Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. Е. ДОДОНОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Владимир 2023

УДК 517
ББК 22.162
Д60

Рецензенты:
Доктор экономических наук, профессор
зав. кафедрой менеджмента и бизнес-информатики
Владимирского филиала Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
О. П. Звягинцева

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Додонов, А. Е.
Д60 Функциональный анализ : учеб. пособие / А. Е. Додонов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2023. — 144 с.
ISBN 978-5-9984-1715-3

Приведены теоретические сведения и задачи по дисциплине «Функциональный анализ».

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517
ББК 22.162

ISBN 978-5-9984-1715-3

Оглавление

Введение

Пособие представляет собой краткий курс функционального анализа. Автор надеется, что читатель не ограничится изучением представленного в пособии материала и прочитает книги, предлагаемые в библиографическом списке.

Курс функционального анализа основывается на понятиях и фактах, излагаемых в таких дисциплинах, как математический анализ, общая алгебра, линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения. Предполагается, что они усвоены читателем в полной мере.

Параграфы, формулы, определения, теоремы, примеры и примечания пронумерованы внутри каждой главы, пункты — внутри каждого параграфа. Все заголовки выделены полужирным шрифтом. Определяемые слова и формулировки утверждений выделены курсивом.

В пособии в основном используются стандартные для математической литературы обозначения. Знаком $\square$ отмечается конец доказательства утверждения. Символом $\mathbb{P}$ обозначается одно из двух множеств: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Обозначение $\lfloor a \rfloor$ используется для *пола* числа a, т. е. наибольшего целого числа, не превосходящего a. Для анализа традиционно использование черты над символом для обозначения замыкания множества, поэтому дополнение множества M в пространстве X обозначается через $X \setminus M$.

1 Мера и интеграл в $\mathbb{R}^n$

1.1 Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

1.1.1. Мера параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$. *Промежутком* A вещественной оси $\mathbb{R}$ называется одно из следующих множеств: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$ или $(a;b]$, где $a \leqslant b$.

Определение 1.1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — промежутки вещественной оси $\mathbb{R}$. Декартово произведение $P = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subset \mathbb{R}^n$ называется *параллелепипедом в* $\mathbb{R}^n$ (или просто *параллелепипедом*). Множество всех таких параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать через $\mathcal{P}$.

Ясно, что параллелепипед в $\mathbb{R}$ является промежутком вещественной оси (и может вырождаться в точку или пустое множество), параллелепипед в $\mathbb{R}^2$ — прямоугольником на плоскости (и может вырождаться в параллелепипед в $\mathbb{R}$), параллелепипед в $\mathbb{R}^3$ — прямоугольным параллелепипедом в пространстве (и может вырождаться в параллелепипед в $\mathbb{R}^2$). Очевидно, пустое множество $\varnothing$ тоже принадлежит $\mathcal{P}$.

Определение 1.2. Пусть $P = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{P}$, причем при каждом k промежуток A_k представляет собой одно из следующих множеств: $[a_k;b_k]$, $(a_k;b_k)$, $[a_k;b_k)$ или $(a_k;b_k]$. *Мерой* параллелепипеда P называется число

$$\mu(P) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

При этом $\mu(\varnothing) = 0$.

Мера параллелепипеда в $\mathbb{R}$ является длиной соответствующего промежутка, мера параллелепипеда в $\mathbb{R}^2$ — площадью соответствующего прямоугольника, мера параллелепипеда в $\mathbb{R}^3$ — его объемом.

Из определения 1.2 сразу следует

Теорема 1.1. *Имеют место следующие свойства*:

1. *неотрицательность*: $\forall P \in \mathcal{P}\ \mu(P) \geqslant 0$;
2. *аддитивность*: *если* $P, P_1, P_2, \ldots, P_m \in \mathcal{P}$, *причем*

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} P_k \qquad \text{и} \qquad P_k \cap P_j = \varnothing \text{ при } k \neq j, \qquad \text{то}$$

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{m} \mu(P_k).$$

1.1.2. Мера элементарного множества в $\mathbb{R}^n$. Теперь распространим определение меры с параллелепипедов из $\mathcal{P}$ на более широкий класс множеств.

Определение 1.3. *Элементарным множеством* в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно хотя бы одним способом представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся параллелепипедов. Совокупность всех элементарных множеств будем обозначать через $\mathcal{E}$.

Теорема 1.2. *Если* $A, B \in \mathcal{E}$, *то* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Если $A, B \in \mathcal{E}$, то, очевидно, $A \cup B \in \mathcal{E}$. Далее, пересечение параллелепипедов является параллелепипедом, так что если

$$A = \bigcup_k P_k, \quad B = \bigcup_j Q_j,$$

где все $P_k, Q_j \in \mathcal{P}$, то

$$A \cap B = \bigcup_{k,j} (P_k \cap Q_k) \in \mathcal{E}.$$

Легко видеть, что разность двух параллелепипедов является элементарным множеством. Значит, при вычитании из параллелепипеда элементарного множества мы получим элементарное множество — пересечение элементарных множеств Пусть $P \in \mathcal{P}$ содержит A и B. Тогда $P \setminus B \in \mathcal{E}$, откуда $A \setminus B = A \cap (P \setminus B) \in \mathcal{E}$. Наконец, множество $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{E}$. $\square$

Пусть $A \in \mathcal{E}$ представляется в виде

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

где все $P_k, Q_j \in \mathcal{P}$, причем $P_k \cap P_l = \varnothing$, $Q_j \cap Q_s = \varnothing$ при $k \neq l$, $j \neq s$. Тогда

$$\sum_k \mu(P_k) = \sum_{k,j} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_j \mu(Q_j),$$

так что сумма мер попарно непересекающихся параллелепипедов, составляющих элементарное множество, не зависит от способа разбиения этого элементарного множества.

Определение 1.4. *Мерой* $\mu(A)$ элементарного множества A в $\mathbb{R}^n$ называется сумма мер попарно непересекающихся параллелепипедов, составляющих множество A.

Легко видеть, что мера элементарного множества неотрицательна и аддитивна. Но для меры элементарного множества можно доказать еще одно свойство.

Теорема 1.3. *Если $A \in \mathcal{E}$ и $\{A_k\}$ — такая не более чем счетная система элементарных множеств, что*

$$A \subset \bigcup_k A_k,$$

то

$$\mu(A) \leqslant \sum_k \mu(A_k). \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем такое замкнутое элементарное множество $A^{[\varepsilon]}$, что $\mu\left(A^{[\varepsilon]}\right) \geqslant \mu(A) - \varepsilon/2$. Это можно сделать, заменяя каждый из составляющих A параллелепипедов P_j замкнутым параллелепипедом с мерой, большей чем $\mu(P_j) - \varepsilon/(2j)$. Для каждого A_k выберем такое открытое элементарное множество $A_k^{(\varepsilon)}$, что $A_k \subset A_k^{(\varepsilon)}$ и $\mu\left(A_k^{(\varepsilon)}\right) \leqslant \mu(A_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Тогда система $\left\{A_k^{(\varepsilon)}\right\}$ является открытым покрытием множества $A^{[\varepsilon]}$, т. е.

$$A^{[\varepsilon]} \subset \bigcup_k A_k^{(\varepsilon)}.$$

По лемме Гейне — Бореля из $\left\{A_k^{(\varepsilon)}\right\}$ можно выбрать конечную подсистему $A_{k_1}^{(\varepsilon)}, A_{k_2}^{(\varepsilon)}, \ldots, A_{k_s}^{(\varepsilon)}$, тоже являющуюся покрытием $A^{[\varepsilon]}$. Тогда

$$\mu\left(A^{[\varepsilon]}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu\left(A_{k_j}^{(\varepsilon)}\right),$$

ибо иначе бы $A^{[\varepsilon]}$ было покрыто конечным числом параллелепипедов, сумма мер которых оказалась бы меньше $\mu\left(A^{[\varepsilon]}\right)$. Значит,

$$\mu(A) \leqslant \mu\left(A^{[\varepsilon]}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu\left(A_{k_j}^{(\varepsilon)}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_k \mu\left(A_k^{(\varepsilon)}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \mu(A_k) + \varepsilon \sum_k \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_k \mu(A_k) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует (1.1). □

Теперь мы можем сформулировать свойства меры элементарного множества.

Теорема 1.4. *Имеют место следующие свойства*:

1. *неотрицательность*: $\forall A \in \mathcal{E}\ \mu(A) \geqslant 0$;

2. *аддитивность*: *если* $A, A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{E}$, *причем*

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \qquad \text{и} \qquad A_k \cap A_j = \varnothing \text{ при } k \neq j, \qquad \text{то}$$

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k);$$

3. *счетная аддитивность* (*или* σ*-аддитивность*): *если* A, A_1, A_2, $\ldots$, A_m, $\ldots \in \mathcal{E}$, *причем*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \text{и} \qquad A_k \cap A_j = \varnothing\ k \neq j, \qquad \text{то}$$

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Доказательство. О свойствах 1 и 2 мы уже говорили. Из свойства 2 следует, что при любом m

$$\mu(A) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

Предельным переходом при $m \to \infty$ отсюда получается

$$\mu(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Но по теореме 1.3 верно и противоположное неравенство. Значит,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

что и требовалось. $\square$

1.1.3. Ограниченные измеримые множества в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольные множества, лежащие в параллелепипеде $E = (0; 1]^n$.

Определение 1.5. *Внешней мерой* множества $A \subset E$ называется число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k} \mu(P_k),$$

где inf берется по всевозможным покрытиям множества A не более чем счетными системами параллелепипедов $\{P_k\}$.

Примечание 1.1. В определении 1.5 можно было вместо покрытий множества A системами параллелепипедов рассматривать покрытия системами элементарных множеств. Число $\mu^*(A)$ от этого, очевидно, не изменилось бы.

Примечание 1.2. Если A — элементарное множество, то, в силу теоремы 1.3, $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Теорема 1.5. *Если $\{A_k\}$ — не более чем счетная система множеств $A_k \subset E$, а множество*

$$A \subset \bigcup_k A_k,$$

то

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_k \mu^*(A_k).$$

Доказательство. При произвольно выбранном $\varepsilon > 0$ для каждого k найдется такая не более чем счетная система параллелепипедов $\{P_{kj}\}$, что

$$A_k \subset \bigcup_j P_{kj} \qquad \text{и} \qquad \sum_j \mu(P_{kj}) \leqslant \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

в силу определения внешней меры. Тогда

$$A \subset \bigcup_k \bigcup_j P_{kj},$$

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_k \sum_j \mu(P_{kj}) \leqslant \sum_k \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует утверждение теоремы. □

Определение 1.6. Множество $A \subset E$ называется *измеримым по Лебегу* (или просто *измеримым*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $S_\varepsilon \in \mathcal{E}$, что $\mu^*(A \triangle S_\varepsilon) < \varepsilon$. Совокупность всех измеримых множеств $A \subset E$ мы будем обозначать $\mathfrak{M}_E$. *Мерой Лебега* множества $A \in \mathfrak{M}_E$ называется число $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Таким образом, измеримость множества означает, что оно с любой точностью может быть приближено элементарным.

Например, любое такое множество $A \subset E$, что $\mu^*(A) = 0$, измеримо, причем $\mu(A) = 0$. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ возьмем $S_\varepsilon = \varnothing$, тогда $\mu^*(A \triangle S_\varepsilon) = \mu^*(A \triangle \varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$. Отсюда следует еще, что если $B \subset A$, а $\mu(A) = 0$, то B измеримо и $\mu(B) = 0$.

Очевидно, что мера Лебега неотрицательна. Теперь приведем другие свойства измеримых множеств и меры Лебега.

Теорема 1.6. *Если множества* $A, B \in \mathfrak{M}_E$, *то и множества* $E \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B \in \mathfrak{M}_E$.

Доказательство. Поскольку $A \triangle S_\varepsilon = (E \setminus A) \triangle (E \setminus S_\varepsilon)$, имеем $E \setminus A \in \mathfrak{M}_E$.

Далее, если $A, B \in \mathfrak{M}_E$, то при $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $S_{A,\varepsilon}, S_{B,\varepsilon} \in \mathcal{E}$, что $\mu^*(A \triangle S_{A,\varepsilon}) < \varepsilon/2$ и $\mu^*(B \triangle S_{B,\varepsilon}) < \varepsilon/2$. Но

$$(A \cup B) \triangle (S_{A,\varepsilon} \cup S_{B,\varepsilon}) \subset (A \triangle S_{A,\varepsilon}) \cup (B \triangle S_{B,\varepsilon}),$$

так что

$$\mu^*\big((A \cup B) \triangle (S_{A,\varepsilon} \cup S_{B,\varepsilon})\big) \leqslant \mu^*(A \triangle S_{A,\varepsilon}) + \mu^*(B \triangle S_{B,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

При этом $S_{A,\varepsilon} \cup S_{B,\varepsilon} \in \mathcal{E}$, так что $A \cup B$ измеримо.

Наконец, из равенств

$$A \cap B = E \setminus \big((E \setminus A) \cup (E \setminus B)\big),$$

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B), \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$$

следует измеримость $A \cap B$, $A \setminus B$ и $A \triangle B$. □

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Для любых* $A, B \subset E$ *имеет место неравенство*

$$\big|\mu^*(A) - \mu^*(B)\big| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

Доказательство. Действительно,

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \qquad B \subset A \cup (A \triangle B),$$

откуда в силу теоремы 1.5 имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B), \qquad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B),$$

так что если $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, то $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$, а в противном случае $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$. □

Теорема 1.7. *Мера Лебега аддитивна, т. е. если множества* $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{M}_E$ *попарно не пересекаются, то*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Доказательство. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай $m = 2$. Пусть число $\varepsilon > 0$ произвольно, множества $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_E$ не пересекаются, а множества $S_{1,\varepsilon}, S_{2,\varepsilon} \in \mathcal{E}$ таковы, что

$$\mu^*(A_1 \triangle S_{1,\varepsilon}) < \varepsilon, \qquad \mu^*(A_2 \triangle S_{2,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Положим $A = A_1 \cup A_2$, $S_\varepsilon = S_{1,\varepsilon} \cup S_{2,\varepsilon}$. Поскольку по условию теоремы $A_1 \cap A_2 = \varnothing$,

$$S_{1,\varepsilon} \cap S_{2,\varepsilon} \subset (A_1 \triangle S_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \triangle S_{2,\varepsilon}),$$

так что $\mu(S_{1,\varepsilon} \cap S_{2,\varepsilon}) \leqslant 2\varepsilon$. Кроме того, в силу леммы 1.1,

$$\left|\mu(S_{1,\varepsilon}) - \mu^*(A_1)\right| < \varepsilon, \qquad \left|\mu(S_{2,\varepsilon}) - \mu^*(A_2)\right| < \varepsilon.$$

Поскольку для элементарных множеств мера аддитивна, из этих неравенств имеем

$$\mu(S_\varepsilon) = \mu(S_{1,\varepsilon}) + \mu(S_{2,\varepsilon}) - \mu(S_{1,\varepsilon} \cap S_{2,\varepsilon}) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Кроме того, $A \triangle S_\varepsilon \subset (A_1 \triangle S_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \triangle S_{2,\varepsilon})$, так что

$$\mu^*(A \triangle S_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle S_{1,\varepsilon}) + \mu^*(A_2 \triangle S_{2,\varepsilon}) < 2\varepsilon.$$

Значит,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu(S_\varepsilon) - \mu^*(A \triangle S_\varepsilon) \geqslant \mu(S_\varepsilon) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Но по теореме 1.5 верно и обратное неравенство. Значит,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

При этом множества A_1 и A_2 измеримы по условию, а множество A — по теореме 1.6. Значит, по определению меры Лебега, $\mu^*(A_1) = \mu(A_1)$, $\mu^*(A_2) = \mu(A_2)$ и $\mu^*(A) = \mu(A)$. Итак,

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

что и требовалось доказать. □

Из этой теоремы вытекает, что мера разности множества и его подмножества равна разности их мер. В частности, справедливо следующее полезное

Следствие 1.1. *Если* $A \in \mathfrak{M}_E$, *то* $\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A)$.

Обобщим теорему 1.6 на случай объединения счетного числа измеримых множеств.

Теорема 1.8. *Объединение счетного числа множеств из $\mathfrak{M}_E$ само является множеством из $\mathfrak{M}_E$.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots \in \mathfrak{M}_E$ и

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Положим

$$A'_m = A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k.$$

Очевидно, $A'_m \cap A'_j = \varnothing$ при $m \neq j$ и

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m.$$

Кроме того, в силу теоремы 1.6, все A'_m измеримы. По теореме 1.7

$$\forall m \qquad \sum_{k=1}^{m} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A),$$

так что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k)$$

сходится. Значит, его остаток стремится к нулю, так что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(A'_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По теореме 1.6 множество

$$B = \bigcup_{k=1}^{m} A'_k$$

измеримо, так что найдется такое $S \in \mathcal{E}$, что $\mu(B \bigtriangleup S_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Но

$$A \bigtriangleup S_\varepsilon \subset (B \bigtriangleup S_\varepsilon) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} A'_k\right),$$

откуда $\mu^*(A \bigtriangleup S_\varepsilon) < \varepsilon$, т. е. A измеримо. □

С помощью двойственности получается

Следствие 1.2. *Пересечение счетного числа множеств из $\mathfrak{M}_E$ само является множеством из $\mathfrak{M}_E$.*

Теперь мы можем обобщить теорему 1.7 на случай объединения счетного числа измеримых множеств, т. е. доказать σ-аддитивность меры Лебега.

Теорема 1.9. *Мера Лебега на $\mathfrak{M}_E$ σ-аддитивна, т. е. если множества $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathfrak{M}_E$ попарно не пересекаются, то*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Доказательство. По теореме 1.8 объединение всех A_k измеримо. В силу аддитивности меры Лебега при любом m

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

так что предельным переходом при $m \to \infty$ получаем

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Противоположное неравенство имеет место в силу теоремы 1.5. $\square$

Теорема 1.10. *Мера Лебега на $\mathfrak{M}_E$ непрерывна, т. е. если множества $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ и все $A_k \in \mathfrak{M}_E$, то*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Доказательство. Пусть A — пересечение всех A_k. Достаточно рассмотреть случай $A = \varnothing$, ибо общий случай сводится к этому заменой A_k на $A_k \setminus A$. Имеем

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots, \qquad \ldots,$$
$$A_m = (A_m \setminus A_{m+1}) \cup (A_{m+1} \setminus A_{m+2}) \cup (A_{m+2} \setminus A_{m+3}) \cup \ldots, \qquad \ldots,$$

причем множества в скобках попарно не пересекаются, так что в силу σ-аддитивности меры имеем

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \qquad \ldots, \tag{1.2}$$

$$\mu(A_m) = \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \qquad \ldots. \tag{1.3}$$

При этом ряд (1.2) сходится, так что его остаток (1.3) стремится к нулю при $m \to \infty$. Итак, $\mu(A_m) \to 0$ при $m \to \infty$, что и требовалось. $\square$

Следствие 1.3. *Если множества* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ *и все* $A_k \in \mathfrak{M}_E$, *то*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

1.1.4. Произвольные измеримые множества в $\mathbb{R}^n$. Наконец, рассмотрим множества, не обязательно содержащиеся в E. Представим пространство $\mathbb{R}^n$ в виде (счетного) объединения параллелепипедов E_k, полученных целым количеством сдвигов параллелепипеда E на ± 1 по любой координате или нескольким координатам. При каждом k на множества, лежащие в E_k, очевидно, распространяются все определения и факты предыдущего пункта.

Определение 1.7. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым*, если его пересечение $A_k = A \cap E_k$ с каждым E_k измеримо. При этом *мерой* множества A в $\mathbb{R}^n$ называется

$$\mu(A) = \sum_k \mu(A_k).$$

Ясно, что мера может быть как конечной (если соответствующий ряд сходится), так и бесконечной (если этот ряд расходится к $+\infty$). Совокупность всех измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\mathfrak{M}$.

Легко видеть, что теоремы 1.6–1.9 вместе со следствиями переносятся на $\mathfrak{M}$. Теорема 1.10 переносится на $\mathfrak{M}$ с дополнительным условием $\mu(A_1) < \infty$.

Аналогичным образом можно определить меру и во многих других пространствах. Подробные построения можно найти в [1, 2].

Пример 1.1. Можно доказать (см. [1]), что *на прямой* $\mathbb{R}$ *любое открытое множество представляет собой объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов вида* $(a; b)$, $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; a)$ *и* $(a; \infty)$. Отсюда вытекает, что любое открытое множество (а значит, и любое замкнутое множество; подробнее о них мы поговорим в параграфе 2.2) на прямой измеримо. Следовательно, измеримы все множества на прямой, представимые в виде конечного или счетного объединения или пересечения открытых и замкнутых множеств. Однако существуют измеримые на $\mathbb{R}$ множества, не представимые в указанном виде.

Пример 1.2. Измеримы все открытые и замкнутые множества и в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Значит, любое множество в $\mathbb{R}^n$, представимое в виде конечного или счетного объединения или пересечения открытых и замкнутых множеств, измеримо. Но, опять же, этими множествами $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{R}^n$ не исчерпывается.

Пример 1.3. Мера одноточечного множества, очевидно, равна 0. Следовательно, мера любого не более чем счетного множества тоже равна 0.

Пример 1.4. Приведем теперь пример несчетного множества нулевой меры. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ отрезок $F_0 = [0; 1]$ и получим из него множества

$$F_1 = F_0 \setminus \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \qquad F_2 = F_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)\right),$$

$$F_3 = F_2 \setminus \left(\left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right)\right), \qquad \ldots,$$

т. е. на каждом шаге из каждого оставшегося отрезка выбрасывается интервал посередине, длина которого равна трети этого отрезка (процесс построения указанных множеств см. на рис. 1). *Канторовым множеством* называется множество

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Каждое из множеств F_k замкнуто и, следовательно, измеримо, так что в силу следствия теоремы 1.8 канторово множество тоже измеримо. В силу теоремы 1.10

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{2^{j-1}}{3^j}\right) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j-1}}{3^j} = 0.$$

При этом канторово множество несчетно. Действительно, легко видеть, что число $a \in [0; 1]$ принадлежит множеству F тогда и только тогда, когда существует запись a в виде троичной дроби, в которой нет цифры 1. Но тогда числу $a \in F$ можно однозначно поставить в соответствие число $b \in [0; 1]$, в двоичной записи которого цифра 0 соответствует цифре 0 в том же разряде в троичной записи a, а цифра 1 соответствует цифре 2 в том же разряде в троичной записи a. Но таких чисел b не меньше, чем чисел на отрезке $[0; 1]$, а этот отрезок, как известно из курса математического анализа, является несчетным множеством.

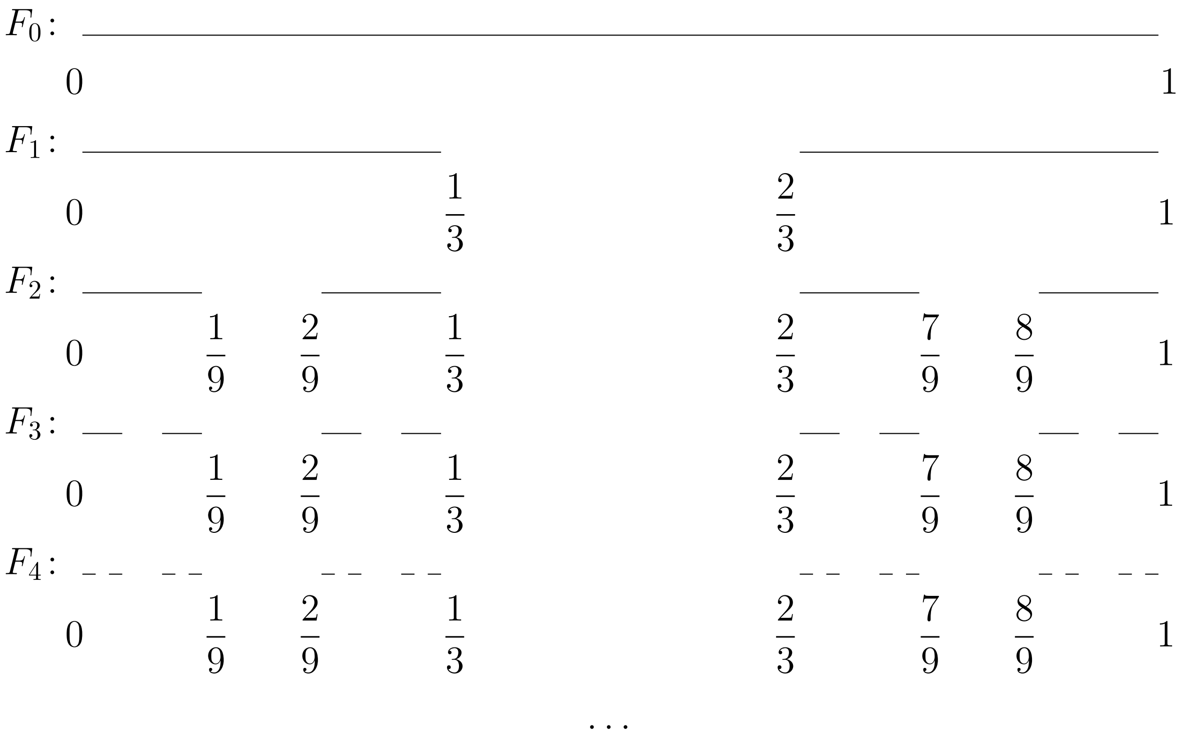

Рис. 1. Множества F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, ...

Пример 1.5. Покажем, что существуют неизмеримые множества. Рассмотрим окружность C единичной длины и некоторое иррациональное число α. Введем следующее отношение эквивалентности: две точки окружности C эквивалентны, если одна из них может быть переведена в другую поворотом на угол $k\alpha\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Классы этой эквивалентности, очевидно, являются счетными множествами, но количество их несчетно. Выберем из каждого класса эквивалентности по одной точке (здесь мы используем аксиому выбора) и составим из них множество Φ_0. При каждом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим множества Φ_k, получаемые поворотом Φ_0 на угол $k\alpha\pi$. Очевидно, $\Phi_k \cap \Phi_j = \varnothing$ при $k \neq j$. Кроме того,

$$C = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k.$$

Если множество Φ_0 измеримо, то, очевидно, измеримы и все Φ_k, причем $\mu(\Phi_k) = \mu(\Phi_0)$. Тогда, в силу теоремы 1.9

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_k).$$

Если $\mu(\Phi_0) = 0$, то указанный ряд сходится к 0; если же $\mu(\Phi_0) > 0$, то этот ряд расходится. Итак, множество Φ_0 неизмеримо.

1.2 Измеримые функции

Определение 1.8. Вещественнозначная функция $f(x)$ называется *измеримой* на множестве X, если при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) < c\}$ измеримо.

Примечание 1.3. Пусть знак $\prec$ означает любой из $<$ или $\leqslant$. Читатель легко докажет, что функция $f(x)$ измерима на множестве X тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1. при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X\colon f(x) \prec c\}$ измеримо;
2. при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X\colon c \prec f(x)\}$ измеримо;
3. при любых $a, b \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X\colon a \prec f(x) \prec b\}$ измеримо;
4. при любом $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in X\colon f(x) \prec r\}$ измеримо;
5. при любом $r \in \mathbb{Q}$ множество $\{x \in X\colon r \prec f(x)\}$ измеримо.

Теорема 1.11. *Сумма, разность, произведение и частное двух измеримых функций (последнее — при условии, что знаменатель не обращается в* 0) *измеримы.*

Доказательство. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы.

1. Очевидно, измеримы функции $\alpha f(x)$ и $f(x) + \alpha$.

2. Множество

$$\{x\colon f(x) > g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(\{x\colon f(x) > r\} \cap \{x\colon g(x) < r\}\Big)$$

измеримо. Тогда из измеримости функции $c - g(x)$ вытекает измеримость множества $\{x\colon f(x) > c - g(x)\} = \{x\colon f(x) + g(x) > c\}$, т. е. измеримость функции $f(x) + g(x)$.

3. т. к. функция $-g(x)$ измерима, измерима и $f(x) - g(x)$.

4. Если $c > 0$, то

$$\left\{x\colon \big(f(x)\big)^2 < c\right\} = \{x\colon -\sqrt{c} < f(x) < \sqrt{c}\};$$

если $c \leqslant 0$, то

$$\left\{x\colon \big(f(x)\big)^2 < c\right\} = \varnothing.$$

Эти множества измеримы, так что измерима и функция $\big(f(x)\big)^2$.

5. Функции $\big(f(x) + g(x)\big)^2$ и $\big(f(x) - g(x)\big)^2$ измеримы. Тогда измерима и функция

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left(\big(f(x) + g(x)\big)^2 - \big(f(x) - g(x)\big)^2\right).$$

6. Пусть $f(x) \neq 0$. Если $c > 0$, то

$$\left\{x\colon \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x\colon f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x\colon f(x) < 0\};$$

если $c < 0$, то

$$\left\{x\colon \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x\colon \frac{1}{c} < f(x) < 0\right\};$$

если $c = 0$, то

$$\left\{x\colon \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x\colon f(x) < 0\}.$$

Все эти множества измеримы, так что измерима и функция $1/f(x)$, откуда следует измеримость частного. □

Теорема 1.12. *Пусть последовательность $\{f_k(x)\}$ при каждом $x \in X$ сходится к функции $f(x)$ и все функции $f_k(x)$ измеримы на X. Тогда и функция $f(x)$ измерима на X.*

Доказательство. Покажем, что

$$\{x\colon f(x) < c\} = \bigcup_j \bigcup_k \bigcap_{m>k} \left\{x\colon f_m(x) < c - \frac{1}{j}\right\}. \tag{1.4}$$

С одной стороны, если $f(x) < c$, то найдется такое j, что

$$f(x) < c - \frac{2}{j},$$

для этого j найдется такое k, что при $m \geqslant k$

$$f_m(x) < c - \frac{1}{j},$$

так что x принадлежит множеству в правой части (1.4). С другой стороны, если x принадлежит множеству в правой части (1.4), то при некотором j и всех достаточно больших m имеем $f_m(x) < c - 1/j$, но тогда $f(x) < c$. Итак, равенство (1.4) верно. Далее, из измеримости всех $f_m(x)$ следует, что множество в правой части (1.4) измеримо. Но тогда множество $\{x\colon f(x) < c\}$ измеримо. Значит, функция $f(x)$ измерима. □

Определение 1.9. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* на множестве X, если

$$\mu\{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Иными словами, эквивалентные на множестве X функции отличаются друг от друга лишь на подмножестве нулевой меры.

Примечание 1.4. Говорят, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на множестве X, если оно выполняется на X всюду, кроме подмножества меры 0 множества X. Определение эквивалентности функций можно сформулировать так: две функции называются эквивалентными на множестве X, если они равны на X почти всюду.

Из определения эквивалентности сразу получается

Теорема 1.13. *Функция, определенная на измеримом множестве и эквивалентная на нем измеримой функции, измерима.*

Определение 1.10. Последовательность функций $\{f_k(x)\}$ на X *сходится почти всюду* к $f(x)$, если

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ почти всюду на } X.$$

Из теоремы 1.12 легко получается

Теорема 1.14. *Пусть последовательность $\{f_k(x)\}$ почти всюду на X сходится к функции $f(x)$ и все функции $f_k(x)$ измеримы на X. Тогда и функция $f(x)$ измерима на X.*

Теорема 1.15 (Егоров). *Пусть X — множество конечной меры, а последовательность измеримых на X функций $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое подмножество X_ε множества X, что $\mu(X_\varepsilon) > \mu(X) - \varepsilon$ и $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ на X_ε равномерно.*

Доказательство. По теореме 1.14 функция $f(x)$ измерима. Пусть

$$X_{km} = \bigcap_{j\geqslant k} \left\{x\colon |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}, \qquad X_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{km}.$$

При фиксированном m, очевидно, $X_{1m} \subset X_{2m} \subset \ldots \subset X_{km} \subset \ldots$. Тогда, в силу следствия теоремы 1.10, для любого $\varepsilon > 0$ и любого m найдется такое $N(m)$, что $\mu\left(X_m \setminus X_{N(m)m}\right) < \varepsilon/2^m$. На множестве

$$X_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{N(m)m}$$

последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно, ибо для любого m при $j > N(m)$ имеем $|f_j(x) - f(x)| < 1/m$ для всех $x \in X_\varepsilon$ сразу. Остается доказать, что $\mu(X_\varepsilon) > \mu(X) - \varepsilon$. Заметим сначала, что $\mu(X \setminus X_m) = 0$, ибо $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на X, но для

$x \in X \setminus X_m$ существуют сколь угодно большие номера j, при которых $\bigl|f_j(x) - f(x)\bigr| \geqslant 1/m$. Тогда

$$\mu\left(X \setminus X_{N(m)m}\right) = \mu\left(X_m \setminus X_{N(m)m}\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Отсюда

$$\mu\bigl(X \setminus X_\varepsilon\bigr) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{N(m)m}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} X \setminus X_{N(m)m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus X_{N(m)m}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 1.16 (Лузин). *Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a;b]$ измерима на нем тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $\varphi_\varepsilon(x)$, что*

$$\mu\bigl\{x\colon f(x) \neq \varphi_\varepsilon(x)\bigr\} < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

Определение 1.11. Последовательность $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$ измеримых на множестве X функций *сходится по мере* к функции $f(x)$ на X, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mu\Bigl\{x \in X\colon \bigl|f_k(x) - f(x)\bigr| \geqslant \varepsilon\Bigr\} = 0.$$

Теорема 1.17. *Если на множестве конечной меры последовательность измеримых функций $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$ почти всюду сходится к функции $f(x)$, то она сходится по мере к той же функции $f(x)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.14, функция $f(x)$ измерима. Пусть A — то множество, на котором $f_k(x)$ не стремится к $f(x)$. По условию теоремы $\mu(A) = 0$. Положим

$$E_j(\varepsilon) = \Bigl\{x\colon \bigl|f_j(x) - f(x)\bigr| \geqslant \varepsilon\Bigr\},\quad R_k(\varepsilon) = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j(\varepsilon),\quad M = \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k(\varepsilon).$$

Все эти множества измеримы. Поскольку $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \ldots$, в силу теоремы 1.10 имеем $\mu\bigl(R_k(\varepsilon)\bigr) \to \mu(M)$ при $k \to \infty$. Но $M \subset A$, ибо если $x \notin A$, то $f_j(x) \to f(x)$ при $j \to \infty$, так что для данного ε найдется такой номер N, что $\bigl|f_j(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon$ при $j \geqslant N$, т.е. $x \notin R_N(\varepsilon)$ и, следовательно, $x \notin M$. Значит, $\mu(M) = 0$. Итак, $\mu\bigl(R_k(\varepsilon)\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда $E_k(\varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

Обратное к теореме 1.17 утверждение, вообще говоря, не верно, что показывает следующий

Пример 1.6. Рассмотрим при каждом $k \in \mathbb{N}$ на $(0;1]$ функции

$$f_{kj}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{j-1}{k} < x \leqslant \dfrac{j}{k}, \\ 0 \text{ при всех остальных } x, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Пронумеруем эти функции подряд. Тогда мы получим последовательность функций, сходящуюся по мере к 0, но не сходящуюся ни в одной точке.

Однако, справедлива

Теорема 1.18. *Если последовательность измеримых функций $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$ на множестве X конечной меры сходится по мере к функции $f(x)$, то из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\bigl\{f_{k_j}(x)\bigr\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на X.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел, причем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

Выберем возрастающую последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ так, чтобы

$$\mu\Bigl\{x\colon \bigl|f_{k_j}(x) - f(x)\bigr| \geqslant \varepsilon_j\Bigr\} < \eta_j.$$

Положим

$$R_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} \Bigl\{x\colon \bigl|f_{k_j}(x) - f(x)\bigr| \geqslant \varepsilon_j\Bigr\}, \qquad Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m.$$

Поскольку $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$, в силу теоремы 1.10 имеем $\mu(R_m) \to \mu(Q)$ при $m \to \infty$. При этом

$$\mu(R_m) < \sum_{k=m}^{\infty} \eta_k,$$

так что $\mu(R_m) \to 0$ при $m \to \infty$ как остаток сходящегося ряда. Значит, $\mu(Q) = 0$. Если $x \in X \setminus Q$, то $x \notin R_{m_0}$ при некотором m_0. Следовательно, при всех $j \geqslant m_0$ имеем $\bigl|f_{k_j}(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon_j$. Но $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$, так что $f_{k_j}(x) \to f(x)$ при $j \to 0$. Итак, всюду на множестве X, кроме подмножества Q нулевой меры, последовательность $\bigl\{f_{k_j}(x)\bigr\}$ сходится к функции $f(x)$. $\square$

1.3 Интеграл Лебега

1.3.1. Интеграл Лебега от простой функции. Всюду в пунктах 1.3.1–1.3.3 мера множества A конечна.

Определение 1.12. Функция $f(x)$ называется *простой*, если она измерима и принимает не более чем счетное число значений.

Теорема 1.19. *Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число значений $y_1, \ldots, y_k, \ldots$, измерима тогда и только тогда, когда все множества $A_k = \big\{x\colon f(x) = y_k\big\}$ измеримы.*

Доказательство. Если все A_k измеримы, то при любом $c \in \mathbb{R}$

$$\big\{x\colon f(x) < c\big\} = \bigcup_{y_k < c} A_k$$

измеримо как не более чем счетное объединение измеримых множеств. С другой стороны, если функция $f(x)$ измерима, то множество

$$A_k = \big\{x\colon f(x) \leqslant y_k\big\} \setminus \big\{x\colon f(x) < y_k\big\}$$

измеримо как разность двух измеримых множеств. □

Определение 1.13. Простая функция $f(x)$, принимающая значения $y_1, \ldots, y_k, \ldots$, где $y_k \neq y_j$ при $k \neq j$, называется *интегрируемой* или *суммируемой* на множестве A, если абсолютно сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k), \qquad \text{где} \qquad A_k = \big\{x \in A\colon f(x) = y_k\big\}.$$

При этом число

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$$

называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству A.

Теорема 1.20. *Если*

$$A = \bigcup_m B_m,$$

где $B_m \cap B_j = \varnothing$ при $m \neq j$, а функция $f(x)$ принимает на каждом B_m только одно значение c_m, то

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_m c_m \mu(B_m),$$

причем $f(x)$ интегрируема на A тогда и только тогда, когда этот ряд абсолютно сходится.

Доказательство. Очевидно,

$$A_k = \{x \in A\colon f(x) = y_k\} = \bigcup_{c_m = y_k} B_m.$$

Следовательно,

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_k y_k \mu(A_k) = \sum_k y_k \sum_{c_m = y_k} \mu(B_m) = \sum_m c_m \mu(B_m).$$

При этом

$$\sum_k |y_k|\mu(A_k) = \sum_k |y_k| \sum_{c_m = y_k} \mu(B_m) = \sum_m |c_m|\mu(B_m),$$

так что ряды

$$\sum_k |y_k|\mu(A_k) \qquad \text{и} \qquad \sum_m |c_m|\mu(B_m)$$

сходятся или расходятся одновременно. □

Теорема 1.21. *Если простые функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на A, то*

1. $\displaystyle\int_A \big(f(x) + g(x)\big)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu;$

2. $\displaystyle\int_A cf(x)\,d\mu = c\int_A f(x)\,d\mu$, *где* $c = \mathrm{const}$.

3. *Если простая функция $f(x)$ ограничена на A, то $f(x)$ интегрируема на A, причем если $\big|f(x)\big| \leqslant M$ при $x \in A$, то*

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant M\mu(A).$$

Доказательство. 1. Пусть $f(x)$ принимает значения f_k на множествах $F_k \subset A$, а $g(x)$ — значения g_m на множествах $G_m \subset A$. Тогда

$$I_f = \int_A f(x)\,d\mu = \sum_k f_k \mu(F_k), \quad I_g = \int_A g(x)\,d\mu = \sum_m g_m \mu(G_m).$$

В силу теоремы 1.20

$$I = \int_A \big(f(x) + g(x)\big)\,d\mu = \sum_k \sum_m (f_k + g_m)\mu(F_k \cap G_m).$$

При этом

$$\mu(F_k) = \sum_m \mu(F_k \cap G_m), \quad \mu(G_m) = \sum_k \mu(F_k \cap G_m),$$

так что из существования I_f и I_g следует, что $\exists I = I_f + I_g$.

Свойства 2 и 3 легко проверить непосредственно:

$$\int_A cf(x)\,d\mu = \sum_k cf_k\mu(F_k) = c\sum_k f_k\mu(F_k) = c\int_A f(x)\,d\mu,$$

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_k f_k\mu(F_k)\right| \leqslant \sum_k |f_k|\mu(F_k) \leqslant \sum_k M\mu(F_k) = M\mu(A),$$

что и требовалось. □

1.3.2. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. Нам потребуется

Теорема 1.22. *Функция $f(x)$ измерима тогда и только тогда, когда существует равномерно сходящаяся к $f(x)$ последовательность простых функций.*

Доказательство. Если некоторая последовательность простых функций сходится к $f(x)$, то, в силу теоремы 1.12, $f(x)$ измерима. Обратно, если $f(x)$ — измеримая функция, то последовательность простых функций

$$f_k(x) = \frac{m}{k} \qquad \text{при} \qquad x\colon \frac{m}{k} \leqslant f_k(x) < \frac{m+1}{k},\ k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z},$$

при $n\to\infty$ сходится к $f(x)$ равномерно, ибо $\bigl|f(x) - f_k(x)\bigr| \leqslant 1/k$. □

Определение 1.14. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* или *суммируемой* на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$, сходящаяся равномерно к $f(x)$. При этом число

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)\,d\mu \tag{1.5}$$

называется *интегралом Лебега функции $f(x)$ по множеству A*.

Примечание 1.5. Необходимо доказать корректность определения 1.14, т. е. следующие утверждения.

1. Предел (1.5) для любой равномерно сходящейся последовательности интегрируемых простых функций существует.

2. При заданной функции $f(x)$ предел (1.5) не зависит от выбора последовательности интегрируемых простых функций $\bigl\{f_n(x)\bigr\}$.

3. Для простой функции определения 1.14 и 1.13 равносильны.

Читатель легко докажет, что эти утверждения, как и сформулированные ниже свойства интеграла Лебега, действительно верны.

Теорема 1.23. *Справедливы следующие свойства*:

1. $\displaystyle\int_A d\mu = \mu(A)$;

2. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на множестве* A, *то*

$$\int_A cf(x)\,d\mu = c\int_A f(x)\,d\mu,$$

где $c = \mathrm{const}$;

3. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на множестве* A, *то*

$$\int_A \big(f(x) + g(x)\big)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu;$$

4. *Ограниченная на множестве* A *функция интегрируема на* A;

5. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на множестве* A *и на* A *всюду* $f(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant 0;$$

6. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на множестве* A *и на* A *всюду выполнено неравенство* $f(x) \geqslant g(x)$, *то*

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \int_A g(x)\,d\mu;$$

7. *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *всюду на множестве* A, *то*

$$m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,d\mu \leqslant M\mu(A);$$

8. *Если* $\mu(A) = 0$, *то*

$$\int_A f(x)\,d\mu = 0;$$

9. *Если* $f(x) = g(x)$ *почти всюду на множестве* A, *то интегралы функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *существуют или не существуют одновременно, причем*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu;$$

10. *Если функция* $\varphi(x)$ *интегрируема на множестве* A *и неравенство* $\big|f(x)\big| \leqslant \varphi(x)$ *выполнено почти всюду на* A, *то функция* $f(x)$ *тоже интегрируема на* A;

11. *Интегралы*

$$\int_A f(x)\,d\mu \qquad \text{и} \qquad \int_A \big|f(x)\big|\,d\mu$$

существуют или не существуют одновременно.

Теорема 1.24. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, а $A_1, \dots, A_k, \dots$ измеримы, попарно не пересекаются и*
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$
Тогда $\forall k$ $f(x)$ интегрируема на A_k, причем абсолютно сходится ряд
$$\sum_k \int_{A_k} f(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x)$ — простая функция, принимающая значения $y_1, \dots, y_m, \dots$. Положим $B_m = \bigl\{x \in A\colon f(x) = y_m\bigr\}$, $B_{mk} = \bigl\{x \in A_k\colon f(x) = y_m\bigr\}$. Имеем
$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_m y_m \mu(B_m) = \sum_m y_m \sum_k \mu(B_{mk}) =$$
$$= \sum_k \sum_m y_m \mu(B_{mk}) = \sum_k \int_{A_k} f(x)\,d\mu.$$
Первый из указанных рядов абсолютно сходится, ибо $f(x)$ интегрируема на A. Следовательно, абсолютно сходятся и все остальные.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая на A функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая интегрируемая на A простая функция $g(x)$, что $\bigl|f(x) - g(x)\bigr| < \varepsilon$. Как уже доказано,
$$\sum_k \int_{A_k} g(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu, \tag{1.7}$$
причем $g(x)$ интегрируема на каждом A_k и ряд (1.7) абсолютно сходится. Но тогда и $f(x)$ интегрируема на каждом A_k, причем
$$\sum_k \left| \int_{A_k} f(x)\,d\mu - \int_{A_k} g(x)\,d\mu \right| \leqslant \sum_k \varepsilon\mu(A_k) = \varepsilon\mu(A),$$
$$\left| \int_A f(x)\,d\mu - \int_A g(x)\,d\mu \right| \leqslant \varepsilon\mu(A).$$
Отсюда и из (1.7) следует, что левая часть (1.6) абсолютно сходится и
$$\left| \sum_k \int_{A_k} f(x)\,d\mu - \int_A f(x)\,d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A).$$
Но ε произвольно, так что
$$\sum_k \int_{A_k} f(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu,$$
что и требовалось. $\square$

Следствие 1.4. *Функция, интегрируемая на некотором множестве, интегрируема и на любом его измеримом подмножестве.*

Теорема 1.25. *Пусть множества* $A_1, \ldots, A_k, \ldots$ *измеримы, попарно не пересекаются,*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \sum_k \int_{A_k} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu < \infty.$$

Тогда $f(x)$ *интегрируема на* A, *причем*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k \int_{A_k} f(x)\, d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай простой функции $f(x)$, принимающей значения $y_1, \ldots, y_m, \ldots$. Положим

$$B_m = \bigl\{x \in A\colon f(x) = y_m\bigr\}, \qquad A_{mk} = B_m \cap A_k.$$

Тогда

$$\bigcup_k A_{mk} = B_m, \qquad \int_{A_k} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu = \sum_m |y_m| \mu(A_{mk}).$$

Из условия теоремы следует, что ряды

$$\sum_k \sum_m |y_m| \mu(A_{mk}) = \sum_m |y_m| \mu(B_m)$$

сходятся. Но тогда существует интеграл

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_m y_m \mu(B_m).$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция. Выберем простую функцию $g(x)$ так, что $\bigl|f(x) - g(x)\bigr| < \varepsilon$. Тогда

$$\int_{A_k} \bigl|g(x)\bigr|\, d\mu \leqslant \int_{A_k} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu + \varepsilon\mu(A_k).$$

При этом ряд

$$\sum_k \int_{A_k} \bigl|f(x)\bigr|\, d\mu$$

сходится по условию теоремы, а сумма всех $\mu(A_k)$ равна $\mu(A)$. Значит, сходится ряд

$$\sum_k \int_{A_k} \bigl|g(x)\bigr|\, d\mu,$$

так что, как уже доказано, функция $g(x)$ интегрируема. Но тогда функция $f(x)$ аппроксимируема с любой точностью простыми интегрируемыми функциями, т. е. сама интегрируема. $\square$

Теорема 1.26 (неравенство Чебышёва). *Пусть $f(x) \geqslant 0$ на A и $c > 0$. Тогда*

$$\mu\{x \in A\colon f(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\int_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Если $B = \big\{x \in A\colon f(x) \geqslant c\big\}$, то

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_B f(x)\,d\mu + \int_{A\setminus B} f(x)\,d\mu \geqslant \int_B f(x)\,d\mu \geqslant c\mu(B),$$

что и требовалось. □

Следствие 1.5. *Если*

$$\int_A f(x)\,d\mu = 0,$$

то $f(x) = 0$ почти всюду на A.

Доказательство. Действительно, из неравенства Чебышёва следует, что при любом k

$$\mu\left\{x \in A\colon \big|f(x)\big| \geqslant \frac{1}{k}\right\} \leqslant k\int_A \big|f(x)\big|\,d\mu = 0.$$

Значит,

$$\mu\{x \in A\colon f(x) \neq 0\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\mu\left\{x \in A\colon \big|f(x)\big| \geqslant \frac{1}{k}\right\} = 0,$$

что и требовалось. □

Теорема 1.27. *Интеграл Лебега абсолютно непрерывен, т. е. если $f(x)$ — интегрируемая на множестве A функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что на всех множествах $e \subset A$, мера которых $\mu(e) < \delta$,*

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Для ограниченной на A функции утверждение теоремы очевидно. Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая на A функция. Обозначим

$$A_k = \big\{x \in A\colon k \leqslant \big|f(x)\big| < k+1\big\}, \qquad B_K = \bigcup_{k=0}^{K} A_k, \qquad C_K = A \setminus B_K.$$

По теореме 1.24

$$\int_A \big|f(x)\big|\,d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k}\big|f(x)\big|\,d\mu.$$

Пусть K — такой номер, что

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \int_{A_k} \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu = \int_{C_K} \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

а δ — такое число, что $0 < \delta < \varepsilon / \bigl(2(K+1)\bigr)$. Тогда если $\mu(e) < \delta$, то

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_e \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu = \int_{e\cap B_K} \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu + \int_{e\cap C_K} \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in e\cap B_K} \bigl|f(x)\bigr|\cdot\mu(e\cap B_K) + \int_{C_K} \bigl|f(x)\bigr|\,d\mu <$$

$$< (K+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(K+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

1.3.3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Теорема 1.28 (Лебег). *Пусть на множестве A функция $\varphi(x)$ интегрируема, а последовательность $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$ сходится к функции $f(x)$ и $\bigl|f_k(x)\bigr| \leqslant \varphi(x)$ при всех k. Тогда $f(x)$ интегрируема на A, причем*

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \varphi(x)$ на A. Следовательно, $f(x)$ на A интегрируема. Выберем $\varepsilon > 0$. По теореме 1.27 найдется такое $\delta > 0$, что при $\mu(B) < \delta$

$$\int_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу теоремы Егорова множество B можно выбрать так, чтобы последовательность $\bigl\{f_k(x)\bigr\}$ сходилась равномерно на множестве $C = A\setminus B$. Следовательно, найдется такой номер N, что при $k \geqslant N$ для всех $x \in C$ выполняется неравенство $\bigl|f(x) - f_k(x)\bigr| < \varepsilon / \bigl(2\mu(C)\bigr)$. При этом

$$\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_k(x)\,d\mu =$$

$$= \int_C \bigl(f(x) - f_k(x)\bigr)\,d\mu + \int_B f(x)\,d\mu - \int_B f_k(x)\,d\mu,$$

так что

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_k(x)\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

ибо $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \bigl|\varphi(x)\bigr|$ и $\bigl|f_k(x)\bigr| \leqslant \bigl|\varphi(x)\bigr|$. □

Следствие 1.6. *Пусть на множестве A последовательность интегрируемых функций $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ и $|f_k(x)| \leqslant C = \mathrm{const}$ при всех k. Тогда $f(x)$ интегрируема на A, причем*

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu.$$

Примечание 1.6. В формулировках теоремы Лебега и ее следствия достаточно предположить, что указанные неравенства выполнены почти всюду и последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, ибо значения, принимаемые функцией на множестве нулевой меры, на интеграл не влияют.

Теорема 1.29 (Б. Леви). *Пусть $\{f_k(x)\}$ — такая последовательность интегрируемых на множестве A функций, что*

$$f_1(x) \leqslant \ldots \leqslant f_k(x) \leqslant \ldots \quad \text{и} \quad \exists C > 0\colon \forall k \in \mathbb{N}\ \int_A f_k(x)\,d\mu \leqslant C.$$

Тогда $\{f_k(x)\}$ почти всюду на A сходится к некоторой функции $f(x)$, причем функция $f(x)$ интегрируема на A и

$$\lim_{k\to\infty}\int_A f_k(x)\,d\mu = f(x).$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $f_1(x) \geqslant 0$, ибо общий случай сводится к этому переходом к последовательности функций $\tilde{f}_k(x) = f_k(x) - f_1(x)$. Пусть

$$\Omega = \{x \in A\colon f_k(x) \to \infty\}, \qquad \Omega_k^r = \{x \in A\colon f_k(x) > r\}.$$

Очевидно,

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_k \Omega_k^r.$$

В силу неравенства Чебышёва, $\mu(\Omega_k^r) \leqslant C/r$. Но тогда и

$$\mu\left(\bigcup_k \Omega_k^r\right) \leqslant \frac{C}{r},$$

ибо $\Omega_1^r \subset \ldots \subset \Omega_k^r \subset \ldots$. Заметим, что при любом r

$$\Omega \subset \bigcup_k \Omega_k^r,$$

так что $\mu(\Omega) \leqslant C/r$. Но r произвольно, так что $\mu(\Omega) = 0$. Итак, последовательность $\{f_k(x)\}$ почти всюду на множестве A имеет конечный предел.

Пусть при $r \in \mathbb{N}$ $A_r = \{x \in A\colon r-1 \leqslant f(x) < r\}$, а $\varphi(x) = r$ на A_r. Надо доказать, что функция $\varphi(x)$ интегрируема на множестве A. Тогда утверждение теоремы Б. Леви будет следовать из теоремы Лебега. Пусть

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r.$$

На множестве B_s функции $f(x)$, $f_k(x)$ и $\varphi(x) \leqslant f(x)+1$ ограничены, так что

$$\sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r) = \int_{B_s} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int_{B_s} f(x)\,d\mu + \mu(B_s) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{B_s} f_k(x)\,d\mu + \mu(B_s) \leqslant C + \mu(A).$$

Итак, частичные суммы ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_{A} \varphi(x)\,d\mu$$

ограничены, следовательно, этот ряд сходится, т. е. функция $\varphi(x)$ интегрируема на A, что и требовалось. □

Примечание 1.7. В формулировке теоремы Б. Леви условие монотонного неубывания последовательности $\{f_k(x)\}$, очевидно, можно заменить условием ее монотонного невозрастания.

Примечание 1.8. Предельную функцию $f(x)$ в теореме Б. Леви на том множестве нулевой меры, на котором предел последовательности $\{f_k(x)\}$ не существует, очевидно, можно определить произвольно, например, взяв $f(x) = 0$.

Следствие 1.7. *Пусть* $f_k(x) \geqslant 0$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A} f_k(x)\,d\mu < \infty.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

сходится почти всюду на A *и*

$$\int_{A} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A} f_k(x)\,d\mu.$$

Теорема 1.30 (Фату). *Если последовательность* $\{f_k(x)\}$ *измеримых неотрицательных функций сходится почти всюду на множестве* A *к функции* $f(x)$ *и*

$$\exists C > 0\colon \forall k \in \mathbb{N} \ \int_A f_k(x)\,d\mu \leqslant C,$$

то $f(x)$ *интегрируема на* A *и*

$$\int_A f(x)\,d\mu \leqslant C.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi_j(x) = \inf_{k \geqslant j} f_k(x).$$

Каждая функция $\varphi_j(x)$ измерима, ибо

$$\{x\colon \varphi_j(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant j} \{x\colon f_k(x) < c\}.$$

При этом $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant f_j(x)$, так что все $\varphi_j(x)$ интегрируемы и

$$\int_A \varphi_j(x)\,d\mu \leqslant \int_A f_j(x)\,d\mu \leqslant C,$$

кроме того, $\varphi_1(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_j(x) \leqslant \ldots$ и почти всюду

$$\lim_{j \to \infty} \varphi_j(x) = f(x).$$

Тогда теорема Фату получается применением теоремы Б. Леви к последовательности $\{\varphi_j(x)\}$. $\square$

1.3.4. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Мы будем рассматривать такое множество A, что $\mu(A) = \infty$, но A может быть представлено в виде объединения счетного числа множеств конечной меры. Для него можно ввести следующее

Определение 1.15. *Исчерпывающей последовательностью* множества A называется такая последовательность множеств $\{A_k\}$, что

$$A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots, \qquad \mu(A_k) < \infty, \qquad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Теперь мы можем определить интеграл Лебега по множеству бесконечной меры, для которого найдется исчерпывающая последовательность, как предел интегралов по множествам из этой исчерпывающей последовательности.

Определение 1.16. Измеримая функция $f(x)$ называется *суммируемой* (*интегрируемой*) на множестве A, если $f(x)$ интегрируема на любом подмножестве $B \subset A$ конечной меры и для любой исчерпывающей последовательности $\{A_k\}$ множества A существует не зависящий от выбора этой последовательности предел

$$\int_A f(x)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,d\mu,$$

который называется *интегралом от* $f(x)$ *по множеству* A.

Примечание 1.9. Если $f(x)$ в определении 1.16 равна нулю всюду на A, кроме множества конечной меры, то для нее, очевидно, определение 1.16 равносильно введенному ранее.

Примечание 1.10. Ограниченная измеримая функция не обязательно интегрируема на множестве бесконечной меры (например, любая ненулевая постоянная на таком множестве, очевидно, не интегрируема). Можно проверить, что остальные факты об интеграле Лебега, полученные нами в предыдущих пунктах, остаются справедливыми и в рассматриваемом здесь случае.

1.3.5. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Интеграл, изучавшийся в курсе математического анализа, называется *интегралом Римана*. Иногда, чтобы подчеркнуть различие, перед знаком интеграла используется обозначение (R) и (L) для интегралов Римана и Лебега соответственно. Впрочем, как мы сейчас докажем, из существования интеграла Римана на отрезке $[a;b]$ вытекает существование равного ему интеграла Лебега по тому же отрезку (но обратное утверждение, вообще говоря, не верно). Поэтому в большинстве случаев в этих обозначениях нет необходимости.

Теорема 1.31. *Если существует интеграл Римана функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$:

$$I = (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

то существует и равный ему интеграл Лебега этой функции по тому же отрезку:

$$(L)\int_{[a;b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a;b]$ на 2^N частей точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^N}(b-a).$$

Пусть

$$M_{Nk} = \sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x), \qquad m_{Nk} = \inf_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x).$$

Тогда этому разбиению соответствуют суммы Дарбу

$$\Omega_N = \frac{b-a}{2^N}\sum_{k=1}^{2^N} M_{Nk}, \qquad \omega_N = \frac{b-a}{2^N}\sum_{k=1}^{2^N} m_{Nk}.$$

Как известно,

$$\lim_{N\to\infty}\Omega_N = \lim_{N\to\infty}\omega_N = I.$$

Рассмотрим две функции $\overline{f}_N(x)$ и $\underline{f}_N(x)$, постоянные на каждом промежутке $[x_{k-1};x_k)$ и определенные на каждом из этих промежутков соответственно равенствами $\overline{f}_N(x) = M_{Nk}$ и $\underline{f}_N(x) = m_{Nk}$. Несложно видеть, что

$$\int_{[a;b]} \overline{f}_N(x)\,d\mu = \Omega_N, \qquad \int_{[a;b]} \underline{f}_N(x)\,d\mu = \omega_N.$$

Очевидно, последовательность $\left\{\overline{f}_N(x)\right\}$ не возрастает, а последовательность $\left\{\underline{f}_N(x)\right\}$ не убывает, так что они почти всюду сходятся к функциям $\overline{f}(x) \geqslant f(x)$ и $\underline{f}(x) \leqslant f(x)$ соответственно. В силу теоремы Б. Леви имеем

$$\int_{[a;b]} \overline{f}(x)\,d\mu = \lim_{N\to\infty}\Omega_N = I = \lim_{N\to\infty}\omega_N = \int_{[a;b]} \underline{f}(x)\,\mu.$$

Следовательно,

$$\int_{[a;b]} \left|\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right|\,d\mu = \int_{[a;b]} \left(\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\right)\,d\mu = 0,$$

так что почти всюду $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ и

$$\int_{[a;b]} f(x)\,d\mu = I,$$

что и требовалось. $\square$

Пример 1.7. Можно доказать, что *ограниченная функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она непрерывна почти всюду, т. е. множество ее точек разрыва имеет нулевую меру.*

Для примера введем определения *характеристической функции* $\chi_A(x)$ множества A и *функции Дирихле* $D(x)$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функция $D(x)$ на $[0;1]$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

Пример 1.8. Все неограниченные на отрезке функции не интегрируемы по Риману, но некоторые из них интегрируемы по Лебегу. Если неограниченная на отрезке функция имеет абсолютно сходящийся несобственный интеграл Римана, то она интегрируема в смысле Лебега. Например, функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ на отрезке $[0;1]$ по Риману не интегрируема, но ее несобственный интеграл Римана по этому отрезку сходится абсолютно, так что она интегрируема по Лебегу. Если неограниченная на отрезке функция имеет сходящийся лишь условно несобственный интеграл Римана по этому отрезку, то она не интегрируема в смысле Лебега. Например, функция

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

на отрезке $[0;1]$ не интегрируема по Риману, ее несобственный интеграл сходится лишь условно, так что она не интегрируема по Лебегу.

Пример 1.9. Интеграл Римана на всей прямой или полупрямой может рассматриваться лишь в несобственном смысле. Тем не менее, если этот несобственный интеграл сходится абсолютно, то соответствующий интеграл Лебега существует. Так, например, функция $f(x) = 1/x^2$ интегрируема по Лебегу на полупрямой $[1;\infty)$, а функция $f(x) = \sin x/x$ на этой же полупрямой по Лебегу не интегрируема.

1.4 Задачи

Решения этих или подобных им задач можно найти в книгах [3, 4]. Во всех задачах μ_1 и μ_2 — соответственно мера Лебега на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.1. Доказать, что $A \subset \mathbb{R}$ — μ_1-измеримое множество и найти $\mu_1(A)$.

а) $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(k - \dfrac{1}{3^k}; k + \dfrac{1}{3^k}\right)$. б) $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left[k^k; k^k + \dfrac{1}{\ln(k+1)}\right] \setminus \mathbb{Q}$.

в) A — множество чисел отрезка $[0;1]$, десятичная запись которых невозможна без цифры 8.

Задача 1.2. Доказать, что $A \subset \mathbb{R}^2$ — μ_2-измеримое множество и найти $\mu_2(A)$.

а) $A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$. б) $\big((0;3] \times [1;2)\big) \setminus \mathbb{Q}^2$.

в) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon \cos x \in \mathbb{Q}\} \times (0;+\infty)$.

г) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$.

д) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$.

е) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0,\ 0 < y < e^{-x}|\sin x|\big\}$.

ж) $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [n;n+1),\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{(x-n)^n}{n}\right\}$.

з) Пусть $A_0 = [0;1]^2$. Разделим A_0 на девять одинаковых квадратов прямыми $x = 1/3$, $x = 2/3$, $y = 1/3$, $y = 2/3$. Из получившихся квадратов выберем примыкающие к вершинам исходного квадрата; их объединение обозначим через A_1. Каждый из квадратов, входящих в A_1, снова аналогичным образом разделим на девять одинаковых квадратов, из которых выберем примыкающие к вершинам соответствующего квадрата; их объединение обозначим через A_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$. *Кладбищем Серпинского* называется множество

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Задача 1.3. Доказать утверждения примечания 1.3.

Задача 1.4. Пусть A — неизмеримое подмножество отрезка $[0;1]$. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A, \\ -x, & x \notin A, \end{cases}$$

неизмерима на $\mathbb{R}$.

Задача 1.5. Доказать, что из измеримости при любом $c \in \mathbb{R}$ множеств $\big\{x \colon f(x) = c\big\}$ не следует измеримость $f(x)$.

Задача 1.6. Пусть функция $y = f(x)$ измерима на множестве A, а функция $z = \varphi(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что функция $z = \varphi\big(f(x)\big)$ измерима на A.

Задача 1.7. Доказать что функция $f(x)$ измерима на $\mathbb{R}$.

а) $f(x) = \sin\lfloor x\rfloor$. б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(ke^x)}{k^{4/3}}$. в) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^4+k^4}$.

г) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\lfloor x\rfloor}{1+k^5\lfloor x\rfloor^2}$. д) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+\cos x}$.

Задача 1.8. Доказать что функция $f(x)$ измерима на $\mathbb{R}^2$.

а) $f(x) = \operatorname{sgn}\sin\pi(x^2+y^2)$. б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k\left(1+k\lfloor x^2+y^2\rfloor\right)}$.

в) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+e^{k\sqrt{x^2+y^2}}}$. г) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\lfloor xy\rfloor}{1+k^3\lfloor x^2+y^2\rfloor}$.

Задача 1.9. Доказать, что последовательность $\big\{f_n(x)\big\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

а) $f_n(x) = x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x$, $f(x) = x$.

б) $f_n(x) = n^2\chi_{[0;1/n]}(x)$, $f(x) \equiv 0$.

Задача 1.10. Доказать, что последовательность $\big\{f_n(x,y)\big\}$ сходится к $f(x,y)$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.

а) $f_n(x,y) = \sin^n x + \cos^n y$, $f(x,y) \equiv 0$.

б) $f_n(x,y) = e^{xy} + e^{-n|x^2-y|}$, $f(x,y) = e^{xy}$.

в) $f_n(x,y) = \cos^n \pi xy$, $f(x,y) \equiv 0$.

Задача 1.11. Сходится ли последовательность $\big\{f_n\big\}$ по мере на множестве A к функции $f(x) \equiv 0$?

а) $f_n(x) = x^n$, $A = [0;1]$.

б) $f_k(x) = \cos^n x$, $A = \mathbb{R}$.

в) $f_n(x,y) = e^{-\sqrt{n}(x^2+y^2)}$, $A = \mathbb{R}^2$.

Задача 1.12. Построить как при доказательстве теоремы 1.22 последовательность простых измеримых функций, равномерно сходящуюся к функции f на множестве A.

а) $f(x) = x^3$, $A = \mathbb{R}$.

б) $f(x) = \chi_{(0;+\infty)}(x)\operatorname{arctg} x$, $A = \mathbb{R}$.

в) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = \mathbb{R}^2$.

Задача 1.13. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int_{[-3;3]} \operatorname{sgn}\cos\pi x\,d\mu_1$. б) $\displaystyle\int_{(0;1]} \operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{x}\,d\mu_1$.

в) $\displaystyle\int_{[0;1]} x\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\mu_1$. г) $\displaystyle\int_{[0;1]} \left(x^2\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)+x^3\chi_{\mathbb{Q}}(x)\right)\,d\mu_1$.

д) $\displaystyle\iint_{[0;2]^2} \lfloor x+y\rfloor\,d\mu_2$. е) $\displaystyle\iint_{x^2\leqslant y\leqslant 4} \sqrt{\lfloor y-x^2\rfloor}\,d\mu_2$.

Задача 1.14. При каких α функция

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^\alpha}\chi_{\left(\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}\right]}(x)$$

интегрируема на $(0;1]$?

Задача 1.15. При каких $\alpha>0$ и β функция

$$f(x)=\frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$$

интегрируема на $[0;1]$?

Задача 1.16. Пусть $f(x)$ — такая определенная на $[0;\infty)$ измеримая функция, что найдется число $C>0$, для которого при любом $\alpha>0$

$$\int_{[0;\infty)}\frac{\sin^2\alpha x}{\alpha^2 x}f(x)\,d\mu_1\leqslant C.$$

Доказать, что функция $y=xf(x)$ интегрируема на $[0;\infty)$.

Задача 1.17. Найти пределы.

а) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{k}{1+x^4}\sin\frac{|x|}{k}\,d\mu_1$. б) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\cos(xyt)\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,d\mu_2$.

2 Метрические пространства

2.1 Определение метрического пространства

Определение 2.1. *Метрическим пространством* (X, ρ) называется пара, состоящая из множества X и отображения $\rho \colon X^2 \to \mathbb{R}$, для которого при любых $x, y, z \in X$ выполнены свойства (*аксиомы*):

M1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*аксиома тождества*);

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

M3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*неравенство треугольника*).

Элементы множества X называются *точками* пространства, а отображение ρ — *метрикой* или *расстоянием.*

Если недоразумения исключены, часто для метрического пространства пишут просто X, подразумевая (X, ρ). Всюду в этой главе, если специально не оговаривается иное, (X, ρ) или просто X — метрическое пространство.

Примечание 2.1. Из аксиом M1–M3 следует, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $\rho(x, y) \geqslant 0$, ибо

$$0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y).$$

Пример 2.1. *Пространство изолированных точек*: пусть X — произвольное множество, а метрика

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Справедливость аксиом M1–M3 здесь очевидна.

Пример 2.2. Пространство $\mathbb{P}$ чисел из $\mathbb{P}$ (напомним, мы используем это обозначение для одного из двух множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, т. е. когда нам не важно, используются ли только вещественные числа или же произвольные комплексные числа) с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Аксиомы M1–M3 здесь сразу следуют из свойств модуля.

Пример 2.3. Пространство $\mathbb{P}^n_p$, $1 \leqslant p < \infty$: пусть $X = \mathbb{P}^n$, а метрику определим для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ так:

$$\rho(x, y) = \rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Справедливость аксиом M1 и M2 очевидна. Свойство M3 эквивалентно *неравенству Минковского*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.1)$$

При $p = 1$ неравенство (2.1) сразу следует из свойств модуля. Считаем теперь $1 < p < \infty$.

Докажем сначала *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (2.2)$$

Заметим, что если неравенство (2.2) выполнено для некоторых точек $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то оно справедливо также и для точек $(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$ и $(\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_n)$ при произвольных вещественных λ и μ. Значит, достаточно доказать (2.2) для таких точек, что

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = 1. \qquad (2.3)$$

Итак, требуется показать, что при условии (2.3) справедливо

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leqslant 1. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим кривую Г, определяемую при $x, y > 0$ уравнением $y = x^{p-1}$, или, что то же самое, уравнением $x = y^{q-1}$. Обозначим через S_α площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = \alpha$, $y = 0$ и кривой Г; а через S_β — площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = \beta$, $x = 0$ и кривой Г. Имеем

$$S_\alpha = \int_0^\alpha x^{p-1}\,dx = \frac{\alpha^p}{p}, \qquad S_\beta = \int_0^\beta y^{q-1}\,dy = \frac{\beta^q}{q}.$$

Но, очевидно, $S_\alpha + S_\beta \geqslant \alpha\beta$, так что мы получаем *неравенство Юнга*:

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \qquad (2.5)$$

Подставим в неравенство Юнга $\alpha = |a_k|$, $\beta = |b_k|$ и просуммируем по всем k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Итак, при условии (2.3) выполнено (2.4), что и доказывает (2.2).

Перейдем к доказательству неравенства (2.1). Имеем

$$(\alpha+\beta)^p = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^{p-1} = \alpha(\alpha+\beta)^{p-1} + \beta(\alpha+\beta)^{p-1}.$$

Подставим в последнее равенство $\alpha = |a_k|$, $\beta = |b_k|$ и просуммируем по всем k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p = \sum_{k=1}^{n} |a_k|\big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k|\big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1}.$$

С помощью (2.2) и равенства $(p-1)q = p$ получаем отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

откуда, поделив на первый множитель из правой части, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

т. е. неравенство (2.1).

Итак, аксиома M3 справедлива для пространства $\mathbb{P}_p^n$.

Наибольший интерес из пространств, определенных в примере 2.3, представляют $\mathbb{P}_1^n$ и $\mathbb{P}_2^n$, а также предельный случай таких пространств, который мы сейчас рассмотрим.

Пример 2.4. Пространство $\mathbb{P}_\infty^n$: пусть $X = \mathbb{P}^n$, а метрику определим для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ так:

$$\rho(x,y) = \rho_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - y_k|.$$

Справедливость аксиом M1–M3 здесь очевидна.

Заметим еще, что

$$\lim_{p\to\infty} \rho_p(x,y) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - y_k| = \rho_\infty(x,y),$$

так что пространство из этого примера действительно является предельным случаем пространств из предыдущего примера при $p \to \infty$.

Приведем теперь примеры бесконечномерных пространств. Начнем с пространств последовательностей, в которых точки имеют бесконечно много пронумерованных координат.

Пример 2.5. *Пространство l_p абсолютно суммируемых в степени p, $1 \leqslant p < \infty$, последовательностей* чисел из $\mathbb{P}$, т. е. таких последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

с метрикой

$$\rho(x, y) = \rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Читатель легко докажет, что для любых $x, y \in l_p$ этот ряд сходится. Справедливость M1 и M2 очевидна. Переходя в (2.1) к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

из которого следует M3. Аналогичным образом можно из (2.2) получить неравенство Гёльдера для последовательностей:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Снова наибольший интерес из пространств последовательностей представляют l_1 и l_2, а также предельные случаи.

Пример 2.6. *Пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей* чисел из $\mathbb{P}$, *пространство c всех сходящихся последовательностей* чисел из $\mathbb{P}$ и *пространство m ограниченных последовательностей* чисел из $\mathbb{P}$ с метрикой, определяемой для $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots)$ формулой

$$\rho(x, y) = \rho_\infty(x, y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

Справедливость аксиом M1–M3 здесь очевидна.

Отметим, что для метрики пространства c_0 вместо супремума можно записать максимум, но для метрик более общих пространств c и m так сделать не получится: максимум может и не достигаться.

Рассмотрим теперь другой тип бесконечномерных пространств — пространства функций. В них можно считать переменную «индексом», а соответствующее значение функции — «координатой» с этим «индексом».

Пример 2.7. Пространство $C_p[a;b]$, $1 \leqslant p < \infty$, непрерывных на отрезке $[a;b]$ $\mathbb{P}$-значных функций с метрикой

$$\rho(x,y) = \rho_p(x,y) = \left(\int_a^b \bigl|x(t) - y(t)\bigr|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аксиомы M1 и M2 здесь очевидны. Из (2.5) подстановкой $\alpha = \bigl|x(t)\bigr|$, $\beta = \bigl|y(t)\bigr|$ и интегрированием по $[a;b]$ получается *интегральное неравенство Гёльдера*:

$$\int_a^b \bigl|x(t)y(t)\bigr| \, dt \leqslant \left(\int_a^b \bigl|x(t)\bigr|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b \bigl|y(t)\bigr|^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

справедливое при тех же условиях на p и q, что и в (2.2). С помощью интегрального неравенства Гёльдера так же, как при выводе неравенства (2.1), получается *интегральное неравенство Минковского*:

$$\left(\int_a^b \bigl|x(t) + y(t)\bigr|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \bigl|x(t)\bigr|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \bigl|y(t)\bigr|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

из которого следует M3.

Пример 2.8. *Пространство $C[a;b]$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ $\mathbb{P}$-значных функций* с метрикой

$$\rho(x,y) = \rho_\infty(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \bigl|x(t) - y(t)\bigr|.$$

Справедливость аксиом M1–M3 здесь очевидна.

Пример 2.9. *Пространство $C^n[a;b]$ n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ $\mathbb{P}$-значных функций* с метрикой

$$\rho(x,y) = \rho_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \bigl|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)\bigr|.$$

Справедливость аксиом M1–M3 здесь очевидна.

Позднее мы увидим, что пространства $C_p[a;b]$, $1 \leqslant p < \infty$, не обладают важным свойством полноты, поэтому рассмотрим более сложные полные пространства, хоть отчасти аналогичные им, но представляющие и самостоятельный интерес.

Пример 2.10. *Пространство* $L_p(A)$, $1 \leqslant p < \infty$, *суммируемых на множестве* A *в степени* p $\mathbb{P}$*-значных функций.* Множество X определяется как фактор-множество отношения эквивалентности (равенства почти всюду) на измеримом множестве A таких функций $x(t)$, что существует конечный интеграл Лебега

$$\int_A \bigl|x(t)\bigr|^p \, d\mu.$$

Метрика для $x, y \in X$ определяется так: пусть $x(t) \in x$, $y(t) \in y$, тогда

$$\rho(x, y) = \rho_p(x, y) = \left(\int_A \bigl|x(t) - y(t)\bigr|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Значение $\rho_p(x, y)$ от выбора $x(t)$ и $y(t)$, очевидно, не зависит. Здесь снова аксиомы M1 и M2 очевидны, а неравенство треугольника доказывается так же, как и в примере 2.7.

Отметим еще простейшую *теорему вложения*: *если* $\mu(A) < \infty$ *и* $r \leqslant p$, *то* $L_p(A) \subset L_r(A)$. Действительно, из неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}\int_A \bigl|x(t)\bigr|^r \, d\mu = \int_A \bigl|x(t)\bigr|^r \cdot 1 \, d\mu \leqslant \\ \leqslant \left(\int_A \bigl|x(t)\bigr|^{r \cdot \frac{p}{r}} \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\int_A 1 \, d\mu \right)^{\frac{p-r}{p}} = \\ = \bigl(\mu(A)\bigr)^{\frac{p-r}{p}} \left(\int_A \bigl|x(t)\bigr|^p \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}}.\end{aligned}$$

Пример 2.11. *Пространство* $L_\infty(A)$ *измеримых ограниченных почти всюду на множестве* A $\mathbb{P}$*-значных функций.* Множество X определяется как фактор-множество отношения эквивалентности (равенства почти всюду) на измеримом множестве A измеримых ограниченных почти всюду на A функций $x(t)$. Метрика для $x, y \in X$ определяется так: пусть $x(t) \in x$, $y(t) \in y$, тогда

$$\begin{aligned}\rho(x, y) = \rho_\infty(x, y) = \operatorname*{ess\,sup}_A \bigl|x(t) - y(t)\bigr| = \\ = \inf \Bigl\{ a \colon \mu \bigl\{ t \in A \colon \bigl|x(t) - y(t)\bigr| > a \bigr\} = 0 \Bigr\}.\end{aligned}$$

Грань ess sup называется *существенным супремумом.* Справедливость M1–M3 здесь очевидна.

Определение 2.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а множество $M \subset X$. Тогда $\bigl(M, \rho|_M\bigr)$, где $\rho|_M$ — сужение ρ на M, называется *подпространством* пространства X.

2.2 Множества в метрическом пространстве

Определение 2.3. *Открытым* и *замкнутым шаром* с *центром* в точке $x \in X$ *радиуса* r называются соответственно множества

$$B(x,r) = \{y \in X\colon \rho(x,y) < r\}\,, \qquad B[x,r] = \{y \in X\colon \rho(x,y) \leqslant r\}\,.$$

Открытый шар $O_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в точке $x \in X$ называется *ε-окрестностью* (или просто *окрестностью*) точки x.

Определение 2.4. Пусть множество $M \subset X$. *Предельной точкой* множества M называется точка, в любой окрестности которой лежит бесконечно много точек из M. *Внутренней точкой* множества M называется такая точка, для которой найдется окрестность, целиком лежащая в M. *Граничной точкой* множества M называется точка, в любой окрестности которой есть как точки из M, так и точки, не принадлежащие M. *Изолированной точкой* множества M называется точка $x \in M$, у которой найдется окрестность, не содержащая точек из M, отличных от x. *Точкой прикосновения* множества M называется точка, в любой окрестности которой есть хотя бы одна точка из M. *Замыканием* множества M называется множество $\overline{M}$ всех точек прикосновения множества M.

Теорема 2.1. *Справедливы утверждения*:

1. $M \subset \overline{M}$; 3. *если* $M_1 \subset M_2$, *то* $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$;
2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; 4. $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Доказательство. 1. Любая точка множества M является его точкой прикосновения, так что принадлежит $\overline{M}$.

2. Из утверждения 1 следует, что $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Докажем обратное вложение. Пусть $x \in \overline{\overline{M}}$. Тогда x — точка прикосновения множества $\overline{M}$, так что в любой ε-окрестности точки x имеется точка $y \in \overline{M}$. Положим $\varepsilon_1 < \varepsilon - \rho(x,y)$. Тогда для любой точки $z \in O_{\varepsilon_1}(y)$ справедливо неравенство $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + \varepsilon - \rho(x,y) = \varepsilon$, так что $O_{\varepsilon_1}(y) \subset O_\varepsilon(x)$. т. к. $y \in \overline{M}$, точка y — точка прикосновения множества M, следовательно, в $O_{\varepsilon_1}(y)$ имеется точка $t \in M$. Но тогда $t \in O_\varepsilon(x)$, а число ε произвольно. Итак, в любой окрестности точки x найдется точка $t \in M$, так что x — точка прикосновения множества M, т. е. $x \in \overline{M}$.

3. Если $x \in \overline{M_1}$, то x — точка прикосновения множества M_1, значит, в любой окрестности точки x найдется точка $y \in M_1$. Но $M_1 \subset M_2$, так что $y \in M_2$, т. е. в любой окрестности точки x есть точка $y \in M_2$, а значит, x — точка прикосновения M_2. Итак, $x \in \overline{M_2}$.

4. Если точка $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$, то x — точка прикосновения множества $M_1 \cup M_2$, а значит, в любой окрестности точки x найдется такая точка y, что $y \in M_1$ или $y \in M_2$, т. е. x — точка прикосновения множества M_1 или множества M_2. Значит, $x \in \overline{M_1}$ или $x \in \overline{M_2}$, т. е. $x \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Обратное включение следует из утверждения 3, поскольку $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$. □

Определение 2.5. Пусть множество $M \subset X$. Если M содержит все свои предельные точки, то M называется *замкнутым.* Если все точки множества M являются для него внутренними, то M называется *открытым.* Если при любом разбиении M на два непустых подмножества хотя бы одно из этих подмножеств содержит хотя бы одну предельную точку второго, то M называется *связным.* Открытое и связное множество M называется *областью.* Множество M называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором шаре конечного радиуса.

Примечание 2.2. Легко видеть, что любая точка прикосновения множества является либо его предельной точкой, либо его изолированной точкой. Значит, замыкание $\overline{M}$ множества $M \subset X$ состоит из изолированных точек множества M (все они принадлежат M по определению) и предельных точек множества M (как принадлежащих множеству M, так и не принадлежащих ему). Таким образом, замыкание множества M получается присоединением к M всех его предельных точек. Поэтому множество M замкнуто в том и только том случае, когда $M = \overline{M}$. Иными словами, множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои точки прикосновения.

Теорема 2.2. *Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство. 1. Пусть при каждом α множество M_α — замкнутое, а множество

$$M = \bigcap_\alpha M_\alpha.$$

Если x — предельная точка множества M, то в любой окрестности точки x найдется бесконечно много точек из M, причем при любом α каждая из этих точек будет принадлежать множеству M_α. Значит, при любом α точка x — предельная точка множества M_α. Все M_α замкнуты, так что точка x принадлежит всем M_α. Тогда x принадлежит и их пересечению M, т. е. множество M содержит любую свою предельную точку.

2. Пусть при всех $k = 1, \dots, n$ множества $M_k \subset X$ — замкнутые, а множество

$$M = \bigcup_{k=1}^{n} M_k.$$

Рассмотрим точку $x \notin M$ и покажем, что она не может быть предельной точкой множества M. Действительно, если $x \notin M$, то для всех номеров $k = 1, \dots, n$ имеем $x \notin M_k$, так что точка x не является предельной ни для одного из M_k, ибо они замкнуты. Но тогда для любого $k = 1, \dots, n$ можно найти ε_k-окрестность точки x, которая содержит лишь конечное число точек из M_k. Выбрав из всех этих окрестностей наименьшую, мы получим окрестность точки x, содержащую лишь конечное число точек из M. $\square$

Выясним теперь связь между открытыми и замкнутыми множествами.

Теорема 2.3. *Множество M открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus M$ замкнуто.*

Доказательство. 1. Если множество M открыто, то точка $x \in M$ (т. е. $x \notin X \setminus M$) — внутренняя, иными словами, существует ее окрестность, целиком лежащая в множестве M. Тогда эта окрестность не имеет точек из множества $X \setminus M$, так что точка $x \notin X \setminus M$ не может быть предельной для множества $X \setminus M$.

2. Если множество $X \setminus M$ замкнуто, то точка $x \notin X \setminus M$ (т. е. $x \in M$) имеет окрестность, не содержащую ни одной точки из $X \setminus M$, иными словами, целиком лежащую в множестве M. $\square$

Из теорем 2.2 и 2.3 с помощью двойственности получается

Теорема 2.4. *Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

Пример 2.12. Множества X и $\varnothing$ и замкнуты, и открыты. Действительно, точек, не принадлежащих X, в пространстве нет, так что X содержит все свои предельные точки. С другой стороны, окрестность любой точки из X лежит в X, так что все точки X — внутренние. Пустое множество является дополнением к X, так что в силу теоремы 2.3 из замкнутости X следует открытость $\varnothing$, а из открытости X вытекает замкнутость $\varnothing$.

Пример 2.13. В пространстве X изолированных точек любое множество и замкнуто, открыто. В самом деле, произвольное множество $M \subset X$ замкнуто, т. к. ни одна точка x, не принадлежащая множеству, не может быть его предельной точкой, ибо в ее $(1/2)$-окрестности точек множества M нет (ведь в этой окрестности лежит лишь сама точка x). С другой стороны, по теореме 2.3 множество M открыто, ибо его дополнение $X \setminus M$, являясь множеством в X, замкнуто, как мы только что показали.

Пример 2.14. В любом метрическом пространстве замкнутый шар — замкнутое множество, а открытый шар — открытое.

Пусть $y \notin B[x, r]$, тогда $\rho(x, y) > r$. Взяв $\varepsilon = \big(\rho(x, y) - r\big)/2$, рассмотрим произвольную точку $z \in O_\varepsilon(y)$. Имеем

$$\rho(x, z) \geqslant \rho(x, y) - \rho(y, z) > \rho(x, y) - \frac{\rho(x, y) - r}{2} = \frac{\rho(x, y) + r}{2} > r,$$

т. е. $z \notin B[x, r]$. Итак, существует окрестность точки y, в которой точек из $B[x, r]$ нет, так что y не может быть предельной для $B[x, r]$.

Пусть $y \in B(x, r)$, тогда $\rho(x, y) < r$. Взяв $\varepsilon = \big(r - \rho(x, y)\big)/2$, рассмотрим произвольную точку $z \in O_\varepsilon(y)$. Имеем

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < r - \frac{r - \rho(x, y)}{2} = \frac{r + \rho(x, y)}{2} < r,$$

т. е. $z \in B(x, r)$. Итак, существует окрестность точки y, любая точка которой лежит в $B(x, r)$.

Например, в пространстве $C[a; b]$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций замкнутый шар $B[0, r] = \big\{x(t) \in C[a; b] \colon \big|x(t)\big| \leqslant r\big\}$ замкнут, а открытый шар $B(0, r) = \big\{x(t) \in C[a; b] \colon \big|x(t)\big| < r\big\}$ открыт.

Пример 2.15. В пространстве $\mathbb{R}$ любой отрезок $[a; b]$ — замкнутое множество, а любой интервал $(a; b)$ — открытое множество. Это следует из примера 2.14 и того факта, что

$$[a; b] = B\left[\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2}\right], \qquad (a; b) = B\left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2}\right).$$

Вообще, как уже говорилось (см. пример 1.1), *любое открытое множество на прямой представляет собой объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов вида* $(a; b)$, $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; a)$ *и* $(a; \infty)$. Отсюда, в частности, следует, что *любое замкнутое множество на прямой получается выбрасыванием не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов.* Так, например, канторово множество замкнуто.

2.3 Сходимость. Непрерывные отображения

Определение 2.6. Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек из X. Точка x называется *пределом последовательности* $\{x_k\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все точки последовательности будут содержаться в ε-окрестности точки x, т. е. будет выполнено неравенство $\rho(x_k, x) < \varepsilon$. При этом последовательность $\{x_k\}$ называется *сходящейся* к точке x. Если последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x, применяются следующие обозначения:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \qquad \text{или} \qquad x_k \to x \text{ при } k \to \infty.$$

Очевидно, последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0.$$

Отсюда следует, что последовательность не может иметь двух различных пределов: если $x_k \to x$ и $x_k \to y$ при $k \to \infty$, то

$$\rho(x, y) = \lim_{k\to\infty} \rho(x, y) \leqslant \lim_{k\to\infty} \big(\rho(x, x_k) + \rho(x_k, y)\big) = 0,$$

так что $x = y$. Также отсюда следует, что если последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x, то и любая ее подпоследовательность сходится к x, ибо $\left\{\rho\left(x_{k_j}, x\right)\right\}$ в этом случае будет сходиться к нулю как подпоследовательность сходящейся к нулю числовой последовательности $\big\{\rho(x_k, x)\big\}$.

Теорема 2.5. *Точка x является точкой прикосновения множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_k\}$ точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. 1. Если x — точка прикосновения множества M, то в любой ее $(1/k)$-окрестности найдется точка $x_k \in M$. Последовательность $\{x_k\}$, очевидно, сходится к x.

2. Если существует последовательность $\{x_k\}$ точек из M, сходящаяся к x, то в любой окрестности x есть точки $x_k \in M$, т. е. x — точка прикосновения множества M. $\square$

Если x — предельная точка множества M, то точки множества M из ее $(1/k)$-окрестностей можно выбрать попарно различными. Итак, справедливо

Следствие 2.1. *Точка x является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_k\}$ попарно различных точек из M, сходящаяся к x.*

Определение 2.7. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — два метрических пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждой точки x из δ-окрестности x_0 точка $f(x)$ будет лежать в ε-окрестности точки $f(x_0)$. Иными словами, отображение f непрерывно в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число δ, что для всех x с $\rho_X(x_0, x) < \delta$ выполнено неравенство $\rho_Y\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon$. Отображение f, непрерывное во всех точках пространства X, называется *непрерывным на пространстве* X.

Приведем теперь аналог теоремы об эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 2.6. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_k\}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность точек $\big\{f(x_k)\big\}$ сходится к $f(x_0)$ в Y.*

Доказательство. 1. Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in O_\delta(x_0)$ точка $f(x) \in O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Пусть $\{x_k\}$ сходится к x_0. Значит, начиная с некоторого номера N, все точки этой последовательности попадут в $O_\delta(x_0)$. Но тогда точки $f(x_k)$, начиная с этого же номера, будут лежать в $O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$, т. е. $f(x_k) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$.

2. Пусть для любой последовательности $\{x_k\}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность точек $\big\{f(x_k)\big\}$ сходится к $f(x_0)$ в Y. Предположим, что отображение f не является непрерывным в точке x_0. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$, при котором для любого $\delta > 0$ найдется такая точка $x \in O_\delta(x_0)$, что $f(x) \notin O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Значит, найдется последовательность $\{x_k\}$ таких точек из $(1/k)$-окрестности точки x_0, что $f(x_k) \notin O_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$. Но, очевидно, тогда $x_k \to x_0$, а $f(x_0)$ не является пределом $f(x_k)$. Получили противоречие. Значит, предположение не было верным, т. е. отображение f непрерывно в точке x_0 $\square$

Получим теперь два критерия непрерывности отображения на пространстве.

Теорема 2.7. *Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на X тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(G)$ любого открытого множества $G \subset Y$ открыт в X.*

Доказательство. 1. Пусть отображение f непрерывно, точка $x_0 \in f^{-1}(G)$, а точка $y_0 = f(x_0)$. Тогда $y_0 \in G$, следовательно, y_0 — внутренняя точка множества G. Выберем ε так, чтобы $O_\varepsilon(y_0) \subset G$. Из непрерывности f следует, что найдется такое число δ, что для любой точки $x \in O_\delta(x_0)$ точка $f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$. Но это означает, что $f(x) \in G$, т. е. $x \in f^{-1}(G)$. Итак, существует окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, целиком лежащая в $f^{-1}(G)$, т. е. прообраз множества G открыт.

2. Пусть прообраз любого открытого множества в Y открыт в X. Рассмотрим окрестность $O_\varepsilon(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$. Это открытое множество, следовательно, $f^{-1}\big(O_\varepsilon(y_0)\big)$ открыто. Тогда точка x_0 лежит в $f^{-1}\big(O_\varepsilon(y_0)\big)$ вместе с некоторой своей окрестностью $O_\delta(x_0)$. Но это означает, что для любого $x \in O_\delta(x_0)$ точка $f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$. $\square$

Из этой теоремы с учетом теоремы 2.3 получается

Следствие 2.2. *Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на X тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(F)$ любого замкнутого множества $F \subset Y$ замкнут в X.*

Определение 2.8. *Гомеоморфизмом* метрических пространств X и Y называется отображение $f\colon X \to Y$, взаимно однозначное и взаимно непрерывное (т. е. и само f, и обратное к нему отображение f^{-1} непрерывны). Пространства X и Y, для которых существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными.*

Пример 2.16. Пространство $\mathbb{R}$ гомеоморфно пространству точек интервала $(-\pi;\pi)$ с такой же метрикой. Гомеоморфизмом, очевидно, является такое отображение $f\colon \mathbb{R} \to (-\pi;\pi)$, что $f(x) = 2\operatorname{arctg} x$.

Гомеоморфные пространства могут иметь существенно различные свойства, поэтому введем следующее

Определение 2.9. *Изометрией* пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) называется такой гомеоморфизм $f\colon X \to Y$, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\rho_X(x_1,x_2) = \rho_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big)$. Пространства X и Y, для которых существует изометрия, называются *изометричными.*

С точки зрения теории метрических пространств два изометричных пространства можно считать различными реализациями одного и того же пространства.

Определение 2.10. Если отображение $f\colon X \to X$, а точка $x_0 \in X$ такова, что $x = f(x)$, то x — *неподвижная точка* отображения f.

2.4 Сепарабельность и полнота

Определение 2.11. Пусть множества $A, B \subset X$. Множество A называется *плотным* в множестве B, если $B \subset \overline{A}$. Множество A называется *всюду плотным* в пространстве X, если $\overline{A} = X$. Множество A называется *нигде не плотным* в пространстве X, если оно не плотно ни в одном шаре.

Определение 2.12. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть счетное всюду плотное множество.

Теорема 2.8. *Если (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, а $M \subset X$, то $(M, \rho|_M)$ сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное множество в X. Обозначим

$$a_k = \inf_{x \in M} \rho(\xi_k, x).$$

Тогда при любых $k, n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $\eta_{kn} \in M$, что

$$\rho(\xi_k, \eta_{kn}) < a_k + \frac{1}{n}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем n так, чтобы $n > 3/\varepsilon$. Поскольку $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотно в X, для любого $x \in M$ найдется такой номер k, что $\rho(x, \xi_k) < \varepsilon/3$. Тогда при этом k выполнено $a_k < \varepsilon/3$. Следовательно,

$$\rho(x, \eta_{kn}) \leqslant \rho(x, \xi_k) + \rho(\xi_k, \eta_{kn}) < \frac{\varepsilon}{3} + a_k + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т. е. $\{\eta_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное множество в M. $\square$

Пример 2.17. Пространство изолированных точек сепарабельно в том и только том случае, когда оно само состоит из счетного числа точек, поскольку, очевидно, замыкание любого множества в этом пространстве совпадает с самим этим множеством.

Пример 2.18. Пространство $\mathbb{R}$ сепарабельно, поскольку в нем множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ — счетное всюду плотное множество. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что для произвольного вещественного числа x последовательность его приближений по недостатку состоит из рациональных чисел и сходится к этому числу x. Пространство $\mathbb{C}$ сепарабельно, поскольку в нем множество $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ является счетным всюду плотным, что доказывается аналогично.

В примерах 2.19–2.23 рассматриваются вещественные пространства, но результаты этих примеров легко обобщаются и на комплексный случай.

Пример 2.19. Пространства $\mathbb{R}_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, сепарабельны, поскольку в них множество точек $\mathbb{Q}^n$ с рациональными координатами — счетное всюду плотное множество.

Для доказательства этого факта рассмотрим произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_p^n$ и составим для нее последовательность $\xi^{(k)} = \big(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\big) \in \mathbb{Q}^n$, где $\xi_l^{(k)}$ — k-е приближение числа x_l по недостатку. Заметим, что

$$\big|x_l - \xi_l^{(k)}\big| \leqslant \frac{1}{10^{k-1}}.$$

Тогда при $1 \leqslant p < \infty$ имеем

$$\Big(\rho_p\big(x, \xi^{(k)}\big)\Big)^p = \sum_{l=1}^{n} \big|x_l - \xi_l^{(k)}\big|^p \leqslant \frac{n}{10^{p(k-1)}} \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty,$$

а при $p = \infty$ получаем

$$\rho_\infty\big(x, \xi^{(k)}\big) = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} \big|x_l - \xi_l^{(k)}\big| \leqslant \frac{1}{10^{k-1}} \qquad 0\text{при } k \to \infty,$$

т. е. последовательность $\big\{\xi^{(k)}\big\}$ точек из $\mathbb{Q}^n$ сходится к x. Итак, любая точка из $\mathbb{R}_p^n$ является предельной для $\mathbb{Q}^n$, так что $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}_p^n$.

Пример 2.20. Пространства l_p, $1 \leqslant p < \infty$, сепарабельны. Счетным всюду плотным множеством в этих пространствах (в вещественном случае) являются *финитные рациональные последовательности*, т. е. рациональные последовательности, у которых все члены, начиная с некоторого, равны 0.

Для доказательства этого факта рассмотрим произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ и составим для нее последовательность $\xi^{(k)} = \big(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_k^{(k)}, 0, 0, \ldots\big)$, где $\xi_l^{(k)}$ — k-е приближение числа x_l по недостатку. Тогда

$$\Big(\rho_p\big(x, \xi^{(k)}\big)\Big)^p = \sum_{l=1}^{k} \big|x_l - \xi_l^{(k)}\big|^p + \sum_{l=k+1}^{\infty} \big|x_l\big|^p \leqslant \frac{k}{10^{p(k-1)}} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \big|x_l\big|^p$$

стремится к 0 при $k \to \infty$, ибо первое слагаемое здесь, очевидно, стремится к 0, а второе есть остаток сходящегося ряда (вспомните условие принадлежности x пространству l_p) и, следовательно, тоже стремится к нулю.

Пример 2.21. Пространство m несепарабельно. Действительно, рассмотрим множество всевозможных последовательностей, членами которых являются числа 0 и 1. Это множество несчетно, ибо последовательность цифр любого числа из отрезка $[0; 1]$ является последовательностью из этого множества. Расстояние между двумя такими последовательностями равно 1. Окружим каждую такую последовательность шаром радиуса $1/2$. Эти шары не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в m, то оно должно иметь хотя бы по одной общей точке с каждым из этих шаров. Но оно не может быть счетным.

Пример 2.22. Пространство $C[a; b]$ сепарабельно: в вещественном случае по аппроксимационной теореме Вейерштрасса множество многочленов с рациональными коэффициентами в нем является счетным всюду плотным.

Пример 2.23. Пространства $L_p[a; b]$, $1 \leqslant p < \infty$, сепарабельны: в вещественном случае счетным всюду плотным является множество многочленов с рациональными коэффициентами. Доказательство см. в [2].

Определение 2.13. Последовательность точек $x_n \in X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n, m \geqslant N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Теорема 2.9. *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Действительно, если $\{x_n\}$ сходится к x, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$. Тогда при $m \geqslant N$ тоже $\rho(x_m, x) < \varepsilon/2$. Итак,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Примечание 2.3. Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x, то и сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к тому же пределу x. Это сразу следует из неравенства

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x\right).$$

Определение 2.14. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примечание 2.4. Если (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $M \subset X$ — замкнутое множество, то подпространство $(M, \rho|_M)$ — полное. В самом деле, если $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность точек из M, то она имеет предел x в X. Но в таком случае x — предельная точка множества M, а множество M замкнуто. Следовательно, точка $x \in M$, т. е. фундаментальная последовательность $\{x_k\}$ имеет в M предел.

Пример 2.24. Пространство изолированных точек, где точки принадлежат любому непустому множеству, является полным, ибо любая фундаментальная последовательность в нем *стационарна*, т. е. в ней, начиная с некоторого номера, повторяется одна и та же точка. Но, очевидно, любая стационарная последовательность имеет предел.

Пример 2.25. Полнота пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ доказывается соответственно в курсе математического анализа и теории функций комплексного переменного.

Пример 2.26. Пространства $\mathbb{P}_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, полны. Рассмотрим сначала случай $1 \leqslant p < \infty$. Пусть последовательность $x^{(k)} = \big(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\big) \in \mathbb{P}_p^n$ фундаментальна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $k, m \geqslant N$ выполнено

$$\Big(\rho_p\big(x^{(k)}, x^{(m)}\big)\Big)^p = \sum_{l=1}^{n} \big|x_l^{(k)} - x_l^{(m)}\big|^p < \varepsilon^p.$$

Отсюда следует, что при каждом номере $l = 1, 2, \dots, n$ справедливо неравенство

$$\big|x_l^{(k)} - x_l^{(m)}\big| < \varepsilon,$$

т. е. при каждом $l = 1, 2, \dots, n$ последовательность чисел $\big\{x_l^{(k)}\big\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поскольку пространство $\mathbb{P}$ полное, каждая такая последовательность имеет предел, который мы обозначим через x_l. Но тогда для точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеем

$$\Big(\rho_p\big(x^{(k)}, x\big)\Big)^p = \sum_{l=1}^{n} \big|x_l^{(k)} - x_l\big|^p \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty,$$

т. е. $x^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$.

Для пространства $\mathbb{P}_\infty^n$ доказательство аналогично.

Пример 2.27. Пространства l_p, $1 \leqslant p < \infty$, полны. Пусть последовательность $x^{(k)} = \bigl(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots\bigr) \in l_p$ фундаментальна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $k, m \geqslant N$ выполнено

$$\Bigl(\rho_p\bigl(x^{(k)}, x^{(m)}\bigr)\Bigr)^p = \sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l^{(k)} - x_l^{(m)}\bigr|^p < \varepsilon^p. \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что при каждом номере $l = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\bigl|x_l^{(k)} - x_l^{(m)}\bigr| < \varepsilon,$$

т. е. при каждом $l = 1, 2, \ldots$ последовательность чисел $\bigl\{x_l^{(k)}\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пространство $\mathbb{P}$ полное, так что любая такая последовательность имеет предел, который мы обозначим через x_l. Из (2.6) имеем при любом n

$$\sum_{l=1}^{n} \bigl|x_l^{(k)} - x_l^{(m)}\bigr|^p < \varepsilon^p,$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$ получаем справедливое при любом n неравенство

$$\sum_{l=1}^{n} \bigl|x_l^{(k)} - x_l\bigr|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Предельным переходом при $n \to \infty$ из этого неравенства получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l^{(k)} - x_l\bigr|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{2.7}$$

Во-первых, (2.7) означает, что $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, ибо из неравенства Минковского имеем

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l\bigr|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l^{(k)} - x_l - x_l^{(k)}\bigr|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l^{(k)} - x_l\bigr|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \bigl|x_l^{(k)}\bigr|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где вторая сумма в правой части конечна, ибо $x^{(k)} \in l_p$, а первая — в силу (2.7). Во-вторых, (2.7) означает, что $x^{(k)} \to x$ при $k \to \infty$.

Пример 2.28. Пространства m, c и c_0 полны, что доказывается так же, как и для l_p.

Пример 2.29. Пространство $C[a;b]$ полно. Действительно, фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ в этом пространстве означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n, m \geqslant N$ неравенство $\bigl|x_n(t) - x_m(t)\bigr| < \varepsilon$ выполнено при всех $t \in [a;b]$ сразу. Но это означает, что последовательность $\bigl\{x_n(t)\bigr\}$ равномерно сходится на $[a;b]$, так что ее (поточечный) предел — непрерывная функция $x(t)$. Предельным переходом при $m \to \infty$ в предыдущем неравенстве получаем $\bigl|x_n(t) - x(t)\bigr| \leqslant \varepsilon$, что и означает $\rho_\infty(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 2.30. Пространства $L_p[a;b]$, $1 \leqslant p < \infty$, полны (см. [2]).

Пример 2.31. Пространство $C_2[a;b]$ полным не является. Например, рассмотрим в пространстве $C_2[-1;1]$ последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leqslant t < -1/n, \\ 2nt + 1 & \text{при} \quad -1/n \leqslant t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Она фундаментальна в пространстве $C_2[-1;1]$, ибо, как легко проверить,

$$\int_{-1}^{1} \bigl(x_n(t) - x_m(t)\bigr)^2\,dt \leqslant \frac{2}{\min\{n, m\}}.$$

Пусть $f(t)$ — произвольная непрерывная на $[-1;1]$ функция, а

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leqslant t < 0, \\ 0 & \text{при} \quad t = 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{-1}^{1} \bigl(f(t) - x(t)\bigr)^2\,dt = C^2 > 0,$$

ибо $f(t)$ — непрерывная функция, а $x(t)$ — разрывная. С другой стороны, из интегрального неравенства Минковского

$$C = \sqrt{\int_{-1}^{1} \bigl(f(t) - x(t)\bigr)^2\,dt} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \bigl(f(t) - x_n(t) + x_n(t) - x(t)\bigr)^2\,dt} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_{-1}^{1} \bigl(f(t) - x_n(t)\bigr)^2\,dt} + \sqrt{\int_{-1}^{1} \bigl(x_n(t) - x(t)\bigr)^2\,dt},$$

причем, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \bigl(x_n(t) - x(t)\bigr)^2\,dt = 0.$$

Но тогда $\rho_2(f, x_n)$ не может стремиться к нулю, какова бы ни была $f(t) \in C_2[-1;1]$. Итак, $\bigl\{x_n(t)\bigr\}$ в $C_2[-1;1]$ предела не имеет.

Определение 2.15. *Пополнением* неполного метрического пространства (X, ρ_X) называется такое полное метрическое пространство (Y, ρ_Y), что (X, ρ_X) является подпространством в (Y, ρ_Y) и $\overline{X} = Y$.

Например, пространство $\mathbb{R}$ является пополнением пространства $\mathbb{Q}$. Можно доказать (см. [1]), что *любое метрическое пространство X имеет пополнение, причем это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей точки из X неподвижными.*

Теорема 2.10 (о вложенных шарах)**.** *Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда в нем любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. 1. Пусть пространство (X, ρ) полно и

$$B_1[x_1, r_1] \supset B_2[x_2, r_2] \supset \ldots \supset B_n[x_n, r_n] \supset \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, ибо

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant r_{\min\{m,n\}} \to 0.$$

В силу полноты пространства, эта последовательность имеет предел, который мы обозначим через x. Каждый шар $B_n[x_n, r_n]$ содержит все точки этой последовательности, кроме, может быть, $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Значит, x — точка прикосновения каждого из этих шаров. Но эти шары — замкнутые множества, следовательно, при любом n имеем $x \in B_n[x_n, r_n]$. Итак, x принадлежит пересечению этих шаров, т. е. это пересечение не пусто.

2. Пусть в пространстве (X, ρ) любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Выберем такую точку x_{n_1}, что при всех $n \geqslant n_1$ выполнено $\rho\big(x_{n_1}, x_n\big) < 1/2$. Теперь выберем такую точку x_{n_2}, что $n_2 > n_1$ и при всех $n \geqslant n_2$ выполнено $\rho\big(x_{n_2}, x_n\big) < 1/2^2$. И так далее: точка x_{n_k} выбирается так, что $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$ и при всех $n \geqslant n_k$ выполнено $\rho\big(x_{n_k}, x_n\big) < 1/2^k$. Построим последовательность шаров

$$B_1\big[x_{n_1}, 1\big] \supset B_2\big[x_{n_2}, 1/2\big] \supset \ldots \supset B_k\big[x_{n_k}, 1/2^{k-1}\big] \supset \ldots.$$

Эта последовательность шаров имеет общую точку x. Но тогда

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Итак, подпоследовательность $\big\{x_{n_k}\big\}$ фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ сходится к x, а следовательно, и сама $\{x_n\}$ сходится к x. $\square$

Теорема 2.11 (Бэр). *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное: X полно, но

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k,$$

где каждое M_k является нигде не плотным множеством. Пусть B_0 — замкнутый шар радиуса 1. Поскольку множество M_1 нигде не плотно, множество M_1 не плотно в шаре B_0, так что найдется такой замкнутый шар $B_1 \subset B_0$ радиуса меньше $1/2$, что $M_1 \cap B_1 = \varnothing$. Аналогично, найдется такой замкнутый шар $B_2 \subset B_1$ радиуса меньше $1/3$, что $M_2 \cap B_2 = \varnothing$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $\{B_k\}$ вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, причем $M_k \cap B_k = \varnothing$. Тогда по теореме о вложенных шарах последовательность этих шаров имеет общую точку x, причем $\forall k$ $x \notin M_k$. Тогда

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = X,$$

что невозможно. □

2.5 Принцип сжимающих отображений

Определение 2.16. Отображение $A\colon X \to X$ называется *сжимающим* (или *сжатием*), если существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \tag{2.8}$$

Примечание 2.5. Всякое сжатие является непрерывным отображением, ибо если $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то

$$\rho(Ax_n, Ax) \leqslant \alpha\rho(x_n, x) \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. $Ax_n \to Ax$.

Отметим, что заменить (2.8) на неравенство $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ не получится: для таких отображений не будет выполнено важное свойство, которое мы сейчас докажем.

Теорема 2.12 (принцип сжимающих отображений). *Любое сжатие полного метрического пространства имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Сначала докажем существование неподвижной точки. Пусть x_0 — произвольная точка пространства (X, ρ). Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, …, $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$, …. Пусть для определенности $m \geqslant n$, тогда из (2.8) имеем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leqslant \alpha^n \rho(x_0, A^{m-n} x_0) = \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n \big(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\big) =$$
$$= \alpha^n \big(\rho(x_0, x_1) + \rho(Ax_0, Ax_1) + \ldots + \rho(A^{m-n-1}x_0, A^{m-n}x_0)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1+\alpha} \cdot \rho(x_0, x_1).$$

Но $\alpha < 1$, так что при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Поскольку пространство полно, она имеет предел $x \in X$. Из непрерывности отображения A имеем

$$Ax = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, неподвижная точка отображения A существует.

Теперь докажем единственность этой неподвижной точки. Пусть $x = Ax$, $y = Ay$. Тогда из (2.8) имеем

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y) \ \Leftrightarrow\ (1-\alpha)\rho(x, y) \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \rho(x, y) = 0,$$

т. е. $x = y$. Итак, неподвижная точка отображения A единственна. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть $B\colon X \to X$ — такое отображение, что $A = B^n$ — сжатие. Тогда отображение B имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $Ax = x$. Тогда

$$Bx = B(A^k x) = B^{1+nk}x = A^k(Bx) \to x \qquad \text{при} \qquad k \to \infty.$$

Но левая часть здесь от k не зависит, так что $Bx = x$, т. е. отображение B имеет неподвижную точку.

Неподвижная точка отображения B единственна, поскольку любая неподвижная точка отображения B является неподвижной точкой и отображения $B^n = A$, но последнее, будучи сжатием, имеет лишь одну неподвижную точку. $\square$

Пример 2.32. Пусть $f\colon [a;b] \to [a;b]$ — функция, удовлетворяющая на отрезке $[a;b]$ *условию Липшица*:

$$\bigl|f(x_1) - f(x_2)\bigr| \leqslant M|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a;b]$$

с константой $M < 1$. В частности, условие Липшица будет выполнено, если f имеет производную f', причем $\bigl|f'(x)\bigr| \leqslant M < 1$ на $[a;b]$. Тогда f — сжатие и уравнение $x = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет один и только один корень, который, как при доказательстве принципа сжимающих отображений, может быть найден как предел последовательности x_0, $x_1 = f(x_0)$, …, $x_n = f(x_{n-1})$, … (этот метод называется *методом последовательных приближений*).

Рассмотрим теперь уравнение $F(x) = 0$, где $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, $0 < m \leqslant \bigl|F'(x)\bigr| \leqslant M$ на $[a;b]$. Пусть $f(x) = x - \lambda F(x)$, тогда уравнение $x = f(x)$ равносильно $F(x) = 0$. При этом $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, откуда $1 - \lambda M \leqslant \bigl|f'(x)\bigr| \leqslant 1 - \lambda m$, и можно подобрать λ так, чтобы было выполнено условие Липшица. После этого можно применить метод последовательных приближений.

Пример 2.33. *Интегральное уравнение Фредгольма второго рода*:

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \varphi(t), \tag{2.9}$$

где λ — заданное число, функция $\varphi(t)$ и *ядро* $K(t,\tau)$ — заданные непрерывные при $t,\tau \in [a;b]$ функции, а $x(t)$ — искомая функция.

Пусть отображение $A\colon C[a;b] \to C[a;b]$ задано формулой

$$Ax = \lambda \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \varphi(t).$$

Пусть $\bigl|K(t,\tau)\bigr| \leqslant M$ при $t,\tau \in [a;b]$. Тогда

$$|Ax - Ay| = \left|\lambda \int_a^b K(t,\tau)\bigl(x(\tau) - y(\tau)\bigr)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M(b-a) \max_{a\leqslant t\leqslant b} \bigl|x(t) - y(t)\bigr| = |\lambda| M(b-a)\rho_\infty(x,y),$$

так что отображение A является сжатием при

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Значит, уравнение (2.9) имеет при таких λ одно и только одно непрерывное на $[a;b]$ решение. Это решение можно найти как предел последовательности x_0, $x_1 = Ax_0$, …, $x_n = Ax_{n-1}$, …, где $x_0 \in C[a;b]$ — произвольная функция.

Пример 2.34. *Интегральное уравнение Вольтерры* имеет вид

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \varphi(t), \tag{2.10}$$

где λ — заданное число, функция $\varphi(t)$ и *ядро* $K(t,\tau)$ — заданные непрерывные при $t,\tau \in [a;b]$ функции, а $x(t)$ — искомая функция.

Уравнение Вольтерры отличается от уравнения Фредгольма второго рода только верхним пределом интеграла. Легко видеть, что можно, как и в предыдущем примере, доказать, что при тех же условиях на λ интегральное уравнение Вольтерры имеет единственное непрерывное на $[a;b]$ решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Но с помощью следствия принципа сжимающих отображений мы получим более сильное утверждение.

Пусть отображение $B\colon C[a;b] \to C[a;b]$ задано формулой

$$Bx = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + \varphi(t),$$

Пусть $\bigl|K(t,\tau)\bigr| \leqslant M$ при $t,\tau \in [a,b]$. Тогда

$$|Bx - By| = \left|\lambda \int_a^t K(t,\tau)\bigl(x(\tau) - y(\tau)\bigr)\,dt\right| \leqslant |\lambda| M(t-a)\rho_\infty(x,y).$$

Отсюда

$$|B^2x - B^2y| = \left|\lambda \int_a^t K(t,\tau)\bigl(Bx(\tau) - By(\tau)\bigr)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M \int_a^t \bigl|Bx(\tau) - By(\tau)\bigr|\,d\tau \leqslant |\lambda|^2 M^2 \rho_\infty(x,y) \int_a^t (\tau - a)\,d\tau =$$
$$= \frac{\lambda|^2 M^2 (t-a)^2}{2}\rho_\infty(x,y)$$

и далее

$$|B^n x - B^n y| = \frac{|\lambda|^n M^n (t-a)^n}{n!}\rho_\infty(x,y) \leqslant \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!}\rho_\infty(x,y).$$

При любом λ можно выбрать n так, чтобы

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение $A = B^n$ будет сжатием. Значит, в силу следствия принципа сжимающих отображений, это отображение имеет одну и только одну неподвижную точку в пространстве $C[a;b]$. Но тогда уравнение (2.10) имеет при любых λ одно и только одно непрерывное на $[a;b]$ решение.

Принцип сжимающих отображений имеет и другие приложения. Например, теорема о существовании и единственности решения задачи Коши доказывается с помощью этого принципа.

2.6 Полная ограниченность и компактность

Определение 2.17. Пусть $M, A \subset X$. Множество A называется *ε-сетью* множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется такая точка $a \in A$, что $\rho(x, a) \leqslant \varepsilon$.

Определение 2.18. Множество M называется *вполне ограниченным*, если при любом $\varepsilon > 0$ для него найдется конечная ε-сеть.

Примечание 2.6. Если множество M в метрическом пространстве (X, ρ) вполне ограничено, то соответствующее подпространство $\big(M, \rho|_M\big)$ сепарабельно, ибо объединение всех $(1/n)$-сетей ($n \in \mathbb{N}$) представляет собой, очевидно, счетное всюду плотное в M множество.

Примечание 2.7. Вполне ограниченное множество ограничено и в обычном смысле как объединение конечного числа ограниченных множеств. Обратное, вообще говоря, неверно (см. пример 2.36 ниже).

Пример 2.35. В $\mathbb{R}^n$ полная ограниченность множества совпадает с обычной его ограниченностью. Действительно, ограниченное множество целиком содержится в некотором кубе со стороной a. Если задано некоторое $\varepsilon > 0$, подберем число k так, чтобы $a/k \leqslant \varepsilon$, и разобьем этот куб на k^n кубов со сторонами a/k. Тогда вершины этих кубов и будут требуемой ε-сетью.

Пример 2.36. Единичный шар в l_2 — ограниченное, но не вполне ограниченное множество, ибо для точек

$$e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N},$$

принадлежащих единичному шару, $\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ при $n \neq m$, так что для единичного шара в l_2 нет конечной ε-сети при $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

Итак, полная ограниченность в бесконечномерном пространстве не совпадает с обычной ограниченностью. Выясним критерий полной ограниченности в пространстве $C[a; b]$. Для этого нам потребуются следующие определения.

Определение 2.19. Семейство F функций из пространства $C[a;b]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такая единая для всех функций $x(t) \in F$ постоянная K, что для любого $t \in [a;b]$ выполнено неравенство $\bigl|x(t)\bigr| < K$.

Определение 2.20. Семейство F функций из пространства $C[a;b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что для любой функции $x(t) \in F$ и для любых таких $t_1, t_2 \in [a;b]$, что $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется неравенство $\bigl|x(t_1) - x(t_2)\bigr| < \varepsilon$.

Теорема 2.13 (Арцела́). *Семейство функций $F \subset C[a;b]$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. 1. Пусть семейство F вполне ограничено. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим конечную $\varepsilon/3$-сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$. Функции $\varphi_j(t)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывны и, следовательно, ограничены некоторыми константами K_j соответственно. Выберем $K = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} K_j + \varepsilon/3$. Для произвольной функции $x(t) \in F$ по определению $\varepsilon/3$-сети найдется такая функция $\varphi_j(t)$, что

$$\rho(x, \varphi_j) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \bigl|x(t) - \varphi_j(t)\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда при всех $t \in [a;b]$

$$\bigl|x(t)\bigr| \leqslant \bigl|\varphi_j(t)\bigr| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_j + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Итак, F равномерно ограничено.

Функции $\varphi_j(t)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывны и, следовательно, равномерно непрерывны, так что для нашего ε найдется такое δ_j, зависящее только от ε, что для любых таких $t_1, t_2 \in [a;b]$, что $|t_1 - t_2| < \delta_j$, выполнено неравенство $\bigl|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)\bigr| < \varepsilon/3$. Выберем $\delta = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \delta_j$. Для произвольной функции $x(t) \in F$ и подходящей функции $\varphi_j(t)$ из нашей $\varepsilon/3$-сети имеем

$$\bigl|x(t_1) - x(t_2)\bigr| \leqslant \bigl|x(t_1) - \varphi_j(t_1)\bigr| + \bigl|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)\bigr| + \\ + \bigl|\varphi_j(t_2) - x(t_2)\bigr| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для любых таких $t_1, t_2 \in [a;b]$, что $|t_1 - t_2| < \delta$. Итак, F равностепенно непрерывно.

2. Пусть семейство F равномерно ограничено константой K и равностепенно непрерывно. Выберем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, что условие равностепенной непрерывности выполняется при $\varepsilon/5$. Рассмотрим прямоугольник $[a;b] \times [-K;K]$ и разобьем его вертикальными и горизонтальными прямыми на прямоугольники, меньшие $\delta \times (\varepsilon/5)$. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — все различные абсциссы вершин этих прямоугольников. Для произвольной функции $x(t) \in F$ при каждом $k = 1, \ldots, n$ найдется такая вершина (t_k, x_j), что $\bigl|x(t_k) - x_j\bigr| < \varepsilon/5$. Построим для $x(t)$ такую ломаную $\varphi(t)$, что $\varphi(t_k) = x_j$. Пусть t_s — ближайшая к t точка из набора $t_1, \ldots, t_n$. Тогда

- $\bigl|x(t) - x(t_s)\bigr| < \varepsilon/5$ из равностепенной непрерывности семейства F, ибо $|t - t_s| < \delta$;
- $\bigl|x(t_s) - \varphi(t_s)\bigr| < \varepsilon/5$, ибо $\bigl|x(t_k) - x_j\bigr| < \varepsilon/5$;
- $\bigl|\varphi(t_s) - \varphi(t)\bigr| < 3\varepsilon/5$, т. к. вытекающее из равностепенной непрерывности условие $\bigl|x(\tau) - x(\tau')\bigr| < \varepsilon/5$ при $\tau, \tau' \in [t_s; t_{s+1}]$ не дает функции занять больше трех прямоугольников друг над другом.

Итак, для любой точки $t \in [a;b]$ имеем

$$\bigl|x(t) - \varphi(t)\bigr| \leqslant \bigl|x(t) - x(t_s)\bigr| + \bigl|x(t_s) - \varphi(t_s)\bigr| + \bigl|\varphi(t_s) - \varphi(t)\bigr| < \varepsilon.$$

Тем самым ломаные вида $\varphi(t)$ образуют ε-сеть для F. Но таких ломаных лишь конечное число, так что ε-сеть для F конечна. Итак, семейство F вполне ограничено. $\square$

Напомним теперь известные из курса топологии определения и факты, которые окажутся связанными с понятием полной ограниченности. Сразу заметим, что ниже речь идет именно о метрических пространствах — частном случае топологических пространств, так что не все изложенные ниже факты справедливы в произвольном топологическом пространстве.

Определение 2.21. *Покрытием* множества $M \subset X$ называется такая система множеств $\{M_\alpha\}$, что

$$M \subset \bigcup_\alpha M_\alpha.$$

Подсистема покрытия $\{M_\alpha\}$ множества M, которая сама является покрытием множества M, называется *подпокрытием* покрытия $\{M_\alpha\}$. Покрытие (подпокрытие) называется *открытым*, если все составляющие его множества открыты; *конечным*, если оно состоит из конечного числа множеств.

Определение 2.22. Множество M называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Множество M называется *предкомпактным*, если $\overline{M}$ компактно.

Определение 2.23. Множество M называется *счетно-компактным*, если любое его бесконечное подмножество имеет в нем хотя бы одну предельную точку.

Из курса топологии известно, что справедлива

Теорема 2.14. *В метрическом пространстве компактность и счетная компактность множества равносильны.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [1]. Мы же установим связь между полной ограниченностью и компактностью.

Теорема 2.15. *Множество M в метрическом пространстве (X, ρ) компактно тогда и только тогда, когда M вполне ограничено и соответствующее подпространство $\left(M, \rho|_M\right)$ полно.*

Доказательство. 1. Предположим, что множество M не является вполне ограниченным. Это значит, что при некотором ε_0 в M нет конечной ε_0-сети. Выберем в M произвольную точку x_1. Тогда в M найдется такая точка x_2, что $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$, иначе бы множество $\{x_1\}$ было ε_0-сетью. Для выбранных точек x_1 и x_2 в M найдется такая точка x_3, что $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0$ и $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$, иначе бы множество $\{x_1, x_2\}$ было ε_0-сетью. Продолжим этот процесс, выбирая для уже фиксированных точек $x_1, \ldots, x_n$ точку x_{n+1} так, чтобы при $k \neq n+1$ было выполнено неравенство $\rho(x_k, x_{n+1}) > \varepsilon_0$. Построенная таким образом последовательность $\{x_n\}$ является бесконечным множеством, не имеющим ни одной предельной точки, ибо при $k \neq j$ выполнено неравенство $\rho(x_k, x_j) > \varepsilon_0$. Но тогда M не счетно-компактно и, следовательно, не компактно. Итак, компакт вполне ограничен.

Далее, если бы в $\left(M, \rho|_M\right)$ нашлась нестационарная фундаментальная последовательность, не имеющая предела, то точки этой последовательности образовали бы бесконечное множество, не имеющее предельных точек. Значит, M не было бы счетно-компактным и, следовательно, не было бы компактным. Таким образом, соответствующее M подпространство $\left(M, \rho|_M\right)$ полно.

2. Пусть M — вполне ограниченное множество, соответствующее ему подпространство полно, а $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — бесконечное множество (последовательность) точек из X. Построим вокруг каждой точки 1-сети замкнутый шар радиуса 1. Эти шары покрывают все пространство, а число их конечно, так что среди них найдется шар B_1, содержащий бесконечную подпоследовательность $\left\{x_n^{(1)}\right\}$ последовательности $\{x_n\}$. В B_1 выберем 1/2-сеть и построим вокруг каждой точки сети замкнутый шар радиуса 1/2. Среди этих шаров найдется шар B_2, содержащий бесконечную подпоследовательность $\left\{x_n^{(2)}\right\}$ последовательности $\left\{x_n^{(1)}\right\}$. В шаре B_2 выберем 1/4-сеть и построим вокруг каждой точки этой сети замкнутый шар радиуса 1/4. Среди этих шаров найдется шар B_3, содержащий бесконечную подпоследовательность $\left\{x_n^{(3)}\right\}$ последовательности $\left\{x_n^{(2)}\right\}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность шаров $\{B_n\}$. Для этой последовательности шаров построим последовательность замкнутых шаров $\{A_n\}$, каждый из которых имеет тот же центр, что и соответствующий B_n, но в два раза больший радиус. Шары A_n вложены друг в друга, а их радиусы стремятся к нулю. В силу полноты соответствующего подпространства и теоремы о вложенных шарах, их пересечение содержит некоторую точку x_0. Каждая окрестность точки x_0 содержит некоторый шар B_k, а значит, и некоторую бесконечную подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Тем самым точка x_0 — предельная точка множества $\{x_n\}$. $\square$

Теорема 2.16. *Справедливы следующие утверждения*:
1. *Замкнутое подмножество компакта компактно.*
2. *Компакт замкнут в любом содержащем его пространстве.*

Доказательство. 1. Первое утверждение сразу следует из полной ограниченности и полноты замкнутого подмножества вполне ограниченного полного пространства.

2. Пусть F — компакт, а точка $y \notin F$. Для любой точки $x \in F$ найдутся такая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x и такая окрестность $O_\delta(y)$ точки y, что $O_\varepsilon(x) \cap O_\delta(y) = \varnothing$. Такие окрестности $O_\varepsilon(x)$ различных точек x из F образуют открытое покрытие F, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $O_{\varepsilon_1}(x_1), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x_n)$. Пересечение окрестностей $O = O_{\delta_1}(y) \cap \ldots \cap O_{\delta_n}(y)$ — открытое множество, так что оно содержит некоторую окрестность V точки y. При этом O не пересекается с $O_{\varepsilon_1}(x_1) \cup \ldots \cup O_{\varepsilon_n}(x_n)$, а значит, и с F. Тогда y имеет окрестность, не пересекающуюся с F, т. е. y не может быть предельной точкой F. $\square$

Компактные множества важны в анализе, поскольку на них непрерывные отображения имеют ряд удобных свойств. Так, в курсе математического анализа доказывалось, что функция, непрерывная на отрезке (который является связным компактом в $\mathbb{R}$), переводит этот отрезок снова в отрезок, равномерно непрерывна на этом отрезке, ограничена на нем и достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений. Сейчас мы докажем обобщения этих теорем.

Теорема 2.17. *Образ компакта при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть M — компакт, а f — непрерывное отображение. Рассмотрим некоторое открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ образа $f(M)$. Прообразы E_α множеств G_α по теореме 2.7 сами открыты и образуют открытое покрытие множества M. Но M компактно, так что из $\{E_\alpha\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества M. Но тогда соответствующие G_j образуют конечное подпокрытие покрытия $\{G_\alpha\}$ образа $f(M)$. $\square$

Теорема 2.18. *Биективное непрерывное отображение f компакта M на метрическое пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Надо доказать только, что f^{-1} непрерывно. Если F — замкнутое подмножество M, то по теореме 2.16 F компактно. Тогда по теореме 2.17 образ $P = f(F)$ компактен. Следовательно, P замкнуто в Y. Итак, прообраз P любого замкнутого в M множества F при отображении f^{-1} замкнут. Значит, в силу следствия теоремы 2.7, отображение f^{-1} непрерывно. $\square$

Введем теперь следующее определение, обобщающее понятие равномерной непрерывности на отображения произвольных метрических пространств.

Определение 2.24. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1, x_2 \in X$, что $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, выполнено $\rho_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$.

Теорема 2.19. *Непрерывное отображение компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $M \subset X$ — компакт, а отображение $f\colon M \to Y$ непрерывно. Рассмотрим в M две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, что $\rho_X(x_n, x'_n) < 1/n$. Поскольку M компактно, из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x \in M$. К этой же точке x сходится подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ последовательности $\{x'_n\}$. При этом

$$\rho_Y\big(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\big) \leqslant \rho_Y\big(f(x_{n_k}), f(x)\big) + \rho_Y\big(f(x), f(x'_{n_k})\big).$$

Если бы f не было равномерно непрерывным, нашлось бы такое ε, что при всех n было бы $\rho_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \geqslant \varepsilon$, но тогда при всех k выполнялось бы одно из неравенств

$$\rho_Y\big(f(x_{n_k}), f(x)\big) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{или} \qquad \rho_Y\big(f(x), f(x'_{n_k})\big) \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречило бы непрерывности f в точке x. $\square$

Теорема 2.20. *Пусть M — компакт, а отображение $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f ограничено на M и достигает на M своих точных верхней и нижней граней.*

Доказательство. По теореме 2.17 образ $f(M)$ компактен. Но $f(M) \subset \mathbb{R}$, так что $f(M)$ — замкнутое и ограниченное множество (см. пример 2.35). Поэтому $f(M)$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани и содержит эти грани. $\square$

2.7 Задачи

Решения этих или подобных им задач можно найти в книгах [3, 4].

Задача 2.1. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0; \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям:

а) $f(x) > 0$ при $x > 0$, $f(0) = 0$;

б) $f(x)$ не убывает при $x > 0$;

в) $f(x)/x$ не возрастает при $x > 0$.

Доказать, что $\rho(x, y) = f\big(|x - y|\big)$ — метрика на прямой $\mathbb{R}$.

Задача 2.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что (X, ρ_1) — тоже метрическое пространство, если

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

Задача 2.3. Пусть $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ — метрические пространства. Обозначим $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k(x_k, y_k).$$

Доказать, что (X, ρ) — метрическое пространство.

Задача 2.4. Пусть $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_k, \rho_k), \ldots$ — метрические пространства. Обозначим $X = X_1 \times \ldots \times X_k \times \ldots$. Для $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X$ и $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in X$ положим

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\rho_k(x_k, y_k)}{1 + \rho_k(x_k, y_k)}.$$

Доказать, что (X, ρ) — метрическое пространство.

Задача 2.5. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} \subset B[x_0, r]$. Привести пример метрического пространства, в котором $\overline{B(x_0, r)} \neq B[x_0, r]$.

Задача 2.6. Привести пример метрического пространства и таких двух замкнутых шаров $B_1 = B[x_1, r_1]$ и $B_2 = B[x_2, r_2]$ в нем, что $r_1 < r_2$, но $B_2 \subset B_1$.

Задача 2.7. Доказать, что в любом метрическом пространстве для любого множества M:

а) замыкание множества M совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M;

б) множество внутренних точек множества M совпадает с объединением всех открытых множеств, содержащихся в M.

Задача 2.8. Доказать, что при фиксированных числах A и B множество

$$M = \big\{x(t) \in C[0; 1] \colon A < x(t) < B\big\}$$

открыто в $C[0, 1]$.

Задача 2.9. Представить отрезок $[0; 1]$ в виде пересечения счетного числа открытых множеств, а интервал $(0; 1)$ — в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

Задача 2.10. Сходится ли последовательность $x_n(t)$ к $x(t) \equiv 0$ в заданных пространствах?

а) $x_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$, $\quad C[0;1]$, $\quad L_1[0;1]$;

б) $x_n(t) = \dfrac{t}{1+n^2t^2}$, $\quad C[0;1]$, $\quad L_1[0;1]$;

в) $x_n(t) = te^{-nt}$, $\quad C[0;1]$, $\quad L_1[0;1]$;

г) $x_n(t) = \sqrt{2nt}\cdot e^{-\frac{nt^2}{2}}$, $\quad C[0;1]$, $\quad L_2[0;1]$;

д) $x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$, $\quad C[-\pi;\pi]$, $\quad L_1[-\pi;\pi]$;

е) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$, $\quad L_1[0;1]$.

Задача 2.11. Доказать, что в метрическом пространстве (X,ρ) при любой фиксированной точке $y \in X$ отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданное формулой $f(x) = \rho(x,y)$, непрерывно.

Задача 2.12. Пусть X — множество всевозможных вещественных числовых последовательностей. Рассмотрим в нем две метрики: если $x = (x_1,\ldots,x_k,\ldots)$ и $y = (y_1,\ldots,y_k,\ldots)$, то

$$\rho_1(x,y) = \sup_k \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|}, \qquad \rho_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}.$$

Доказать, что пространство (X,ρ_1) не сепарабельно, а пространство (X,ρ_2) сепарабельно.

Задача 2.13. Пользуясь связью между фундаментальностью и сходимостью последовательности в полном пространстве, проверить, сходится ли последовательность $\{x_n\}$ в заданном пространстве?

а) $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\Big)$, $\quad l_1$;

б) $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,\ldots\Big)$, $\quad l_2$;

в) $x_n = \Big(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots\Big)$, $\quad l_3$;

г) $x_n = \Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1},\frac{1}{n^s},\frac{1}{(n+1)^s},\ldots\Big)$, $(s>1)$, $\quad l_1$;

д) $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n},0,0,\ldots,0,1}_{n},0,0,\ldots\Big)$, $\quad l_2$;

е) $x_n(t) = \sqrt{n}(1-nt)\chi_{[0;1/n]}(t)$, $\quad L_2[0;1]$.

Задача 2.14. Доказать, что пространство $C_1[0;1]$ не является полным.

Задача 2.15. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ — фиксированная последовательность положительных чисел, $(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots)$ — такая последовательность положительных чисел, что величина $\sup_k \bigl(\beta_k/\alpha_k\bigr)$ конечна. Пусть X — множество таких вещественных числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$, что величина $\sup_k \bigl(\alpha_k |x_k|\bigr)$ конечна. Для указанного x и $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in X$ положим

$$\rho(x,y) = \sup_k \bigl(\beta_k |x_k - y_k|\bigr).$$

Доказать, что (X, ρ) — полное метрическое пространство.

Задача 2.16. Пусть X — множество всех непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций,

$$\rho(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \bigl|x(t) - y(t)\bigr|.$$

Доказать, что заданное таким образом (X, ρ) не является полным метрическим пространством.

Задача 2.17. Найти предел последовательности цепных дробей

$$2, \qquad 2 + \frac{1}{2}, \qquad 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}, \qquad \ldots.$$

Задача 2.18. С помощью метода последовательных приближений с точностью $\varepsilon = 0,01$ решить уравнение на заданном отрезке: а) $x^2 = 2$ на отрезке $[1;2]$; б) $x + \sin x = 1$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Задача 2.19. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t\tau x(\tau)\, d\tau + \frac{5t}{6}.$$

Задача 2.20. Являются ли вполне ограниченными в $C[0;1]$ множества:

а) $B[0,1] = \bigl\{x(t)\colon \bigl|x(t)\bigr| \leqslant 1\bigr\}$;

б) множество M таких непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций $x(t)$, что $x(0) = 0$ и $\bigl|x'(t)\bigr| \leqslant 1$ на $[0;1]$?

Задача 2.21. Доказать, что *гильбертов кирпич*

$$\Pi = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in l_2 \colon |x_k| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$$

является вполне ограниченным в l_2.

3 Линейные нормированные и евклидовы пространства

3.1 Основные определения

Определение 3.1. *Линейным пространством* $L = (L, +, \cdot)$ называется тройка, состоящая из множества L и операций $+$ сложения его элементов и $\cdot$ умножения его элементов на числа, для которых при любых $x, y, z \in L$ и любых числах λ, μ элементы $x+y, \lambda x \in L$ и выполнены следующие свойства (*аксиомы*):

ЛП1. $x + y = y + x$ (*коммутативность*);

ЛП2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);

ЛП3. $\exists 0 \in L\colon x + 0 = x$ (*существование нуля*);

ЛП4. $\exists(-x) \in L\colon x+(-x) = 0$ (*существование противоположного элемента*);

ЛП5. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

ЛП6. $1 \cdot x = x$;

ЛП7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

ЛП8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Элементы множества L называются *векторами*. Числа, на которые умножаются векторы, могут принадлежать любому полю. Однако, чаще всего рассматриваются *вещественные* и *комплексные* пространства, векторы которых умножаются соответственно на вещественные и комплексные числа.

Если специально не оговаривается иное, приводимые далее утверждения справедливы как для комплексных, так и для вещественных пространств. Заметим, что комплексное пространство можно рассматривать и как вещественное, если ограничиться умножением векторов только на вещественные числа.

Определение 3.2. Множество $M \subset L$ называется *линейным многообразием*, если оно само является линейным пространством с определенными для L операциями сложения векторов и умножения их на числа.

Легко видеть, что пересечение любого числа линейных многообразий само является линейным многообразием. Отсюда следует, что из всех линейных многообразий, содержащих заданную систему векторов $\{x_\alpha\}$, можно выбрать наименьшее, взяв пересечение всех этих многообразий.

Определение 3.3. Наименьшее линейное многообразие, содержащее систему векторов $\{x_\alpha\}$, называется *линейным многообразием, порожденным системой* $\{x_\alpha\}$, или *линейной оболочкой системы* $\{x_\alpha\}$.

Определение 3.4. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства называются *линейно зависимыми*, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все из которых равны нулю, что *линейная комбинация*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0. \tag{3.1}$$

Если же условие (3.1) выполнено тогда и только тогда, когда $\forall k\ \lambda_k = 0$, векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми.* Бесконечная система $\{x_\alpha\}$ векторов называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема является линейно независимой.

Определение 3.5. Линейное пространство называется *n-мерным*, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, но любая система из $n+1$ векторов будет линейно зависимой. При этом число n называется *размерностью* пространства. Любой набор из n линейно независимых векторов n-мерного пространства L называется *базисом* пространства L.

Определение 3.6. Если в линейном пространстве L можно найти линейно независимую систему, состоящую из любого числа векторов, пространство L называется *бесконечномерным.*

Определение 3.7. Пусть L — линейное пространство. Отображение $p\colon L \to \mathbb{R}$, которое для любых векторов $x, y \in L$ и любого числа λ удовлетворяет следующим свойствам (*аксиомам*):

Н1. $p(x) \geqslant 0$, причем $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Н2. $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$;

Н3. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

называется *нормой.* Норма вектора x обозначается $\|x\|$. Пространство L с введенной на нем нормой называется *нормированным.*

Всюду далее, если иное не оговаривается специально, L — линейное нормированное пространство.

Легко проверить, что любое линейное нормированное пространство является метрическим с естественной метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Все понятия и факты, полученные в главе 2 для метрических пространств, переносятся на линейные нормированные пространства.

Определение 3.8. *Изометрическим изоморфизмом* (или просто *изоморфизмом*) линейных нормированных пространств L и L' называется такая изометрия $f\colon L \to L'$, что для любых $x, y \in L$ и любых чисел λ

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Линейные нормированные пространства L и L', для которых существует изометрический изоморфизм, называются *изометрически изоморфными* (или просто *изоморфными*), что обозначается $L \cong L'$.

Определение 3.9. Полное линейное нормированное пространство называется *ба́наховым.*

Пример 3.1. Читатель легко убедится в справедливости аксиом ЛП1–ЛП8 и Н1–Н3 для следующих пространств:

• $\mathbb{P}^n_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — n-мерное пространство с покоординатными операциями сложения векторов и умножения их на число. Норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

• $\mathbb{P}^n_\infty$ — n-мерное пространство с покоординатными операциями сложения векторов и умножения их на число. Для $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

• l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство последовательностей чисел из $\mathbb{P}$, абсолютно суммируемых в степени p, с покоординатными операциями сложения последовательностей и умножения их на число. Норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

• m, c, c_0 — соответственно пространства ограниченных, сходящихся и сходящихся к нулю последовательностей чисел из $\mathbb{P}$ с покоординатными операциями сложения последовательностей и умножения их на число. Норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$:

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_k |x_k|.$$

• $C_{\mathbb{P}}[a; b]$ — пространство непрерывных на $[a; b]$ $\mathbb{P}$-значных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа.

Норма:

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\int_a^b \left|x(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• $C[a;b]$ — пространство непрерывных на $[a;b]$ $\mathbb{P}$-значных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Норма:

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|x(t)\right|.$$

• $C^n[a;b]$ — пространство n раз непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ $\mathbb{P}$-значных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Норма задается равенством

$$\|x\| = \|x\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|x^{(k)}(t)\right|.$$

• $L_p(A)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство (классов эквивалентности) суммируемых на A в степени p $\mathbb{P}$-значных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Норма

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\int_A \left|x(t)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

где μ — мера Лебега на прямой.

• $L_\infty(A)$ — пространство (классов эквивалентности) измеримых ограниченных почти всюду на A $\mathbb{P}$-значных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Норма

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_A \left|x(t)\right|.$$

Определение 3.10. Замкнутое линейное многообразие L' в линейном нормированном пространстве L называется *подпространством* пространства L. Наименьшее подпространство пространства L, содержащее систему векторов $\{x_\alpha\}$, называется *подпространством, порожденным системой* $\{x_\alpha\}$, или *линейным замыканием системы* $\{x_\alpha\}$ в пространстве L.

Определение 3.11. Система векторов $\{x_\alpha\}$ линейного нормированного пространства L называется *полной*, если порожденное ей подпространство совпадает с самим L.

Пример 3.2. Легко видеть, что любое линейное многообразие в конечномерном пространстве является его подпространством.

Пример 3.3. Линейное многообразие алгебраических многочленов, порожденное системой векторов $\{1, t, t^2, \ldots\}$, не является подпространством в $C[a;b]$, поскольку, например, последовательность векторов этого многообразия

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

сходится к вектору $x(t) = e^t$, этому многообразию не принадлежащему. В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, эта система в $C[a;b]$ полна. Кроме того, эта система полна и в пространствах $C_p[a;b]$ и $L_p[a;b]$ (см. пример 2.23).

Теперь мы сформулируем и докажем две теоремы, которые понадобятся нам только в следующей главе при доказательстве теоремы Банаха об обратном операторе и в параграфе о компактных операторах. Сейчас эти теоремы можно пропустить и вернуться к ним позднее.

Теорема 3.1. *Пусть M — всюду плотное множество в банаховом пространстве L. Тогда любой ненулевой вектор $x \in L$ можно представить в виде ряда*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \qquad \text{где} \qquad x_k \in M, \qquad \|x_k\| \leqslant \frac{3\|x\|}{2^k}.$$

Доказательство. В шаре $B\big[x, \|x\|/2\big]$ обязан содержаться вектор $x_1 \in M$, ибо M всюду плотно. При этом $\|x - x_1\| \leqslant \|x\|/2$. В шаре $B\big[x - x_1, \|x\|/4\big]$ обязан содержаться вектор $x_2 \in M$, ибо M всюду плотно. При этом $\|x - x_1 - x_2\| \leqslant \|x\|/4$. Аналогичным образом выбираются остальные x_k: $\|x - x_1 - x_2 - \ldots - x_k\| \leqslant \|x\|/2^k$. Итак

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

т. е. указанный ряд сходится к x. При этом

$$\|x_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k - \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| + \left\| x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right\| \leqslant \frac{\|x\|}{2^n} + \frac{\|x\|}{2^{n-1}} = \frac{3\|x\|}{2^n},$$

что и требовалось. □

Теорема 3.2. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots$ — *линейно независимые векторы в линейном нормированном пространстве* L, *а* X_n — *подпространство, порожденное векторами* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Тогда существует такая последовательность* $y_1, y_2, \ldots$ *векторов, что*

$$\|y_n\| = 1, \qquad y_n \in X_n, \qquad \rho(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}, \tag{3.2}$$

где $\rho(x, M)$ — *расстояние от вектора* x *до множества* M, *т. е.*

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Доказательство. Положим $\rho(x_n, X_{n-1}) = \alpha$. Из линейной независимости векторов $x_1, x_2, \ldots$ вытекает, что $x_n \notin X_{n-1}$, так что $\alpha > 0$. Пусть $x^* \in X_{n-1}$ — такой вектор, что $\|x_n - x^*\| < 2\alpha$. Тогда

$$\rho(x_n - x^*, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|x_n - x^* - x\| =$$
$$= \inf_{(x^*+x) \in X_{n-1}} \big\|x_n - (x^* + x)\big\| = \inf_{x \in X_{n-1}} \|x_n - x\| = \rho(x_n, X_{n-1}) = \alpha,$$

так что вектор

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$$

удовлетворяет условиям (3.2); в качестве y_1 можно взять $x_1 / \|x_1\|$. □

Один из способов введения длины вектора в линейном пространстве — это наделение этого пространства скалярным произведением. Приведем соответствующие определения.

Определение 3.12. Если L — вещественное линейное пространство, то *скалярным произведением* в L называется вещественнозначная функция (x, y), удовлетворяющая при любых $x, y, z \in L$ и любом $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим свойствам (*аксиомам*):

СП1. $(x, y) = (y, x)$;

СП2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

СП3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

СП4. $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Если же L — комплексное линейное пространство, то *скалярным произведением* в L называется комплекснозначная функция (x, y), удовлетворяющая при любых $x, y, z \in L$ и любом $\lambda \in \mathbb{C}$ аксиомам СП2–СП4 и аксиоме

СП1′. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Примечание 3.1. Для вещественного пространства из аксиом СП1–СП4 следуют равенства

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z), \qquad (x, \lambda y) = \lambda(x, y).$$

Для комплексного пространства из аксиом СП1$'$ и СП2–СП4 получаем равенства

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z),$$
$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$

Определение 3.13. Линейное пространство с введенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым*.

Любое евклидово пространство является нормированным пространством с естественной нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Действительно, аксиомы Н1 и Н2 очевидны, а Н3 следует из неравенства Коши — Буняковского, которое мы сейчас докажем.

Неравенство Коши — Буняковского. $\big|(x, y)\big| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Доказательство. 1. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leqslant (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y),$$

и дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен, т. е.

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

откуда и следует неравенство Коши — Буняковского.

2. Пусть $(x, y) \in \mathbb{C}$, причем $(x, y) = re^{i\varphi}$. Если $z = e^{-i\varphi}x$, то

$$(z, z) = (e^{-i\varphi}x, e^{-i\varphi}x) = e^{-i\varphi}\overline{e^{-i\varphi}}(x, x) = e^{-i\varphi}e^{i\varphi}(x, x) = (x, x),$$
$$(z, y) = (e^{-i\varphi}x, y) = e^{-i\varphi}(x, y) = e^{-i\varphi}re^{i\varphi} = r = \big|(x, y)\big| \in \mathbb{R},$$

так что из пункта 1 следует

$$\big|(x, y)\big| = (z, y) \leqslant (z, z)(y, y) = (x, x)(y, y),$$

что и требовалось доказать. $\square$

В вещественном евклидовом пространстве можно определить угол между векторами: из неравенства Коши — Буняковского следует, что для любых ненулевых векторов x и y существует такое число $\varphi \in [0; \pi]$, что

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Определение 3.14. *Изоморфизмом* евклидовых пространств E и E' называется такое отображение $f\colon E \to E'$, что для любых $x, y \in E$ и любого числа λ

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x), \qquad \big(f(x), f(y)\big) = (x, y).$$

Пространства E и E' при этом называются *изоморфными*, что обозначется так: $E \cong E'$.

Примечание 3.2. Поскольку в евклидовом пространстве норма вводится с помощью скалярного произведения, а изоморфизм евклидовых пространств сохраняет скалярное произведение, изоморфизм евклидовых пространств является изометрическим изоморфизмом.

Теорема 3.3. *Если в евклидовом пространстве E последовательности векторов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся соответственно к векторам x и y, то*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

Доказательство. Имеем

$$(x_n, y_n) = (x_n - x + x, y_n - y + y) =$$
$$= (x_n - x, y_n - y) + (x_n - x, y) + (x, y_n - y) + (x, y),$$

причем, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$\big|(x_n - x, y_n - y)\big| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n - y\|,$$
$$\big|(x_n - x, y)\big| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y\|, \qquad \big|(x, y_n - y)\big| \leqslant \|x\| \cdot \|y_n - y\|,$$

так что $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$. □

Пример 3.4. Читатель легко проверит, что следующие пространства являются евклидовыми.

• $\mathbb{R}_2^n$ — вещественное n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

• $\mathbb{C}_2^n$ — комплексное n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

• l_2 — пространство числовых последовательностей, абсолютно суммируемых в квадрате; если $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots)$ скалярное произведение в вещественном пространстве имеет вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

а в комплексном —

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

• $C_2[a; b]$ — пространство непрерывных на $[a; b]$ функций; скалярное произведение в вещественном пространстве имеет вид

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t)\, dt,$$

а в комплексном —

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)}\, dt.$$

• $L_2(A)$ — пространство (классов эквивалентности) функций, суммируемых в степени 2 на A; скалярное произведение в вещественном пространстве имеет вид

$$(x, y) = \int_A x(t) y(t)\, d\mu,$$

а в комплексном —

$$(x, y) = \int_A x(t) \overline{y(t)}\, d\mu,$$

где μ — мера Лебега на прямой $\mathbb{R}$.

3.2 Ортонормированные системы

Определение 3.15. Пусть E — евклидово пространство. Ненулевые векторы $x, y \in E$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $(x, y) = 0$. Система ненулевых векторов $\{e_\alpha\} \subset E$ называется *ортогональной*, если скалярное произведение $(e_\alpha, e_\beta) = 0$ для любых $\alpha \neq \beta$ (т. е. любая пара различных векторов системы ортогональна). Ортогональная система $\{e_\alpha\} \subset E$ называется *ортонормированной*, если $\|e_\alpha\| = 1$ при всех α. Полная ортогональная (ортонормированная) система в евклидовом пространстве E называется *ортогональным* (*ортонормированным*) *базисом* пространства E.

Теорема 3.4. *Любая ортогональная система векторов линейно независима.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольные векторы ортогональной системы $\{e_\alpha\}$ и пусть

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0.$$

Выберем произвольно номер m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ и умножим скалярно обе части этого равенства на e_m:

$$\lambda_1(e_1, e_m) + \lambda_2(e_2, e_m) + \ldots + \lambda_n(e_n, e_m) = 0,$$

откуда, учитывая ортогональность системы, получаем

$$\lambda_m(e_m, e_m) = 0.$$

Но $e_m \neq 0$, ибо $\{e_\alpha\}$ — ортогональная система. Значит, $\lambda_m = 0$. Но номер m произволен, так что равны нулю все коэффициенты нулевой линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. $\square$

Теорема 3.5. *В сепарабельном евклидовом пространстве любая ортогональная система векторов не более чем счетна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать рассматриваемую систему ортонормированной, ибо мощности систем $\{e_\alpha\}$ и $\big\{e_\alpha/\|e_\alpha\|\big\}$, очевидно, одинаковы. Пусть $\{e_\alpha\}$ — ортонормированная система в сепарабельном евклидовом пространстве E. Тогда

$$\rho(e_\alpha, e_\beta) = \|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{(e_\alpha, e_\beta)} = \sqrt{\|e_\alpha\|^2 + \|e_\beta\|^2} = \sqrt{2}$$

при $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим набор непересекающихся шаров $B(e_\alpha, 1/2)$. Всюду плотное в E множество обязано иметь общую точку с каждым шаром. Но в E существует счетное всюду плотное множество. Следовательно, множество рассматриваемых шаров, а вместе с ним и система $\{e_\alpha\}$, не более чем счетно. $\square$

Выясним, как по заданной линейно независимой системе построить ортонормированную систему, порождающую то же подпространство.

Теорема 3.6 (ортогонализация Грама — Шмидта)**.** *Пусть система $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ линейно независима в евклидовом пространстве E. Тогда в E существует такая ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $e_n = a_{n1}g_1 + \ldots + a_{nn}g_n$ и $g_n = b_{n1}e_1 + \ldots + b_{nn}e_n$, причем $a_{nn} \neq 0$ и $b_{nn} \neq 0$. Каждый вектор системы $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ при этом определяется однозначно с точностью до множителя ± 1.*

Доказательство. Индукция по n. Основание индукции:

$$e_1 = a_{11}g_1, \qquad \|e_1\| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \pm\frac{1}{\|g_1\|},$$

где $\|g_1\| \neq 0$, ибо $g_1 \neq 0$ как вектор линейно независимой системы.

Индукционный переход: пусть $e_1, \ldots, e_{n-1}$, удовлетворяющие условиям теоремы, построены. Положим

$$\tilde{e}_n = g_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{nn-1}e_{n-1}, \qquad b_{nk} = (g_n, e_k), \qquad e_n = \pm\frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|},$$

где $\|\tilde{e}_n\| \neq 0$, ибо $\tilde{e}_n \neq 0$ (иначе бы g_n выражался в виде линейной комбинации $e_1, \ldots, e_{n-1}$, и, следовательно, в виде линейной комбинации $g_1, \ldots, g_{n-1}$). По построению e_n выражается в виде линейной комбинации векторов $g_1, \ldots, g_n$, причем

$$e_n = a_{n1}g_1 + \ldots + a_{nn-1}g_{n-1} + a_{nn}g_n, \qquad a_{nn} = \frac{1}{b_{nn}} = \pm\frac{1}{\|\tilde{e}_n\|}.$$

Кроме того, при $k = 1, \ldots, n-1$

$$(\tilde{e}_n, e_k) = (g_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{nn-1}e_{n-1}, e_k) = (g_n, e_k) - b_{nk} = 0,$$

так что e_n ортогонален всем e_k. Очевидно, $\|e_n\| = 1$. Итак, e_n удовлетворяет условиям теоремы, так что теорема доказана по индукции. $\square$

Следствие 3.1. *В сепарабельном евклидовом пространстве существует не более чем счетный ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть E — сепарабельное евклидово пространство, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ — счетное всюду плотное множество. Составим линейно независимую систему $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ из векторов множества $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ (выбирая g_n так, чтобы он не выражался в виде линейной комбинации предыдущих g_j). К системе $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ применим процесс ортогонализации. $\square$

Пример 3.5. Самый простой ортонормированный базис в $\mathbb{P}_2^n$:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Пример 3.6. Самый простой ортонормированный базис в l_2:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots.$$

Ортогональность и нормированность очевидны. Докажем полноту этой системы векторов: если $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$, $x^{(n)} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то

$$\Big(\rho\big(x, x^{(n)}\big)\Big)^2 = \big\|x - x^{(n)}\big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$ как остаток сходящегося ряда.

Пример 3.7. Один из ортогональных базисов в $C_2[a;b]$ и $L_2[a;b]$ — *тригонометрическая система*

$$\frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \qquad \sin\frac{2\pi nt}{b-a}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Ортогональность этой системы проверяется непосредственно; полнота следует из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. Ясно, что из этой системы можно получить ортонормированную, поделив каждый вектор на его длину.

Пример 3.8. Как было указано в примере 3.3, система функций $\{1, t, t^2, \ldots\}$ полна в $C_2[a;b]$ и $L_2[a;b]$. Если применить к ней процесс ортогонализации, мы получим ортонормированных базис этих пространств.

Найдем первые три вектора этого ортонормированного базиса в пространстве $L_2[-1;1]$:

$$\tilde{e}_1 = 1, \qquad e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2\,dt}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tilde{e}_2 = t - (t, e_1)e_1 = t - \int_{-1}^{1} t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,dt \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = t,$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}} = \frac{\sqrt{6}}{2}t,$$

$$\begin{aligned}\tilde{e}_3 = t^2 - (t^2, e_2)e_2 - (t^2, e_1)e_1 = &\\ = t^2 - \int_{-1}^{1} t^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}t\,dt \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}t - \int_{-1}^{1} t^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,dt \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = t^2 - \frac{1}{3},&\end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{t^2 - 1/3}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (t^2 - 1/3)^2\,dt}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Процесс можно продолжить, мы же докажем теперь, что эта система с точностью до множителя ± 1 совпадает с системой

$$g_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t),$$

где

$$P_n(t) = \frac{1}{n!\,2^n}\big((t^2-1)^n\big)^{(n)} \text{ —}$$

многочлены Лежандра на отрезке $[-1;1]$.

Ясно, что $\deg P_n(t) = n$, так что системы многочленов $\{g_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ порождают одно и то же подпространство. Поскольку при $k < n$

$$\left((t^2-1)^n\right)^{(k)}\Big|_{t=-1} = \left((t^2-1)^n\right)^{(k)}\Big|_{t=1} = 0,$$

получаем, взяв для определенности $m > n$ и интегрируя по частям,

$$\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \cdot \left((t^2-1)^m\right)^{(m)} dt =$$
$$= -\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n+1)} \cdot \left((t^2-1)^m\right)^{(m-1)} dt = \ldots =$$
$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n+m)} \cdot (t^2-1)^m \, dt = 0,$$

ибо подынтегральная функция в последнем интеграле тождественно равна нулю. Итак, система $\{g_n\}$ ортогональна. Наконец, при $m = n$ из тех же соображений получаем

$$\int_{-1}^{1} \left(\left((t^2-1)^n\right)^{(n)}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \cdot \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} dt =$$
$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(2n)} \cdot (t^2-1)^n \, dt =$$
$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt = \frac{2 \cdot 2^{2n} \cdot (n!)^2}{2n+1},$$

так что система $\{g_n\}$ ортонормированная.

Но по теореме Грама — Шмидта она определяется однозначно с точностью до множителя ± 1. Итак, $\forall n \; e_n = \pm g_n$, что и требовалось.

Теперь наша цель — обобщить на произвольные сепарабельные евклидовы пространства известное из линейной алгебры разложение вектора конечномерного пространства по базису.

Определение 3.16. Пусть E — евклидово пространство, вектор $x \in E$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система в E. Числа $c_k = (x, e_k)$, $k \in \mathbb{N}$, называются *координатами* или *коэффициентами Фурье* вектора x по системе $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Соответственно формальный ряд и сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

называются *рядом Фурье* вектора x по системе $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ и n-*й частичной суммой* этого ряда.

Выясним теперь, при каком условии ряд Фурье вектора x по ортонормированной системе сходится к самому вектору x, т.е. имеет место искомое разложение вектора по базису. Сначала докажем, что справедлива

Теорема 3.7. *Пусть E — евклидово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система векторов в E, вектор $x \in E$. Из всех сумм вида*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

расстояние $\|x - S_n\|$ минимально для n-й частичной суммы ряда Фурье вектора x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $c_k = (x, e_k) = a_k + ib_k$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|x - S_n\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} c_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{c_k} + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} 2(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right) - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) = \\
&= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Поскольку вектор x и система $\{e_k\}$ заданы, то минимизировать это расстояние мы можем только подходящим выбором чисел λ_k. Очевидно, оно минимально при $\lambda_k = c_k$, т. е. для частичной суммы ряда Фурье. □

Из равенства, полученного при доказательстве теоремы 3.7, имеем при $\lambda_k = c_k$

$$0 \leqslant \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \tag{3.3}$$

Предельным переходом при $n \to \infty$ в (3.3) получается

Теорема 3.8 (неравенство Бесселя). *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система в евклидовом пространстве* E, $x \in E$, $c_k = (x, e_k)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Из (3.3) следует, что для сходимости ряда Фурье вектора x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ к x необходимо и достаточно, чтобы неравенство Бесселя обращалось в равенство.

Определение 3.17. Ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E называется *замкнутой*, если для любого $x \in E$ его коэффициенты Фурье удовлетворяют *равенству Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Итак, для того, чтобы любой вектор евклидова пространства можно было представить в виде сходящегося к нему ряда Фурье по ортонормированной системе, необходимо и достаточно, чтобы эта система была замкнутой. Выясним теперь, является ли любой ортонормированный базис евклидова пространства замкнутой системой и, наоборот, полна ли любая замкнутая ортонормированная система.

Теорема 3.9. *Замкнутость ортонормированной системы векторов* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *равносильна ее полноте.*

Доказательство. 1. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E замкнута. Тогда для любого вектора $x \in E$ ряд Фурье по этой системе сходится к x, т. е. x может быть сколь угодно точно приближен частичными суммами этого ряда — линейными комбинациями векторов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Но это означает, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в E полна.

2. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве E полна. Это означает, что любой вектор $x \in E$ может быть с любой точностью аппроксимирован линейными комбинациями векторов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Но по теореме 3.7 частичные суммы ряда Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ дают не худшую аппроксимацию. Значит, ряд Фурье вектора x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x, т. е. выполняется равенство Парсеваля. $\square$

3.3 Гильбертовы пространства

Определение 3.18. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Сначала приведем без доказательств обобщения полученных в предыдущем параграфе фактов на необязательно сепарабельные гильбертовы пространства.

Теорема 3.10. *В гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис* $\{e_\alpha\}$.

Ометим, что этот базис, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, может состоять из несчетного числа векторов. Однако, по такому базису тоже можно разложить любой вектор гильбертова пространства. Именно, справедлива

Теорема 3.11. *Если* E *— гильбертово пространство, а* $\{e_\alpha\}$ *— его ортонормированный базис, то для любого вектора* $x \in E$ *имеют место равенства*

$$x = \sum_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha, \qquad \|x\|^2 = \sum_\alpha \big|(x, e_\alpha)\big|^2, \tag{3.4}$$

где в суммах имеется не более чем счетное число отличных от нуля слагаемых.

Таким образом, разложение любого вектора евклидова пространства по ортонормированному базису возможно, если это пространство полно (или, как мы выяснили в предыдущем параграфе, если оно хотя бы сепарабельно). Теперь мы докажем в некотором смысле обратную теорему.

Теорема 3.12 (Рис, Фишер)**.** *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $\{e_\alpha\}$ *— ортонормированная система в* H, $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ *— такие числа, что ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \tag{3.5}$$

сходится. Тогда найдется такой вектор $x \in H$, *что*

$$c_k = (x, e_k), \qquad \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|x\|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

и пусть для определенности $m < n$, тогда

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right) = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2,$$

причем последняя сумма выбором m, n может быть сделана сколь угодно малой, ибо ряд (3.5) сходится. Значит, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, а пространство H полно. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $x \in H$. При этом

$$(x, e_k) = (x - x_n, e_k) + (x_n, e_k) \to c_k \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

поскольку второе слагаемое равно c_k при $n \geqslant k$, а первое стремится к нулю по теореме 3.3. Но тогда $(x, e_k) = c_k$, т. к. левая часть здесь от n не зависит. Кроме того, из

$$(x, x) - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right) = \|x - x_n\|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2,$$

что и требовалось. □

С помощью теоремы Риса — Фишера получается следующий критерий полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве.

Теорема 3.13. *Ортонормированная система $\{e_\alpha\}$ в гильбертовом пространстве H полна тогда и только тогда, когда в пространстве H нет ни одного ненулевого вектора, ортогонального всем векторам из системы $\{e_\alpha\}$.*

Доказательство. 1. Пусть система $\{e_\alpha\}$ полна. Тогда, в силу теоремы 3.11, если при любом α имеем $(x, e_\alpha) = 0$, то из второго равенства в (3.4) получаем

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} \left|(x, e_\alpha)\right|^2 = 0,$$

так что $x = 0$.

2. Пусть ортонормированная система $\{e_\alpha\}$ не полна. Тогда существует такой $y \in H$, что для любого набора $\{e_k\}$ векторов из $\{e_\alpha\}$

$$\|y\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \qquad \text{где} \qquad c_k = (y, e_k).$$

По теореме Риса — Фишера найдется такой $x \in H$, что для тех же c_k мы будем иметь

$$(x, e_k) = c_k, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Тогда $(y - x, e_k) = (y, e_k) - (x, e_k) = c_k - c_k = 0$, т. е. вектор $y - x$ ортогонален всем e_k. Но

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \|y\|^2,$$

так что $y - x \neq 0$. $\square$

Из равенства Парсеваля и теоремы Рисса — Фишера ясно, что между l_2 и любым сепарабельным гильбертовым пространством можно установить взаимно однозначное соответствие. Более того, справедлива

Теорема 3.14. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что любое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2.

Выберем в H какую-нибудь полную ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и поставим вектору $x \in H$ в соответствие последовательность его коэффициентов Фурье $(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ по этой системе. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 < \infty,$$

так что $(c_1, \ldots, c_k, \ldots) \in l_2$. Обратно, пусть $(c_1, \ldots, c_k, \ldots) \in l_2$, тогда по теореме Риса — Фишера найдется такой вектор $x \in H$, что последовательность $(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ будет его последовательностью коэффициентов Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Это соответствие взаимно однозначно.

Если вектору x соответствует последовательность $(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$, а вектору y — последовательность $(d_1, \ldots, d_k, \ldots)$, то

$$(x + y, e_k) = (x, e_k) + (y, e_k) = c_k + d_k, \qquad (\lambda x, e_k) = \lambda(x, e_k) = \lambda c_k,$$

так что вектору $x + y$ соответствует $(c_1 + d_1, \ldots, c_k + d_k, \ldots)$, а вектору λx соответствует $(\lambda c_1, \ldots, \lambda c_k, \ldots)$.

Наконец, из равенства

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=1}^{n} d_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d_k}$$

предельным переходом (см. теорему 3.3) получаем, что скалярному произведению векторов x и y в H соответствует скалярное произведение последовательностей $(c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ и $(d_1, \ldots, d_k, \ldots)$ в l_2. $\square$

Примечание 3.3. Любое подпространство гильбертова пространства является либо гильбертовым пространством (см. примечание 2.4), либо конечномерным евклидовым пространством. Если гильбертово пространство сепарабельно, то и любое его подпространство по теореме 2.8 тоже сепарабельно. Отсюда, в частности, следует, что в любом подпространстве гильбертова пространства существует ортонормированный базис, а если рассматриваемое пространство сепарабельно, то этот базис состоит из не более чем счетного числа векторов.

Рассмотрим теперь вопрос о подпространствах гильбертова пространства.

Определение 3.19. Пусть M — подпространство евклидова пространства E. Множество $M^\perp = \big\{x \in E\colon \forall y \in M\ (x, y) = 0\big\}$ называется *ортогональным дополнением* к M.

Теорема 3.15. *Ортогональное дополнение $M^\perp$ к подпространству M гильбертова пространства H само является подпространством пространства H.*

Доказательство. Если $x_1, x_2 \in M^\perp$, то для любого $y \in M$ и любых чисел λ, μ справедливо $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y) = 0$, так что $M^\perp$ — линейное многообразие в H. Осталось доказать его замкнутость. Пусть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность векторов из $M^\perp$, сходящаяся к $x \in H$. Тогда по теореме 3.3

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = 0,$$

так что $x \in M^\perp$. $\square$

Теперь нашей целью будет получить разложение вектора по его проекциям.

Теорема 3.16. *Если M — подпространство гильбертова пространства H, то любой вектор $h \in H$ можно единственным образом представить в виде $h = x + x^\perp$, где $x \in M$, $x^\perp \in M^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\{e_\alpha\}$ — полная ортонормированная система в M, $c_\alpha = (h, e_\alpha)$,

$$x = \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha.$$

Тогда

$$\sum_\alpha |c_\alpha|^2 < \infty,$$

так что вектор x существует и принадлежит M. Пусть $x^\perp = h - x$. Тогда $(x^\perp, e_\alpha) = 0$, ибо $(x, e_\alpha) = (h, e_\alpha) = c_\alpha$. Поскольку любой вектор $y \in M$ представим в виде

$$y = \sum_\alpha d_\alpha e_\alpha,$$

имеем

$$(y, x^\perp) = \sum_\alpha d_\alpha (e_\alpha, x^\perp) = 0.$$

Значит, $x^\perp \in M^\perp$.

Пусть теперь $h = x + x^\perp = y + y^\perp$, где $x, y \in M$, а $x^\perp, y^\perp \in M^\perp$. Тогда $(y, e_\alpha) = (h, e_\alpha) = c_\alpha$, откуда $x = y$, $x^\perp = y^\perp$. □

Следствие 3.2. $\left(M^\perp\right)^\perp = M$.

Следствие 3.3. *Любая ортонормированная система в гильбертовом пространстве H может быть расширена до полной в H системы.*

Доказательство. Ортонормированная система векторов $\{e_\alpha\}$ порождает некоторое подпространство M пространства H. Найдем полную в $M^\perp$ ортонормированную систему векторов $\left\{e_\alpha^\perp\right\}$. Тогда ортонормированная система векторов, составленная из систем $\{e_\alpha\}$ и $\left\{e_\alpha^\perp\right\}$, полна в пространстве H. □

Определение 3.20. Пусть M — подпространство евклидова пространства E, $M^\perp$ — ортогональное дополнение к M. Если любой вектор $h \in E$ представим в виде $h = x + x^\perp$, где $x \in M$, $x^\perp \in M^\perp$, то пространство E является *прямой суммой* взаимно ортогональных подпространств M и $M^\perp$. Обозначение: $E = M \oplus M^\perp$.

Понятие прямой суммы легко обобщается на любое конечное или счетное количество подпространств.

Определение 3.21. Евклидово пространство E является прямой суммой своих подпространств $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$, если подпространства M_k попарно ортогональны (т. е. любой вектор из M_k ортогонален любому вектору из M_j при $k \neq j$) и любой вектор $h \in E$ представим в виде $h = h_1 + \ldots + h_k + \ldots$, где $h_k \in M_k$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty.$$

Обозначения: $E = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k \oplus \ldots$ или $E = \bigoplus_{k=1}^{\infty} M_k$.

Примечание 3.4. Можно доказать, что если представление h в виде, указанном в определении 3.21, существует, то оно единственно и

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|^2.$$

3.4 Задачи

Решения этих или подобных им задач можно найти в книгах [3, 4].

Задача 3.1. Пусть L — вещественное линейное пространство, $x, y \in L$. *Отрезком*, соединяющим x и y, называется множество

$$[x; y] = \{\lambda x + \mu y \colon \lambda, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu = 1\}.$$

Выпуклым множеством в L называется множество M, которое вместе с любыми двумя точками содержит отрезок, их соединяющий. *Ядром* множества $M \subset L$ называется множество $J(M)$ таких $x \in M$, что для любого $y \in L$ найдется такое $\delta = \delta(y) > 0$, что при $|t| < \delta$ вектор $x + ty \in M$. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется *выпуклым телом*. Доказать, что:

а) ядро выпуклого множества выпукло;

б) пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло;

в) пересечение выпуклых тел не всегда является выпуклым телом;

г) единичный шар в любом вещественном линейном нормированном пространстве является выпуклым телом;

д) гильбертов кирпич (см. задачу 2.21) и эллипсоид

$$M = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \colon \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \leqslant 1 \right\}$$

являются в l_2 выпуклыми множествами, но не выпуклыми телами.

Задача 3.2. Является ли множество M подпространством линейных нормированных пространств L и L'?

а) $M = \left\{ x \in L_2[-1;1] \colon \int_{[-1;1]} \frac{x(t)}{\sqrt[4]{|t|}}\, d\mu \right\}$, $L = L_2[-1;1]$, $L' = L_1[-1;1]$.

б) $M = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in l_1 \colon \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$, $L = l_1$, $L' = l_2$.

Задача 3.3. Доказать, что в евклидовом пространстве E:

а) справедлива *теорема Пифагора*: *если* $(x_k, x_j) = 0$ *при* $k \neq j$, *то*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

б) для любых $x, y \in E$ выполняется *равенство параллелограмма*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big);$$

в) для любых $x, y \in E$ выполняется *поляризационное тождество*:

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2;$$

г) для любых $x, y, z \in E$ выполняется *тождество Аполлония*:

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\| z - \frac{x+y}{2} \right\|^2;$$

д) для любых $x, y, z, t \in E$ выполняется *неравенство Птолемея*:

$$\|x-z\| \cdot \|y-t\| \leqslant \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|.$$

Задача 3.4. Доказать, что пространства $\mathbb{P}_p^n$, l_p ($p \geqslant 1$, $p \neq 2$) и $C[0;1]$ не являются евклидовыми: в них не выполняется равенство параллелограмма (см. задачу 3.3).

Задача 3.5. Для функции $x(t) = e^t$ найти такой многочлен $P(t)$ второй степени, что норма $\|x - P\|$ в пространстве $L_2[0;1]$ минимальна.

Задача 3.6. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ — фиксированная положительная последовательность. Рассмотрим пространство

$$l_{2,\alpha} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \colon\ x_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k y_k.$$

Доказать, что $l_{2,\alpha}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Построить в $l_{2,\alpha}$ ортонормированный базис при а) $\alpha_k = k$; б) $\alpha_k = k^2$; в) $\alpha_k = e^{-k}$.

Задача 3.7. Показать, что в пространстве таких вещественнозначных функций, что существует интеграл

$$\int_{[-1;1]} \frac{\big(x(t)\big)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, d\mu,$$

со скалярным произведением, определенным формулой

$$(x, y) = \int_{[-1;1]} \frac{x(t)y(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, d\mu,$$

ортогонализация системы $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ приводит (с точностью до множителя ± 1) к *многочленам Чебышёва*

$$T_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos t).$$

Задача 3.8. Пусть H — гильбертово пространство, M — его подпространство. Доказать, что $M = H \Leftrightarrow M^{\perp} = \{0\}$.

Задача 3.9. Доказать, что подпространство, порожденное в l_2 системой векторов $x_n = (1, 2^{-n}, 2^{-2n}, \ldots)$, совпадает с самим l_2.

4 Линейные функционалы и операторы

4.1 Линейные функционалы

Определение 4.1. Пусть L — линейное пространство. Отображение $f\colon L \to \mathbb{P}$ называется *линейным функционалом*, определенным на L, если для любых векторов $x, y \in L$ и любых чисел $\lambda \in \mathbb{P}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Из определения 2.7 для линейного функционала получается

Определение 4.2. Линейный функционал f, определенный на линейном нормированном пространстве L, называется *непрерывным* на векторе $x_0 \in L$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| < \varepsilon$, как только $\|x - x_0\| < \delta$. Если f непрерывен на любом векторе пространства L, то f называется *непрерывным на всем пространстве* L.

Для линейных функционалов непрерывность на одном векторе и на всем пространстве эквивалентны, что показывает следующая

Теорема 4.1. *Если линейный функционал f непрерывен на каком-либо одном векторе пространства L, то f непрерывен на всем L.*

Доказательство. Пусть f непрерывен на некотором векторе x_0. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| < \varepsilon$, как только $\|x - x_0\| < \delta$. Пусть $y_0 \in L$ — произвольный вектор. Сдвинем δ-окрестность x_0 на $y_0 - x_0$. Тогда для всех y из полученной окрестности имеем $y = x + y_0 - x_0$, так что $\|y - y_0\| = \|x - x_0\| < \delta$, а значит, справедливо неравенство $\bigl|f(y) - f(y_0)\bigr| = \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| < \varepsilon$. $\square$

Выясним теперь связь между непрерывностью на всем пространстве и ограниченностью линейного функционала.

Теорема 4.2. *Линейный функционал f непрерывен на всем L тогда и только тогда, когда f ограничен на некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. 1. Если f непрерывен на L, то f непрерывен на 0, так что для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\bigl|f(x)\bigr| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta$, т. е. f ограничен в окрестности $\|x\| < \delta$ нуля.

2. Пусть $\bigl|f(x)\bigr| < C$ при $\|x\| < c$. Растянем c-окрестность нуля в ε/C раз. Все y из полученной окрестности имеют вид $y = \varepsilon x/C$, так что $\bigl|f(y)\bigr| = \varepsilon\bigl|f(x)\bigr|/C < \varepsilon$ при $\|x\| < c$, т. е. при $\|y\| < \delta = \varepsilon c/C$. $\square$

Следствие 4.1. *Линейный функционал f непрерывен на всем L тогда и только тогда, когда f ограничен на единичном шаре.*

Это следствие позволяет нам ввести следующее

Определение 4.3. *Нормой* непрерывного линейного функционала f, определенного на всем линейном нормированном пространстве L, называется число

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \bigl|f(x)\bigr|.$$

Примечание 4.1. Легко видеть, что норма непрерывного линейного функционала f, определенного на всем линейном нормированном пространстве L, удовлетворяет равенствам

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\bigl|f(x)\bigr|}{\|x\|} = \inf \bigl\{C\colon \forall x \in L\ \bigl|f(x)| \leqslant C\|x\|\bigr\}.$$

Таким образом, норма функционала оценивает сверху отношение модуля значения функционала на векторе к длине этого вектора.

Чтобы найти норму функционала $f(x)$, сначала для его модуля получают оценку сверху вида $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant C\|x\|$, откуда $\|f\| \leqslant C$. Потом подбирают либо такой вектор $x_0 \neq 0$, что $\bigl|f(x_0)\bigr| = C\|x_0\|$, либо такую последовательность векторов $\{x_n\}$, что отношение $\bigl|f(x_n)\bigr|/\|x_n\|$ стремится к $\|f\|$ при $n \to \infty$. Так получается оценка снизу: $\|f\| \geqslant C$. Обе эти оценки могут выполняться вместе только в случае равенства, так что $\|f\| = C$. Случаи, в которых приходится подбирать не вектор, а последовательность для оценки нормы снизу, возникают из-за того, что во многих пространствах единичный шар некомпактен (см. пример 2.36).

Пример 4.1. Пусть в $\mathbb{P}^n$

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Любой вектор $x \in \mathbb{P}^n$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

Пусть f — произвольный линейный функционал на $\mathbb{P}^n$. Обозначим $\varphi_k = f(e_k)$, $k = 1, \ldots, n$; кроме того, далее нам понадобится обозначение $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k.$$

Пример 4.2. В обозначениях примера 4.1 для любого линейного функционала f, определенного на $\mathbb{P}_1^n$, $\|f\| = \|\varphi\|_\infty$. Действительно,

$$\big|f(x)\big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |\varphi_k| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|\varphi\|_\infty \cdot \|x\|_1,$$

так что f непрерывен и

$$\|f\| \leqslant \|\varphi\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_k|.$$

Пусть указанный максимум достигается при $k = m$, а y — вектор, m-я координата которого равна 1, а остальные координаты равны 0. Тогда $\|y\|_1 = 1$ и

$$\big|f(y)\big| = |\varphi_m| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_k| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_k| \cdot \|y\|_1 = \|\varphi\|_\infty \cdot \|y\|_1,$$

так что $\|f\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$. Но тогда $\|f\| = \|\varphi\|_\infty$.

Пример 4.3. Легко доказать, что в обозначениях примера 4.1 для любого линейного функционала f на $\mathbb{P}_\infty^n$ имеем $\|f\| = \|\varphi_k\|_1$.

Пример 4.4. В обозначениях примера 4.1 для любого линейного функционала f, определенного на $\mathbb{P}_p^n$, $1 < p < \infty$, $\|f\| = \|\varphi\|_q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Действительно, из неравенства Гёльдера имеем оценку сверху

$$\big|f(x)\big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k\varphi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \cdot \|\varphi\|_q,$$

так что f непрерывен и его норма $\|f\| \leqslant \|\varphi\|_q$. Далее, для вектора[1] $y = \big(|\varphi_1|^{q-1}e^{-i\arg\varphi_1}, \ldots, |\varphi_n|^{q-1}e^{-i\arg\varphi_n}\big)$ имеем

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \big||\varphi_k|^{q-1}e^{-i\arg\varphi_k}\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

ибо $p(q-1) = q$. Отсюда

$$\big|f(y)\big| = \left|\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^{q-1}e^{-i\arg\varphi_k}\varphi_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^q =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^q\right)^{1-\frac{1}{q}} = \|\varphi\|_q \cdot \|y\|_p,$$

так что $\|f\| \geqslant \|\varphi\|_q$. Но тогда $\|f\| = \|\varphi\|_q$.

[1] Здесь и далее считаем $\arg 0 = 0$.

Пример 4.5. Пусть f — линейный функционал, определенный для $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in c_0$ формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k,$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in l_1$ — фиксированный вектор. Имеем

$$\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |\varphi_k| \leqslant \sup_k |x_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| = \|x\|_\infty \cdot \|\varphi\|_1,$$

так что функционал f непрерывен и его норма $\|f\| \leqslant \|\varphi\|_1$. Пусть $y^{(n)} = (e^{-i \arg \varphi_1}, \ldots, e^{-i \arg \varphi_n}, 0, \ldots)$. Тогда $\bigl|y^{(n)}\bigr|_\infty = 1$ и

$$\Bigl|f\bigl(y^{(n)}\bigr)\Bigr| = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| \to \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

так что $\|f\| \geqslant \|\varphi\|_1$. Итак, $\|f\| = \|\varphi\|_1$.

Покажем, что для любого непрерывного на всем c_0 линейного функционала F найдется такой вектор $\Phi \in l_1$, что

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Phi_k.$$

Пусть в c_0 $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, …. Для произвольного вектора $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in c_0$ рассмотрим последовательность $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in c_0$. Тогда

$$\bigl\|x - x^{(n)}\bigr\|_\infty = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

т. е. x представим в виде сходящегося к нему в c_0 ряда

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Положим $\Phi_k = F(e_k)$. Из непрерывности F имеем

$$F(x) = F\left(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} F\bigl(x^{(n)}\bigr) = \lim_{n\to\infty} F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k F(e_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \Phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Phi_k,$$

и, кроме того, $\forall x \in c_0$ $\bigl|F(x)\bigr| \leqslant \|F\| < \infty$. Тогда при любом n

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi_k| = \bigl|F(e^{-i \arg \Phi_1}, \ldots, e^{-i \arg \Phi_n}, 0, \ldots)\bigr| \leqslant \|F\| < \infty,$$

откуда и
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi_k| \leqslant \|F\| < \infty, \qquad \text{т. е.} \qquad \Phi \in l_1.$$

Пример 4.6. Как и в предыдущих примерах получаем, что любой непрерывный на всем l_1 линейный функционал представляется в виде
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \qquad \text{где} \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in m,$$
и, обратно, любой вектор $\varphi \in m$ задает непрерывный линейный функционал f указанного вида на l_1. При этом $\|f\| = \|\varphi\|_\infty$.

Пример 4.7. Аналогично предыдущим примерам можно показать, что произвольный непрерывный линейный функционал, определенный на всем l_p, $1 < p < \infty$, представляется в виде
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \qquad \text{где} \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots) \in l_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
и, обратно, любой вектор $\varphi \in l_q$ задает на l_p непрерывный линейный функционал f указанного вида. При этом $\|f\| = \|\varphi\|_q$.

Пример 4.8. Произвольный непрерывный линейный функционал, определенный на всем $L_p(A)$, $1 \leqslant p < \infty$, представляется в виде
$$f(x) = \int_A x(t)\varphi(t)\, d\mu, \qquad \text{где} \qquad \varphi(t) \in L_q(A), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
(при $p = 1$ считаем $q = \infty$). Обратно, любая функция $\varphi(t) \in L_q(A)$ задает непрерывный линейный функционал f указанного вида на $L_p(A)$. При этом $\|f\| = \|\varphi\|_q$. Мы примем это утверждение без доказательства.

Пример 4.9. Пусть E — произвольное евклидово пространство, $\varphi \in E$ — фиксированный вектор. Рассмотрим на E линейный функционал f вида
$$f(x) = (x, \varphi).$$
Из неравенства Коши — Буняковского
$$\bigl|f(x)\bigr| = \bigl|(x, \varphi)\bigr| \leqslant \|x\| \cdot \|\varphi\|,$$
так что f непрерывен и $\|f\| \leqslant \|\varphi\|$. При этом
$$\bigl|f(\varphi)\bigr| = (\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2,$$
так что $\|f\| \geqslant \|\varphi\|$. Итак, $\|f\| = \|\varphi\|$.

Пример 4.10. Пусть $t_0 \in [a;b]$ — фиксированная точка. Рассмотрим на $C[a;b]$ линейный функционал f вида

$$f(x) = x(t_0).$$

Очевидно, $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \|x\|_\infty$, так что f непрерывен и $\|f\| \leqslant 1$. При этом для $x_0 \equiv 1$ имеем $\|x_0\|_\infty = 1$ и $\bigl|f(x_0)\bigr| = 1$, так что $\|f\| \geqslant 1$. Таким образом, $\|f\| = 1$.

Пример 4.11. Пусть $\varphi \in C[a;b]$ — фиксированная неотрицательная функция. Рассмотрим на $C[a;b]$ линейный функционал f вида

$$f(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt.$$

Имеем

$$\bigl|f(x)\bigr| \leqslant \int_a^b \bigl|x(t)\varphi(t)\bigr|\,dt \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x(t)\bigr| \cdot \int_a^b \varphi(t)\,dt,$$

так что f непрерывен и $\|f\|$ не превосходит интеграла $\varphi(t)$ на $[a;b]$. С другой стороны, для $y(t) \equiv 1$ значение $\bigl|f(y)\bigr|$ равно этому интегралу. Значит, $\|f\|$ не меньше этого интеграла. Итак,

$$\|f\| = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Определение 4.4. Пусть f — линейный функционал на линейном пространстве L. *Ядром* функционала f называется множество векторов, на которых он обращается в ноль:

$$\operatorname{Ker} f = \bigl\{x \in L \colon f(x) = 0\bigr\}.$$

Теорема 4.3. *Если L — линейное нормированное пространство, а f — непрерывный на всем L линейный функционал, то* $\operatorname{Ker} f$ *— подпространство в L.*

Доказательство. Если $x, y \in \operatorname{Ker} f$, то для произвольных чисел λ, μ имеем $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0$, так что $\lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker} f$. Осталось доказать замкнутость. Если x — предельная точка $\operatorname{Ker} f$, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset \operatorname{Ker} f$, сходящаяся к x. Тогда из непрерывности f имеем

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

так что $x \in \operatorname{Ker} f$. □

Приведем еще формулировки одной важной теоремы и ее следствия. Их доказательства можно найти в книге [1].

Теорема 4.4 (Хан, Ба́нах)**.** *Пусть L — линейное нормированное пространство, L_0 — его подпространство, f_0 — непрерывный линейный функционал, определенный на L_0. Тогда существует такой непрерывный линейный функционал f, определенный на всем L, что*

$$\forall x \in L_0 \ f(x) = f_0(x) \qquad \text{и} \qquad \|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}.$$

Следствие 4.2. *Пусть $x_0 \neq 0$ — вектор линейного нормированного пространства L. Существует такой непрерывный на всем L линейный функционал f, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.*

4.2 Сопряженное пространство

Определение 4.5. Пусть f и g — два линейных функционала на линейном пространстве L. Их *суммой* называется (очевидно, линейный) функционал $f + g$, определенный на L формулой

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Произведением функционала f на число λ называется (очевидно, линейный) функционал λf, определенный на L формулой

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Легко видеть, что если L — нормированное пространство, то линейные непрерывные на всем L функционалы с операциями сложения и умножения на числа, введенными в определении 4.5, и нормой, введенной в определении 4.3, образуют линейное нормированное пространство L^*.

Определение 4.6. Линейное нормированное пространство L^* непрерывных линейных функционалов, определенных на всем линейном нормированном пространстве L, называется *сопряженным к* L.

Пример 4.12. Из примеров 4.1–4.8 в частности следует, что имеют место следующие изометрические изоморфизмы:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}_p^n)^* &\cong \mathbb{P}_q^n, && 1 \leqslant p \leqslant \infty;\\
(l_p)^* &\cong l_q, && 1 < p < \infty;\\
(l_1)^* &\cong m;\\
(c_0)^* &\cong l_1;\\
\big(L_p(A)\big)^* &\cong L_q(A), && 1 \leqslant p < \infty,
\end{aligned}$$

где числа p и q связаны соотношением $p^{-1} + q^{-1} = 1$ — *сопряженные индексы.*

Теорема 4.5 (теорема представлений Риса). *Пусть H — гильбертово пространство. Любой вектор $\varphi \in H$ задает функционал $f \in H^*$ вида*

$$f(x) = (x, \varphi),$$

и обратно, любой функционал $f \in H^*$ единственным образом представляется в указанном виде. При этом

$$\|f\| = \|\varphi\|.$$

Доказательство. Первая часть теоремы и равенство $\|f\| = \|\varphi\|$ уже доказаны в примере 4.9. Докажем теперь для произвольного функционала $f \in H^*$ существование и единственность такого вектора $\varphi \in H$, что $f(x) = (x, \varphi)$. Если функционал $f \equiv 0$, то и вектор $\varphi = 0$. Если же $f \neq 0$, то $\operatorname{Ker} f \neq H$, так что $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} \neq \{0\}$ (см. задачу 3.8). Пусть $\psi \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ — ненулевой вектор. Положим

$$\varphi = \frac{\overline{f(\psi)}}{\|\psi\|^2} \cdot \psi.$$

Имеем

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(\psi)} \cdot \psi\right) = f(x) - \frac{f(x) \cdot f(\psi)}{f(\psi)} = 0 \;\Rightarrow\; x - \frac{f(x)}{f(\psi)}\psi \in \operatorname{Ker} f.$$

Тогда, поскольку $\psi \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$,

$$(x, \psi) - \frac{f(x)}{f(\psi)} \cdot \|\psi\|^2 = (x, \psi) - \frac{f(x)}{f(\psi)} \cdot (\psi, \psi) = \left(x - \frac{f(x)}{f(\psi)} \cdot \psi, \psi\right) = 0,$$

откуда

$$f(x) = \frac{f(\psi)}{\|\psi\|^2} \cdot (x, \psi) = (x, \varphi),$$

т. е. существование такого $\varphi \in H$ доказано. Единственность следует из того, что если для $\varphi, \varphi' \in H$ имеем $f(x) = (x, \varphi) = (x, \varphi')$, то

$$\forall x \in H \qquad 0 = f(x) - f(x) = (x, \varphi - \varphi'),$$

т. е. $\varphi = \varphi'$. $\square$

Примечание 4.2. Из теоремы представлений Риса, в частности, следует, что для вещественного гильбертова пространства H сопряженное пространство $H^* \cong H$, а для комплексного гильбертова пространства H справедливо аналогичное утверждение с той лишь поправкой, что изоморфизм здесь будет *сопряженно-линейный*, т. е. если $\lambda \in \mathbb{C}$, то вектору $\lambda\varphi$ соответствует функционал $\overline{\lambda} f$.

Теорема 4.6. *Пространство L^* полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функционалов из L^*. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такой N, что для всех $m, n \geqslant N$ выполнено $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, откуда $\forall x \in L$

$$\big|f_m(x) - f_n(x)\big| \leqslant \|f_m - f_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|.$$

Это означает, что числовая последовательность $\big\{f_n(x)\big\}$ при любом $x \in L$ фундаментальна и, следовательно, сходится. Обозначим ее предел через $f(x)$. Проверим, что $f \in L^*$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится к f. Во-первых, для любых векторов $x, y \in L$ и чисел λ, μ имеем

$$f(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = \\ = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)\big) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Во-вторых, из неравенства $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon\|x\|$ предельным переходом при $m \to \infty$ получаем неравенство $\big|f(x) - f_n(x)\big| \leqslant \varepsilon\|x\|$, откуда $\big\|f(x) - f_n(x)\big\| \leqslant \varepsilon$. Значит, функционал $f(x) - f_n(x)$ непрерывен. Но тогда и функционал $f(x) = f_n(x) + \big(f(x) - f_n(x)\big)$ непрерывен. Кроме того, из неравенства $\big\|f(x) - f_n(x)\big\| \leqslant \varepsilon$ следует, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f. $\square$

Примечание 4.3. Теорема 4.6 верна, даже если L не полно.

Определение 4.7. Пространство $L^{**} = (L^*)^*$ называется *вторым сопряженным* к линейному нормированному пространству L.

Рассмотрим при фиксированном $x \in L$ функционал $\xi_x \colon L^* \to \mathbb{P}$, ставящий каждому $f \in L^*$ в соответствие значение $f(x)$. Функционал ξ_x линеен, ибо для любых $f, g \in L^*$ и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{P}$

$$\xi_x(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \xi_x(f) + \mu \xi_x(g).$$

Кроме того, из неравенства $\big|\xi_x(f)\big| = \big|f(x)\big| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$ вытекает, что функционал ξ_x непрерывен и $\|\xi_x\| \leqslant \|x\|$. Итак, $\xi_x \in L^{**}$. В силу следствия теоремы Хана — Банаха, существует такой функционал $g \in L^*$, что $\|g\| = 1$ и $g(x) = \|x\|$. Отсюда $\big|\xi_x(g)\big| = \big|g(x)\big| = \|x\|$, так что, окончательно, $\|\xi_x\| = \|x\|$.

Определение 4.8. *Каноническим вложением* линейного нормированного пространства L в его второе сопряженное пространство L^{**} называется отображение, ставящее каждому $x \in L$ в соответствие определенный выше функционал $\xi_x \in L^{**}$.

Несложно проверить, что каноническое вложение линейно. Кроме того, поскольку $\|\xi_x\| = \|x\|$, каноническое вложение является изометрией самого пространства L и образа $\operatorname{Im} L \subset L^{**}$ пространства L при этом отбражении. Ясно, что важен случай, когда образ пространства L при каноническом вложении совпадает со всем пространством L^{**}. Введем соответствующее

Определение 4.9. Линейное нормированное пространство L называется *рефлексивным*, если его каноническое вложение в L^{**} является изометрическим изоморфизмом.

Примечание 4.4. Во-первых, отметим, что из определения 4.9 вытекает, что если пространство рефлексивно, то оно изометрически изоморфно своему второму сопряженному пространству. Обратное, вообще говоря, неверно: существует пример пространства, изометрически изоморфного своему второму сопряженному пространству, для которого каноническое вложение не является изометрическим изоморфизмом. Во-вторых, так как рефлексивное пространство изометрически изоморфно своему второму сопряженному пространству, а последнее по теореме 4.6 полно, то всякое рефлексивное пространство полно. Следовательно, неполное пространство рефлексивным быть не может.

Пример 4.13. Пространства c_0, m, l_1, $L_1(A)$, $L_\infty(A)$, $C[a;b]$ неизоморфны своим вторым сопряженным пространствам и, следовательно, нерефлексивны. Пространства $C_p[a;b]$ неполны и, следовательно, нерефлексивны. Можно доказать, что пространства $\mathbb{P}_1^n$, $\mathbb{P}_\infty^n$, $\mathbb{P}_p^n$, l_p и $L_p(A)$ (при $1 < p < \infty$) рефлексивны. Рефлексивным является также любое гильбертово пространство.

Примечание 4.5. Каноническое вложение позволяет рассматривать любой вектор $x \in L$ как функционал из второго сопряженного пространства L^{**}. Поэтому для записи значения $f(x)$ непрерывного линейного функционала $f \in L^*$ на векторе $x \in L$ бывает удобно использовать симметричное обозначение

$$f(x) = (x, f),$$

для гильбертова пространства оправданное еще и теоремой представлений Риса. При фиксированном $f \in L^*$ выражение (x, f) рассматривается как непрерывный линейный функционал на пространстве L, а при фиксированном x — как непрерывный линейный функционал на сопряженном пространстве L^*.

4.3 Линейные операторы

Определение 4.10. Пусть L и L' — два линейных пространства, D_A — линейное многообразие в L. *Линейным оператором*, действующим из L в L', называется такое отображение $A\colon D_A \to L'$, что для любых $x, y \in D_A$ и любых чисел λ

$$A(x+y) = Ax + Ay, \qquad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

При этом множество $D_A \subset L$ называется *множеством определения*, множество $\operatorname{Ker} A = \{x \in D_A\colon Ax = 0\} \subset L$ — *ядром*, а множество $\operatorname{Im} A = \{y \in L' \mid \exists x \in D_A\colon y = Ax\} \subset L'$ — *образом* оператора A.

В определении 4.10 мы подчеркиваем, что оператор может быть определен не на всем пространстве L; мы не рассматривали этот случай для функционалов, но для операторов он понадобится нам в дальнейшем.

Примечание 4.6. Ядро и образ линейного оператора являются линейными многообразиями. Доказательство этого факта несложно и остается читателю в качестве упражнения.

Из определения 2.7 для линейного оператора получается

Определение 4.11. Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, A — линейный оператор, действующий из L в L', D_A — множество определения оператора A. Оператор A называется *непрерывным на векторе* $x_0 \in D_A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|Ax - Ax_0\|_{L'} < \varepsilon$, при всех $x \in D_A$, для которых $\|x - x_0\|_L < \delta$.

Для функционалов мы вводили определения их непрерывности и ограниченности на всем пространстве. Введем соответствующие определения для операторов.

Определение 4.12. Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, A — линейный оператор, отображающий всё L в L' (т. е. A определен на всём пространстве L). Оператор A называется

- *непрерывным*, если он непрерывен на всех векторах $x \in L$;
- *ограниченным*, если он любое ограниченное в пространстве L множество переводит в ограниченное в L' множество.

Для линейных операторов, определенных на всем пространстве, непрерывность на одном векторе и на всем пространстве эквивалентны, что доказывается аналогично доказательству теоремы 4.1. Сформулируем соответствующий результат, оставив доказательство читателю.

Теорема 4.7. *Если линейный оператор определен на всем пространстве и непрерывен на каком-нибудь векторе, то он непрерывен на всем этом пространстве.*

Примечание 4.7. Ядро непрерывного на всем пространстве L линейного оператора является подпространством пространства L. Доказательство замкнутости ядра (как и ранее доказательство того, что ядро является линейным многообразием) мы предоставим читателю.

Для линейных функционалов мы доказывали эквивалентность ограниченности и непрерывности на всём линейном нормированном пространстве. Аналогичное утверждение справедливо и для линейных операторов.

Теорема 4.8. *Для линейного оператора, заданного на (всём) линейном нормированном пространстве, ограниченность и непрерывность равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть A не непрерывен. Тогда A не непрерывен в 0, т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\delta > 0$ $\|Ax\|_{L'} \geqslant \varepsilon$ для $\|x\|_L < \delta$. Пусть $x_n \in L$ — такие векторы, что $\|x_n\|_L < 1$. Для x_n/n имеем $\left\|x_n/n\right\|_L < 1/n$, а $\left\|Ax_n/n\right\|_{L'} \geqslant \varepsilon$, т. е. $\|Ax_n\|_{L'} \geqslant n\varepsilon$. Иными словами, ограниченное множество $\|x_n\|_L < 1$ переводится в неограниченное множество. Итак, если оператор A не непрерывен, то он и не ограничен. Значит, из ограниченности следует непрерывность.

2. Пусть $M \subset L$ — ограниченное множество, а его образ $AM \subset L'$ не ограничен. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество AM/n при любом n не содержится в ε-окрестности нуля. Тогда существует последовательность таких точек $x_n \in M$, что Ax_n/n не лежат в этой ε-окрестности нуля. Тем самым, последовательность $\left\{x_n/n\right\}$ сходится к 0 в L, а последовательность $\left\{Ax_n/n\right\}$ не сходится к 0 в L'. Но тогда оператор A не непрерывен. Итак, из непрерывности следует ограниченность. □

Ограниченность линейного оператора A, очевидно, равносильна тому, что он переводит всякий шар в ограниченное множество, т. е. существует такая постоянная C, что для любого вектора $x \in L$ выполнено неравенство

$$\|Ax\|_{L'} \leqslant C\|x\|_L.$$

Учитывая этот факт, по аналогии с нормой функционала можно говорить о норме опреатора. Введем соответствующее

Определение 4.13. Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, A — ограниченный линейный оператор, отображающий (всё) L в L'. *Нормой* оператора A называется число

$$\|A\| = \inf \big\{C\colon \|Ax\|_{L'} \leqslant C\|x\|_L\big\}.$$

Напомним, что для нормы линейного функционала мы получали несколько формул; каждая из них имеет аналог и для нормы линейного оператора.

Теорема 4.9. *Справедливы равенства*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_L \leqslant 1} \|Ax\|_{L'} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{L'}}{\|x\|_L}.$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \sup_{\|x\|_L \leqslant 1} \|Ax\|_{L'} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{L'}}{\|x\|_L}.$$

Тогда

$$\frac{\|Ax\|_{L'}}{\|x\|_L} \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \|Ax\|_{L'} \leqslant \alpha\|x\|_L \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leqslant \alpha.$$

С другой стороны,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon\colon \alpha - \varepsilon \leqslant \|Ax_\varepsilon\|_{L'} \big/ \|x_\varepsilon\|_L,$$

откуда

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_L \leqslant \|Ax_\varepsilon\|_{L'} \leqslant C\|x_\varepsilon\|_L \qquad \Rightarrow \qquad \alpha - \varepsilon \leqslant \inf C = \|A\|.$$

В силу произвольности ε, $\alpha \leqslant \|A\|$. Итак, $\|A\| = \alpha$. □

Таким образом, норма оператора оценивает сверху отношение длины образа вектора к длине этого вектора, т. е. коэффициент растяжения вектора при действии этого оператора.

Пример 4.14. Пусть L и L' — произвольные линейные нормированные пространства. *Нулевой оператор* O, ставящий в соответствие каждому $x \in L$ нулевой вектор в L', очевидно линеен, ограничен и непрерывен. Норма этого оператора, очевидно, равна 0.

Пример 4.15. Пусть L — произвольное линейное нормированное пространство. *Тождественный оператор* I, ставящий в соответствие каждому $x \in L$ сам вектор x, очевидно, линеен, ограничен и непрерывен. Норма этого оператора, очевидно, равна 1.

Пример 4.16. Пусть линейный оператор A отображает $\mathbb{P}_p^n$ в $\mathbb{P}_r^m$, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_m$ образуют базисы пространств $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^m$ соответственно. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad Ae_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} f_j.$$

Тогда

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k f_j.$$

Тем самым, линейный оператор, отображающий конечномерное линейное пространство в конечномерное, полностью определяется своей матрицей $(a_{kj})_{n\times m}$. При этом для любого $x \in \mathbb{P}_p^n$ имеем

$$\|Ax\|_r \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| \cdot |x_k| \cdot \|f_j\|_r \leqslant \|x\|_p \cdot \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| \cdot \|f_j\|_r,$$

т. е. оператор A ограничен (и, следовательно, непрерывен) на $\mathbb{P}_p^n$.

Пример 4.17. Пусть D — оператор дифференцирования, действующий из $C[a;b]$ в $C[a;b]$. Ясно, что оператор D определен не на всем пространстве $C[a;b]$. Он линеен, но не непрерывен, ибо, например, сходящуюся к нулю в пространстве $C[a;b]$ последовательность

$$x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

он переводит в последовательность

$$Dx_n(t) = \big(x_n(t)\big)' = \cos nt,$$

в $C[a;b]$ не сходящуюся.

Пример 4.18. Пусть D — снова оператор дифференцирования, но действующий теперь из $C^1[a;b]$ в $C[a;b]$. В этом случае оператор D определен на всем пространстве $C^1[a;b]$. При этом

$$\|Dx\|_{C[a;b]} = \|x'\|_{C[a;b]} \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \big|x(t)\big| + \max_{a\leqslant t\leqslant b} \big|x'(t)\big| = \|x\|_{C^1[a;b]},$$

так что оператор D ограничен (и, следовательно, непрерывен) на пространстве $C^1[a;b]$, а $\|D\| \leqslant 1$. Взяв последовательность $\{x_n\}$ из предыдущего примера, получим

$$\frac{\|Dx_n\|_{C[a;b]}}{\|x_n\|_{C^1[a;b]}} = \frac{1}{1+1/n} \to 1 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

так что $\|D\| \geqslant 1$ и, окончательно, $\|D\| = 1$.

Пример 4.19. Пусть $K(t,\tau)$ — фиксированная неотрицательная непрерывная на $[a;b]^2$ функция. Рассмотрим оператор

$$Ax = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

действующий из $C[a;b]$ в $C[a;b]$. Оператор A, очевидно, линеен и определен на всем $C[a;b]$. Имеем

$$\|Ax\| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x(t)\bigr| \cdot \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b K(t,\tau)\,d\tau = \|x\| \cdot \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b K(t,\tau)\,d\tau,$$

причем для $y(t) \equiv 1$ значение $\|Ay\|$ равно указанному максимуму. Итак, оператор A ограничен (и, следовательно, непрерывен) на $C[a;b]$, причем

$$\|A\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b K(t,\tau)\,d\tau.$$

Пример 4.20. Пусть H — гильбертово пространство, M — его подпространство. Тогда $H = M \oplus M^\perp$. Рассмотрим *ортопроектор на подпространство* M, т. е. оператор P_M, отображающий всё пространство H в само H и ставящий вектору $h = x + x^\perp$ (где $x \in M$, $x^\perp \in M^\perp$) в соответствие вектор $x \in M$. Оператор P_M, очевидно, линеен. Его ограниченность (и непрерывность) следует из оценки (см. задачу 3.3)

$$\|P_M h\|^2 = (P_M h, P_M h) = (x,x) = \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|x^\perp\|^2 = \|h\|^2.$$

При этом для $x \in M$ имеем $P_M x = x$. Таким образом, $\|P_M\| = 1$.

Определение 4.14. Пусть L и L' — два линейных пространства, A и B — линейные операторы, действующие из L в L', D_A и D_B — множества определения A и B соответственно. *Суммой операторов A и B* называется (очевидно, линейный) оператор $A+B$, ставящий в соответствие вектору $x \in D_A \cap D_B$ вектор $Ax + Bx$. *Произведением оператора A на число* λ называется (очевидно, линейный) оператор λA, ставящий в соответствие вектору $x \in D_A$ вектор λAx.

Пусть L и L' — линейные нормированные пространства, A и B — линейные ограниченные операторы, переводящие (всё) L в L', а λ — произвольное число. Тогда

$$\bigl\|(A+B)x\bigr\|_{L'} = \|Ax + Bx\|_{L'} \leqslant \|Ax\|_{L'} + \|Bx\|_{L'} \leqslant \bigl(\|A\| + \|B\|\bigr)\|x\|_L,$$
$$\bigl\|(\lambda A)x\bigr\|_{L'} = \|\lambda Ax\|_{L'} = |\lambda| \cdot \|Ax\|_{L'} \leqslant |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_L,$$

так что $A+B$ и λA — тоже линейные ограниченные операторы, причем

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \qquad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

Определение 4.15. Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(L, L')$ *линейное нормированное пространство линейных ограниченных операторов, отображающих (всё) L в L'*, с введенной в определении 4.13 нормой оператора и введенными в определении 4.14 операциями суммы и произведения на число.

Следующий результат обобщает теорему 4.6 и доказывается аналогично. Мы сформулируем соответствующую теорему, а доказательство оставим читателю в качестве упражнения.

Теорема 4.10. *Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, причем L' полно. Тогда пространство $\mathcal{L}(L, L')$ тоже полно.*

Рассмотрим теперь составленный из операторов ряд.

Теорема 4.11. *Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, причем L' полно. Тогда если операторы $A_k \in \mathcal{L}(L, L')$ и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$$

сходится, то

$$\exists A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{L}(L, L'), \qquad \|A\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Пусть для определенности $n > m$, тогда

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} A_k\right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|A_k\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \|A_k\| \to 0 \text{ при } m \to \infty$$

как остаток сходящегося ряда. Но это означает, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна. Пространство $\mathcal{L}(L, L')$ полно в силу теоремы 4.10, так что существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(L, L')$, что

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Оценка нормы оператора A сразу получается из неравенства

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|,$$

в силу произвольности n. $\square$

Рассмотрим еще произведение операторов.

Определение 4.16. Пусть L, L' и L'' — три линейных пространства, A и B — линейные операторы, действующие из L в L' и из L' в L'' соответственно. *Произведением* операторов A и B называется (очевидно, линейный) оператор BA, который вектору $x \in L$ ставит в соответствие вектор $B(Ax) \in L''$. Множеством определения оператора BA является множество тех x из множества определения A, для которых Ax лежит в множестве определения B.

Если L, L' и L'' — линейные нормированные пространства, а A и B — ограниченные линейные операторы, отображающие (всё) L в L' и (всё) L' в L'' соответственно, то

$$\big\|(BA)x\big\|_{L''} = \big\|B(Ax)\big\|_{L''} \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\|_{L'} \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_{L},$$

так что $BA \in \mathcal{L}(L, L'')$, причем $\|BA\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

4.4 Обратный оператор

Определение 4.17. Пусть L и L' — два линейных пространства, оператор A действует из L в L', D_A — множество определения A. Оператор A называется *обратимым*, если для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ уравнение $y = Ax$ имеет единственное решение $x \in D_A$. Если A — обратимый, то оператор A^{-1}, ставящий вектору $y \in \operatorname{Im} A$ в соответствие решение $x \in D_A$ уравнения $y = Ax$, называется *обратным* к A.

Теорема 4.12. *Оператор, обратный к линейному, линеен.*

Доказательство. Множество определения $D_{A^{-1}}$ обратного к A оператора A^{-1} равно $\operatorname{Im} A$. Как отмечалось в примечании 4.5, множество $D_{A^{-1}} = \operatorname{Im} A$ является линейным многообразием. Пусть векторы $y_1, y_2 \in D_{A^{-1}}$, $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Тогда $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ и

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ax_1 + \mu Ax_2 = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

откуда по определению обратного оператора

$$\lambda A^{-1}y_1 + mu A^{-1}y_2 = \mu x_1 + \lambda x_2 = A^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2),$$

что и требовалось. $\square$

Примечание 4.8. Легко проверить, что $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Теорема 4.13 (теорема Банаха об обратном операторе). *Если A — линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий (всё) банахово пространство L на (всё) банахово пространство L', то обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Доказательство. Пусть $M_k = \big\{y \in L' \colon \|A^{-1}y\|_L \leqslant k\|y\|_{L'}\big\}$. Тогда любой вектор $y \in L'$ при некотором k принадлежит M_k. Значит,

$$L' = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Пространство L' полно, так что по теореме Бэра хотя бы одно из M_k (обозначим его M_n) плотно в некотором шаре B. Пусть $0 < \alpha < \beta$, $y_0 \in M_n$, $P = \big\{z \in B \colon \alpha < \|z - y_0\|_{L'} < \beta\big\}$. Пусть P_0 получено из P переносом $z \mapsto z - y_0$, т. е. $P_0 = \big\{z \colon z + y_0 \in P,\ \alpha < \|z\|_{L'} < \beta\big\}$. Рассмотрим вектор $y \in P \cap M_n$. Имеем $y - y_0 \in P_0$ и

$$\begin{aligned}\big\|A^{-1}(y - y_0)\big\|_L &\leqslant \|A^{-1}y\|_L + \|A^{-1}y_0\|_L \leqslant n\|y\|_{L'} + n\|y_0\|_{L'} = \\ &= n\big(\|y - y_0 + y_0\|_{L'} + \|y_0\|_{L'}\big) \leqslant n\big(\|y - y_0\|_{L'} + 2\|y_0\|_{L'}\big) = \\ &= n\|y - y_0\|_{L'}\left(1 + \frac{2\|y_0\|_{L'}}{\|y - y_0\|_{L'}}\right) \leqslant n\|y - y_0\|_{L'}\left(1 + \frac{2\|y_0\|_{L'}}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Коэффициент $n\big(1 + 2\|y_0\|_{L'}/\alpha\big)$ от y не зависит, так что для

$$N = 1 + n\left\lfloor 1 + \frac{2\|y_0\|_{L'}}{\alpha}\right\rfloor$$

$y - y_0 \in M_N$. Но M_n плотно в P, так что M_N плотно в P_0.

Рассмотрим теперь произвольный ненулевой вектор $y \in L'$. Подбором вещественного числа $\lambda \neq 0$ можно добиться того, что $\lambda y \in P_0$. Поскольку M_N плотно в P_0, найдется последовательность векторов $y_k \in M_N$, сходящаяся к λy. Тогда последовательность $\big\{y_k/\lambda\big\}$ сходится к y, причем по определению M_N векторы $y_k/\lambda \in M_N$. Итак, M_N всюду плотно в L'.

По теореме 3.1 для любого ненулевого вектора $y \in L'$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \qquad y_k \in M_N, \qquad \|y_k\|_{L'} \leqslant \frac{3\|y\|_{L'}}{2^k}.$$

Пусть $x_k = A^{-1}y_k$. Тогда из условия $y_k \in M_N$ имеем

$$\|x_k\|_L = \|A^{-1}y_k\|_L \leqslant N\|y_k\|_{L'} \leqslant \frac{3N\|y\|_{L'}}{2^k},$$

так что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

сходится к некоторому $x \in L$, причем

$$\|x\|_L \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_L \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3N\|y\|_{L'}}{2^k} = 3N\|y\|_{L'}.$$

Поскольку оператор A непрерывен,

$$A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y,$$

откуда $x = A^{-1}y$. При этом

$$\|A^{-1}y\|_L = \|x\|_L \leqslant 3N\|y\|_{L'},$$

так что A^{-1} ограничен. □

Определение 4.18. Пусть L и L' — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{GL}(L, L')$ множество ограниченных линейных операторов, отображающих (всё) L на всё L' и имеющих ограниченный обратный.

Из следующей теоремы, в частности, следует, что множество $\mathcal{GL}(L, L')$ открыто в пространстве $\mathcal{L}(L, L')$.

Теорема 4.14. *Пусть L и L' — два банаховых пространства, а операторы $A \in \mathcal{GL}(L, L')$, $\Delta A \in \mathcal{L}(L, L')$, причем $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$. Тогда оператор $A + \Delta A \in \mathcal{GL}(L, L')$.*

Доказательство. Пусть $y \in L'$ — фиксированный вектор. Рассмотрим отображение $B\colon L \to L$, определенное формулой

$$Bx = A^{-1}y - A^{-1}(\Delta Ax).$$

Обозначим $\alpha = \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$. Имеем

$$\|Bx - Bz\|_L = \Big\|A^{-1}\big(A(x-z)\big)\Big\|_L \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \big\|\Delta A(x-z)\big\|_{L'} \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x - z\|_L = \alpha\|x - z\|_L,$$

так что B — сжатие, а пространство L полное. В силу принципа сжимающих отображений существует единственное решение x уравнения $x = Bx$, т. е. уравнения $x = A^{-1}y - A^{-1}(\Delta Ax)$. Отсюда $Ax = y - \Delta Ax$, т. е. $y = (A - \Delta A)x$. Если при этом $y = (A - \Delta A)x'$, то x' — неподвижная точка Отображения B, т. е. $x = x'$. Итак, для любого $y \in L'$ уравнение $y = (A - \Delta A)x$ имеет в L единственное решение, т. е. существует оператор $(A - \Delta A)^{-1}$, определенный на всем L'. По теореме Банаха об обратном операторе $(A - \Delta A)^{-1}$ ограничен. □

Получим, наконец, следующий результат, обобщающий формулу суммы геометрической прогрессии на ряд, составленный из степеней линейного ограниченного оператора.

Теорема 4.15. *Пусть L — банахово пространство, I — тождественный оператор в L, A — ограниченный линейный оператор, отображающий (всё) пространство L в себя, причем $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I-A)^{-1}$ существует, ограничен и представляется в виде ряда*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

где $A^0 = I$.

Доказательство. В силу теоремы 4.14 оператор $(I-A)^{-1}$ существует и ограничен. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty,$$

в силу теоремы 4.11 ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

сходится к ограниченному линейному оператору. При любом n

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k(I-A) = I + \sum_{k=1}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1}.$$

Но $\|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, так что предельным переходом в последнем равенстве получаем

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1},$$

что и требовалось. □

4.5 Сопряженный оператор

Определение 4.19. Пусть L и L' — два линейных нормированных пространства, A — непрерывный линейный оператор, отображающий (всё) L в L'. Линейный оператор A^*, ставящий в соответствие каждому функционалу $g \in (L')^*$ в соответствие функционал $f \in L^*$, определенный формулой $f(x) = g(Ax)$, называется *сопряженным* к оператору A.

Проверка линейности A^*, а также линейности и непрерывности f в определении 4.19 остается читателю.

Пример 4.21. Пусть A — линейный оператор, отображающий пространство $\mathbb{P}^n$ в пространство $\mathbb{P}^m$, а $(a_{kj})_{n\times m}$ — его матрица. Тогда $y = Ax$ означает, что

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Линейный функционал, определенный на $\mathbb{P}^n$, представляется в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j.$$

Если $f(x) = g(Ax)$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} g_k y_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_k a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{m} g_k a_{kj},$$

откуда

$$f_j = \sum_{k=1}^{m} g_k a_{kj},$$

так что A^* задается матрицей, транспонированной к $(a_{kj})_{n\times m}$.

Примечание 4.9. Симметричное обозначение, предложенное в примечании 4.5, удобнее: сопряженный к A оператор A^* определяется равенством $(Ax, g) = (x, A^*g)$.

Теорема 4.16. *Пусть L и L' — два банаховых пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(L, L')$. Тогда $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Имеем

$$\big|(x, A^*g)\big| = \big|(Ax, g)\big| \leqslant \|g\|_{(L')^*} \cdot \|Ax\|_{L'} \leqslant \|g\|_{(L')^*} \cdot \|A\| \cdot \|x\|_L,$$

так что $\|A^*g\|_{L^*} \leqslant \|A\| \cdot \|g\|_{(L')^*}$, откуда $\|A^*\| \leqslant \|A\|$.

Пусть $x \in L$ — такой вектор, что $Ax \neq 0$, а вектор $y = Ax/\|Ax\|$ принадлежит пространству L'. В силу следствия теоремы Хана — Банаха найдется такой функционал $g \in (L')^*$, что $\|g\|_{(L')^*} = 1$ и $(y, g) = 1$. Тогда $(Ax, g) = \|Ax\|_{L'}$ и

$$\|Ax\|_{L'} = (Ax, g) = \big|(Ax, g)\big| = \big|(x, A^*g)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^*g\|_{L^*} \cdot \|x\|_L \leqslant \|A^*\| \cdot \|g\|_{(L')^*}\|x\|_L = \|A^*\| \cdot \|x\|_L,$$

так что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Итак, $\|A^*\| = \|A\|$. $\square$

Пусть A — ограниченный линейный оператор, отображающий (всё) гильбертово пространство H в себя. В силу теоремы представлений Риса, отображение τ, ставящее каждому вектору $\varphi \in H$ в соответствие функционал $f(x) = (x, \varphi)$, является изоморфизмом (сопряженно-линейным, если H комплексное) пространств H и H^*. Тогда для оператора $\tau^{-1}A^*\tau$, действующего в H, имеем $(Ax, \varphi) = (x, (\tau^{-1}A^*\tau)\varphi)$, причем его норма $\|\tau^{-1}A^*\tau\| = \|A\|$, поскольку $\|A^*\| = \|A\|$, а τ — изометрия. Поэтому можно «отождествить» A^* и $\tau^{-1}A^*\tau$, чтобы сопряженный к A оператор действовал в том же пространстве, что и A. Все сказанное, очевидно, верно и для конечномерного евклидова пространства.

Определение 4.20. Если E — евклидово пространство, а A — ограниченный линейный оператор, отображающий (всё) пространство E в себя, то *сопряженным* к A оператором называется такой ограниченный линейный оператор A^*, отображающий (всё) E в себя, что $\forall x, y \in E$

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Еще раз отметим, что определения 4.19 и 4.20 разные. Везде далее в евклидовом пространстве сопряженный оператор мы будем рассматривать в смысле определения 4.20.

Теорема 4.17. *Пусть E — евклидово пространство, A и B — ограниченные линейные операторы, отображающие (всё) E в себя, λ, μ — произвольные числа. Тогда*

$$(A^*)^* = A, \qquad (AB)^* = B^*A^*, \qquad (\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda}A^* + \overline{\mu}B^*.$$

Доказательство. Имеем

$$(A^*x, yt) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay),$$

$$\big(A(Bx), y\big) = (Bx, A^*y) = \big(x, B^*(A^*y)\big),$$

$$\big((\lambda A + \mu B)x, y\big) = \lambda(Ax, y) + \mu(Bx, y) = \lambda(x, A^*y) + \mu(x, B^*y) =$$

$$= \big(x, \overline{\lambda}A^*y\big) + \big(x, \overline{\mu}B^*y\big) = \Big(x, \big(\overline{\lambda}A^* + \overline{\mu}B^*\big)y\Big),$$

откуда и следуют доказываемые равенства. □

Определение 4.21. Пусть E — евклидово пространство, A — оператор, действующий из E в E. Подпространство M пространства E называется *инвариантным* относительно оператора A, если для любого $x \in M$ вектор $Ax \in M$.

Теорема 4.18. *Если M инвариантно относительно A, то $M^\perp$ инвариантно относительно A^*.*

Доказательство. Пусть $x \in M$, $y \in M^\perp$. Тогда

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = 0,$$

ибо $Ax \in M$. Но тогда $A^*y \in M^\perp$. $\square$

Определение 4.22. Пусть E — евклидово пространство. Ограниченный линейный оператор A, отображающий (всё) E в себя, называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. $\forall x, y \in E$

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Пример 4.22. Тождественный оператор I в любом евклидовом пространстве, очевидно, самосопряженный.

Пример 4.23. Пусть H — гильбертово пространство, M — его подпространство, P_M — ортопроектор на M. Рассмотрим произвольные $h_1, h_2 \in H$. Пусть $h_1 = x_1 + x_1^\perp$, $h_2 = x_2 + x_2^\perp$, где векторы $x_1, x_2 \in M$, а векторы $x_1^\perp, x_2^\perp \in M^\perp$. Тогда

$$(P_M h_1, h_2) = (x_1, x_2 + x_2^\perp) = (x_1, x_2) + (x_1, x_2^\perp) = (x_1, x_2),$$
$$(h_1, P_M h_2) = (x_1 + x_1^\perp, x_2) = (x_1, x_2) + (x_1^\perp, x_2) = (x_1, x_2),$$

так что ортопроектор является самосопряженным оператором.

Примечание 4.10. Из теоремы 4.18 следует, что *если подпространство M инвариантно относительно самосопряженного линейного оператора A, то $M^\perp$ тоже инвариантно относительно A.*

4.6 Спектр оператора

Везде в этом параграфе L — комплексное банахово пространство.

Определение 4.23. Пусть $A \in \mathcal{L}(L, L)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Резольвентой* оператора A называется оператор $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$.

Определение 4.24. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора A, если его резольвента $R_A(\lambda)$ существует и определена на всем L (а, следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе, ограничена). Множество σ_A чисел, не являющихся для оператора A регулярными точками, называется *спектром* оператора A.

Определение 4.25. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным числом* оператора A, если его резольвента $R_A(\lambda)$ не существует (т. е. оператор $A - \lambda I$ не инъективен). Множество всех собственных чисел оператора A называется его *точечным спектром*. Легко видеть, что λ — собственное число оператора A тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, т. е. $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Такой вектор $x \neq 0$, что $Ax = \lambda x$, называется *собственным вектором*, соответствующим собственному числу λ.

Определение 4.26. Множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых резольвента $R_A(\lambda)$ оператора A существует, но определена не на всем L (т. е. оператор $A - \lambda I$ не сюръективен: $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq L$), называется *непрерывным спектром* оператора A.

Итак, спектр линейного оператора состоит из точечного и непрерывного спектра. Всякий линейный оператор в конечномерном пространстве имеет лишь точечный спектр. В бесконечномерном пространстве непрерывный спектр может быть непустым.

Получим некоторые факты о спектре оператора как множестве на комплексной плоскости.

Теорема 4.19. *Спектр оператора $A \in \mathcal{L}(L, L)$ — замкнутое в $\mathbb{C}$ множество, целиком содержащееся в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$.*

Доказательство. 1. Пусть λ — регулярная точка оператора A: оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, определен на всем L и ограничен, т. е. $A - \lambda I \in \mathcal{GL}(L, L)$. При таком $\delta \in \mathbb{C}$, что $|\delta| < 1/\big\|(A - \lambda I)^{-1}\big\|$, норма $\|\delta I\| = |\delta|$ оператора $-\delta I$ меньше $1/\big\|(A - \lambda I)^{-1}\big\|$. Значит, в силу теоремы 4.14, оператор $A - (\lambda + \delta)I \in \mathcal{GL}(L, L)$, т. е. $\lambda + \delta$ — регулярная точка оператора A. Итак, множество регулярных точек оператора A открыто в $\mathbb{C}$. Но тогда спектр оператора A, будучи дополнением этого множества, замкнут в $\mathbb{C}$.

2. Т. к. $A - \lambda I = -\lambda\big(I - A/\lambda\big)$, по теореме 4.15 при $|\lambda| > \|A\|$

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k},$$

причем этот ряд сходится к определенному на всем L ограниченному оператору. Итак, точки λ, для которых $|\lambda| > \|A\|$, спектру оператора A не принадлежат. $\square$

Примечание 4.11. Если λ и μ — регулярные точки оператора A, то операторы $R_A(\lambda)$ и $R_A(\mu)$ перестановочны. Действительно,

$$R_A(\lambda)R_A(\mu) = (A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} = \big((A-\mu I)(A-\lambda I)\big)^{-1} =$$
$$= \big((A-\lambda I)(A-\mu I)\big)^{-1} = (A-\mu I)^{-1}(A-\lambda I)^{-1} = R_A(\mu)R_A(\lambda),$$

ибо, как легко видеть, $(A-\mu I)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)(A-\mu I)$. Кроме того, можно доказать равенство $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda-\mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$, умножая обе его части на $(A-\mu I)(A-\lambda I)$. Отсюда, в частности,

$$\left\|\frac{R_A(\lambda+\Delta\lambda) - R_A(\lambda)}{\Delta\lambda} - R_A^2(\lambda)\right\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \Delta\lambda \to 0.$$

Примечание 4.12. Теорема 4.19 позволяет оценить числа, входящие в спектр, но эта оценка достаточно груба. Можно ввести следующее определение: *спектральным радиусом* оператора A называется число $r_A = \sup\big\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma_A\big\}$. Имеет место *формула Бёрлинга*:

$$r_A = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

Как видим, формула Бёрлинга напоминает формулу Коши — Адамара. Из доказательства формулы Бёрлинга (см. дополнение В. М. Тихомирова к книге [1]) видно, что эта связь не случайна. Там же доказывается, что спектр любого линейного ограниченного оператора непуст.

Рассмотрим теперь вопрос о спектре самосопряженного линейного оператора в гильбертовом пространстве. Для этого нам потребуется

Лемма 4.1. *Если A — самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве, то*

$$\big\|(A-\lambda I)x\big\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2, \qquad \beta = \operatorname{Im}\lambda.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, а оператор $B = A - \alpha I$. Поскольку для самосопряженного оператора $(Ax,x) = (x,Ax)$, а $\overline{\alpha} = \alpha$, имеем

$$(Bx,x) = (Ax,x) - \alpha(x,x) = (x,Ax) - (x,\alpha x) = (x,Bx),$$

так что оператор B самосопряженный. Далее,

$$(Ax-\lambda x, Ax-\lambda x) = (Bx - i\beta x, Bx - i\beta x) =$$
$$= (Bx,Bx) + i\beta(Bx,x) - i\beta(x,Bx) + \beta^2(x,x).$$

Отсюда, учитывая, что оператор B самосопряженный, получаем

$$\big\|(A-\lambda I)x\big\|^2 = \|Bx\|^2 + \beta^2\|x\|^2,$$

откуда и следует доказываемое неравенство. $\square$

Теперь сформулируем и докажем теорему о спектре самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Теорема 4.20. *Если A — самосопряженный линейный непрерывный оператор, отображающий (всё) гильбертово пространство H в себя, то весь его спектр лежит на вещественной оси.*

Доказательство. Надо доказать, что при $\lambda \notin \mathbb{R}$

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda I)=\{0\}, \qquad \operatorname{Im}(A-\lambda I)=H.$$

1. Если $Ax=\lambda x$ при ненулевом x, а оператор A самосопряженный, то

$$\lambda(x,x)=(\lambda x,x)=(Ax,x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\overline{\lambda}(x,x),$$

а значит, $\overline{\lambda}=\lambda$, откуда $\lambda\in\mathbb{R}$. Значит, для всех чисел $\lambda\notin\mathbb{R}$ имеем $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)=\{0\}$.

2. Сначала докажем, что $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ — подпространство в H. Пусть y — предельная точка множества $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$, тогда найдется последовательность $\{y_n\}$ векторов из $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$, сходящаяся к y. При каждом $n\in\mathbb{N}$ обозначим через x_n такой вектор, что $(A-\lambda I)x_n=y_n$. Пусть β — мнимая часть числа λ. В силу леммы 4.1 при $\beta\neq 0$

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{\beta}\big\|(A-\lambda I)(x_n-x_m)\big\|=\frac{1}{\beta}\|y_n-y_m\|\to 0,$$

так что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в H и, следовательно, имеет в H предел, который мы обозначим x. Из непрерывности оператора $A-\lambda I$ имеем

$$(A-\lambda I)x=(A-\lambda I)\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

так что $y\in\operatorname{Im}(A-\lambda I)$. Итак, множество $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ замкнуто. Линейность образа известна (см. примечание 4.7), так что множество $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ — подпространство в H.

Если $\operatorname{Im}(A-\lambda I)\neq H$, то (см. задачу 3.8) в $\big(\operatorname{Im}(A-\lambda I)\big)^{\perp}$ найдется вектор $z\neq 0$. Тогда $0=\big((A-\lambda I)z,z\big)=(Az,z)-\lambda(z,z)$. В силу самосопряженности оператора A, $(Az,z)=(z,Az)$, а в силу СП1$'$, $(Az,z)=\overline{(z,Az)}$. Значит, $(Az,z)\in\mathbb{R}$. Но тогда

$$\lambda=\frac{(Az,z)}{(z,z)}\in\mathbb{R}.$$

Итак, при $\lambda\notin\mathbb{R}$ имеем $\operatorname{Im}(A-\lambda I)=H$. □

Приведем теперь примеры нахождения спектра различных линейных операторов.

Пример 4.24. Рассмотрим в $C[a;b]$ оператор A, определенный формулой $Ax = tx(t)$. Его точечный спектр пуст, ибо уравнение $Ax = \lambda x$ означает, что $\forall t \in [a;b]$ $(t-\lambda)x(t) = 0$, т. е. $x \equiv 0$. Резольвента этого оператора имеет вид

$$R_A(\lambda)y = (A - \lambda I)^{-1}y = \frac{1}{t-\lambda}y(t).$$

При любом $\lambda \notin [a;b]$ резольвента $R_A(\lambda)$ определена на всем пространстве $C[a;b]$, но при всех $\lambda \in [a;b]$ это не так. Итак, спектр оператора A представляет собой отрезок $[a;b]$, причем у A есть только непрерывный спектр.

Пример 4.25. Рассмотрим в l_2 оператор A, определенный для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ формулой $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Уравнение $Ax = \lambda x$ имеет вид

$$(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, \ldots, x_{n-1} - \lambda x_n, \ldots) = 0.$$

При $\lambda \neq 0$ отсюда имеем $x_1 = 0$, $0 - \lambda \cdot x_2 = 0$, $\ldots$, $0 - \lambda \cdot x_n = 0$, $\ldots$, а при $\lambda = 0$ сразу получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$. Итак, точечный спектр оператора A пуст.

Оператор A^{-1} определен не на всем l_2, так что $\lambda = 0$ — точка непрерывного спектра оператора A. При $\lambda \neq 0$ резольвенту как обратный к $A - \lambda I$ оператор можно найти, решая относительно x уравнение $(A - \lambda I)x = y$, т. е.

$$(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, \ldots, x_{n-1} - \lambda x_n, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots).$$

Отсюда имеем

$$x_n = -\frac{y_n \lambda^{n-1} + y_{n-1}\lambda^{n-2} + \ldots + y_1}{\lambda^n},$$

т. е. $R_A(\lambda)$ ставит заданному вектору $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ в соответствие вектор x с указанными координатами x_n. Несложно убедиться, что при $|\lambda| > 1$ резольвента определена на всем l_2. Но при $\lambda = 1$ это не так: вектору $\big(-1, -1/2, \ldots, -1/n, \ldots\big) \in l_2$ должен соответствовать вектор $\big(1, 1 + 1/2, \ldots, 1 + 1/2 + \ldots + 1/n, \ldots\big) \notin l_2$.

Таким образом, у оператора A есть только непрерывный спектр, причем спектральный радиус этого оператора равен 1, т. е. все точки спектра оператора A лежат в круге $|\lambda| \leqslant 1$. Разумеется, тот же результат мы бы получили, применив формулу Бёрлинга.

Пример 4.26. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H ортопроектор P_M на некоторое подпространство M. Как и ранее, будем обозначать $h \in H$, $x = P_M h \in M$, $x^\perp = h - x \in M^\perp$. Заметим, что

$$(x, h) = (x, x + x^\perp) = (x, x) = (x + x^\perp, x) = (h, x).$$

Уравнению $P_M h = \lambda h$ равносильно $(P_M h - \lambda h, P_M h - \lambda h) = 0$, т. е.

$$0 = (x - \lambda h, x - \lambda h) = (x, x) - \overline{\lambda}(x, h) - \lambda(h, x) + |\lambda|^2 (h, h).$$

Но P_M — самосопряженный оператор, так что его собственные числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, мы заметили, что $(x, h) = (h, x)$. Итак,

$$P_M h = \lambda h \qquad \Leftrightarrow \qquad \|x\|^2 - 2\lambda\|x\|^2 + \lambda^2\|h\|^2 = 0.$$

Учитывая равенство $\|h\|^2 = \|x\|^2 + \|x^\perp\|^2$ (см. задачу 3.3), окончательно имеем

$$P_M h = \lambda h \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda - 1)^2\|x\|^2 + \lambda^2\|x^\perp\|^2 = 0.$$

Последнее, очевидно, выполнено лишь в двух случаях: либо $\lambda = 1$ и $h \in M$, либо $\lambda = 0$ и $h \in M^\perp$. Итак, точечный спектр ортопроектора состоит из двух точек: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

При всех остальных λ резольвента ортопроектора существует. Рассмотрим уравнение $y = P_M h - \lambda h$. Заметим, что $P_M(P_M h) = P_M h$. Тогда

$$P_M y = P_M(P_M h - \lambda h) = P_M h - \lambda P_M h = x - \lambda x,$$

так что

$$x = \frac{P_M y}{1 - \lambda};$$

кроме того

$$\begin{aligned}(P_M - \lambda I)y = (P_M - \lambda I)(P_M h - \lambda h) = P_M h - 2\lambda P_M h + \lambda^2 h = \\ = (1 - \lambda)^2 x + \lambda^2 x^\perp = (1 - \lambda) P_M y + \lambda^2 x^\perp,\end{aligned}$$

так что

$$x^\perp = \frac{P_M y - y}{\lambda}.$$

Итак,

$$h = x + x^\perp = \frac{P_M y}{1 - \lambda} - \frac{P_M y - y}{\lambda},$$

т. е. резольвента имеет вид

$$R_{P_M}(\lambda) = \frac{P_M}{1 - \lambda} - \frac{P_M - I}{\lambda}.$$

Она, очевидно, при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ определена на всем H.

Итак, спектр ортопроектора состоит из двух точек $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, причем обе являются собственными числами.

4.7 Компактные операторы

Определение 4.27. Линейный оператор, отображающий (всё) банахово пространство L в банахово пространство L', называется *компактным* (*вполне непрерывным*), если он любое ограниченное в L множество переводит в предкомпактное в L'.

Пример 4.27. Линейный непрерывный оператор, отображающий произвольное банахово пространство в конечномерное банахово пространство, компактен, поскольку он переводит любое ограниченное множество в ограниченное, которое в конечномерном пространстве является предкомпактным (см. пример 2.35).

Пример 4.28. Для операторов, отображающих в бесконечномерное пространство, компактность есть более сильное требование, чем непрерывность.

Покажем, например, что единичный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве, не является компактным оператором. Пользуясь теоремой 3.2, в единичном шаре бесконечномерного пространства можно построить такую последовательность векторов $\{y_n\}$, что $\rho(y_k, y_n) > 1/2$ при $k \neq n$. Такая последовательность не может содержать сходящейся подпоследовательности, так что единичный шар не является предкомпактным множеством. Но единичный оператор переводит единичный шар, т. е. ограниченное множество, в себя, т. е. в множество, не являющееся предкомпактным.

Пример 4.29. Можно доказать (см. [1]), что линейный оператор $A\colon C[a;b] \to C[a;b]$, заданный формулой

$$Ax = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

компактен, если *ядро* $K(t,\tau)$ ограничено на квадрате $[a;b]^2$ и все его точки разрыва лежат на конечном числе кривых.

Пример 4.30. Из примера 4.29, примененного к оператору с ядром, равным нулю при $\tau > t$, получаем, что оператор $A\colon C[a;b] \to C[a;b]$, заданный формулой

$$Ax = \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

компактен, если функция $K(t,\tau)$ непрерывна при $\tau < t$.

Теорема 4.21. *Если $\{A_n\}$ — последовательность компактных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве L, сходящаяся к некоторому оператору A, т. е. $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то оператор A компактен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой ограниченной последовательности векторов $\{x_n\} \subset L$ из последовательности $\{Ax_n\} \subset L$ их образов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Выберем из последовательности $\{x_n\}$ такую подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}$, что $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ сходится; из $\{x_n^{(1)}\}$ выберем такую подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\}$, что $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ сходится; из $\{x_n^{(2)}\}$ выберем такую подпоследовательность $\{x_n^{(3)}\}$, что $\{A_3 x_n^{(3)}\}$ сходится и т. д. Это можно сделать, т. к. каждый A_n компактен. Теперь рассмотрим диагональную подпоследовательность $\{x_n^{(n)}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Каждый оператор A_n переводит ее в сходящуюся; нам же надо показать, что и оператор A переводит ее в сходящуюся. Поскольку L полно, для этого достаточно доказать, что последовательность $\{Ax_n^{(n)}\}$ фундаментальна. Имеем

$$\begin{multline}\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leqslant \\ \leqslant \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\right\| + \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| + \left\|Ax_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|. \quad (4.1)\end{multline}$$

Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена числом C, т. е. $\|x_n\| \leqslant C$. Выберем сначала k так, чтобы $\|A - A_k\| < \varepsilon/(3C)$, а потом выберем N так, чтобы $\left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| < \varepsilon/3$ при $m, n > N$, что возможно, т. к. $\{A_k x_n^{(n)}\}$ сходится. Тогда из (4.1) получаем, что $\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \varepsilon$, так что последовательность $\{Ax_n^{(n)}\}$ фундаментальна. $\square$

Легко видеть, что любая линейная комбинация компактных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве L, компактна. С учетом теоремы 4.21 отсюда следует, что компактные операторы образуют подпространство пространства $\mathcal{L}(L, L)$.

Теорема 4.22. *Если A — компактный, а B — ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве L, то операторы AB и BA компактны.*

Доказательство. Пусть $M \subset L$ — ограниченное множество. Тогда, во-первых, BM — ограниченное, а ABM — предкомпактное множество, а во-вторых, AM — предкомпактное множество, а оператор B непрерывен, так что, в силу теоремы 2.17, и BAM — предкомпактное множество. $\square$

Т. к. произведение компактных операторов компактно, а оператор $I = A^{-1}A$ некомпактен в бесконечномерном пространстве, получается

Следствие 4.3. *В бесконечномерном пространстве компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.*

Примем без доказательства (см. его в [1]) следующую теорему.

Теорема 4.23. *Оператор, сопряженный к действующему в банаховом пространстве компактному оператору, тоже компактен.*

Теперь рассмотрим вопрос о спектре компактного оператора.

Теорема 4.24. *Если A — компактный оператор, действующий в банаховом пространстве L, то A при любом $\delta > 0$ имеет лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным числам, большим по модулю δ.*

Доказательство. Предположим противное: найдутся бесконечные последовательности не обязательно попарно различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, больших по модулю λ, и соответствующих им линейно независимых собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Обозначим через X_n подпространство, порожденное векторами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пользуясь теоремой 3.2, построим такую последовательность векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, что $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\rho(y_n, X_{n-1}) > 1/2$. Поскольку $|\lambda_n| > \delta$, последовательность $\{y_n/\lambda_n\}$ ограничена. Достаточно доказать, что из последовательности $\{A(y_n/\lambda_n)\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, и мы получим противоречие компактностью A.

Пространство X_n является n-мерным, векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X_n$ линейно независимы, а $y_n \in X_n$, так что $y_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$. Тогда, поскольку $Ax_k = \lambda_k x_k$, имеем

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \frac{\alpha_1\lambda_1 x_1}{\lambda_n} + \frac{\alpha_2\lambda_2 x_2}{\lambda_n} + \ldots + \frac{\alpha_n\lambda_n x_n}{\lambda_n} = y_n + z_n,$$

где

$$z_n = \alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} - 1\right)x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n} - 1\right)x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - 1\right)x_{n-1} \in X_{n-1}.$$

Значит, при любых $n > m$

$$\left\|A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)\right\| = \|y_n + z_n - (y_k + z_k)\| = \|y_n + (z_n - y_k + z_k)\| > \frac{1}{2},$$

ибо $z_n - y_k + z_k \in X_{n-1}$. Но тогда из последовательности $\{A(y_n/\lambda_n)\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

Следствие 4.4. *Если A — действующий в банаховом пространстве компактный оператор, то число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ оператора A, конечно.*

Следствие 4.5. *Действующий в банаховом пространстве компактный оператор имеет во внешности круга $|\lambda| > \delta > 0$ лишь конечное число различных собственных значений.*

Следствие 4.6. *Все ненулевые собственные числа действующего в банаховом пространстве компактного оператора можно пронумеровать в порядке невозрастания модулей:* $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$.

Доказательство следующей теоремы для частного случая компактного оператора в гильбертовом пространстве можно найти в книге [1], там же есть ссылка на полное доказательство.

Теорема 4.25 (альтернатива Фредгольма)**.** *Пусть A — компактный оператор, действующий в банаховом пространстве L, а λ — фиксированное число. Возможны два и только два взаимоисключающих случая:*

1. *При каждом $\varphi \in L$ уравнение $(I - \lambda A)x = \varphi$ имеет одно и только одно решение.*
2. *Уравнение $(I - \lambda A)x = 0$ имеет ненулевое решение.*

Следствие 4.7. *Непрерывный спектр компактного оператора, действующего в банаховом пространстве L, либо пуст, либо состоит из одной точки 0.*

Доказательство. Пусть $\mu \neq 0$ — произвольное число. Рассмотрим при $\lambda = 1/\mu$ каждый из случаев в альтернативе Фредгольма.

В первом случае оператор $I - \lambda A$ взаимно однозначно отображает всё пространство L на всё L, так что существует ограниченный обратный оператор $(I - \lambda A)^{-1}$. Отсюда следует существование определенного на всем L ограниченного оператора $(A - \mu I)^{-1}$, так что точка μ регулярна.

Во втором случае существует такой вектор $x_\lambda \in L$, что $\lambda A x_\lambda = x_\lambda$, т. е. $A x_\lambda = \mu x_\lambda$, так что μ — собственное число оператора A. □

Примечание 4.13. Отметим, что $\lambda = 0$ всегда принадлежит спектру компактного оператора A, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве L, поскольку в этом случае $(A - \lambda I)^{-1} = A^{-1}$, а компактный оператор в L не может иметь ограниченного обратного.

Итак, мы получили следующее описание спектра компактного оператора, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве.

Теорема 4.26. *Спектр любого компактного оператора, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве, состоит из не более чем счетного числа ненулевых собственных значений и точки* $\lambda = 0$, *которая может быть либо собственным значением этого оператора* (*и тогда его непрерывный спектр пуст*), *либо единственной точкой его непрерывного спектра.*

Рассмотрим теперь самосопряженный компактный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H. Сразу заметим, что в силу теоремы 4.20 все собственные числа такого оператора вещественны. Далее, для отвечающих собственным числам $\lambda \neq \mu$ собственных векторов x и y имеем $\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$, откуда $(x, y) = 0$, так что отвечающие различным собственным числам собственные векторы оператора A ортогональны. Теперь сформулируем теорему, обобщающую известный результат о приведении матрицы конечномерного самосопряженного оператора к диагональному виду в ортонормированном базисе из собственных векторов. Ее доказательство можно найти в книге [1].

Теорема 4.27 (Гильберт, Шмидт)**.** *Для любого компактного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H существует такая ортонормированная система $\{e_k\}$ собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным числам $\{\lambda_k\}$, что каждый вектор $h \in H$ записывается единственным образом в виде*

$$h = \sum_k c_k e_k + h', \qquad h' \in \operatorname{Ker} A;$$

при этом

$$Ah = \sum_k \lambda_k c_k e_n$$

и если система $\{e_k\}$ бесконечна, то $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема Гильберта — Шмидта означает, что для любого компактного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H найдется ортонормированный базис пространства H, состоящий из собственных векторов оператора A: ортонормированную систему $\{e_k\}$ собственных векторов достаточно дополнить произвольным ортонормированным базисом ядра $\operatorname{Ker} A$.

4.8 Задачи

Решения этих или подобных им задач можно найти в книгах [3, 4].

Задача 4.1. Доказать утверждения примеров 4.3, 4.6, 4.7.

Задача 4.2. Доказать, что функционал f, заданный на линейном нормированном пространстве L, линеен и ограничен. Найти его норму.

а) $L = C[a;b]$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x(t_k),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a;b]$ — фиксированные числа.

б) $L = C[0;1]$,

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,dt.$$

в) $L = l_2$, для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ функционал f определен формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k + x_{k+1}}{2^k}.$$

Задача 4.3. Пусть $\varphi \in C[a;b]$ — фиксированная функция (уже без требования неотрицательности, в отличие от примера 4.11). Найти норму определенного на $C[a;b]$ линейного функционала

$$f(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt.$$

Задача 4.4. Показать, что не любой непрерывный линейный функционал, определенный на $C[a;b]$, может быть представлен в виде, указанном в задаче 4.3.

Задача 4.5. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ линейный функционал f_α принадлежит пространству $\big(L_p[0;1]\big)^*$, $1 < p < \infty$, если

$$f_\alpha(x) = \int_{[0;1]} \frac{x(t)}{t^\alpha}\,d\mu?$$

Задача 4.6. Доказать утверждения примечаний 4.6–4.8, а также теорем 4.7 и 4.10.

Задача 4.7. Доказать, что оператор $A\colon C[a;b]\to C[a;b]$, заданный формулой

$$Ax=\int_a^b \frac{K(t,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}x(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t,\tau)$ — заданная непрерывная на квадрате $[a;b]^2$ функция, а $\alpha\in(0;1)$ — фиксированное число, линеен и ограничен.

Задача 4.8. Доказать, что оператор $A\colon L\to L'$ линеен и ограничен. Найти его норму.

а) $L=L'=l_2$, для $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ оператор A определен формулой $Ax=(x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots)$.

б) $L=L'=C[a;b]$, $Ax=tx(t)$.

в) $L=L'=C[0;1]$,

$$Ax=\int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

г) $L=\mathbb{R}_2^n$, $L'=l_2$, для $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ оператор A определен формулой $Ax=\big(x_1/1,\ldots,x_n/1,\ldots,x_1/k,\ldots,x_n/k,\ldots\big)$.

Задача 4.9. Привести пример пространства L и двух таких операторов $A,B\in\mathcal{L}(L,L)$, что $\|AB\|<\|B\|\cdot\|A\|$.

Задача 4.10. Пусть $\lambda\neq 0$ — фиксированное вещественное число, а функция $K(t,\tau)=\varphi(t)\psi(\tau)$, где $\varphi(t),\psi(t)\in C[0;1]$ — такие фиксированные функции, не равные на отрезке $[0;1]$ тождественно нулю, что

$$\int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\,dt\neq\frac{1}{\lambda}.$$

Доказать, что оператор $A\colon C[0;1]\to C[0;1]$, заданный формулой

$$Ax=x(t)-\lambda\int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

имеет ограниченный обратный. Найти оператор A^{-1}.

Задача 4.11. Пусть $\lambda\neq 0$ — фиксированное вещественное число, а функция $K(t,\tau)=\varphi(t)\psi(\tau)$, где $\varphi(t),\psi(t)\in C[0;1]$ — фиксированные функции, не равные на отрезке $[0;1]$ тождественно нулю. Доказать, что оператор $A\colon C[0;1]\to C[0;1]$, заданный формулой

$$Ax=x(t)-\lambda\int_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

имеет ограниченный обратный. Найти оператор A^{-1}.

Задача 4.12. Доказать, что не имеет ограниченного обратного оператор $A\colon C[0;1] \to C[0;1]$, заданный формулой

$$Ax = \int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Задача 4.13. Имеет ли заданный линейный оператор $A\colon l_2 \to l_2$ ограниченный обратный? Везде $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$.

а) $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_k, \ldots)$.

б) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots, x_k, \ldots)$.

в) $Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - 2x_1, x_4, x_5, \ldots, x_k, \ldots)$.

Задача 4.14. Найти оператор, сопряженный к $A\colon L \to L$.

а) $L = l_2$, для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ оператор A определен формулой $A(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$, где последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in m$ фиксирована.

б) $L = L_2[0;1]$, $Ax = \displaystyle\int_{[0;t]} x(\tau)\,d\mu$.

Задача 4.15. В вещественном пространстве $C[-\pi;\pi]$ найти собственные числа и собственные векторы оператора A.

а) $Ax = x(-t)$. б) $Ax = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+\tau)x(\tau)\,d\tau$.

Задача 4.16. Найти спектр, спектральный радиус и резольвенту линейного оператора $A\colon C[0;1] \to C[0;1]$.

а) $Ax = x(0) + tx(1)$. б) $Ax = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau$.

Задача 4.17. Доказать, что оператор $A\colon L \to L$ компактен.

а) $L = l_2$, для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ оператор A задан формулой

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, \ldots, \frac{x_k}{2^{k-1}}, \ldots\right),$$

б) $L = C[a;b]$,

$$Ax = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t,\tau)$ — фиксированная непрерывная на квадрате $[a;b]^2$ функция (примером 4.29 не пользоваться).

в) $L = C[a;b]$,

$$Ax = \varphi(t)x(t_0),$$

где $\varphi \in C[a;b]$ — заданная функция, а $t_0 \in [a;b]$ — фиксированное число.

Задания для самостоятельной работы

Метрические пространства

При решении этой задачи следует обратить внимание на определение 2.1, примеры 2.1–2.11 и задачи 2.1–2.4.

Является ли метрическим пространством пара (X,ρ), где X — заданное множество, а $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ — заданное отображение?

1.1. $X=\mathbb{R}^n$,
$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n} k|x_k-y_k|.$$

1.2. X — множество n-символьных строк некоторого алфавита ($n\in\mathbb{N}$ фиксировано), $\rho(x,y)$ — *расстояние Хэмминга* — количество позиций, на которых строки x и y различаются.

1.3. $X=\big\{(x_1,\ldots,x_k,\ldots)\colon x_k\in\mathbb{P}\big\}$,
$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}.$$

1.4. $X=\mathbb{R},\ \rho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$.

1.5. $X=\big\{(x_1,\ldots,x_k,\ldots)\colon x_k\in\{0;1\}\big\}$,
$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x_k+y_k)\bmod 2}{2^k}.$$

1.6. X — множество всех отрезков Δ на прямой,
$$\rho(\Delta_1,\Delta_2)=|\Delta_1|+|\Delta_2|-2|\Delta_1\cap\Delta_2|,$$
где $|\Delta|$ — длина отрезка Δ.

1.7. X — множество всех функций, определенных на отрезке $[a;b]$,
$$\rho(x,y)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{\big|x(t)-y(t)\big|}{1+\big|x(t)-y(t)\big|}.$$

1.8. X — множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$,
$$\rho(x,y)=\int_a^b t^2\big|x(t)-y(t)\big|\,dt.$$

1.9. X — множество всех функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$,

$$\rho(x,y)=\bigl|x(a)-y(a)\bigr|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x'(t)-y'(t)\bigr|.$$

1.10. $X=\mathbb{Q}$. При фиксированном простом p представим для $x,y\in X$ их разность в виде $x-y=p^k a/b$, где $a\in\mathbb{Z}$ и $b\in\mathbb{N}$ не делятся на p, а $k\in\mathbb{Z}$, и рассмотрим *p-адическую метрику*

$$\rho(x,y)=\begin{cases} p^{-k}, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

1.11. X — множество последовательностей $\bigl\{x_1(t),\ldots,x_k(t),\ldots\bigr\}$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, таких что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x_k(t)\bigr|<\infty$,

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x_k(t)-y_k(t)\bigr|.$$

1.12. $X=\mathbb{N}$,

$$\rho(x,y)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

1.13. $X=\bigl\{(x_1,\ldots,x_k,\ldots)\colon x_k\in\mathbb{N}\bigr\}$,

$$\rho(x,y)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{d(x,y)}, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

где $d(x,y)$ — номер первой позиции, на которой последовательности x и y различаются,

1.14. Пространство $C^{\infty}[a;b]$. X — множество всех бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций,

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\bigr|}{1+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\bigl|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\bigr|}.$$

1.15. $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\ln\bigl(1+|x-y|\bigr)$.

1.16. $X=\mathbb{R}$,

$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$

1.17. X — множество вершин неориентированного связного графа G, $\rho(x,y)$ — наименьшее количество ребер графа G, которое нужно пройти, чтобы добраться от x до y.

1.18. $X = \mathbb{N}$,

$$\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}.$$

1.19. X — множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-1;1]$,

$$\rho(x,y) = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{\bigl|x(t)-y(t)\bigr|^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}.$$

1.20. X — сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\rho(x,y)$ — длина хорды, соединяющей точки x и y.

Сходимость

При решении этой задачи следует обратить внимание на определение 2.6 и задачу 2.10.

Проверить сходимость последовательности $\bigl\{x_n(t)\bigr\}$ в указанном пространстве X.

2.1. $x_n(t) = \cos^{2n} t + \dfrac{1}{n}$, $X = C[0;\pi]$.

2.2. $x_n(t) = t^n + t$, $X = C\bigl[1/2;1\bigr]$.

2.3. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, $X = C[0;1]$.

2.4. $x_n(t) = \dfrac{1}{t^2+nt+1}$, $X = C[0;4]$.

2.5. $x_n(t) = 1-(1-t^2)^n$, $X = C\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\,\right]$.

2.6. $x_n(t) = nt^2e^{-nt}$, $X = C[0;2]$.

2.7. $x_n(t) = 3t^n + t^{2n}$, $X = C_1\bigl[1/2;1\bigr]$.

2.8. $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$, $X = C_1[0;1]$.

2.9. $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$, $X = C^1[0;1]$.

2.10. $x_n(t) = t^n + t^{2n}$, $X = C\bigl[0;3/2\bigr]$.

2.11. $x_n(t) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $X = C_1[0;\pi]$.

2.12. $x_n(t) = t^n + t,\qquad X = C_1\big[1/2;1\big].$

2.13. $x_n(t) = t^n - \dfrac{n}{n+1}t^{n+1},\qquad X = C_1[0;1].$

2.14. $x_n(t) = \sin nt,\qquad X = C^1[0;1].$

2.15. $x_n(t) = \sin nt,\qquad X = C_1[0;\pi].$

2.16. $x_n(t) = t^n + t^{2n},\qquad X = C\big[1/2;1\big].$

2.17. $x_n(t) = \cos nt + \dfrac{1}{n^2},\qquad X = C[0;\pi].$

2.18. $x_n(t) = \sin nt + \dfrac{t}{n^2},\qquad X = C_1[0;\pi].$

2.19. $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2},\qquad X = C[0;1].$

2.20. $x_n(t) = t^n + t,\qquad X = C\big[1/2;1\big].$

Принцип сжимающих отображений

При решении этой задачи следует обратить внимание на теорему 2.12, пример 2.33 и задачу 2.19.

Убедиться, что отображение в правой части заданного интегрального уравнения является сжимающим в пространстве $C[0;1]$. С помощью метода последовательных приближений найти решение $x(t) \in C[0;1]$ этого уравнения.

3.1. $x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \tau^2 t x(\tau)\,d\tau + \dfrac{7t}{11}.$

3.2. $x(t) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \tau^3 t x(\tau)\,d\tau + \dfrac{7t}{5}.$

3.3. $x(t) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \tau^2 t x(\tau)\,d\tau + \dfrac{5t}{3}.$

3.4. $x(t) = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^1 \tau^3 t x(\tau)\,d\tau + \dfrac{9t}{25}.$

3.5. $x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\,d\tau + \dfrac{11t}{9}.$

3.6. $x(t) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^1 \tau^5 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{3t}{14}.$

3.7. $x(t) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{5t}{12}.$

3.8. $x(t) = \dfrac{1}{11} \displaystyle\int_0^1 \tau^5 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{2t}{3}.$

3.9. $x(t) = \dfrac{1}{7} \displaystyle\int_0^1 \tau^5 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{8t}{3}.$

3.10. $x(t) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^1 \tau^5 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{6t}{5}.$

3.11. $x(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \tau^3 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{9t}{7}.$

3.12. $x(t) = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{23t}{12}.$

3.13. $x(t) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^1 \tau^2 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{11t}{3}.$

3.14. $x(t) = \dfrac{1}{5} \displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{29t}{60}.$

3.15. $x(t) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{11t}{6}.$

3.16. $x(t) = \dfrac{1}{10} \displaystyle\int_0^1 \tau^2 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{7t}{2}.$

3.17. $x(t) = \dfrac{1}{7} \displaystyle\int_0^1 \tau^2 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{9t}{5}.$

3.18. $x(t) = \dfrac{1}{8} \displaystyle\int_0^1 \tau^3 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{8t}{5}.$

3.19. $x(t) = \dfrac{1}{6} \displaystyle\int_0^1 \tau^3 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{3t}{5}.$

3.20. $x(t) = \dfrac{1}{5} \displaystyle\int_0^1 \tau^4 t x(\tau)\, d\tau + \dfrac{7t}{15}.$

Ортогонализация

При решении этой задачи следует обратить внимание на теорему 3.6 и пример 3.8.

Найти в $L_2[a;b]$ ортогональную проекцию вектора f на подпространство, порожденное системой $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

4.1. $a=0$, $b=\pi$, $f=t$, $g_1=1$, $g_2=\sin 2t$.

4.2. $a=-1$, $b=1$, $f=\sqrt[3]{t}$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^2$.

4.3. $a=-\pi$, $b=\pi$, $f=t^2-1$, $g_1=1$, $g_2=\sin 2t$.

4.4. $a=0$, $b=2\pi$, $f=\cos t$, $g_1=1$, $g_2=2\sin t$.

4.5. $a=-2$, $b=2$, $f=te^t$, $g_1=1$, $g_2=t$.

4.6. $a=-\pi$, $b=\pi$, $f=t^2$, $g_1=\cos 2t$, $g_2=\sin 2t$, $g_3=1$.

4.7. $a=0$, $b=1$, $f=\sqrt{t}$, $g_1=t$, $g_2=t^2$.

4.8. $a=-1$, $b=1$, $f=t^2$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^3$.

4.9. $a=0$, $b=2\pi$, $f=t+1$, $g_1=\sin t$, $g_2=\cos t$.

4.10. $a=-2$, $b=2$, $f=e^{t+1}$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^2$.

4.11. $a=-\pi$, $b=\pi$, $f=\cos^2 t$, $g_1=\sin 2t$, $g_2=\cos t$, $g_3=1$.

4.12. $a=-1$, $b=1$, $f=te^{-t}$, $g_1=1$, $g_2=t^2$.

4.13. $a=-1$, $b=1$, $f=\sin^2 t$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^2$.

4.14. $a=0$, $b=2\pi$, $f=e^t$, $g_1=\cos t$, $g_2=\sin t$.

4.15. $a=0$, $b=\pi$, $f=\sin t$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^2$.

4.16. $a=-\pi$, $b=\pi$, $f=2t+1$, $g_1=\sin t$, $g_2=\cos 2t$.

4.17. $a=-1$, $b=1$, $f=\cos t$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^2$.

4.18. $a=-1$, $b=1$, $f=e^{2t}$, $g_1=1$, $g_2=t$.

4.19. $a=-\pi$, $b=\pi$, $f=\cos t$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^3$.

4.20. $a=-1$, $b=1$, $f=e^{2t}$, $g_1=1$, $g_2=t$, $g_3=t^3$.

Норма линейного функционала и оператора

При решении этой задачи следует обратить внимание на определения 4.3 и 4.13, примечание 4.1, теорему 4.9, примеры 4.2–4.11 и 4.14–4.20, а также задачи 4.2, 4.3 и 4.8.

В задачах с нечетными номерами найти норму заданного линейного функционала $f\colon L \to \mathbb{R}$, а с четными — норму заданного линейного оператора $A\colon L \to L'$, где L и L' — заданные линейные нормированные пространства. Во всех задачах считать $1 \leqslant p < \infty$.

5.1. $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(0)$, $L = C[0;1]$.

5.2. $Ax = \int_1^2 (2t+\tau)x(\tau)\,d\tau$, $L = C[1;2]$, $L' = C[0;1]$.

5.3. $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$, $L = C_2[0;1]$.

5.4. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, $L = L' = l_p$.

5.5. $f(x) = \int_0^1 x(t^2)\,dt$, $L = C[0;1]$.

5.6. $Ax = \int_1^2 (2t-\tau)x(\tau)\,d\tau$, $L = C[1;2]$, $L' = C[0;1]$.

5.7. $f(x) = \int_0^1 x(t)\operatorname{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\right)\,dt - x(0)$, $L = C[0;1]$.

5.8. $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $L = L' = l_p$.

5.9. $f(x) = \int_0^\pi x(t)\sin t\,dt$, $L = C_2[0;\pi]$.

5.10. $Ax = \int_0^t (t-\tau)x(\tau)\,d\tau$, $L = L' = C[0;\pi]$.

5.11. $f(x) = \int_0^1 x(t^2)\sqrt{t}\,dt$, $L = C[0;1]$.

5.12. $Ax = x\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $L = L' = C[0;2]$.

5.13. $f(x) = \int_0^1 x(t)\left(t - \frac{1}{2}\right)\,dt - x(1)$, $L = C[0;1]$.

5.14. $Ax = \int_0^1 e^{t+\tau}x(\tau)\,d\tau$, $L = L' = C[0;1]$.

5.15. $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos t\,dt$, $L = C\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

5.16. $A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) = (x_2, x_3, x_1 + x_2, x_4, x_5, \ldots)$, $L = L' = l_1$.

5.17. $A(x_1,\ldots,x_k,\ldots) = \left(e^{-\frac{1}{3}}x_1,,\ldots,ke^{-\frac{k}{3}}x_k,\ldots\right)$, $L = L' = l_1$.

5.18. $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2 x(t^2)\,dt$, $L = C[0;1]$.

5.19. $f(x) = x(0) - x(1)$, $L = C[0;1]$.

5.20. $A(x_1,\ldots,x_k,\ldots) = \left(2x_1,\ldots,\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k x_k,\ldots\right)$, $L = L' = l_p$.

Спектр линейного оператора

При решении этой задачи следует обратить внимание на определения 4.23–4.25, пример 4.26, а также задачи 4.15 и 4.16.

Найти собственные числа и собственные векторы оператора A в пространстве $L_2[a;b]$.

6.1. $Ay = 16y - y''$, $y(0) = y'(4) = 0$, $a = 0$, $b = 4$.

6.2. $Ay = -9y'' - y$, $y(0) = y(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.3. $Ay = 9y'' + 4y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.4. $Ay = -4y'' + y$, $y(0) = y(2) = 0$, $a = 0$, $b = 2$.

6.5. $Ay = y'' + 4y$, $y'(0) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

6.6. $Ay = -y'' - y$, $y(-\pi) = y(\pi) = 0$, $a = -\pi$, $b = \pi$.

6.7. $Ay = 4y - y''$, $y(0) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

6.8. $Ay = y'' - 6y$, $y(0) = y(2) = 0$, $a = 0$, $b = 2$.

6.9. $Ay = 2y'' + 3y$, $y'(0) = y(\pi) = 0$, $a = 0$, $b = \pi$.

6.10. $Ay = 9y - y''$, $y'(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

6.11. $Ay = \pi^2 y - y''$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $a = 0$, $b = \pi$.

6.12. $Ay = y - y''$, $y(0) = y'(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.13. $Ay = -4y'' + 9y$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $a = 0$, $b = \pi$.

6.14. $Ay = 4y'' + 36y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.15. $Ay = y'' + y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.16. $Ay = y''$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

6.17. $Ay = y''$, $\quad y(0) = y(1) = 0$, $\quad a = 0$, $\quad b = 1$.

6.18. $Ay = \pi^2 y'' + \dfrac{9}{4} y$, $\quad y(0) = y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\quad a = 0$, $\quad b = \dfrac{3\pi}{2}$.

6.19. $Ay = y'' + 4y$, $\quad y(0) = y(\pi) = 0$, $\quad a = 0$, $\quad b = \pi$.

6.20. $Ay = \pi^2 y - \pi^2 y''$, $\quad y'(0) = y(\pi) = 0$, $\quad a = 0$, $\quad b = \pi$.

Заключение

Приведены основные понятия и факты функционального анализа. Тем не менее в силу краткости курса многие темы были лишь частично затронуты, а некоторые и вовсе не освещены. Полностью опущены разделы, в которых изучаются топологические пространства, однородно-выпуклые функционалы, обобщенные функции, линейные интегральные уравнения и дифференцирование в линейных нормированных пространствах. Кроме того, мера определена только в $\mathbb{R}^n$, об интеграле Лебега и пространствах суммируемых функций приведен лишь необходимый минимум материала. Эти пробелы отчасти компенсируются курсами дифференциальной геометрии и топологии, вариационного исчисления, а также магистерскими курсами дополнительных глав. Однако автор настоятельно рекомендует студентам самостоятельно ознакомиться с теоретическими сведениями по упомянутым темам в книгах [1, 2] и задачами по ним в книгах [3, 4].

Библиографический список

1. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 572 с. — ISBN 978-5-9221-0266-7.

2. *Дьяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 160 с. — ISBN 5-88688-055-0.

3. *Городецкий, В. В.* Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — М. : Либроком, 2012. — 482 с. — ISBN 978-5-397-02836-3.

4. *Петров, В. А.* Элементы функционального анализа в задачах / В. А. Петров, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев. — М. : Просвещение, 1978. — 129 с.

Учебное издание

ДОДОНОВ Артур Евгеньевич

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 13.01.23.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,37. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.