.8. $\cos t - 1 \notin locextr$; $B_{\min} = -\infty$, $B_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n\sin 2t)$.

2.9. $\ln(t+1) - 1 \in absmin$; $B_{\min} = -1$, $B_{\max} = +\infty$.

2.10. $\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \in absmin$; $B_{\min} = -\frac{3}{2}$, $B_{\max} = +\infty$.

Задачи с подвижными концами

3.1. $\frac{t^2 - 1}{4} \in absmin$; $J_{\min} = -\frac{1}{12}$, $J_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = n(1-t))$.

3.2. $t - \frac{t^2}{4} \in absmin$; $J_{\min} = -\frac{2}{3}$, $J_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = nt)$.

3.3. $t - 1 - e\ln t \in absmin$; $J_{\min} = \frac{5 - 4e - e^2}{2}$, $J_{\max} = +\infty$.

3.4. $e^t \in absmin$; $J_{\min} = -1$, $J_{\max} = +\infty$.

3.5. $\sqrt{1 + 2t - t^2} \in absmin$; $J_{\min} = \ln(\sqrt{2}+1)$, $J_{\max} = +\infty$.

3.6. $\frac{4t-\pi-4}{4}\sin t \in absmin$; $J_{\max}=+\infty$,
$J_{\min}=((24+\pi^2)\sin 2-8\pi(1-\cos 2)-16)/32$.

3.7. $C\in absmin$; $J_{\min}=0$, $J_{\max}=+\infty$.

3.8. $(\hat{x}=-2t;\hat{T}=1)\in absmin$; $J_{\min}=4$, $J_{\max}=+\infty$.

3.9. $(\hat{x}=t-\frac{t^2}{4},\hat{T}=2)\notin locextr$ (варьируем только $\hat{T}$); $J_{\min}=-\infty$ $(\xi_n=(t,n))$, $J_{\max}=+\infty$ $(\xi_n=(nt,1))$.

3.10. $\hat{\xi}=(0;1)\notin locextr$ $(\xi_n=(\pm\frac{t}{n},\frac{n}{n\pm1}))$; $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

3.11. $(\frac{t^2}{4}-t+1;2)\notin locextr$ (варьируем $\hat{T}$); $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

3.12. $(\hat{x}=\frac{t^2}{4}-8;\hat{T}=8)\notin locextr$; $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

3.13. Если $T<\frac{\pi}{2}$, то $0\in absmin$; если $T=\frac{\pi}{2}$, то $C\sin t\in absmin$, $J_{\min}=0$; если $T>\frac{\pi}{2}$, то $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

Изопериметрические задачи

4.1. $6t-6t^2\in absmin$, $J_{\min}=12$, $J_{\max}=+\infty$.

4.2. $3t^2-4t+1\in absmin$, $J_{\min}=4$, $J_{\max}=+\infty$.

4.3. $3t^2+2t+1\in absmin$, $J_{\max}=+\infty$.

4.4. $\frac{15}{2}(t-t^3)\in absmin$, $J_{\min}=45$, $J_{\max}=+\infty$.

4.5. $10t^3-12t^2+3t\in absmin$, $J_{\min}=9$, $J_{\max}=+\infty$.

4.6. $60t^3-96t^2+36t\in absmin$, $J_{\max}=192$, $J_{\max}=+\infty$.

4.7. $\cos t\in absmin$, $J_{\min}=\frac{\pi}{2}$, $J_{\max}=+\infty$.

4.8. $t+\sin t\in absmax$, $t-\sin t\in absmin$, $J_{\max}=\frac{3\pi}{2}$.

4.9. $2e^{1-t}-t+1\in absmin$, $J_{\min}=2e^2+2e-3$, $J_{\max}=+\infty$.

4.10. $te^t\in absmin$, $J_{\min}=1$, $J_{\max}=+\infty$.

4.11. Допустимые экстремали $x_k(t)=\pm\sqrt{2}\sin k\pi t$, $k\in\mathbb{N}$;
$\pm\sqrt{2}\sin\pi t\in absmin$, $J_{\min}=\pi^2$, $J_{\max}=+\infty$.

4.12. $-\frac{4}{\pi}t\sin t+C\sin t\in absmin$ для любого C, $J_{\max}=+\infty$.

Исследование второго порядка на экстремум

5.1. $t\in wlocmin$, $t\notin absmin$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

5.2. $\cos\ 2t\in absmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=0$.

5.3. $\sin\ 2t\in absmin$, $J_{\min}=0$, $J_{\max}=+\infty$.

5.4. Допустимая экстремаль $\sin 2t\notin locextr$ (так как сопряженная точка $\frac{\pi}{2}\in(0,\frac{3\pi}{4})$, не выполн. условие Якоби); $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

5.5. $\sin t+\cos t-1\in absmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=\frac{4-\pi}{2}$.

5.6. Допустимая экстремаль $\cos t-\sin t-1\notin locextr$ (сопряженная точка $\pi\in(0,\frac{3\pi}{2})$, не выполн. условие Якоби); $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

5.7. $\frac{\pi\sin t-2t}{4}\in absmin$, $J_{\min}=\frac{\pi^3-12\pi}{96}$, $J_{\max}=+\infty$.

5.8. $t\cos t\notin locextr$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

Сильный и слабый экстремум

6.1. $-t\in wlocmax$, $-t\notin absmax\cup strlocmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.2. $0\notin wlocextr$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.3. $t\in wlocmin$, $t\notin absmin\cup strlocmin$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.4. $\frac{t}{4}\in wlocmax$, $\frac{t}{4}\notin absmax\cup strlocmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.5. $\frac{t}{3}\notin wlocextr$ $(\hat L_{\dot x\dot x}=0)$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$, $(h_n=\pm\frac{1}{n}(t^2-3t))$.

6.6. $-t\in wlocmax$, ($\hat L_{\dot x\dot x}<0$ и усиленное усл. Якоби), $-t\notin absmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$, $-t\notin strlocmax$, ($h_n(t)=\sqrt{n}\,t$ при $t\in[0,\frac{1}{n}]$, $h_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $t\in[\frac{1}{n},\frac{1}{2}]$, $h_n(t)=\frac{2(1-t)}{\sqrt{n}}$ при $t\in[\frac{1}{2},1]$).

6.7. $-\frac{t}{4}\in wlocmin$, ($\hat L_{\dot x\dot x}>0$ и усил. усл. Якоби), $-\frac{t}{4}\notin absmin$, $-\frac{t}{4}\notin strlocmin$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.8. $-\frac{t}{3}\notin wlocextr$ $(\hat L_{\dot x\dot x}=0)$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.9. $-t\in wlocmin$, $-t\notin absmin\cup strlocmin$, $h_n(t)$ из примера 47, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=+\infty$.

6.10. $\sin 3t\in absmax$, $J_{\min}=-\infty$, $J_{\max}=0$.

Задачи Лагранжа

7.1. $1\in absmin$, $J_{\min}=0$, $J_{\max}=+\infty$.

7.2. $3t-\frac{3t^2}{2}\in absmin$, $J_{\min}=3$, $J_{\max}=+\infty$.

7.3. $\frac{15t-5t^3}{4}\in absmin$, $J_{\min}=\frac{15}{2}$, $J_{\max}=+\infty$.

7.4. $\frac{5t^3-15t+8}{8}\in absmin$, $J_{\min}=\frac{15}{8}$, $J_{\max}=+\infty$.

7.5. $-\frac{20}{3}t^3+14t^2-8t+1\in absmin$, $J_{\min}=8$, $J_{\max}=+\infty$.

7.6. $0\in absmin$, $J_{\min}=0$, $J_{\max}=+\infty$.

7.7. $6t-3t^2\in absmin$, $J_{\min}=4$, $J_{\max}=+\infty$ (0 не удовлетворяет условиям связи).

7.8. $0\in absmin$, $J_{\min}=0$, $3-3t^2\notin locmax$, $J_{\max}=+\infty$.

7.9. $C \in absmin$, где $|C| \le 1$, $J_{\min} = 0$; $\sqrt{2}\cos \pi k t \notin locmax$, $k \in \mathbb{N}$, $J_{\max} = +\infty$.

7.10. $\tilde{\xi} = (3; \frac{1}{3}) \in absmin$, $J_{\min} = 0$; $\tilde{\xi} = (3t^2 - 6t + 3; 1) \notin locextr$, $J_{\max} = +\infty$.

7.11. $\tilde{\xi} = (3; \tilde{T}) \in absmin$ для любого $\tilde{T} \in (0, \frac{3}{2}]$, $J_{\min} = 0$; допустимая экстремаль $\tilde{\xi} = (\frac{3}{4}t^2 - 3t + 3; \tilde{T} = 2) \notin locmin$ (уменьшаем только T), $J_{\max} = +\infty$, контрпример $\xi_n = (x_n(t) = \frac{3}{4}(t-2)^2 + \sin \pi n t; \hat{T} = 2)$.

Задачи со старшими производными

8.1. $3t^2 - 2t^3 \in absmin$, $J_{\min} = 12$, $J_{\max} = +\infty$.

8.2. $t^3 - t^2 \in absmin$, $J_{\min} = 4$, $J_{\max} = +\infty$ $(x_n(t) = nt^2(t-1)^2)$.

8.3. $t^2 - t \in absmin$, $J_{\min} = 4$, $J_{\max} = +\infty$.

8.4. $(t-1)^4 \in absmin$, $J_{\min} = \frac{96}{5}$, $J_{\max} = +\infty$.

8.5. $t^4 \in absmax$, $J_{\min} = -\infty$, $J_{\max} = -\frac{96}{5}$.

8.6. $t^5 - 2t^3 + t^2 \in absmax$, $J_{\min} = \infty$, $J_{\max} = -\frac{76}{7}$.

8.7. $\sin t \in absmin$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

8.8. $\operatorname{ch} t \sin t \in absmin$, $J_{\min} = \operatorname{sh} 2\pi$, $J_{\max} = +\infty$.

8.9. $\frac{1 - \cos t}{2} \in absmin$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = +\infty$.

8.10. $t \cos t \in absmin$, $J_{\min} = 1 - \pi$, $J_{\max} = +\infty$.

Заключение

Дисциплина “Методы оптимизации и вариационное исчисление” включена в учебный план обучения в магистратуре по направлению 02.04.01 “Математика и компьютерные науки”. Под иными названиями эта дисциплина встречается в учебных планах других направлений подготовки бакалавров и магистров с углубленным изучением математики. Рассмотренные в практикуме разделы составляют математическую основу теории управления.

Специфика обучения в магистратуре состоит в углублении ранее полученных знаний. Данный курс полностью подходит под это требование.

Раздел “Экстремальные задачи” служит естественным продолжением методов исследования функций из курса математического анализа. Но поскольку здесь рассматриваются более сложные задачи, то нужны новые подходы в виде метода Лагранжа с привлечением дополнительных разделов линейной алгебры в виде критерия Сильвестра.

В названии раздела “Элементы функционального анализа” явно указана другая математическая дисциплина, важные элементы которой мы изучаем углубленно, поскольку они непосредственно связаны со следующим разделом курса.

Раздел “Вариационное исчисление” – основной в данном курсе. Параграфы в этом разделе расположены в порядке прохождения материала в процессе изучения дисциплины. При составлении практикума автор опирался на учебное пособие [4], которое расположением материала выгодно отличается от учебника [1].

Обычно курс вариационного исчисления завершается методом максимума Понтрягина. В практикум эта тема не включена, поскольку метод имеет большое теоретическое значение, а задачи на него перегружены громоздкими рассуждениями. Основная часть этих рассуждений встречается в задаче Лагранжа, рассмотренной в практикуме.

В результате изучения данной дисциплины у студента должен сформироваться навык решения разнообразных нестандартных задач.

Библиографический список

1. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : учеб. пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с. – ISBN 978-5-9221-0590-3.

2. Андреева, Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. – М. : Высш. шк., 2006. – 584 с. – ISBN 5-06-004746-6.

3. Васильев, Ф. П. Лекции по методам решений экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М. : Изд-во МГУ, 1974. – 376 с.

4. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи : учеб. пособие / Э. М. Галеев. – М. : КомКнига, 2006. – 336 с. – ISBN 5-484-00283-4.

5. Галеев, Э. М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению / Э. М. Галеев. – М. : Изд-во МГУ, 1996. – 160 с. – ISBN 5-87597-024-3.

6. Высшая математика : учебник. В 7 т. Т. 6 / М. Л. Краснов [и др.]. – М. : УРСС, 2003. – 256 с.

7. Лаврентьев, М. Основы вариационного исчисления. В 3 т. Т. 1. Ч. I, II / М. Лаврентьев, Л. Люстерник. – М.-Л. : ОНТИ – НКТИ, 1935. – 386 с.

8. Пантелеев, А. В. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев – М. : Высш. шк., 2006. – 272 с. – ISBN 5-06-005327-X.

9. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 469 с.

10. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : учеб. пособие / под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – 304 с.

11. Эльсгольц, Л. Э. Вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1952. – 168 с.

12. Янг, Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – М. : Мир, 1974. – 488 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ
И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Практикум

Редактор Е. А. Платонова
Технические редакторы Ш. Ш. Амирсейидов, Н. В. Пустовойтова
Компьютерная верстка М. С. Беспалова, Л. В. Макаровой
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 07.04.23.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,05. Тираж 30 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.