Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДОШКОЛЬНИКОВ И МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Учебное пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2022

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73
Т46

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Учитель начальных классов высшей квалификационной категории
руководитель методического объединения педагогов
начальной школы МБОУ «СОШ № 15» г. Владимира
Г. Е. Волгина

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Тихомирова, С. В.
Т46 Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников : учеб. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 104 с.
ISBN 978-5-9984-1532-6

Содержатся необходимый теоретический материал начальной математики, основанный на «Теории структур математических предложений» и «Элементах алгоритмизации», большое количество примеров решений типовых задач, проверочные тесты и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», программа «Педагогика и психология дошкольного и начального образования», всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 13. Библиогр.: 25 назв.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-9984-1532-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебный курс «Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников» является завершающим в ряду математических дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов», «Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов». Изучение дисциплины «Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников» выстроено согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, Федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования и основано на следующих разделах: «Математические понятия», «Математическое доказательство», «Алгоритмы и их свойства».

Учебное пособие включает три главы с изложением основ теории и практических образцов решений типовых задач по темам разделов, а также итоговые опросники в виде тестирования и задания для самостоятельного решения.

В первой главе рассматриваются вопросы теории понятий: определение, структурные составляющие логической категории «понятие», отношения между понятиями и требования к определению понятий. Понятия начальной математики представлены четырьмя группами: понятия числа и операции над числами, алгебраические понятия (выражения, равенства, уравнения, неравенства), геометрические понятия (прямая, луч, многоугольники, т. д.) и понятия, связанные с величинами и их измерением.

Определяя понятия представителей разных групп, мы научились выполнять действия с ними в курсах учебных дисциплин «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» и «Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов». Здесь же изучаем понятия как таковые и исследуем особенности (структура, виды, классификация) множества всех математических понятий для дошкольников и младших школьников.

Основой математики является доказательство, которое строится путем рассуждений. Рассуждения опираются на правильные умозаключения, выстроенные в подходящей логической последовательности. Представлений о доказательстве, имеющихся у студента и возникших в процессе конкретных доказательств, недостаточно для обучения младших школьников. Учителю требуются более глубокие знания о тех правилах, в соответствии с которыми строятся правильные рассуждения, нужны знания о структуре и способах доказательства, о взаимосвязи индукции и дедукции. Озвученные вопросы рассматриваются во второй главе пособия.

Изложение теоретических вопросов завершает тема «Алгоритмы и их свойства», представленная в третьей главе. Алгоритмы имеют солидную практическую составляющую, потому что большинство действий, совершаемых человеком, происходит по определенным правилам. Работа автоматизированной техники и «умных роботов» запрограммирована. Это значит, что результат деятельности человека и эффективность работы механизмов опираются на алгоритмические последовательности выполнения конкретных действий.

Алгоритм считается фундаментальным понятием и используется в различных областях знания, однако изучается данное понятие в математике и информатике. Его освоение начинается уже в начальной школе на уроках математики, где ученики овладевают алгоритмами арифметических действий, знакомятся с правилами вычитания числа из суммы, суммы из числа. Определенные знания об алгоритмах и некоторые умения в их построении необходимы учителю, поскольку являются базой для формирования алгоритмического мышления у младших школьников. Материал третьей главы основан на изложении одноименных вопросов в учебнике «Математика» Л. П. Стойловой [5], в котором отбор теоретической части и практических задач произведен согласно объему алгебраического и геометрического материала начальной школы на основе усвоенных ранее учебных курсов естественно-научного направления.

Задачи для самостоятельного решения сгруппированы по темам, порядок следования которых выдержан согласно главам пособия. Различные типы заданий представлены набором вариантов, что обеспечивает полноценную работу со студентами и в группе, и индивидуально.

При подготовке книги автор использовал учебники, задачники-практикумы по математике для студентов высших педагогических учебных заведений, написанные профессорами Л. П. Стойловой, Н. Н. Лавровой, Н. Я. Виленкиным.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Определение понятия. Объем и содержание понятия

Определение. *Понятие* – форма логического мышления, образ, фиксирующий общие и существенные признаки и свойства предметов и явлений и отношения между ними.

Определение. Слова и словосочетания, обозначающие понятия, называются *терминами*.

Обозначим понятия малыми латинскими буквами: a, b, …, z.

Определение. Множество A объектов (предметов), которые объединяются каким-либо термином, называется *объемом* понятия a.

По объему понятия можно разделить на *единичные*, *общие* и *пустые*. Если множество A состоит из одного-единственного объекта (одноэлементное множество), то понятие a называют *единичным*. Например, понятия «простое четное число», «русский писатель Антон Павлович Чехов» являются единичными.

Если множество A состоит более чем из одного объекта, то понятие a называют *общим*. Объем общего понятия может быть *конечным* или *бесконечным*. Так, понятие «простое число» имеет бесконечный объем, а «простое число меньше 20» – конечный объем (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19). Постепенно уменьшая объем общего понятия, можно получить единичное понятие («x – простое число, $36 < x < 38$»; речь идет о единичном понятии – числе 37).

Существует и *пустое* понятие. В таком случае объем A понятия a равен пустому множеству: $A = \emptyset$. Например, «круглый квадрат», «простое число, меньшее двух» – это пустые понятия.

Определение. Совокупность характеристических свойств (существенных признаков), каждое из которых присуще любому элементу из множества A, называется *содержанием* понятия a.

Другими словами, все эти свойства одновременно присущи всем элементам $a \in A$ и только им.

Например, содержание понятия «ромб» образуют следующие два признака: «быть параллелограммом» – признак, указывающий на принадлежность любого ромба более широкому множеству (позже подробно опишем такой признак и назовем его *родовой*) и «иметь равные стороны» – признак специфический, присущий множеству конкретных фигур (позже назовем его *видовой*).

Рассмотрим, например, понятие «книга». Объемом данного понятия является множество всех книг, которые были в прошлом, есть в настоящем, появятся в будущем; это печатные и электронные издания; множество всех книг для детей и взрослых. Содержанием понятия «книга» выступают его признаки: вид обложки, качество бумаги, выходные данные, количество страниц в книге, жанр изложенного текста и др.

Теперь, когда определено содержание понятия, можно уточнить определение объема понятия: *объем* понятия – это множество объектов (предметов), каждому из которых принадлежат признаки, относящиеся к содержанию понятия.

Между содержанием и объемом понятия существует обратная зависимость: чем больше содержание понятия, тем меньше его объем. Иными словами, чем больше признаков входит в понятие, тем меньше предметов это понятие охватывает (и наоборот). Например, понятие «печатная книга» больше по содержанию, т. е. содержит больше признаков, чем понятие «книга», соответственно объем первого понятия оказывается меньше (у́же), чем объем второго, поскольку печатные книги – это только часть (подмножество) всех книг, т. е. электронные книги уже не входят в объем понятия «печатная книга», а только в объем понятия «книга».

Все множество понятий можно классифицировать по разным основаниям, причем сортирование проводится как по объему, так и по содержанию понятий. Выше рассмотрено разбиение на классы по объему в зависимости от количества элементов понятия.

По содержанию понятия делят на положительные и отрицательные; относительные и безотносительные; собирательные и несобирательные (разделительные); конкретные и абстрактные; эмпирические и теоретические. Далее обозначим отличительные черты указанных понятий и приведем примеры понятий.

Положительные понятия фиксируют наличие у предмета какого-либо признака (например, «опрятный человек», «равнобедренный треугольник»), *отрицательные* – указывают на отсутствие этого признака у предмета («неопрятный человек», «неравнобедренный треугольник»). Если отрицание «не» или приставка «без» («бес») стали частью слова и без них это слово не употребляется («нездоровится», «безвозвратно»), такое понятие также считается положительным.

Относительное понятие обозначает предмет, существование которого подразумевает существование некоторого другого предмета («ученик» – «учитель»). *Безотносительное* понятие обозначает предмет, существующий вне подобной зависимости («человек», «дерево»).

Собирательным называется понятие, обозначающее множество однородных предметов, которое мыслится как единое целое («стая», «флот»). То, что утверждается в собирательном понятии, относится ко всему собранию предметов, обозначаемых данным понятием, но не может быть приложимо к отдельным предметам, входящим в это целое. Собирательные понятия могут быть общими («лес») или единичными («созвездие Орион»). В отличие от собирательного, *несобирательное* (*разделительное*) понятие указывает не на группу, а на отдельный предмет («дерево», «звезда»).

Понятие называется *конкретным*, если оно относится к предмету или классу предметов (например, «дом», «яблоко»), и *абстрактным*, если оно отражает свойства, признаки предмета, взятые отдельно от него самого (например, «белизна», «доброта»), или отношения между предметами (например, «равенство»). В начальной математике понятия «число», «величина», «геометрическая фигура» являются абстрактными.

Эмпирические понятия – есть понятия о наблюдаемых объектах и их свойствах, а *теоретические* – о ненаблюдаемых объектах. Если эмпирические понятия вырабатываются на основе непосредственного сравнения общих свойств некоторого класса наличествующих (доступных для изучения) объектов или явлений, то теоретические – на основе опосредованного анализа некоторого класса объектов или явлений при помощи ранее выработанных понятий и концепций.

Название любого материального предмета является *конкретным эмпирическим* понятием, а его непосредственно наблюдаемые свойства выражаются *абстрактными эмпирическими* понятиями. К *конкретным теоретическим* понятиям относится, в частности, ряд понятий теоретической физики, например «электрон»; *абстрактным теоретическим* понятием является, например, «спин».

Примеры задач и их решений

Задача 1. Назовите несколько элементов, принадлежащих объему понятия а) «треугольник»; б) «геометрическая фигура»; в) «рациональное число».

Решение

По определению объема понятия для каждого из случаев а) – в) нужно подобрать множества объектов, которые можно будет заменить указанным в соответствующем пункте словом. Следовательно, а) в объем понятия «треугольник» входят, например, равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, правильный треугольник; б) объем понятия «геометрическая фигура» включает, например, отрезок, круг, многоугольник, пирамиду, цилиндр; в) объему понятия «рациональное число» будут принадлежать, например, дроби $\frac{1}{3}$ и $7,286$, числа 0, 50, -2.

Задача 2. Перечислите несколько свойств, входящих в содержание понятия: а) «прямоугольник»; б) «ромб»; в) «биссектриса угла».

Решение

а) В содержание понятия «прямоугольник» входят только те свойства, которые считаются общими для всех прямоугольников, например, такие: имеет 4 прямых угла, имеет равные диагонали;

б) в содержание понятия «ромб» входят только те свойства, которые являются общими для всех ромбов, например, такие: имеет две пары параллельных противоположных сторон, имеет взаимно перпендикулярные диагонали;

в) в содержание понятия «биссектриса угла» входят только те свойства, которые являются общими для биссектрис всех углов, например, такие: любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон этого угла, биссектрисы данного и смежного с ним углов взаимно перпендикулярны.

Задача 3. Назовите свойства: а) присущие и прямоугольнику, и ромбу; б) присущие прямоугольнику и не присущие ромбу; в) присущие ромбу и не присущие прямоугольнику.

Решение

а) У прямоугольника и ромба пары противоположных сторон равны и параллельны, диагонали точкой пересечения делятся пополам, противоположные углы равны;

б) свойства, присущие прямоугольнику и не присущие ромбу: все углы прямые, диагонали прямоугольника равны;

в) свойства, присущие ромбу и не присущие прямоугольнику: диагонали взаимно перпендикулярны, стороны равны.

2. Сравнимые и несравнимые понятия

Разные понятия могут быть:

сравнимыми

Определение. *Сравнимыми* называют такие понятия, в содержании которых имеются общие признаки.

Сравнимыми являются два понятия, которые различаются по содержанию, но совпадают полностью или частично по объему.

Например, понятие «прямоугольник» является сравнимым с понятием «квадрат».

несравнимыми

Определение. *Несравнимыми* называют такие понятия, которые по своему содержанию значительно далеки друг от друга.

Например, понятие «железная дорога» и понятие «геометрическая фигура» несравнимы, так же как и понятие «ветер» с понятием «начальная школа».

Пример задачи и ее решение

Задача. Даны пары понятий: «гладиолус» – «пион», «число» – «математическое понятие», «адрес» – «отвага». Докажите, что приведенные понятия будут сравнимыми (или несравнимыми).

Решение

Чтобы понятия были сравнимыми, надо найти в их содержаниях общие признаки.

Понятие «гладиолус» имеет признак «быть растением». Понятие «пион» имеет признак «быть растением». Следовательно, понятия «гладиолус» и «пион» имеют общий признак, поэтому «гладиолус», «пион» – это сравнимые понятия.

Объем понятия «число» охватывает множество чисел, объем математических понятий включает и понятие числа как единицы счета.

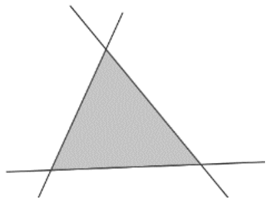
Число является одним из основных понятий в математике и любое математическое понятие – есть понятие математики. Приходим к выводу, что есть совпадения объемов указанных понятий. Значит, «число» и «математическое понятие» – это сравнимые понятия.

Признак понятия «адрес» – описание места нахождения объекта, признак понятия «отвага» – качество человека, говорящее о его готовности совершать смелые и храбрые поступки. Озвучены абсолютно разные признаки понятий. Понятно, что общих признаков у понятий «адрес», «отвага» нет. Следовательно, данные понятия являются несравнимыми.

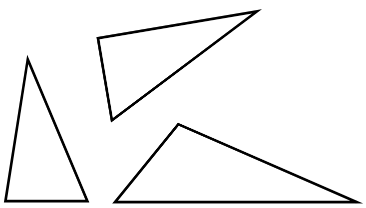
1.3. Треугольники и четырехугольники. Определение, виды, характеристические свойства

В этом пункте главы нам понадобятся геометрические фигуры начальной математики, поэтому остановимся на рассмотрении множества треугольников и множества четырехугольников: подробно изучим классы фигур, составляющие эти множества, опишем характеристические свойства и укажем признаки фигур разных классов.

Треугольником называется часть плоскости, ограниченная тремя прямыми. Точки пересечения прямых называются вершинами треугольника, отрезки прямых – сторонами треугольника.



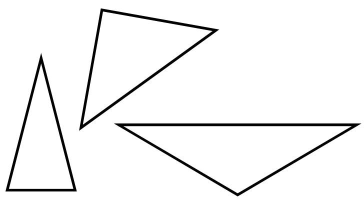
Разносторонним называется треугольник, у которого нет равных сторон. Против большего угла лежит бо́льшая сторона, против меньшего угла – меньшая сторона. В треугольнике сумма длин двух его сторон больше длины третьей стороны.



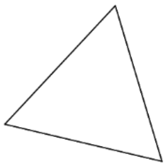
Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются *боковыми*, третья сторона называется *основанием*.

Углы при основании равны.

<u>Признак.</u> Если в треугольнике два угла равны, то он является равнобедренным.

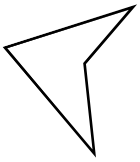


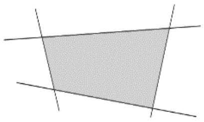
Равносторонним называется треугольник, у которого все стороны равны.

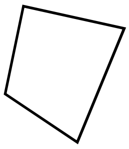


Все три угла равны.

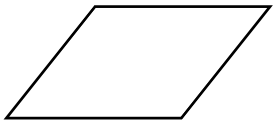
Признак. Если в треугольнике три угла равны, то он является равносторонним.







Четырехугольником называется часть плоскости, ограниченная четырьмя последовательно пересекающимися между собой прямыми. Точки пересечения прямых называются вершинами четырехугольника, отрезки прямых – сторонами четырехугольника.



Параллелограммом называется четырехугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

Противоположные стороны параллелограмма равны.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Диагонали параллелограмма пересекаются, и точка пересечения делит их пополам.

Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

Параллелограмм делится диагональю на два равных треугольника.

Средние линии параллелограмма пересекаются в точке пересечения его диагоналей. В этой точке две его диагонали и две его средние линии делятся пополам.

1. У четырехугольника без самопересечений две противоположные стороны одновременно равны и параллельны.

2. Противоположные стороны попарно параллельны.

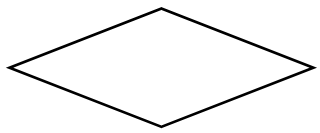
Поясним здесь следующее: слово «попарно» означает «каждые две из всех имеющихся». «Попарно параллельны» противоположные стороны параллелограмма значит, что каждые две лежащие друг против друга стороны параллельны между собой.

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые. Прямоугольник является параллелограммом когда его противоположные стороны попарно параллельны. Стороны прямоугольника являются его высотами.

Около любого прямоугольника можно описать окружность, причем диагональ прямоугольника служит диаметром описанной окружности.

Признаки. Параллелограмм является прямоугольником при выполнении любого из условий:

1. Если диагонали параллелограмма равны.
2. Если все углы параллелограмма равны.



Ромбом называется четырехугольник, у которого все стороны равны.

Ромб является параллелограммом, поэтому его противоположные стороны равны и попарно параллельны.

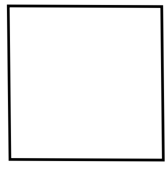
Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам. Тем самым диагонали делят ромб на четыре прямоугольных и равных треугольника.

Середины четырех сторон ромба служат вершинами прямоугольника, а диагонали ромба – перпендикулярными осями симметрии.

В любой ромб можно вписать окружность, центр которой лежит на пересечении его диагоналей.

Признаки. Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. Две его смежные стороны равны (отсюда следует, что все стороны равны).
2. Его диагонали пересекаются под прямым углом.
3. Одна из диагоналей параллелограмма делит содержащие ее углы пополам.



Квадратом называется четырехугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Признаки.

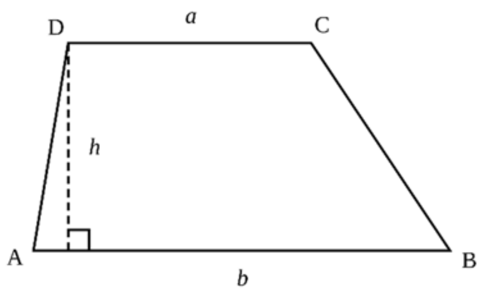
1. Равенство сторон.
2. Все углы квадрата прямые.

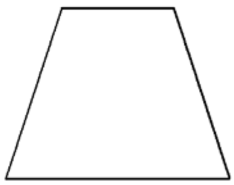
3. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам.

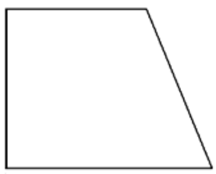
Квадрат – частный случай ромба и прямоугольника.

Далее подробно рассмотрим четырехугольник трапецию.

Слово «трапеция» имеет греческое происхождение и обозначает «столик», «стол». В русском языке от этого слова происходит слово «трапеза» (еда).







Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – непараллельны.

Параллельные противоположные стороны называются основаниями трапеции, а две другие – боковыми сторонами. Средняя линия – отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобедренной* (иногда *равнобокой*, или *равнобочной* трапецией).

Трапеция, имеющая прямые углы при боковой стороне, называется *прямоугольной*.

Приведем некоторые свойства трапеции.

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен половине разности оснований и лежит на средней линии.

3. Отрезок, параллельный основаниям x, y и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится последней пополам и равен $\frac{2xy}{x+y}$ среднему гармоническому длин оснований трапеции.

4. В трапецию можно вписать окружность, если сумма длин оснований трапеции равна сумме длин ее боковых сторон.

5. Точки пересечения диагоналей трапеции, пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

6. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

7. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Два из них, прилежащие к основаниям, подобны. Два других, прилежащие к боковым сторонам, имеют одинаковую площадь.

8. Если отношение оснований равно k, то отношение площадей треугольников, прилежащих к основаниям, равно k^2.

Свойства равнобедренной трапеции.

Трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1. Прямая, которая проходит через середины оснований, перпендикулярна основаниям (т. е. является осью симметрии трапеции).
2. Высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой – полуразности оснований.
3. Углы при любом основании равны.
4. Сумма противоположных углов равна 180°.
5. Длины диагоналей равны.
6. Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.
7. Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.
8. Если сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность. Средняя линия в этом случае равна сумме боковых сторон, деленной на два (так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований).
9. В трапеции ее боковая сторона видна из центра вписанной окружности под углом 90°.
10. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.

1.4. Отношения между понятиями по их объему

Различают понятия

Совместимые

Определение. *Совместимыми* называют понятия a и b, объемы которых находятся в отношении пересечения $A \cap B \neq \emptyset$.

Совместимые понятия a и b, в свою очередь, могут иметь полностью совпадающие объемы $A = B$, общую часть $A \cap B \neq \emptyset$, включение одного объема в другой $A \subset B$ или $B \subset A$.

Несовместимые

Определение. Понятия a и b, пересечение объемов которых пусто $A \cap B = \emptyset$, называют *несовместимыми* понятиями.

Для несовместимых понятий характерно наличие общего рода.

Несовместимые понятия a и b могут находиться в отношениях соподчинения, противоположностей, противоречия.

Изучим совместимые понятия более подробно.

Определение. Понятия a и b находятся в *отношении равенства*, если объемы их совпадают $A = B$, при этом сами понятия a и b называются *тождественными*, или *равнозначными*.

Рассмотрим следующие понятия: a – квадрат, b – правильный четырехугольник, c – куб, d – правильный шестигранник, m – числа, кратные двум, k – четные числа, t – числа, кратные трем и соответствующие им объемы A, B, C, D, M, K, T.

Все квадраты плоскости являются правильными четырехугольниками и, наоборот, все правильные четырехугольники плоскости являются квадратами. Отсюда заключаем, что объемы понятий a и b совпадают $A = B$, сами же понятия (квадрат и правильный четырехугольник) будут тождественными.

В пространстве любой куб – это правильный многогранник, в свою очередь, все правильные шестигранники есть кубы. Поэтому для понятий c и d их объемы C и D совпадают $C = D$. Понятие «куб» равнозначно понятию «правильный шестигранник».

Объемы понятий m и k совпадают $M = K$, потому что числа, кратные двум, – суть четные числа. Понятия m и k тождественны.

Что можно сказать о понятиях k и t? В объем K понятия k входят, например, числа 2, 4, 10, но этих чисел нет в объеме T понятия t. Напротив, объему T понятия t принадлежат, например, числа 3, 9, 21, но указанных чисел нет в объеме K понятия k. Есть числа типа 6, 12, 42, находящиеся и в объеме K понятия k, и в объеме T понятия t, т. е. некоторые элементы объемов K и T понятий k и t совпадают (являются одинаковыми, общими). Про такие понятия, как k и t, говорят, что они пересекаются.

Определение. Понятия a и b находятся в *отношении пересечения*, если объемы их совпадают частично или, что то же самое, пересекаются $A \cap B \neq \emptyset$. Сами понятия a и b в таком случае называются *пересекающимися*.

Объемы понятий «месяцы третьего квартала года» и «летние месяцы» находятся в отношении пересечения $A \cap B = \{\text{июль}, \text{август}\}$, значит, понятия «месяцы третьего квартала года» и «летние месяцы» пересекаются. Пересекающимися будут понятия прямоугольника и ромба, потому что объемы указанных понятий имеют общую часть.

Определение. Понятия a и b находятся в *отношении подчинения*, если объем одного понятия полностью входит в объем другого $A \subset B$ или $B \subset A$ (но $A \neq B$).

В таком случае говорят, что одно из понятий *подчинено* другому. В отношении подчинения находятся, например, следующие пары понятий: действительные и рациональные числа; правильный многоугольник и квадрат; тождественные преобразования и сокращение дроби; линейная функция и константа.

Отношение включения объемов понятий служит основой для изучения родовидовых отношений на множестве понятий.

Определение. Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то понятие a называют *видовым* по отношению к понятию b, понятие b называют родовым по отношению к понятию a.

Например, понятия a – «трапеция» и b – «четырехугольник» находятся в отношении подчинения. Действительно, любая трапеция – есть четырехугольник. Следовательно, объемы A и B понятий находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$). Поэтому понятие «трапеция» – видовое по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» – родовое по отношению к понятию «трапеция». Отметим некоторые особенности родовидовых отношений на множестве понятий.

Во-первых, *понятия рода и вида относительны*: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для *данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий*. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми будут понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим считается понятие «параллелограмм».

В-третьих, *видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия*. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

Пример задачи и ее решение

Задача. Установите отношения между следующими парами понятий a и b, если:

1) a – «прямоугольник», b – «ромб»;
2) a – «многоугольник», b – «параллелограмм»;
3) a – «прямая», b – «отрезок».

Решение

Так как объем понятия – это множество, то удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их при помощи кругов Эйлера.

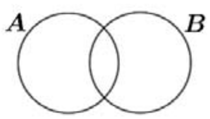


Рис. 1

В случае 1) объемы понятий пересекаются, но ни одно множество не является подмножеством другого (рис. 1). Следовательно, можно утверждать, что данные понятия a и b не находятся в отношении рода и вида.

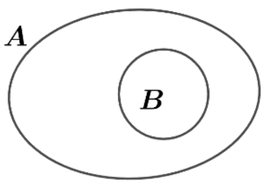


Рис. 2

В случае 2) объемы данных понятий находятся в отношении включения, но не совпадают – всякий параллелограмм является многоугольником, но не наоборот (рис. 2). Следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» – видовое по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» – родовое по отношению к понятию «параллелограмм».

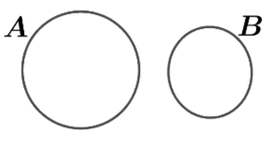


Рис. 3

В случае 3) объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком (рис. 3). Следовательно, данные понятия не находится в отношении рода и вида.

О понятиях «прямая» и «отрезок» можно сказать, что они находятся в *отношении целого и части*: отрезок – это часть прямой, а не ее вид. И если видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия, то часть не обязательно обладает всеми свойствами целого. Например, отрезок не обладает таким свойством прямой, как ее бесконечность.

Далее рассмотрим отношения между несовместимыми понятиями.

Определение. Два или несколько непересекающихся понятий находятся в *отношении соподчинения*, если они имеют общее родовое понятие.

Иначе говоря, соподчиненными будут разные виды, относящиеся к одному роду.

Например, понятия «рыба» и «птица» соподчинены понятию «животное», а понятия «береза» (объема A), «клен» (объема B) соподчинены понятию «дерево» (объема C) (рис. 4).

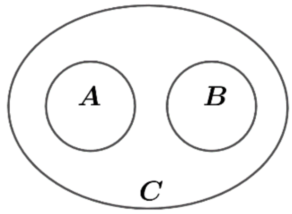


Рис. 4

Определение. Два непересекающихся понятия находятся в *отношении противоположности*, если они являются видами одного и того же рода, при этом одно из них содержит какие-то признаки, а другое эти признаки исключает и заменяет противоположными.

Отношение противоположности объемов понятий можно сформулировать и по-другому: одного рода разного вида понятия A и B *противоположны*, если любой объект этого рода, не попадающий под понятие A, может не попадать и под понятие B (рис. 5).

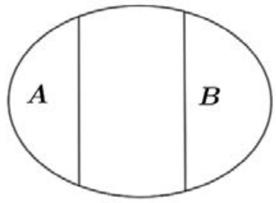


Рис. 5

Например, понятия «черный», «белый» находятся в отношении противоположности. Объединение объемов противоположных понятий не исчерпывает объем родового понятия. В середине круга оставлено место для любого другого среднего промежуточного понятия. Например, для противоположных понятий «черный» – «белый» промежуточными могут быть понятия «различные оттенки серого». Понятия «правда» и «ложь» являются противоположными, но между ними может быть понятие «заблуждение», которое будет промежуточным. Противоположные понятия можно рассматривать как соподчиненные.

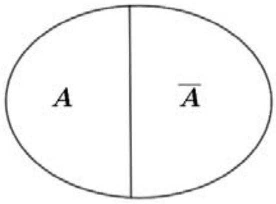


Рис. 6

Определение. Два понятия находятся в *отношении противоречия*, если они являются видами одного и того же рода, при этом одно понятие указывает на некоторые признаки, а другое эти признаки исключает, но ничем другим не заменяет (рис. 6).

Иначе говоря, в случае *противоречивых* понятий для любого объекта можно решить, что он принадлежит объему либо одного, либо другого понятия. Например, понятия «светящийся объект» – «несветящийся объект» противоречивы. Объект «светящийся шар» входит в объем первого понятия и никогда – в объем второго.

Пример задачи и ее решение

Задача. Установите отношения между несовместимыми парами понятий a и b, если:

1) a – «прямоугольник», b – «трапеция»;

2) a – «отрезок $[0,1]$», b – «отрезок $[4,5]$»;

3) a – «множество $K=\{x|x\in\mathbb{R}, x\leq 1\}$», b – «множество $P=\{x|x\in\mathbb{R}, x\geq 2\}$»

4) a – «прямоугольник», b – «непрямоугольник».

Решение

В случае 1) объемы понятий не пересекаются: ни один прямоугольник трапецией не является, любая трапеция не будет прямоугольником. Множество прямоугольников и множество трапеций плоскости – есть включения, например, в множество четырехугольников плоскости (см. рис. 4), т. е. понятия «прямоугольник» и «трапеция» соподчинены понятию «четырехугольник». Другими словами, понятие «четырехугольник» является «родовым» по отношению к непересекающимся понятиям «прямоугольник» и «трапеция». Значит, данные понятия a и b находятся в отношении соподчинения.

Понятия непересекающихся отрезков $[0,1]$ и $[4,5]$ в случае 2) являются видами одного и того же рода – понятия «отрезок числовой прямой». Любая точка числовой прямой, не принадлежащая отрезку $[0,1]$, может не попадать в отрезок $[4,5]$, и наоборот, точка числовой прямой, не принадлежащая отрезку $[4,5]$, может не попадать в отрезок $[0,1]$. Поэтому понятия a и b находятся в отношении противоположности.

Аналогично рассуждениям с отрезками проводится рассуждение с лучами: множествами K и P случая 3). Объемы понятий лучей

$K = \{x|x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$ и $P = \{x|x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$ не имеют общих элементов. Сами понятия a и b относятся к одному роду – понятию «луч числовой прямой». Значит, понятие луча $K = \{x|x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$ противоположно понятию луча $P = \{x|x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$.

В случае 4) понятия «прямоугольник» и «непрямоугольник» являются противоречивыми, потому что для любой фигуры плоскости можно решить: принадлежит ли она объему понятия a, либо объему понятия $\bar{a}$, т. е. b.

Необходимо отметить следующее:

1. Объем рода – множество фигур, на котором рассматриваются понятия a и b, можно выбирать по-разному (шире, у́же). Например, в указанной формулировке объемом служит множество всех фигур плоскости. Поэтому объему понятия b принадлежат параллелограммы, трапеции, овалы, разные многоугольники и замкнутые кривые плоскости. Ближайшим родовым понятием к a будет понятие «параллелограмм». Тогда объем понятия «параллелограмм» однозначно представлен двумя классами: множеством всех прямоугольников (это объем понятия a) и множеством всех параллелограммов, которые не являются прямоугольниками (это объем понятия b).

2. С точки зрения логики предикатов понятие $\bar{a}$ есть отрицание понятия a. Следовательно, при построении $\bar{a}$ используем логические связки: частицу «не» или слова «неверно, что». Характеристика понятия a – объем A – представляет собой множество всех объектов, подходящих под понятие a. Объемом отрицания понятия a в таком случае будет множество всех фигур, не обладающих характеристическим свойством элементов, принадлежащих A, и, значит, является дополнением $\bar{A}$ множества A (до объема родового понятия).

Завершая рассмотрение вопроса классификации понятий, отметим два пункта. Первый содержит ответ на вопрос: зачем уметь соотносить объемы понятий? Во втором – сопоставим совместимость и сравнимость понятий.

Итак, имея верное представление об отношении объемов понятий, человек строит с ними правильные умозаключения (суждения). Например, как соотносятся между собой понятия «розовое растение» и «колючее растение»? Отношение пересечения, но никак не подчинение. Отсюда заключаем, что суждение «Все розовые растения являются колючими» ложно.

Понятия

Сравнимые	Несравнимые
в содержании которых имеется хотя бы один общий признак: «шкаф» и «деревянное изделие»	в содержании которых нет ни одного общего признака: «фрукт» и «шкаф»

Совместимые	Несовместимые
в объеме имеющие общие элементы $A \cap B \neq \emptyset$ «шкаф» и «деревянное изделие»	в объеме не имеющие общих элементов $A \cap B = \emptyset$. «шкаф» и «кровать»

Заметим, что сравнение понятий выполняется и по содержанию, и по объему. Почти все понятия являются сравнимыми: все совместимые понятия являются сравнимыми, все несовместимые понятия являются сравнимыми.

1.5. Математические понятия для дошкольников

Математика для дошкольников – это программа формирования умственных способностей ребенка, которая решает следующие задачи:

– развитие начальных математических представлений;

– введение в активный словарь малыша математических терминов;

– формирование образного мышления;

– развитие основ конструирования;

– формирование логических способностей;

– развитие творческой активности;

– развитие слуховой и зрительной памяти;

– формирование умений сравнивать, анализировать, группировать и обобщать.

Математика для дошкольников состоит из следующих разделов: сравнение предметов и групп предметов, количество и счет, величины, геометрические формы, пространственно-временные представления. Обучение математике начинается со второй младшей группы (3 года) и продолжается до выпуска в школу (7 лет). Все понятия вводятся постепенно в форме игры и с элементами соревнования, основываясь на принципе от простого к сложному.

Далее перечислим основные математические понятия для обучения детей дошкольного возраста и некоторые рекомендации.

Понятие «множество». Множество – это совокупность элементов, которые воспринимаются как единое целое. Множество состоит из элементов и ассоциируется с понятием группа. Чем больше элементов во множестве, тем множество мощнее. В детском саду множества могут быть конечными, бесконечными, пустыми и состоять из пяти элементов.

1. Конечные множества – это такие элементы, которые можно посчитать.

2. Бесконечные множества – множества, в которых элементы посчитать невозможно (натуральный ряд чисел, звезды, песчинки).

3. Дискретные, или непрерывные, множества – множества, в которых каждый элемент можно воспринимать отдельно.

4. Непрерывные множества – когда элементы отдельно не воспринимаются (длина стола, стакан воды).

5. Упорядоченное множество – в котором между элементами существует порядок (натуральный ряд чисел).

Множество предметов и явлений воспринимается ребенком различными анализаторами.

Понятие «счет». Счетная деятельность (счет) – это действия с конкретными множествами, установление взаимно однозначного соответствия между числами натурального ряда и элементами множества. Простое называние числительных счетом не является. Как и любая другая деятельность счет имеет цель – сосчитать и средства – как считать (в каждой возрастной группе свои).

Понятие о действиях с числами. Вычислительная деятельность – это действия с числами, осуществляемые через решение арифметических задач и числовых примеров.

Понятие «задача». Задача – это упражнение, которое решается посредством умозаключения, вычисления.

Понятие «величина». Величина – это качество и свойство предмета, с помощью которого сравниваем предметы друг с другом и устанавливаем количественную характеристику сравниваемых предметов. Понятие «величина» в математике считается основным (неопределяемым), поэтому прямого ответа на вопрос «что такое величина?» нет.

Общее понятие величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, массы, скорости и т. д.

Величина предмета – это его относительная характеристика, подчеркивающая протяженность отдельных частей и определяющая его место среди однородных предметов. Величина является свойством предмета, воспринимаемым различными анализаторами: зрительным, тактильным и двигательным. При этом чаще всего величина предмета воспринимается одновременно несколькими анализаторами: зрительно-двигательным, тактильно-двигательным и т. д. Величина предмета, т. е. размер предмета, определяется только на основе сравнения. Нельзя сказать, большой это или маленький предмет, его можно только сравнить с другим. Восприятие величины зависит от расстояния, с которого предмет воспринимается, а также от величины предмета, с которым он сравнивается. Чем дальше предмет от того, кто его воспринимает, тем он кажется меньше, и наоборот, чем ближе – тем кажется больше.

Характеристика величины предмета зависит также от расположения его в пространстве. Один и тот же предмет может характеризоваться то как высокий (низкий), то как длинный (короткий). Это зависит от того, в горизонтальном или вертикальном положении он находится. Величина предмета всегда относительна, она зависит от того, с каким предметом он сравнивается. Сравнивая предмет с меньшим, характеризуем его как больший, а сравнивая этот же предмет с бóльшим, называем его мéньшим. Приходим к выводу, что величина конкретного предмета характеризуется такими особенностями: сравнимость, относительность и изменчивость.

1) *Сравнимость* осуществляется:

– наложением,

– приложением,

– измерением с помощью условной мерки,

– сравнением на глаз.

2) *Относительность* зависит от предмета, с которым сравниваем, от расстояния, на которое сравниваем, от расположения в пространстве.

3) *Изменчивость*. Величина тесно связана с размером. А размер является свойством изменчивости величины. Каждый предмет имеет

свое родовое предназначение. Он может изменять свои размеры, не меняя своей сущности.

Итак, дошкольники обучаются сопоставлять предметы по признакам:

– маленький – большой, больше – меньше, одного размера;

– короче – длиннее, одинаковой длины;

– ниже – выше, одной высоты;

– шире – у́же, одинаковой ширины;

– тоньше – толще, одинаковой толщины;

– тяжелее – легче, одного веса;

– одинаковые и различные по форме и цвету.

Дети обучаются сравнивать разные предметы методом наложения, попарного сравнения и выделять из группы предмет по двум и трем признакам, находят «лишний» предмет в группе предметов. У дошкольников развивается глазомер.

Измерение – это совокупность действий, выполняемых с целью нахождения числового значения измеряемой величины в общепринятых единицах измерения (см, мм, кг, …).

Понятие «форма». Форма – пространственный признак любого предмета (внешнее очертание, вид), носитель предметного содержания окружающего нас мира (все предметы имеют форму). Не выделив и не опознав форму, человек не смог бы различать предметы. Определяя форму предмета, всегда опираемся на эталоны – геометрические фигуры.

Понятие «время». Время – философское понятие – это форма последовательной смены явлений и состояний материи. В переводе с древнерусского «время» – «вращение». Время имеет свойства: текучесть (время не остановить!), необратимость и неповторимость, длительность.

Понятие «пространство». Пространство – это форма существования материи (бесконечное вместилище вещей, арена движения тел).

Ориентировка в пространстве включает ориентировку на местности, ориентировку на себе, на другом человеке, на листе бумаги.

Ориентировка на местности включает:

а) определение «точки стояния», т. е. местонахождения субъекта по отношению к окружающим его объектам, например: «Я нахожусь справа от дома» и т. п.;

б) определение местонахождения объектов относительно человека, ориентирующегося в пространстве, например: «Шкаф находится справа, а дверь слева от меня»;

в) определение пространственного расположения предметов относительно друг друга, т. е. пространственных отношений между ними, например: «Справа от куклы сидит мишка, а слева от нее лежит мяч».

Ориентировка на себе – ориентировка на собственном теле.

Все основные математические понятия тесно связаны друг с другом. Их нельзя рассматривать отдельно, изолированно.

Понятие «число». Число – это отвлеченное понятие любого количества элементов. Знакомство с числом не начинают с трехлетними малышами, потому что трехлетний ребенок еще не осознает этого понятия, у него наглядно-действенное представление.

Цифра – это графическое изображение числа.

Двузначные числа – это натуральные числа, содержащие два разряда (разряд единиц и разряд десятков единиц). Сумма десяти единиц составляет десяток. Словосочетание «числа первого десятка» обозначает числа от 1 до 10 включительно.

Единица – это наименьшее натуральное число в любом разряде. Натуральные числа – целые положительные числа, поэтому среди них 1 (единица) число наименьшее (число 0 не относится к натуральным числам).

Понятие «геометрическая форма». Форма – это очертание, наружный вид предмета. Форма (лат. forma – форма, внешний вид) – взаимное расположение границ (контуров) предмета, объекта, а также взаимное расположение точек линии.

Детей учат распознавать геометрические фигуры: треугольник, круг, овал, квадрат, прямоугольник и многоугольник. Малыши учатся находить и называть углы, стороны и вершины всех знакомых фигур. Группируют фигуры по одному из трех признаков (цвет, форма, размер).

В природе не существует геометрических фигур. Геометрические фигуры – это эталон для определения формы окружающих предметов (в основном нас окружают прямоугольные формы). Фигуры бывают плоские – когда все точки находятся на одной плоскости; объемные тела – появляются путем вращения.

Понятие о конструировании. Обучение конструированию проводят на счетных палочках. Дети складывают из них геометрические фигуры, буквы, цифры, картинки.

Понятие об ориентировке в пространстве и времени. Ориентировка в пространстве включает следующие задачи для дошкольников:

1. Научиться определять положение предметов в пространстве: справа, слева, внизу, вверху.
2. Определять направление движения: справа налево, сверху вниз, назад, вперед, в противоположную сторону, в том же направлении.
3. Познакомиться с понятиями близко и далеко, низко и высоко, ближе, дальше, рядом.
4. Определять свое положение в пространстве: вне или внутри помещения; положение среди предметов: на, в, под, над, перед, между, к, от, через.
5. Ориентироваться на листке бумаги, в столбике и строчке клеток.

Ориентировка во времени осуществляется благодаря следующим умениям детей младшего возраста:

1. Дошкольники знакомятся с понятиями: день, неделя, месяц, год, дни недели, время суток и времена года.
2. Учатся определять дни, используя понятия: вчера, завтра, сегодня, послезавтра.
3. Включают в активный словарь понятия: скоро, долго, дальше, быстро, медленно, потом, давно.

Завершая разговор о понятиях математики для дошкольников, отметим положительное влияние на развитие мыслительной деятельности детей занятий логическими играми и решений логических задач, направленных на совершенствование логического мышления, смекалки и находчивости; ребусов и головоломок математического содержания. Успех обучения математике в начальной школе зависит от эффективного развития малыша в дошкольном возрасте. Главное помнить, что важен не объем знаний и умений, важны их качество и степень влияния на умственные возможности ребенка.

1.6. Понятия начальной математики

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп. Первую составляют понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, сложение, слагаемое, больше и др. Во вторую входят алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др. Третья группа содержит геометрические понятия: треугольник, прямая, отрезок и т. д. Четвертую группу образуют понятия, связанные с величинами и их измерением.

Выберем из каждой группы по одному понятию, например: «натуральное число» (из первой группы), «числовое равенство» (из второй), «четырехугольник» (из третьей), «масса фрукта» (из четвертой); охарактеризуем их с точки зрения объема и содержания, укажем некоторые их родовые и видовые понятия.

Каждый из объемов понятий «натуральное число», «числовое равенство», «четырехугольник», «масса фрукта» содержит бесконечное множество элементов. Поэтому указанные понятия являются общими.

Содержание понятия «натуральное число» составляет множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Множество всевозможных равенств, которые рассматриваются в начальной математике на разных числовых множествах, образует содержание понятия «числовое равенство». В содержание понятия «четырехугольник» входит любой из изучаемых в начальной школе четырехугольников плоскости. Совокупность масс различных предметов, являющихся фруктами, определит содержание понятия «масса фрукта».

Множество натуральных чисел – есть подмножество чисел целых, рациональных, действительных. Поэтому понятия «целое число», «рациональное число», «действительное число» будут родовыми по отношению к понятию «натуральное число». Ближайшим натуральному числу родовым понятием будет «целое неотрицательное число». Видовым понятием для понятия «натуральное число» является конкретный представитель из множества натуральных чисел, например понятия «натуральное число 2», «круглое натуральное число».

Понятие «числовое равенство» будет видовым по отношению к понятию «равенство», т. е. «равенство» – есть родовое понятие «числового равенства». Конкретное числовое равенство определит видовое понятие относительно понятия «числовое равенство». Например, числовые равенства «$2 + 3 = 5$», «$7 - (6 : 2 + 4) = 0$», «$21 : 3 + 8 = 3 \cdot 5$» – есть видовые понятия по отношению к понятию «числовое равенство».

Все четырехугольники плоскости одновременно есть и многоугольники, и плоские фигуры, т. е. множество четырехугольников включено в множество многоугольников, в множество плоских фигур.

Значит, для понятия «четырехугольник» понятия «многоугольник» и «плоская фигура» будут родовыми. Понятие «многоугольник» – ближайшее родовое понятие для четырехугольника. Видовым понятием в данном случае выступает любой элемент из объема понятия «четырехугольник плоскости». В качестве таких элементов можно взять, например, трапецию, параллелограмм, дельтоид.

Понятие «масса фрукта» имеет родовое понятие «масса», ближайшее, более уточненное родовое понятие – «масса предмета». Примером видового понятия могут служить «масса яблока», «масса банана».

На данный момент мы научились отличать объем понятия от его содержания, различать совместимые и несовместимые понятия, работать со сравнимыми понятиями, рассуждать об отношениях между понятиями. Для представления полной теории о понятиях необходимо уметь их определять.

1.7. Определение математических понятий. Требования к определению понятий

Процесс изучения некоторого математического объекта представляет собой последовательность этапов (шагов), осуществляя которые знания об изучаемом предмете пополняются, расширяются и/или углубляются. Одним из первоначальных (отправных) шагов исследования математического объекта является определение понятия. *Определить понятие* – значит указать способ, с помощью которого можно отделить какие-либо объекты или отношения, охватываемые данным понятием, от других объектов или отношений.

Определяя понятие, приходится совершать некоторую логическую операцию, в результате которой формулируется предложение, раскрывающее содержание понятия. Сами предложения при этом называются определениями. Таким образом, *определение* – это предложение, с помощью которого раскрывается содержание понятия или устанавливается значение термина.

В содержание понятия о каком-либо математическом объекте входят различные существенные признаки этого объекта. Однако для того чтобы распознать объект, установить, принадлежит он к данному понятию или нет, достаточно проверить наличие у него лишь некоторых существенных признаков. Указание этих существенных признаков объекта, которые достаточны для распознавания этого объекта, понятия, и называют определением понятия.

Определить понятие – значит выбрать из его существенных признаков такие и столько, чтобы каждый из них был необходим, а все вместе – достаточны для того, чтобы отличить изучаемый объект от других.

Выполняется действие определения разными путями, и результат его выполнения фиксируется в различного вида определениях, которые бывают вербальными (словесными) и невербальными.

Определение. *Невербальное определение* – это определение понятия путем непосредственной демонстрации объектов, охватываемых этим понятием, или приведение контекста, в котором содержится то или иное понятие.

Невербальные определения используются на начальном этапе изучения объектов или отношений. Поэтому учитель начальных классов должен быть знаком с ними особенно хорошо. Примерами таких определений следует назвать остенсивные и контекстуальные определения.

Определение. *Остенсивные* (от лат. ostendere – показывать) определения – это определения, устанавливающие значение терминов путем демонстрации объектов, которые этим термином определяются.

С использованием такого определения в начальной школе вводятся понятия «числовое выражение», «числовое равенство», «угол» и т. д. Например, знакомство с числовым выражением происходит так: «Прочитай записи: $9 + 7$, $30 + 6$, $18 - (4 + 6)$ $23 - 3$, $15 - 7 + 3$, $25 - (15 - 10)$. Это *числовые выражения*, или, короче, *выражения*» [10].

В других современных учебниках математики содержатся аналогичные записи, меняются только математические объекты в зависимости от того, в каком классе (первом или втором) дети знакомятся с этим понятием; при этом способ знакомства остается одним и тем же – путем показа. Важно понимать, что если учитель ограничится только показом, то это не даст ученикам четкого представления о том, в чем же заключается содержание данного понятия. Необходимо провести аналитическую работу, в результате которой дети выяснят, чем похожи и чем отличаются числовые выражения, т. е. сами выделят и назовут существенные и несущественные признаки понятия «числовое выражение».

<u>Определение.</u> *Контекстуальные* определения – это определения, в которых содержание понятия раскрывается через некоторый контекст.

Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решение, приведенные в учебнике математики для второго класса [10]. Здесь после записи $\square + 6 = 15$ и перечня чисел $0, 5, 9, 10$ идет текст: «К какому числу надо прибавить 6, чтобы получилось 15? Обозначим неизвестное число латинской буквой x (икс):

$x + 6 = 15$ – это уравнение.

Решить уравнение – значит найти неизвестное число. В данном уравнении неизвестное число равно 9, так как $9 + 6 = 15$.

Объясни, почему числа $0, 5, 10$ не подходят».

Из приведенного текста следует, что уравнение – это равенство, в котором есть неизвестное число. Оно может быть обозначено буквой x и это число надо найти. Кроме того, из этого текста следует, что решение уравнения – это число, которое при подстановке вместо x обращает уравнение в верное равенство.

По мере накопления запаса знаний происходит накопление понятий, развиваются язык и способность к обобщению. Все это дает возможность определять неизвестные понятия через известные. Так появляются *вербальные* определения. Во всяком таком определении выделяются *определяемое* и *определяющее* понятия. Например, в определении «Квадратом называется прямоугольник, у которого соседние стороны равны» понятие «квадрат» является определяемым, а понятие «прямоугольник, у которого соседние стороны равны» – определяющим. Логическая запись данного определения имеет вид:

квадрат $\overset{\text{по опр.}}{\Longleftrightarrow}$ прямоугольник, у которого соседние стороны равны.

Рассмотрим некоторые способы вербальных определений.

1. *Определение понятий через род и видовое отличие.*

Этот способ определения наиболее распространенный. Логическая структура определения через род и видовое отличие проста, четко выражена и поэтому доступна учащимся начальной школы. Такие определения часто представляют в виде схемы: вид = род + видовое отличие.

Попробуем теперь записать определение понятия через род и видовое отличие, используя логические символы.

Пусть a – определяемое понятие, тогда его объем можно выразить следующим образом $A = \{x| \ x \in B$ и $P(x)\}$, где B – это объем родового понятия по отношению к a, а $P(x)$ – видовое отличие (то свойство, которое выделяет нужный вид из других видов данного рода).

Например: «Прямоугольник – это параллелограмм с прямым углом».

В этом определении определяемое понятие a – прямоугольник, родовое понятие b – параллелограмм, объем B родового понятия b по отношению к a – множество параллелограммов плоскости, видовое отличие P – один угол прямой. Тогда логическая интерпретация $A = \{x| \ x \in B$ и $P(x)\}$ определения читается так: «Прямоугольником называется любой параллелограмм, у которого один угол прямой».

В этом случае операции, описывающие процедуру определения объектов, будут следующими: выбирается ближайший родовой объект, затем на этот объект накладываются как бы ограничения, видовые характеристики (отличия). На основе видовых характеристик вводится новый объект, но с меньшим объемом, чем родовой, так как у него больше свойств. Этому объекту с большим числом свойств и меньшим объемом присваивается новый термин (название).

2. *Генетическое определение понятий.*

Генетические (от слова генезис – происхождение), или *конструктивные*, определения являются частным случаем определений через род и видовое отличие. В таких определениях видовое отличие указывает на происхождение определяемого объекта или на способ его образования.

Рассмотрим, например, определение треугольника: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков». В этом определении указано родовое понятие для треугольника – фигура, а в качестве видового отличия указан способ построения такой фигуры, которая является треугольником: нужно взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком.

3. *Рекурсивные определения.*

В таких определениях указываются некоторые основные элементы из объема понятия и даются правила, позволяющие получить новые элементы из уже имеющихся. Например, определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом».

В математике существуют понятия, которые логически не определяются. Такие понятия называют *основными*, или *неопределяемыми*. Примерами таких понятий в начальной математике являются точка, прямая, множество, величина.

К определению понятий выдвигается ряд требований.

1. Определение должно содержать указание на ближайшее родовое понятие. Как бы ни было построено определение математического понятия, в нем должно быть указано ближайшее родовое понятие к определяемому понятию.

Нарушение этого требования приводит к различного рода ошибкам. Например, иногда учащиеся, формулируя определение понятия, не указывают родовое понятие. На вопрос, что такое прямоугольник, они отвечают: «Прямоугольник – это когда все углы прямые». Такая небрежность в формулировке определений недопустима, так как что означает «это», можно только догадываться.

Другой тип ошибок связан с тем, что в определении указывается не ближайшее родовое понятие, а более широкое. Пример такого определения:

«Квадрат – это четырехугольник, у которого все стороны равны». В этом определении указано не ближайшее для квадрата родовое понятие – «прямоугольник», а более широкое – «четырехугольник». И тем самым это определение становится неверным, так как четырехугольником, у которого все стороны равны, может быть не только квадрат, но и ромб.

2. Определения не должны содержать «порочного круга». Считают, что определение содержит «порочный круг», если в его определяющей части содержится определяемый термин. Например, в определении «Решением уравнения называется число, которое является решением этого уравнения», содержится «порочный круг»: понятие «решение уравнения» определяется через «решение уравнения». Может случиться, что «порочный круг» содержится в цепочке определений. Например, «Умножением чисел называется действие, при помощи

которого находят их произведение» и «Произведением чисел называется результат их умножения». В этом примере умножение определяется через понятие произведения, а произведение – через умножение. Определения образовали «порочный круг».

3. Определение не должно быть тавтологией, т. е. повторять в иной словесной форме ранее сказанное. Сущность такой ошибки в том, что понятие определяется через само себя. Например, «Сложением называется действие, при котором числа складываются». Здесь сложение определено через понятие «складывание», что одно и то же.

4. Определение должно быть достаточным. Это означает, что в определении должны быть указаны все признаки, позволяющие однозначно выделить объекты определяемого понятия. Если же это требование нарушается, то под определение можно подвести не только объекты определяемого понятия, но и другие объекты. Например, «Медианой треугольника называется отрезок, делящий его сторону пополам». Очевидно, что в этом определении указано недостаточное число признаков для медианы. Поэтому под это определение подходят не только медиана треугольника, но средняя линия треугольника и вообще любой отрезок, делящий сторону треугольника пополам.

5. Определение не должно быть избыточным. Это значит, что в определении не должно быть указано лишних признаков, вытекающих из других, уже указанных в определении. Например, «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и углы прямые». Свойство «иметь противоположные равные стороны» вытекает из свойства «иметь прямые углы». Значит, данное определение прямоугольника избыточно.

Введение определения понятия – это начальный шаг на пути работы с понятием. Следующий важный шаг состоит в том, чтобы научить учащихся ориентироваться на содержание определения при выполнении различных действий с объектами. Другими словами, надо не только задать точку зрения на вещи, но и добиться того, чтобы эта точка зрения была принята и реально использовалась учащимися. Если это не обеспечено, то в одних случаях определение может остаться в стороне: ученик будет опираться на другие свойства, которые он сам выделил в объекте. В других случаях ученики могут пользоваться только частью указанных свойств; в-третьих – могут добавить к указанным в определении свои, что также приводит к ошибкам.

Замечание. Определить понятие через род и видовое отличие соблюдая сформулированные выше правила, можно по-разному. Например, прямоугольник можно определить так:

а) параллелограмм с прямым углом;

б) параллелограмм, у которого диагонали равны;

в) четырехугольник, у которого все углы прямые.

Различные определения одного и того же понятия возможны потому, что из большого числа свойств, входящих в содержание понятия, в определение включаются только некоторые. Выбирая одно из возможных определений, исходят из того, какое из них проще и целесообразнее для дальнейшего построения теории.

Если одному и тому же понятию даются хотя бы два разных определения, то необходимо доказывать их равносильность: значит, требуется убедиться в том, что из свойств, включенных в одно определение, вытекают свойства, включенные и в другое, и наоборот.

Подводя итог изложенной теории определения понятий, сформулируем алгоритм, пользуясь которым можно воспроизвести определение знакомого понятия или построить определение нового.

1. Назвать определяемое понятие (термин).

2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.

3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, то есть сформулировать видовое отличие.

4. Проверить, выполнены ли правила 1 – 5 определения понятия.

1.8. Тестирование по теме «Математические понятия»

1. Даны пары понятий:

а) «ключ» – «солнце»;

б) «море» – «сельдь»;

в) «исток» – «устье»;

г) «золото» – «медь»;

д) «компьютер» – «день»;

е) «зима» – «лето»;

ж) «длина» – «отрезок»;

з) «новый» – «старый»;

и) «пилот» – «самолет»;

к) «поэзия» – «проза»;

л) «бескорыстие» – «добро»;

м) «цвета светофора» – «цвета радуги»;

н) «многоугольник» – «четырехугольник»;

о) «белый» – «стол».

Выберите из них:

1. пары сравнимых понятий;
2. пары несравнимых понятий;
3. единичные понятия;
4. положительные понятия;
5. конкретные понятия;
6. абстрактные понятия;
7. разделительные понятия;
8. конкретные эмпирические понятия;
9. пары совместимых понятий;
10. пары несовместимых понятий;
11. пересекающиеся понятия;
12. понятия, находящиеся в отношении подчинения;
13. пары понятий, связанных родовидовыми отношениями;
14. пары понятий, находящихся в отношении противоположности;
15. пары понятий, находящихся в отношении противоречия;
16. пары понятий, изучаемых в начальной математике.

2. Укажите, какие из следующих понятий относятся к пустым:

а) светофор;

б) светофор, имеющий пять цветов;

в) радуга;

г) радуга, имеющая пять цветов;

д) натуральное число;

е) натуральное число, меньшее 1.

3. Выберите математическое понятие, которое не рассматривается дошкольниками:

а) «число»;

б) «время»;

в) «отображение»;

г) «величина».

4. Выберите математическое понятие, которое не рассматривается младшими школьниками:

а) «число»;

б) «угол»;

в) «скорость»;

г) «вектор».

5. Среди представленных укажите определения квадрата через ближайшее родовое понятие:

а) четырехугольник, у которого все стороны равны, а углы прямые;

б) прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;

в) ромб, у которого есть прямой угол;

г) параллелограмм, у которого все стороны равны;

д) параллелограмм, у которого все углы прямые;

е) прямоугольник, у которого соседние стороны равны.

6. Среди приведенных утверждений укажите ложные:

а) диагонали трапеции точкой пересечения делятся пополам;

б) у трапеции две стороны параллельны, а две другие не параллельны;

в) трапеция – это параллелограмм;

г) если в трапеции один из четырех углов – прямой, то обязательно будет и еще один прямой угол из трех оставшихся;

д) в любую трапецию можно вписать окружность;

е) трапецию всегда можно вписать в окружность.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Основная часть практических заданий в математических учебных курсах требует обоснования решения. Такого изложения можно достичь, опираясь на истинные утверждения (аксиомы или ранее доказанные предложения: теоремы, леммы, следствия, и др.). Особого внимания заслуживают задачи, в которых некоторое утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним предложений – это задания на доказательство каких-либо умозаключений [5]. О видах и строении суждений, структуре и форме их доказательства, неполной индукции и о методе доказательства (полной индукции) подробно, доступным языком, на примере задач и их решений изложено в учебнике математики профессора Л. П. Стойловой [Там же].

В ходе доказательства предложений у студентов развиваются математическое мышление, умение анализировать, выстраивать логические цепочки между объектами, располагать эти связи в определенном порядке. Решение задач на доказательство требует глубокого понимания отдельной темы, порой даже оценки места данной темы в конкретном разделе изучаемого курса. Поначалу будущему учителю представляется странным обосновывать элементарные математические факты, поэтому есть смысл обратить внимание на образцы разбора подобных задач, предоставив ему возможность привыкнуть к такому творческому процессу, как доказательство.

2.1. Дедуктивные умозаключения. Правила вывода

Большую часть общих знаний об окружающей действительности человек получает с помощью рассуждений. Знание будет истинным, если оно получено путем правильного рассуждения, а такими считают рассуждения, построенные по правилам логики. В логике вместо термина «рассуждение» чаще используют «умозаключение».

Из учебного курса «Теоретические основы начальной математики» нам известны понятия «отношения между множествами» и «отношение логического следования» [13]. Практические навыки в решении задач на множествах и составлении таблиц истинности для высказываний и предикатов понадобятся при исследовании умозаключений на предмет их правильности. Такой техникой проверки стремятся овладеть не только математики и учителя, но и юристы, экономисты, психологи. Значимость вопроса связана с логическим анализом событий в конкретной научной области, с умением последовательно выстраивать какой-либо процесс, учитывая вариативность ситуаций, давать однозначный ответ об истинности (или ложности) заключения.

Определение. *Умозаключение* – это форма мышления или логическое действие, в результате которого из одного или нескольких определенным образом связанных суждений получается новое суждение, в котором содержится новое знание.

Умозаключение состоит из посылок и заключения. *Посылки* A_1, A_2, …, A_n – это суждения или высказывания, содержащие исходные знания. *Заключение* B – это суждение или высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходных. В математической логике подробно изучаются классификации умозаключений по различным основаниям, а также всевозможные виды умозаключений. Ограничимся рассмотрением лишь дедуктивных умозаключений.

Определение. *Дедуктивным* называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \vdash B$. Общепринятой для такого умозаключения является запись $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$, где черта дроби отделяет посылки от заключения и читается как «следовательно», «значит». Дедуктивные умозаключения строятся на основе логического следования, поэтому истинность посылок в них должна гарантировать истинность заключения. Но как строить такие умозаключения и определять их правильность?

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. Логика предлагает так называемые *правила вывода*, или *схемы дедуктивных умозаключений*. Именно по этим правилам и строятся дедуктивные умозаключения. Самыми популярными из множества схем считаются:

правило заключения

$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$$

правило отрицания

$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$

правило контрапозиции

$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)}{(\forall x)\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}}$$

правило силлогизма

$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{(\forall x)A(x) \Rightarrow C(x)}$$

При записи этих правил использованы *общие* посылки (вида $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$) и *частные* посылки (вида $A(a)$ или $\overline{B(a)}$). Общей посылкой может быть теорема, определение или любое логическое следование. Частная посылка получается при подстановке конкретных значений переменной.

Примеры задач и их решений

Задача 1. Привести примеры конкретных рассуждений с использованием правил заключения, отрицания, контрапозиции и силлогизма.

Решение

1. Рассуждение с использованием правила заключения: «Если число имеет лишь два делителя: единицу и само себя, то оно является простым. Число 73 делится только на единицу и на само себя. Значит, число 73 – простое».

Здесь $A(x)$: «Число x имеет лишь два делителя: единицу и само себя», $B(x)$: «Число x – простое», $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$: «Любое число, имеющее только два делителя: единицу и само себя, является простым», a – 73, $A(a)$: «Число 73 имеет только два делителя: единицу и само себя», $B(a)$: «Число 73 – простое».

2. Рассуждение с использованием правила отрицания: «Равные треугольники имеют равные площади. Площади треугольников ABC и KLM различны. Значит, треугольники ABC и KLM не равны».

Здесь $A(x,y)$: «Треугольник x равен треугольнику y», $B(x,y)$: «$S_x = S_y$», $(\forall x,y)\ A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$: «Все равные треугольники имеют равные площади», a – ABC, $b - KLM$, $\overline{B(a,b)}$: «$S_{ABC} \neq S_{KLM}$», $\overline{A(a,b)}$: «Треугольники ABC и KLM не равны».

3. Рассуждение с использованием правила контрапозиции: «Все натуральные числа, равные или большие ста, не являются двузначными и однозначными. Следовательно, все натуральные числа, меньшие ста, являются или двузначными, или однозначными».

Здесь $A(x)$: «натуральное число $x \geq 100$», $B(x)$: «натуральное число x – недвузначное и неоднозначное», $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$: «Все натуральные числа, равные или большие ста, не являются двузначными и однозначными», $\overline{B(x)}$: «натуральное число x – двузначное или однозначное», $\overline{A(x)}$: «натуральное число $x < 100$», $(\forall x)\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$: «Все натуральные числа, меньшие ста, являются или двузначными, или однозначными».

Замечание 1. В рассмотренном рассуждении предикат $B(x)$: «натуральное число x – недвузначное и неоднозначное» имеет составную структуру, $B(x) = p(x) \wedge q(x)$, где $p(x)$: «натуральное число x не является двузначным», $q(x)$: «натуральное число x не является однозначным»; предикат $B(x)$: – есть конъюнкция предикатов $p(x)$ и $q(x)$. Тогда отрицание $\overline{B(x)}$ предиката $B(x)$ будет выстроено по закону де Моргана ([13, ст. 25]: $\overline{B(x)} = \overline{p(x) \wedge q(x)} = \overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}$ и прочитать его можно так: «натуральное число x – двузначное или однозначное».

4. Рассуждение с использованием правила силлогизма: «Все натуральные числа $\mathbb{N}$ являются целыми $\mathbb{Z}$. Все целые числа $\mathbb{Z}$ являются действительными $\mathbb{R}$. Следовательно, все натуральные числа $\mathbb{N}$ являются действительными $\mathbb{R}$».

Здесь $A(x)$: «x – натуральное число», $B(x)$: «x – целое число», $C(x)$: «x – действительное число» $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$: «Все натуральные числа являются целыми» $(\forall x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$: «Все целые числа являются действительными», $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$: «Все натуральные числа являются действительными».

Замечание 2. Рассуждения, проведенные по схемам, являются правильными. Если же схема рассуждения не совпадает с правилами вывода, то требуется установить правильность такого рассуждения. При этом нужно убедиться, что истинность посылок гарантирует истинность заключения (т. е. не должно быть ситуации, когда посылки истинны, а заключение ложно). Для проверки правильности рассуждения часто используют круги Эйлера.

Задача 2. Проверить, являются ли рассуждения правильными: а) всякое целое число, если оно оканчивается цифрой 5, делится на 5. Число 1845 делится на 5. Следовательно, 1845 оканчивается цифрой 5; б) все прямоугольники являются параллелограммами. Некоторые параллелограммы имеют равные стороны. Следовательно, некоторые прямоугольники имеют равные стороны; в) некоторые числа, кратные 10, делятся на 6. Все числа, кратные 6, делятся на 3. Следовательно, некоторые числа, кратные 10, делятся на 3.

Решение. а) Данное рассуждение проведено по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x),\ \ B(a)}{A(a)}$. Здесь $A(x)$: «Число x оканчивается цифрой 5», $B(x)$: «Число x делится на 5», $a = 1845$.

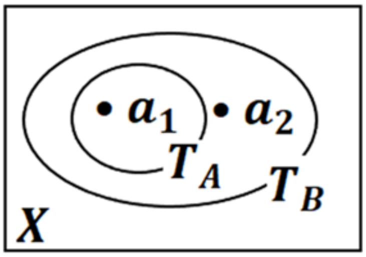


Рис. 7

Полученная схема рассуждения не совпадает с приведенными правилами. Поэтому нужно проверить, будет ли оно правильным: всегда ли при истинных посылках в рассуждении по этой схеме гарантировано истинное заключение. Проверку осуществим на кругах Эйлера (рис. 7). Учитывая, что $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ – истинное высказывание, то имеет место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ и $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$. Вторая посылка $B(a)$ тоже должна быть истинной, тогда $a \in T_{B(x)}$. Чтобы заключение было истинным, нужно, чтобы $a \in T_{A(x)}$. Всегда ли будет так? Изобразив на кругах Эйлера условия, определяющие истинность посылок, видим, что элемент a может быть выбран двумя способами (рис. 7). В первом случае $a_1 \in T_{A(x)}$ и заключение истинно. Но есть и второй случай, при котором $a_2 \notin T_{A(x)}$; это значит, что при истинных посылках не получим истинного заключения. Вывод: рассуждение по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x),\ \ B(a)}{A(a)}$ не является правильным.

Замечание 3. Если в качестве элемента a выбрать не число 1845, а, например, число 1840, то становится понятным сразу, что из истинных посылок выводится ложное заключение, и такое рассуждение не может быть правильным. В этом случае $a_1 = 1845$ соответствует ситуации 1, $a_2 = 1840$ – ситуации 2.

б) Введем условия $A(x)$: «x – прямоугольник», $B(x)$: «x – параллелограмм», тогда первая посылка «Все прямоугольники являются параллелограммами» имеет структуру $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. Далее условие $C(x)$: «x – имеет равные стороны», вторая посылка «Некоторые параллелограммы имеют равные стороны» структуры $(\exists x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$. Заключение: «Некоторые прямоугольники имеют равные стороны» структуры $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$. Получается схема рассуждения вида $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x),\ \ (\exists x)\ B(x)\Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x)\Rightarrow C(x)}$.

Проверку истинности этого рассуждения проведем на кругах Эйлера. Определим условия, гарантирующие истинность посылок. Высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ – истинно, значит, $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$. Высказывание $(\exists x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$ – истинно, значит, $T_{B(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$.

Чтобы высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ было истинным, нужно, чтобы $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$. Будет ли всегда так?

Изобразим на кругах Эйлера условия, гарантирующие истинность посылок (рис. 8).

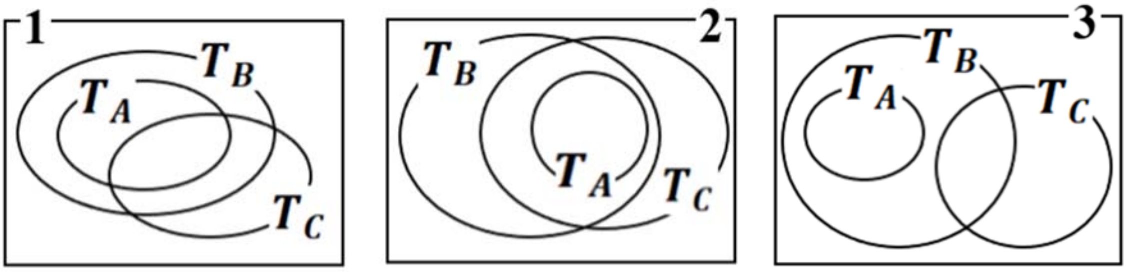


Рис. 8

На рис. 8 видно, что в первом и втором случаях высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ истинно, в третьем случае это высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ ложно.

Значит, рассуждение, проведенное по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x),\ \ (\exists x)\ B(x)\Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x)\Rightarrow C(x)}$, может привести к ложному выводу и не является правильным.

в) Рассмотрим условия $A(x)$: «Число x кратно 10», $B(x)$: «Число x делится на 6». Тогда первая посылка «Некоторые числа, кратные 10, делятся на 6» имеет структуру $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. Далее условие $C(x)$: «Число x делится на 3», вторая посылка «Все числа, кратные 6, делятся на 3» структуры $(\forall x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$. Заключение: «Некоторые числа, кратные 10, делятся на 3» структуры $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$. Получается схема рассуждения вида $\frac{(\exists x)A(x)\Rightarrow B(x),\ \ (\forall x)\ B(x)\Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x)\Rightarrow C(x)}$.

Данная схема рассуждения отличается от правил вывода. Значит, нужно проверять, будет ли оно правильным: всегда ли при истинных посылках в рассуждении по этой схеме гарантировано истинное заключение. Проверку на кругах Эйлера читателю предлагается провести самостоятельно. При построении учитывать, что $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ – истинное высказывание, значит, области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ находятся в отношении пересечения $T_{A(x)} \cap T_{B(x)} \neq \emptyset$.

Вторая посылка $(\forall x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$ тоже должна быть истинной. Действительно, для любого числа: если оно делится на 6, то оно делится и на 3. Высказывание $(\forall x)\, B(x) \Rightarrow C(x)$ истинно, поэтому имеет место логическое следование $B(x) \vdash C(x)$ и $T_{B(x)} \subset T_{C(x)}$. Всегда ли будет истинным заключение $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$? В общем случае области истинности предикатов $A(x)$ и $C(x)$ должны пересекаться $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$.

Изобразите на кругах Эйлера условия, определяющие истинность посылок, и убедитесь, что, как и в пункте б), анализу подлежат три случая. В одном из них имеем $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$ и заключение истинно. В другом – $T_{A(x)} \subset T_{C(x)}$, что сильнее условия $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$ и, значит, заключение истинно. Будет и случай, где $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} = \emptyset$, т. е. заключение ложно. Значит, при истинных посылках не всегда можно прийти к истинному заключению. Вывод: рассуждение, проведенное по схеме $\frac{(\exists x) A(x) \Rightarrow B(x), (\forall x)\ B(x) \Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)}$, не является правильным.

<u>Замечание 4.</u> Если выбрать условия $B(x)$: «x – четырехугольник» и $C(x)$: «Многоугольник x содержит угол $30°$», то легко убедиться, что рассуждение, проведенное по указанной схеме, не является правильным, потому что из истинных посылок выводится ложное заключение: «Все прямоугольники являются четырехугольниками. Некоторые четырехугольники содержат угол $30°$. Следовательно, некоторые прямоугольники содержат угол $30°$».

<u>Замечание 5.</u> Изучены правильные дедуктивные умозаключения на примере задач математического содержания. В других областях знаний точно так же, как в задаче 1, можно строить умозаключения и аналогично задаче 2 определять структурные единицы рассуждений, проводить анализ логического следования заключения из посылок, делать вывод о правильности умозаключения.

2.2. Индуктивные умозаключения

<u>Определение.</u> *Инду́кцией* (*индукция* в переводе с латинского означает *наведение, установление, влечение за собой*) называется процесс вывода суждения на основе перехода от частных посылок к заключению.

Основное отличие индуктивных умозаключений от дедуктивных состоит в том, что в них зачастую связь частных посылок с заключением осуществляется не по законам логики, а через некоторые фактические, психологические или математические представления.

Объективным основанием индуктивного умозаключения является всеобщая связь явлений в природе.

Различают полную и неполную индукцию.

Определение. *Полной индукцией* называется такой метод доказательства, при котором истинность умозаключения следует из истинности его во всех частных случаях.

Ранее [7; 8] мы познакомились с таким способом доказательства, как *метод математической индукции*. Данный метод позволяет осуществить полную индукцию для бесконечного счетного множества. Этим способом мы проводили доказательства математических предложений в множествах целых неотрицательных и натуральных чисел.

Определение. *Неполной индукцией* называется умозаключение, в котором вывод о его правильности заключается из некоторых частных случаев.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением: рассуждения, проведенные по этой схеме, могут привести к ложному заключению. Вообще выводы, полученные с помощью неполной индукции, являются гипотезами, предположениями и нуждаются в дальнейшей проверке. Потому заключения неполной индукции нуждаются в доказательстве.

Стоит отметить все же, что роль таких умозаключений в процессе познания велика: многие научные законы были открыты с помощью неполной индукции.

Пример задачи и ее решение

Задача. Привести примеры конкретных рассуждений с использованием неполной индукции и построить умозаключения при помощи полной индукции.

Решение

Рассмотрим, например, такое задание: «Сравните значение выражений $(a+6)(7-a)$ и $a(a-1)$ при $a=-3, 0, 2$. Верно ли, что при любом целом a значение первого выражения больше, чем второго?»

Выполним сравнение значений выражений $(a+6)(7-a)$ и $a(a-1)$ при указанных значениях переменной a. Результат сравнения представим в табличной форме.

a	Зн. $((a+6)(7-a))$	Зн. $(a(a-1))$	Сравнение	Вывод
-3	$3 \cdot 10 = 30$	$-3\,(-4) = 12$	$30 > 12$	Истина
0	$6 \cdot 7 = 42$	$0\,(-1) = 0$	$42 > 0$	Истина
2	$8 \cdot 5 = 40$	$2 \cdot 1 = 2$	$40 > 2$	Истина

Из таблицы видно, что для некоторых целых чисел значение выражения $(a+6)(7-a)$ больше значения выражения $a(a-1)$. На основании того что для некоторых значений переменной a значение первого выражения больше, чем второго, можно сделать вывод о таком же результате для всех целых чисел.

Однако это утверждение ложно. Например, при $a = 7$ получаем (Зн. $((a+6)(7-a)) =$ Зн. $(13 \cdot 0) = 0$, а Зн. $\big(a(a-1)\big) =$ Зн. $(7 \times$ $\times\, 6) = 42$, имеем неравенство $0 < 42$, которое противоречит утверждению «значение выражения $(a+6)(7-a)$ больше значения выражения $a(a-1)$ при любых целых a».

Теперь построим умозаключение при помощи полной индукции. Например, для высказываний A, B, C рассмотрим левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee$ $\vee\, (A \wedge C)$. Доказательство многих логических законов осуществляется перебором всевозможных комбинаций входящих высказываний, т. е. проводится анализ всех частных случаев данного утверждения. Итак, ход доказательства дистрибутивного закона $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee$ $\vee\, (A \wedge C)$ представим в таблице истинности, затем (с помощью таблицы) сравним значения истинности высказываний $A \wedge (B \vee C)$ и $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ в каждом конкретном случае. Имеем:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
и	и	и	и	**и**	и	и	**и**
и	и	л	и	**и**	и	л	**и**
и	л	и	и	**и**	л	и	**и**
и	л	л	л	**л**	л	л	**л**
л	и	и	и	**л**	л	л	**л**
л	и	л	и	**л**	л	л	**л**
л	л	и	и	**л**	л	л	**л**
л	л	л	л	**л**	л	л	**л**

Видим, что высказывания $A \wedge (B \vee C)$ и $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ принимают одинаковые значения истинности при одинаковых значениях входящих высказываний. Во всех частных случаях утверждение $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ справедливо. Значит, высказывания $A \wedge (B \vee C)$ и $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ равносильны, и левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции выполняется: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Доказательство проведено методом полной индукции.

2.3. Аналогия

Определение. *Аналогией* называется недедуктивное умозаключение, в котором заключение о принадлежности признака некоторому объекту устанавливается на основании сходства его с другим объектом.

Аналогия позволяет открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенный способ деятельности в измененных условиях.

Вывод по аналогии носит характер гипотезы, предположения и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Широко используется аналогия в обучении математики младших школьников. Это происходит при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с ними.

В учебном курсе «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» методом от противного нами была доказана единственность суммы целых неотрицательных чисел в рамках аксиоматического подхода к определению целого неотрицательного числа. При изучении умножения целых неотрицательных чисел требовалось установить единственность произведения этих чисел. Процесс доказательства в данном случае проводится по аналогии с доказательством единственности суммы чисел.

2.4. Виды доказательств математических предложений

Докажем математические предложения из разных разделов учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов». Будем указывать название раздела и название темы в разделе, откуда берем предложение к доказательству.

Раздел. Элементы теории множеств
Тема. Доказательство равенства множеств[1]

Задача 1. Доказать, что для любых множеств $A,\ B,\ C$ имеет место левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Доказательство. Для удобства рассуждений обозначим:

$$\underbrace{A \times (B \cup C)}_{X} = \underbrace{(A \times B) \cup (A \times C)}_{Y}.$$

В процессе доказательства данного равенства понадобятся определения равных множеств и двух нижеследующих операций над множествами[2].

Определение отношения равенства множеств. Два множества равны, если состоят из одних и тех же элементов. Другими словами, все элементы первого множества являются элементами второго, следовательно, первое множество включено во второе; и, наоборот, все элементы второго множества являются элементами первого, т. е. второе множество включено в первое.

Определение операции объединения множеств. Объединением данных множеств называется новое множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

Определение операции декартова произведения множеств. Декартовым произведением двух данных множеств называется множество всех упорядоченных пар с первой компонентой из первого множества и второй компонентой – из второго.

Проведем развернутое доказательство левого дистрибутивного закона умножения относительно объединения на основе определения отношения равенства множеств.

Чтобы установить $X = Y$, нужно доказать включения: а) $X \subset Y$; б) $Y \subset X$.

а) Для того чтобы $X \subset Y$, требуется, чтобы все элементы множества X были элементами множества Y. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $x \in X$ и покажем, что $x \in Y$.

[1] Данный вопрос подробно изложен в пособии [2].

[2] Исходя из этих определений, далее будем опускать слова «отношение» и «операция».

Элемент $x \in A \times (B \cup C)$, следовательно, по определению декартова произведения множеств x – это упорядоченная пара вида (p, q), где $p \in A$ (1) $\boxed{\text{и}}$ $q \in B \cup C$ (2).

Упростим условие (2). По определению объединения множеств имеем:

$q \in B$ (3) $\boxed{\text{или}}$ $q \in C$ (4).

Условие (1) должно выполняться одновременно (выделен союз *и*) с условием (3) или условием (4).

Пусть выполнены условия (1) и (3). Тогда читаем: $p \in A$ и $q \in B$, что по определению декартова произведения множеств дает $(p, q) \in (A \times B)$, значит, $x \in (A \times B)$ (5).

Пусть выполнены условия (1) и (4). Аналогично получаем $p \in A$ и $q \in C$, следовательно, по определению декартова произведения множеств $(p, q) \in (A \times C)$, т. е. $x \in (A \times C)$ (6).

Из условий (5) и (6) по определению объединения множеств: $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$ (7).

Условие (7) в силу произвольности элемента x доказывает, что все элементы множества X принадлежат множеству Y. Значит, доказано $X \subset Y$.

б) Для того чтобы $Y \subset X$, требуется, чтобы все элементы множества Y были бы элементами множества X. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $y \in Y$ и покажем, что $y \in X$.

Имеем $y \in Y \implies$ y $\in (A \times B) \cup (A \times C)$, откуда по определению объединения множеств заключаем: $y \in (A \times B)$ $\boxed{\text{или}}$ $y \in (A \times C)$. Видим, что в каждом из множеств $A \times B$ или $A \times C$ элемент y – это упорядоченная пара (p, q), поэтому $(p, q) \in (A \times B)$ (1) $\boxed{\text{или}}$ $(p, q) \in (A \times C)$ (2).

Упростим каждое из полученных условий (1) и (2).

(1) $\xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} p \in A$ (3) и $q \in B$ (4)

(2) $\xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} p \in A$ (5) и $q \in C$ (6)

Поскольку условия (1) и (2) выполняются неодновременно (выделен союз *или*), то группы условий (3), (4) и (5), (6) нужно рассматривать отдельно.

Пусть выполнены условия (3), (4). В условии (3) обозначено положение первой компоненты: $p \in A$. Вторая компонента q принадлежит множеству B. Условие (4) позволяет расширить его до нового множества $B \cup C$ согласно определению операции объединения множеств.

$(4) \xrightarrow{\text{по опр. объединения множеств}} q \in (B \cup C)$ (7)

(3), (7) $\longrightarrow p \in A$ и $q \in (B \cup C)$

$\xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} (p, q) \in A \times (B \cup C)$, т. е.,

у $\in A \times (B \cup C)$. Получаем:

$y \in X$. (8)

Пусть теперь выполнены условия (5), (6).

В условии (5) обозначено положение первой компоненты $p \in A$. Вторая компонента q принадлежит множеству C. Условие (6) позволяет расширить его до нового множества $B \cup C$ согласно определению операции объединения множеств.

$(6) \xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}} q \in (B \cup C)$ (9).

(5), (9) $\longrightarrow p \in A$ и $q \in (B \cup C) \xrightarrow{\text{по опр. декартова произведения множеств}}$ $(p, q) \in A \times (B \cup C)$, т. е. у $\in A \times (B \cup C)$, $\Longrightarrow$ у $\in$ Х (10).

Из условий (8) и (10) в силу произвольности элемента y доказано, что все элементы множества Y принадлежат множеству X. Значит, доказано включение $Y \subset X$.

В пункте а) доказано, что множество X содержится в множестве Y, в пункте б) доказано, что множество Y содержится в множестве X. Тем самым равенство $X = Y$ установлено, и левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения доказан.

В задаче 1 доказательство выстраивается на основе определений отношения равенства множеств и операций объединения и декартова умножения множеств.

Раздел. Натуральное число как результат измерения величины
Тема. Сложение натуральных чисел, являющихся результатом измерения величин

Теорема. Сумма натуральных чисел всегда существует и единственна.

Остановимся здесь на вопросе о единственности суммы[3]. Доказательство проведем методом от противного.

Дано: $n, k \in \mathbb{N}$,

$n + k = p_1$,

[3]Полностью доказательство теоремы см. в [7].

$n + k = p_2$.

Доказать: $p_1 = p_2$.

Доказательство. Пусть существуют две различные суммы p_1 и p_2 у одних и тех же чисел n и k. С точки зрения теории измерения величин натуральные числа n и k – это меры некоторых отрезков. Выберем конгруэнтные между собой пары отрезков a и a', b и b': $a' \cong a$ (1), $b' \cong b$ (2). Тогда число n – это мера отрезка a, $n = m_e(a)$, число k – это мера отрезка b, $k = m_e(b)$, поэтому сумма чисел $n + k = p_1$ – есть мера суммы отрезков a и b, $p_1 = m_e(a + b)$. Ввиду конгруэнтностей (1) и (2) n и k – также меры отрезков a' и b': $n = m_e(a')$, $k = m_e(b')$, следовательно, сумма чисел $n + k = p_2$ является мерой суммы отрезков a' и b', $p_2 = m_e(a' + b')$.

Чтобы равенство $p_1 = p_2$ чисел-сумм p_1 и p_2 имело место, нужно доказать, что отрезки, соответствующие этим числам, равны

$a + b \cong a' + b'$.

Выберем единичный отрезок e. Пользуясь данной единицей измерения, построим отрезки a, b, a', b' и отрезки-суммы $a + b$ и $a' + b'$ (рис. 9).

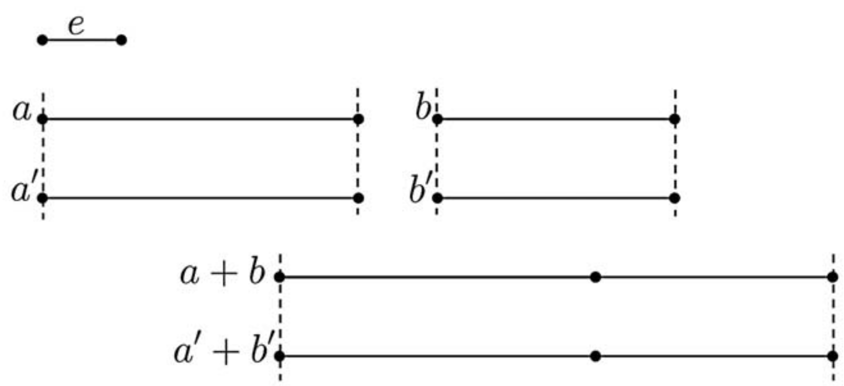


Рис. 9

Выполненные построения показывают, что отрезки $a + b$ и $a' + b'$ совпадают при наложении и, значит, конгруэнтны $a + b \cong a' + b'$. Меры конгруэнтных отрезков равны, $m_e(a + b) = m_e(a' + b')$. Следовательно, равенство $p_1 = p_2$ доказано. Единственность суммы натуральных чисел установлена. Теорема доказана.

Раздел. Аксиоматический подход к построению множества натуральных чисел

Тема. Доказательство равенств и делимости выражений на число методом математической индукции

Задача 2. Доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место равенство

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1. Проверим истинность равенства при $n=1$.

В левой части (далее Л. ч.) возьмем одно первое слагаемое (или, что то же самое, подставим в расчетную формулу значение $n=1$, тогда

$$\text{Л. ч.}\xrightarrow{n=1}\frac{1}{(4\cdot 1-3)(4\cdot 1+1)}=\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Аналогичная подстановка в правую часть (далее Пр. ч.) дает:

Пр. ч. $=\frac{n}{4n+1}\xrightarrow{n=1}\frac{1}{4\cdot 1+1}=\frac{1}{5}.$

Таким образом, при $n=1$ Л. ч.= Пр. ч. равенство принимает вид $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ и является истинным.

Выдвинем гипотезу, т. е. предположим, что при $n=k$ равенство истинно

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)}}_{S_k}=\frac{k}{4k+1}\ldots\ldots\ldots.(1)$$

и докажем, что при $n=k+1$ оно также будет истинным

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)}=\frac{k+1}{4(k+1)+1}.(2)$$

Рассмотрим сумму дробей из левой части этого равенства и попробуем преобразовать ее к выражению, которое в правой части равенства (2). Воспользуемся гипотезой, равенством (1), где S_k – есть сумма k (штук) слагаемых определенного вида, следовательно, может быть заменена значением суммы, найденным по формуле (правая часть равенства (1)).

$$\text{Л.ч.}(2) = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{S_k} +$$

$$+\frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} =$$

$$= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}.$$

Далее находим сумму дробей $\frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}$, преобразуем выражение в числителе $\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}$. Там же квадратный трехчлен запишем в виде множителей $\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} =$ $= \frac{4(k+1)\left(k+\frac{1}{4}\right)}{(4k+1)(4k+5)}$. Множитель 4 внесем в скобки второго множителя и выполним сокращение полученной дроби ($k \in \mathbb{N}, 4k+1 \neq 0$).

$$\frac{4(k+1)\left(k+\frac{1}{4}\right)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} = \text{Пр.ч.}(2).$$

Таким образом, после преобразований выражения в левой части равенство (2) принимает вид $\frac{k+1}{4k+5} = \frac{k+1}{4k+5}$.

Очевидно, что это равенство истинно.

Вывод. Доказано, что при $n = 1$ равенство истинно и из предположения об истинности равенства при $n = k$ следует его истинность при $n = k+1$. Значит, равенство $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ справедливо для всех натуральных чисел n.

В проведенном выше доказательстве использовано разложение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, которые находятся по формулам $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.

Задача 3. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6.

Доказательство.

1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

Найдем значение выражения $(5^{2n-1} + 7)$ при $n = 1$.

$5^{2\cdot 1-1} + 7 = 5^1 + 7 = 12$, 12 делится на 6 – истина.

2. Предположим, что выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6 при $n = k$, т. е.

$$(5^{2k-1} + 7) \vdots 6 \qquad (1)$$

и докажем, что данное утверждение будет истинно при $n = k + 1$, т. е. докажем, что имеет место делимость

$$(5^{2(k+1)-1} + 7) \vdots 6. \qquad (2)$$

Преобразуем выражение (2) к такому виду, чтобы можно было использовать условие (1). А именно:

$$5^{2(k+1)-1} + 7 = 5^{2k+2-1} + 7 = 5^{(2k-1)+2} + 7 =$$
$$= 5^{2k-1} \cdot 5^2 + 7 = 5^{2k-1} \cdot 25 + 7 =$$
$$= 5^{2k-1}(24 + 1) + 7 = \underbrace{5^{2k-1} \cdot 24} + \underbrace{5^{2k-1} + 7}.$$

В последней части равенства первое слагаемое $5^{2k-1} \cdot 24$ делится на 6 (по правилу деления произведения на число $24 \vdots 6$, см. [3]), второе слагаемое $5^{2k-1} + 7$ делится на 6 по гипотезе (1); следовательно, сумма этих слагаемых разделится на 6 (по правилу деления суммы нескольких слагаемых на число [3, гл. 2]) $(5^{2k-1} \cdot 24 + 5^{2k-1} + 7) \vdots 6$.

Потому и выражение (2) будет делиться на 6.

Доказано, что выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6 при $n = 1$ и из делимости его на 6 при $n = k$ следует делимость при $n = k + 1$. Значит, исходное утверждение справедливо для всех натуральных чисел n.

Раздел. Делимость натуральных чисел
Тема. Задачи на доказательство делимости

Задача 4. Доказать, что при любом целом m число $m^3 + 11m$ делится без остатка на 3.

Решение проведем методом перебора всевозможных вариантов, другими словами, методом полной индукции, т. е. истинность утверждения будет следовать из истинности его во всех частных случаях [1].

По теореме о делении с остатком представим m в виде $m = 3q + r$, где q – целое число, а остаток r принимает одно из значений $0, 1, 2$.

Если $r = 0$, то $m = 3q$. Тогда $m^3 + 11m = (3q)^3 + 11(3q) =$ $= (3q)((3q)^2 + 11)$ кратно 3.

Если $r = 1$, то $m = 3q + 1$. Тогда

$m^3 + 11m = (3q+1)^3 + 11(3q+1) = (3q+1)((3q+1)^2 + 11) =$
$= (3q+1)((3q)^2 + 6q + 1 + 11) = (3q+1)(9q^2 + 6q + 12) =$
$= 3(3q+1)(3q^2 + 2q + 4)$ кратно 3.

Если $r = 2$, то $m = 3q + 2$. Тогда
$m^3 + 11m = (3q+2)^3 + 11(3q+2) = (3q+2)((3q+2)^2 + 11) =$
$= (3q+2)((3q)^2 + 12q + 4 + 11) =$
$= (3q+2)(9q^2 + 12q + 15) =$
$= 3(3q+2)(3q^2 + 4q + 5)$ кратно 3.

Эту задачу можно было бы решить и другими способами. Например, провести рассуждение с использованием формул сокращенного умножения: $m^3 + 11m = m^3 - m + 12m = m(m^2 - 1) + 12m = = (m-1)m(m+1) + 12m$. Число $12m$ делится на 3, число $(m-1)m(m+1)$ также делится на 3 как произведение трех последовательных натуральных чисел.

Доказательство можно выполнить также методом математической индукции.

Раздел. Расширение множества натуральных чисел
Тема. Множество рациональных чисел

Задача 5. Доказать, что для любых положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство $(r_1 + r_2){:}\,r_3 = r_1 : r_3 + r_2{:}\,r_3$.

Доказательство.

Пусть число r_1 представлено дробью $\frac{a_1}{b_1}$, число r_2 – дробью $\frac{a_2}{b_2}$, число r_3 определится дробью $\frac{a_3}{b_3}$. Тогда сумма чисел $r_1 + r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{b_1\,b_2}$, а частное $(r_1 + r_2){:}\,r_3$ представлено дробью

$$\frac{(a_1\,b_2 \ + \ a_2\,b_1)\,b_3}{(b_1\,b_2)a_3}. \qquad (1)$$

В правой части равенства частное $r_1{:}\,r_3$ представлено дробью $\frac{a_1\,b_3}{b_1\,a_3}$, частное $r_2 : r_3$ – дробью $\frac{a_2\,b_3}{b_2\,a_3}$, а сумма $r_1 : r_3 + r_2{:}\,r_3$ определится дробью вида

$$\frac{(a_1\,b_3)(b_2a_3) + \ (a_2b_3)(b_1a_3)}{(b_1a_3)(b_2a_3)}. \qquad (2)$$

Для доказательства исходного равенства нужно, чтобы дроби (1) и (2) принадлежали одному классу эквивалентности, тогда они будут определять одно и то же рациональное число. Докажем, что дроби (1) и (2) равносильны

$$\frac{(a_1\, b_2\ +\ a_2\, b_1)\, b_3}{(b_1\, b_2)a_3} \sim \frac{(a_1\, b_3)(b_2 a_3) +\ (a_2 b_3)(b_1 a_3)}{(b_1 a_3)(b_2 a_3)}.$$

Рассмотрим дробь (∗∗)

$$\frac{(a_1\, b_3)(b_2 a_3) +\ (a_2 b_3)(b_1 a_3)}{(b_1 a_3)(b_2 a_3)} = \frac{(a_1\, b_2\ +\ a_2\, b_1)\, b_3\ \ a_3}{(b_1\, b_2)(a_3)^2} \sim$$

$$\sim \frac{(a_1\, b_2\ +\ a_2\, b_1)\, b_3}{(b_1\, b_2)a_3},$$

что и требовалось доказать. При доказательстве использовался тот факт, что при делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число получается дробь, равносильная данной.

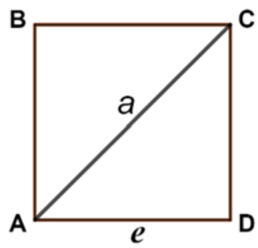
Итак, дроби (1) и (2) равносильны, значит, принадлежат одному классу эквивалентности и определяют одно и то же положительное рациональное число. Поэтому исходное равенство имеет место для всех положительных рациональных чисел.

Замечание. Можно было непосредственно использовать определение равносильных дробей и показать, что произведение числителя дроби (1) на знаменатель дроби (2) равно произведению знаменателя дроби (1) на числитель дроби (2), применяя при этом законы операций сложения и умножения в множестве натуральных чисел ℕ.

Раздел. Расширение множества натуральных чисел
Тема. Множество действительных чисел

Задача 6. Установите, что $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Геометрически число $\sqrt{2}$ можно представить следующим образом.



Пусть дан квадрат $ABCD$. Обозначим сторону $AD = e$, диагональ $AC = a$ и меру отрезка AD примем за 1, тогда по теореме Пифагора мера (длина) отрезка AC составит $\sqrt{2}$. Несоизмеримость отрезков AC и AD означает, что $\sqrt{2}$ не может быть числом рациональным. Докажем это.

Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что $\sqrt{2}$ – число рациональное. Это значит, что для такого числа существует единственное представление в виде обыкновенной *несократимой* дроби, т. е. можем записать, что

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \text{ где } m, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$\text{НОД}(m, n) = 1. \quad (2)$$

Из условия (1) следует, что $2 = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{n}^2}$ или

$$2n^2 = m^2. \quad (3)$$

Из условия (3) следует, что $m^2 \vdots 2$.

Тогда по правилу деления произведения на простое число получим

$$m \vdots 2. \quad (4)$$

По определению отношения делимости из условия (4) следует

$$m = 2p, \quad (5)$$

где $p \in \mathbb{N}$. Подставим (5) в (3), получим $2n^2 = 4p^2$ или $n^2 = 2p^2$.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что

$$n \vdots 2. \quad (6)$$

Из условий (4) и (6) получаем, что $2 = \text{ОД}(m, n)$, а это противоречит условию (2).

Таким образом, предполагать, что $\sqrt{2}$ – число рациональное (а значит, отрезки AC и AD – соизмеримы) нельзя. Поэтому $\sqrt{2}$ – число иррациональное, записываемое в виде бесконечной <u>непериодической</u> десятичной дроби (а отрезки AC и AD – несоизмеримы).

Итак, в этом пункте показано использование следующих видов доказательств: по определению; методом от противного; методом математической индукции; путем перебора всех имеющихся вариантов решения.

Разные разделы учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» содержат утверждения, требующие обоснования, – доказательства. Равносильности в логике, счетность и эквивалентность числовых множеств, существование арифметических операций доказываются по определению. Единственности объектов чаще всего устанавливаются методом от противного. Равенства, неравенства, многие утверждения при аксиоматическом определении числа доказываются методом математической индукции. Для задачи, имеющей сравнительно небольшое количество решений, иногда удобен метод перебора всевозможных вариантов решения.

2.5. Тестирование по теме «Математическое доказательство»

Задание 1

I. Дедуктивным называется умозаключение, в котором…

II. Неполная индукция – это умозаключение, в котором…

III. Аналогия – это умозаключение, в котором…

Выберите правильный ответ:

1) на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод, что этим свойством обладают все объекты данного класса;

2) истинность утверждения следует из его истинности во всех частных случаях;

3) на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта;

4) посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

Задание 2

I. Умозаключением называется…

II. Посылкой называется…

III. Заключением называется…

Выберите правильный ответ:

1) высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного;

2) способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося;

3) высказывание, содержащее исходное знание.

Задание 3

Математическое доказательство – это...

Выберите правильный ответ:

1) когда некоторые объекты класса обладают определенным свойством, и, значит, этим свойством будут обладать все объекты данного класса;

2) цепочка дедуктивных умозаключений, выполняемых по определенным правилам;

3) набор правил вывода;

4) заранее заготовленные схемы рассуждения, содержащие посылки и заключение.

Задание 4

Для следующих умозаключений определить, по какому правилу они построены.

I. В равнобедренной трапеции диагонали равны. У трапеции $ABCD$ сторона AB равна стороне CD. Значит, трапеция $ABCD$ имеет равные диагонали.

II. Если треугольник имеет прямой угол, то он называется прямоугольным. Непрямоугольный треугольник не содержит угла в $90°$

III. Для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$: если $a \geq b$ и $b \geq c$, то $a \geq c$.

IV. Если число оканчивается нулем или пятеркой, то оно делится на 5. Число 24 не делится на пять. Значит, последняя цифра числа отличается от нуля и пятерки.

Выберите правильный ответ:

1) правило силлогизма;

2) правило контрапозиции;

3) правило заключения;

4) правило отрицания.

Задание 5

Полной индукцией называется...

Выберите правильный ответ:

1) истинное утверждение, построенное согласно схемам дедуктивных умозаключений;

2) метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из его истинности во всех частных случаях;

3) утверждение, логически следующее из системы истинных и связанных с ним утверждений;

4) последовательность посылок и заключения в некотором утверждении.

Задание 6

Единственность результата арифметических операций чаще всего устанавливается…

Выберите правильный ответ:

1) методом от противного;
2) методом математической индукции;
3) методом полной индукции;
4) методом аналогий.

Задание 7

Чтобы доказать истинность утверждения $p(n), n \in N$ методом математической индукции.

1) предполагаю, что утверждение $p(n)$ верно при $n = k$, и доказываю, что оно верно для следующего числа $n = k'$.

2) доказываю, что утверждение верно для 1, 2, 3 и т. д.;

3) доказываю, что утверждение верно при $n = 1$ и при $n = k$;

4) доказываю, что утверждение верно при $n = 1$. Затем предполагаю, что оно истинное при $n = k$ и доказываю, что оно истинное для следующего числа $n = k'$.

Глава 3. АЛГОРИТМЫ И ИХ СВОЙСТВА

3.1. Алгоритмы в жизни человека

Человек планирует собственную деятельность, осуществляет и оценивает ее, замечает повторяемость тех или иных процессов в каждом своем дне. Насколько отчетливо он представляет, что делать в каждый момент времени, в какой последовательности, каким должен быть итог деятельности, зависит эффективность его действий. Поэтому результат деятельности человека напрямую зависит от того, как он понимает алгоритмическую сущность своих действий.

Применение на производстве и в быту различной автоматизированной техники, цифровых роботов требует от человека определенной последовательности действий при их использовании, что, в свою очередь, невозможно без предварительного составления алгоритмов.

Таким образом, понимание и создание алгоритмов выполняемых действий становится одним из ведущих компонентов деятельности человека, составной частью его культуры мышления и поведения.

Понятие «алгоритм» является фундаментальным, используется в различных областях знания, изучается в математике и информатике. Уже в начальной школе на уроках математики дети знакомятся с алгоритмами арифметических действий, правилами вычитания числа, из суммы, суммы из числа работают с грамматическими правилами правописания на уроках русского языка.

Рассмотрим виды алгоритмов и их свойства, особенности приемов построения алгоритмов.

История происхождения слова «алгоритм» уходит в IX век и связана с именем среднеазиатского ученого (математика, астронома, географа, историка) Абу Абдуллах Мухаммада ибн Мусса аль-Хорезми.

В одном из своих трудов он описал десятичную систему счисления и впервые сформулировал правила выполнения арифметических действий над целыми числами и обыкновенными дробями. Арабский оригинал этой книги был утерян, но остался латинский перевод XII века, по которому Западная Европа ознакомилась с десятичной системой счисления и правилами выполнения арифметических действий.

Аль-Хорезми стремился к тому, чтобы сформулированные им правила были понятными. Достичь этого в IX веке, когда еще не была разработана математическая символика (знаки операций, скобки, буквенные обозначения и т. д.), было трудно. Однако ему удалось выработать четкий стиль строгого словесного предписания, который не давал читателю возможность отклониться от предписанного или пропустить какие-нибудь действия.

Правила в книгах аль-Хорезми в латинском переводе начинались словами «Алгоризми сказал». В других латинских переводах автор именовался как Алгоритмус. Со временем было забыто, что Алгоризми (Алгоритмус) – это автор правил, и эти правила стали называть алгоритмами. Многие столетия разрабатывались алгоритмы для решения все новых и новых классов задач, но само понятие алгоритма не имело точного математического определения.

В настоящее время понятие алгоритма уточнено, и сделано это в XX веке в рамках науки, называемой теорией алгоритмов.

3.2. Свойства алгоритмов

Определение. *Алгоритмом* называется описание последовательности действий, строгое исполнение которых приводит к решению поставленной задачи за конечное число шагов.

Алгоритм выполняется автоматизированным устройством и/или человеком. Для каждого алгоритма характерны ряд свойств: *определенность* (любая команда должна быть понятна исполнителю), *дискретность* (решение задачи разделено на определенные упрощенные действия), *понятность* (ясность шагов для каждого исполнителя), *результативность* (реализация обозначенных шагов всегда должна привести к результату), *массовость* (пригодность алгоритма для целого класса идентичных задач, которые различаются друг от друга лишь исходными данными). Остановимся на каждом свойстве более подробно.

1. Каждая программа, задающая алгоритм, должна состоять из конечного числа шагов, а каждый шаг должен быть точно и однозначно определен. Это свойство алгоритмов называется свойством *определенности*, или *детерминированности*.

Согласно этому свойству в алгоритмах не может быть таких, например, предписаний, как «сложить x с одним из данных чисел a или b», «привести два-три примера истинных и ложных высказываний» и т. д.

2. Шаги в алгоритме должны идти в определенной последовательности. Это означает, что в любом алгоритме для каждого шага (кроме последнего) можно указать единственный непосредственно

следующий за ним шаг, т. е. такой, когда между ними нет других шагов. Это свойство *дискретности* алгоритма.

Дискретная структура алгоритмов хорошо видна в алгоритмах выполнения арифметических действий. Например, алгоритм нахождения суммы $34 + 23$ формулируется так:

1) пишу десятки под десятками, а единицы под единицами;
2) складываю единицы: $4 + 3 = 7$, пишу 7 под единицами;
3) складываю десятки: $3 + 2 = 5$, пишу 5 под десятками;
4) читаю ответ: сумма равна 57.

3. Каждый шаг программы, задающей алгоритм, должен состоять из выполнимых действий. Это означает, что предусмотренные действия были выполнимы теми исполнителями, которым адресована конкретная программа. Так, например, задание «решить уравнение $x + 9 = 17$» один ученик выполняет уверенно и получает искомое значение переменной x, так как владеет всеми действиями, необходимыми для решения простейших уравнений:

1) прочитай уравнение;
2) вспомни правило, как найти значение неизвестного;
3) реши уравнение;
4) сделай проверку;
5) запиши ответ.

Другой не справляется с заданием или получает неверный ответ, так как не владеет хотя бы одним из действий, которые требуются для выполнения данного задания.

Как видно из примера, под словом «действие» понимаются не только математические операции, оно имеет более широкий смысл.

Кроме того, в алгоритмах недопустимы также ситуации, когда после выполнения очередного действия исполнителю неясно, какое из них должно выполняться на следующем этапе.

Все сказанное характеризует свойство алгоритма, называемое *свойством понятности.*

4. Программа, задающая алгоритм, должна быть направлена на получение определенного результата. Получение результата за конечное число шагов составляет *свойство результативности* алгоритма.

5. Программа, задающая алгоритм, должна быть применима к любой задаче рассматриваемого типа. Другими словами, каждый алгоритм предназначен для решения не одной-единственной, а любой из

некоторого бесконечного класса однотипных задач. Например, алгоритм решения линейного уравнения первой степени применяется для решения всех уравнений вида $ax + b = 0$. В этом состоит *свойство массовости* алгоритма.

Определение. Задачи, для которых может быть составлен алгоритм и в результате выполнения этого алгоритма получен ответ на вопрос (даже если ответ, что задача не имеет решения), называются *алгоритмически разрешимыми.*

В зависимости от того, кому предназначается алгоритм: исполнителю-человеку или исполнителю-машине, шаги алгоритма будут несколько различаться. Действия, понятные человеку, могут быть непонятны машине (например, действие «вспомни правило») и наоборот. Предписания для человека могут содержать желательные, но необязательные действия или их можно поменять местами. Например, чтобы определить значение истинности конъюнкции двух высказываний A и B, нужно определить:

1) значение истинности высказывания A;
2) значение истинности высказывания B;
3) значение истинности высказывания $A \wedge B$.

Так как операция конъюнкции коммутативна, т. е. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, то пункты 1) и 2) можно поменять местами. Такой выбор последовательности шагов осуществляет исполнитель-человек, но не машина. Если свойства детерминированности и дискретности сохраняются с некоторой степенью точности, т. е. в программе возможна перестановка шагов или она содержит желательные, но не обязательные шаги, то мы имеем не алгоритм, а *алгоритмическое предписание.* Однако, несмотря на различия между этими понятиями, часто алгоритмические предписания называются алгоритмами.

3.3. Способы записи алгоритмов и их виды

Известны различные способы записи алгоритмов: словесная запись, формульная, табличная, на языке блок-схем или алгоритмическом языке.

Словесная запись – это форма представления алгоритмических предписаний. Она допускает употребление естественного языка и математической символики, что делает предписание понятным и доступным для усвоения. Форму словесной записи имеют многие «бытовые» алгоритмические предписания, часто применяемые в повседневной жизни: как испечь пирог, как пользоваться электроприбором, как получить книгу в библиотеке и т. д.

Дети младшего школьного возраста пользуются словесными алгоритмами на уроках русского языка, окружающего мира, литературного чтения, математики и др.

На уроках русского языка в начальной школе использование алгоритмов способствует формированию навыков грамматики и ведет к повышению грамотности. Примером использования алгоритма на уроке русского языка может быть алгоритм проверки буквы безударного гласного звука в корне слова:

1) прочитать исследуемое слово;
2) поставить ударение в нужном слове;
3) выделить корень в слове;
4) подобрать проверочное слово (если в корне есть безударный гласный звук);
5) вставить нужную букву;
6) обозначить орфограмму в слове.

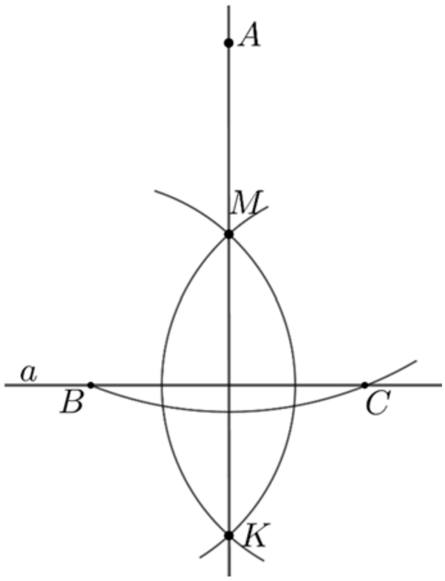
На уроках окружающего мира алгоритмы часто используются для описания рек, животных и растений, деревьев, озёр и прочего. Примером использования алгоритма на таком уроке могут послужить планы описания дерева, реки, план описания животного, составленные учителем индивидуально в соответствии с программой обучения.

На уроках литературного чтения в начальной школе алгоритмы помогают детям научиться анализировать текст. Примером использования алгоритма на литературном чтении будет план характеристики героя:

1) описание внешности героя;
2) характеристика поведения и поступков героя;
3) характеристика чувств героя;
4) характеристика речи героя;
5) характеристика взаимоотношения героя с другими действующими лицами произведения.

На уроках математики в начальной школе наиболее часто словесные алгоритмы применяются при письменных вычислениях. Самыми распространенными здесь являются алгоритмы выполнения арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) с натуральными числами.

Вообще в словесной алгоритмической форме могут быть описаны многие математические предписания задач средней и высшей школы. Например, ниже представлен алгоритм решения задачи на построение и чертеж, воспроизводящий шаги алгоритма (рис. 10). (Напомним, что задачи конструктивной геометрии рассматривались в учебной дисциплине «Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов»).

 Рис. 10	Задача. Из точки A опустить перпендикуляр на прямую a. Дано: прямая a, точка $A \notin a$. Построить: $AK \perp a$. Решение. 1) Поставить ножку циркуля в точку A; 2) установить произвольный раствор R циркуля так, чтобы он превосходил расстояния от точки A до прямой a; 3) провести окружность (A, R) с центром в точке A радиусом R; 4) отметить точки пересечения окружности (A, R) с прямой a: Окр.$(A, R) \cap a = \{B, C\}$; 5) поставить ножку циркуля в точку B; 6) установить произвольный раствор r циркуля; 7) провести окружность (B, r) с центром в точке B радиусом r; 8) поставить ножку циркуля в точку C; 9) провести окружность (C, r) с центром в точке C радиусом r; 10) отметить точки пересечения окружности (B, r) с окружностью (C, r): Окр.$(B, r) \cap (C, r) = \{M, K\}$; 11) провести через точки M и K прямую MK: $MK \perp BC$; 12) выделить на чертеже искомый перпендикуляр AK: $AK \perp a$.

Алгоритмы, используемые для вычислений, могут быть записаны в *формульной* (т. е. с помощью формулы) или *табличной* (с помощью таблицы) формах. Например, для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ удобнее применять не словесную запись, а формулу $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Запись алгоритма, используемого для вычислений, в форме таблицы удобно использовать, когда требуется найти не одно, а несколько значений одного и того же выражения для различных значений переменных, входящих в данное выражение.

Рассмотрим алгоритмическое предписание решения следующей задачи: «В одном куске 72 м ткани, в другом в y раз больше. Сколько метров ткани во втором куске? Составь выражение и найди его значение, если $y = 2, 4, 8$».

Словесная запись алгоритма решения данной задачи такова:

1) составить выражение;

2) найти его значение для $y = 2$;

3) найти его значение для $y = 4$;

4) найти его значение для $y = 8$.

Если оформить предписание в виде таблицы, то запись будет иметь вид:

Значение переменной	y	2	4	8
Значение выражения	$72 \cdot y$			

Алгоритмы можно записывать на языке *блок-схем*. Такое их представление, состоящее из блоков и стрелок, выполняется следующим образом:

1) каждый шаг записывается в форме определенной геометрической фигуры (блока);

2) блок, соответствующий команде, предусматривающий выполнение некоторого действия, в результате которого образуется какой-то новый промежуточный или конечный результат, изображается в виде прямоугольника. Внутри него записывается выполняемое действие. Такие блоки называются *арифметическими*, или в более общем виде *перерабатывающими информацию*, так как не всегда выполняемые действия являются арифметическими;

3) блок, соответствующий команде, предусматривающей проверку некоторого условия, изображается в виде ромба. Проверяемое логическое условие записывается внутри него. Выполнение данной команды не приводит к новому результату, а лишь определяет дальнейший ход процесса решения. Такие блоки называются *логическими*;

4) если за шагом A непосредственно следует шаг B, то от блока A к блоку B проводится стрелка. От каждого арифметического блока исходит только одна стрелка; от каждого логического – две стрелки: одна с пометкой «да» (или «+»), идущая к блоку, следующему за логическим блоком, если условие выполняется; другая – с пометкой «нет»

(или «−»), идущая к блоку, следующему за логическим, если условие не выполняется;

5) начало и конец алгоритма изображаются блоками в виде овалов, внутри которых записываются соответственно слова «Начало» и «Конец».

В качестве примера такой записи вспомним алгоритмическое предписание для определения вида соответствия из раздела «Бинарные соответствия и отношения» [13].

Видим, что блок-схема наглядно представляет логику решения вопроса о любом виде отображения. Поэтому запись алгоритмов в виде блок-схем имеет широкое распространение (рис. 11).

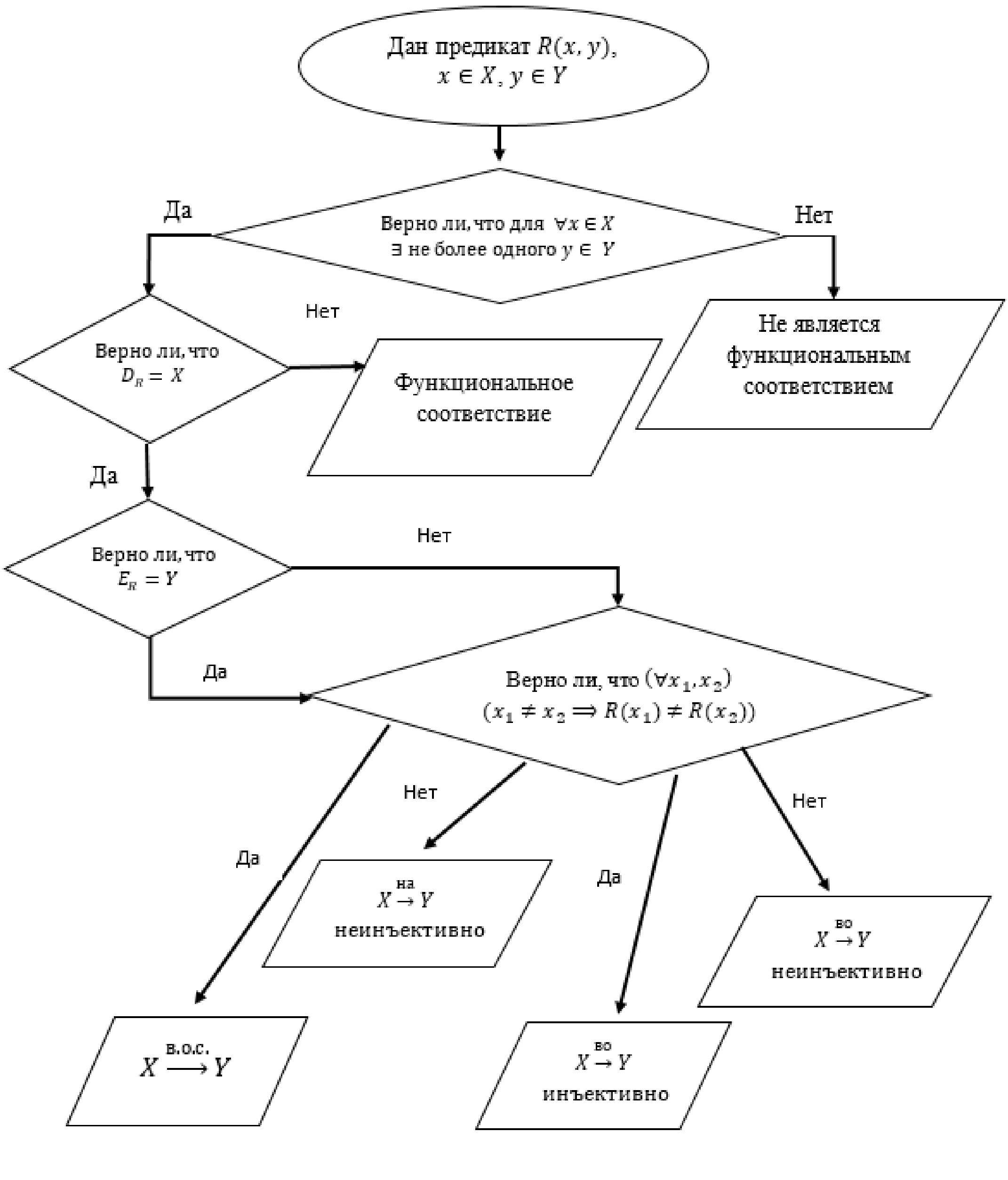


Рис. 11

Еще один способ – это запись на определенном *алгоритмическом языке.* Такая запись используется в том случае, когда исполнитель данного алгоритма – машина, причем каждая машина имеет свой, только ей понятный язык: *фортран, паскаль, си++* и др.

В зависимости от порядка выполнения действий различают следующие виды алгоритмических процессов: *механические, гибкие, линейные, разветвляющиеся, циклические, вспомогательные.*

Механические (*детерминированные*, *жесткие*) алгоритмы обозначают заданные действия в единственной и верной последовательности. Поэтому они обеспечивают однозначный требуемый результат при выполнении условий процесса, задачи, для которых разработаны алгоритмы. Примерами таких алгоритмов можно назвать алгоритмы работы машины, двигателя.

Гибкие алгоритмы делятся на *стохастические* (*вероятностные*) и *эвристические*.

Стохастические (вероятностные) – задают программу для решения задачи несколькими путями, которые приводят к вероятному результату.

Эвристические – представляют собой вид гибких алгоритмов, в которых достижение конечного результата однозначно не предопределено. Такого вида алгоритмы используют различные разумные соображения без строгих доказательств. Получается, что последовательность действий в этих алгоритмах не предначертана, кроме того, все действия исполнителя также не обозначены.

Линейным называется алгоритм, в котором все действия выполняются последовательно друг за другом. Если в алгоритме порядок действий зависит от некоторого условия, он называется *разветвляющимся.* Если в алгоритме некоторые действия могут выполняться многократно, то он называется *циклическим.*

Примером линейного алгоритмического предписания будет ранее рассмотренная задача на построение перпендикуляра к прямой через точку вне этой прямой. На рис. 11 в виде блок-схемы представлен разветвляющийся алгоритм отбора из данных соответствий различного вида отображений или тех соответствий, которые отображениями не являются. Так как в этом алгоритмическом предписании последовательность действий должна повториться для каждого из указанных соответствий, то его можно сделать циклическим. Для организации цикла необходимо осуществить перебор всех значений и предусмотреть выход из цикла.

Рассмотрим задачу. Выполните вычисления по заданной блок-схеме (рис. 12) и таблице. (Ответ запишите в таблицу).

Данное число	32	36	40	44	48
Ответ					

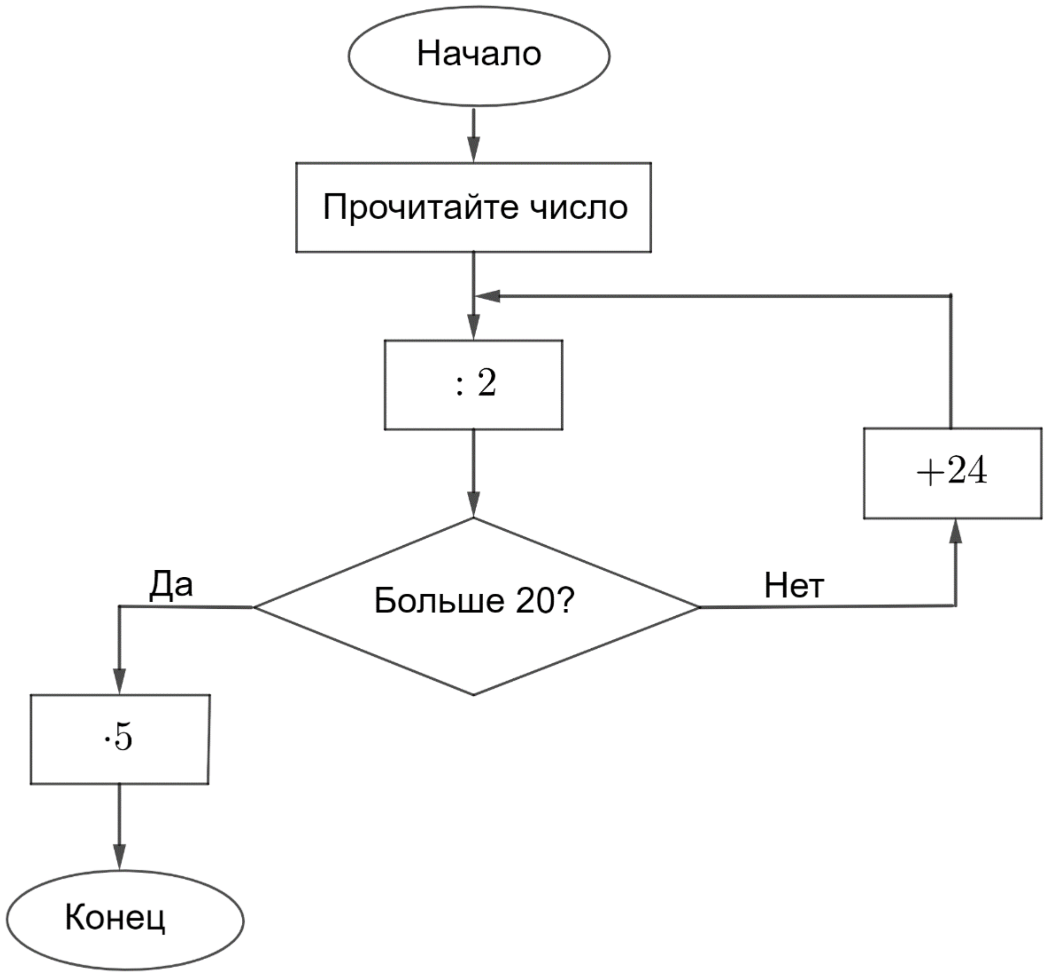


Рис. 12

К циклическим алгоритмам сводится большинство методов вычислений, перебора вариантов. *Цикл программы* – последовательность команд (серия, тело цикла), которая может выполняться многократно (для новых исходных данных) до удовлетворения некоторого условия.

Для счетчика от начального до конечного значения выполнить действие. Часто бывает так, что необходимо повторить тело цикла, но заранее не известно, какое количество раз это надо сделать. В таких случаях количество повторений зависит от некоторого условия. Такие циклы называются *циклами с условием*. Циклы, в которых сначала проверяется условие, а затем, возможно, выполняется тело цикла называют *циклами с предусловием*. Если условие проверяется после первого выполнения тела цикла, то циклы называются *циклами с постусловием*.

Например, в субботу вечером вы смотрите телевизор. Время от времени поглядываете на часы и если время меньше полуночи, то продолжаете смотреть телевизор, если это не так, то вы прекращаете просмотр телепередач.

В общем случае схема циклического алгоритма с условием будет выглядеть так: пока условие, то повторять действие. При составлении циклических алгоритмов важно думать о том, чтобы цикл был *конечным*. Ситуация, при которой выполнение цикла никогда не заканчивается, называется *зацикливанием*.

Вспомогательный (*подчиненный*) алгоритм (процедура) – алгоритм, ранее разработанный и целиком используемый при алгоритмизации конкретной задачи. В некоторых случаях при наличии одинаковых последовательностей указаний (команд) для различных данных с целью сокращения записи также выделяют вспомогательный алгоритм. На всех этапах подготовки к алгоритмизации задачи широко используется структурное представление алгоритма.

3.4. Приемы построения алгоритмов

При изучении математики у школьников формируются такие действия, как действия планирования своей деятельности, оценки ее результата, поиска плана решения задачи, чтения учебных текстов и др. Если все эти действия проанализировать, то можно составить алгоритмические предписания по их выполнению, а затем использовать как ориентиры для разных видов деятельности. Например, алгоритмическое предписание анализа и поиска плана решения задачи может быть таким:

1. Прочитайте задачу и назовите процесс, о котором в ней идет речь.

2. Укажите величины, характеризующие этот процесс.

3. Выделите, что дано и что нужно найти в задаче.

4. Выясните, как связаны данные величины и те, которые требуется найти.

5. Подумайте, как на основании имеющихся у вас знаний о величинах, о которых идет речь, ответить на требования задачи.

6. Составьте план предполагаемого решения.

Кроме общих учебных действий при изучении математики формируются действия, связанные с освоением конкретного материала. Многие из них носят алгоритмический характер, поэтому для овладения ими целесообразно составлять предписания. В частности, к таким действиям относятся: усвоение нового определения понятия (правила, свойства, теоремы); распознавание принадлежности объекта объему данного понятия; нахождение значения переменной по формуле; решение однотипных задач и др.

Таким образом, обучение математике требует от учителя умения строить алгоритмические предписания. Какие приемы при этом можно использовать?

Для построения любого алгоритмического предписания прежде всего необходимо выделить четкую последовательность элементарных шагов, приводящих к требуемому результату. Каждый такой шаг представляет собой операцию, ранее сформировавшуюся у исполнителя. Когда алгоритм описывается словесно, – это отдельные указания, пункты. Если он формулируется на языке блок-схем, то это отдельные блоки. Непосредственное построение алгоритма всегда происходит с применением некоторого приема. Это приемы пошаговой детализации, решение частных задач, приемы на основе определений, формул и др.

Все они могут быть разбиты на две группы. К первой относятся приемы, на основе которых построение алгоритма осуществляется путем «развития» его «вглубь» и выявления все более частных его особенностей. Ко второй группе относятся приемы, на основе которых построение осуществляется путем «восхождения» к алгоритму от решения частных задач.

Один из наиболее распространенных приемов первой группы – *прием пошаговой детализации* (или прием последовательного уточнения).

Идея пошаговой детализации заключается в том, что на каждом этапе происходит уточнение уже имеющегося алгоритма. Поэтому при применении данного приема: 1) сначала алгоритм строится в крупных блоках (т. е. выделяются наиболее существенные операции); 2) определяется последовательность их выполнения; 3) крупные блоки уточняются до тех пор, пока каждая операция в алгоритме не станет понятной исполнителю.

Например, при построении алгоритма решения простейшего уравнения (т. е. линейного уравнения вида $5 + x = 8$, $8 - x = 7$, $5 \cdot x = 10$, $x : 4 = 5$) в начальной школе прием пошаговой детализации осуществляется следующим образом.

1. Сначала выделить наиболее существенные операции.

Для решения простейшего уравнения надо назвать неизвестный компонент, т. е. прочитать уравнение. Затем нужно знать правило нахождения этого компонента и уметь решать уравнение. Потом провести доказательство, что полученное значение неизвестного – искомое, другими словами, сделать проверку. И, наконец, записать ответ.

2. Составим последовательность выделенных операций и запишем алгоритм в крупных блоках:

Блок 1. Прочти уравнение.

Блок 2. Определи роль искомого компонента. Согласно этому вспомни правило нахождения неизвестного.

Блок 3. Реши уравнение.

Блок 4. Выполни проверку своего ответа.

Блок 5. Запиши ответ.

Если исполнитель (ученик) не владеет хотя бы одним из перечисленных действий, то при решении уравнения он будет испытывать определенные трудности. Поэтому непонятные ему действия должны быть уточнены. Так, например, чтобы прочитать уравнение, надо назвать арифметическое действие и компоненты. Для этого блок 1 можно детализировать:

1) назови действие, которое указано в уравнении;

2) вспомни, как называются компоненты этого действия;

3) прочитай уравнение, используя названия компонентов.

Если затруднения вызваны наличием в уравнении больших чисел, то можно использовать пример с аналогичным действием, что и в данном уравнении, но с небольшими числами. Поэтому алгоритм выбора действия (блок 2) может иметь следующий вид:

1) составь пример-помощник на действие, указанное в уравнении, с небольшими числами;

2) установи в примере-помощнике, каким действием можно найти неизвестное число;

3) вспомни правило нахождения неизвестного компонента.

Алгоритм решения уравнения, т. е. блок 3, можно также уточнить:

1) примени правило и запомни выражение неизвестного компонента через известные;

2) вычисли значение неизвестного;

Алгоритм проверки (блок 4) может иметь следующий вид:

1) подставь в уравнение найденное значение неизвестного;

2) вычисли значение левой и правой части уравнения;

3) сравни эти значения.

Прием пошаговой детализации можно использовать при составлении алгоритмов решения различных задач, в частности, при вычислении значений величин по формулам сокращенного умножения или нахождения корней квадратного уравнения через дискриминант; при решении задач на распознавание принадлежности объекта объему данного понятия (см. гл. 1 настоящего пособия). Каждый шаг уточнения алгоритма, как правило, состоит из следующих этапов: анализ ситуации; построение более точного фрагмента; контроль правильности этого фрагмента и его связи с предшествующим.

Рассмотрим прием построения алгоритмов второй группы, основанный на *решении частных задач*. Построение алгоритма с помощью этого приема предполагает:

1) тщательный анализ разнообразных частных задач определенного класса, приводящих к различным результатам;

2) выявление операций и последовательности их выполнения при решении частных задач данного класса;

3) выявление всех логических условий, влияющих на дальнейший ход процесса и приводящий в конце концов к разным результатам;

4) определение последовательности операций для всех возможных случаев, т. е. окончательное построение алгоритма.

Составим, например, алгоритм для класса задач «решить уравнение $ax = b$».

1. Тщательно анализируем разнообразные частные задачи, приводящие к различным результатам.

А	$3x = 12$	$2x = -5$	$0{,}5x = 5$	$3x = 0$	$2x = 2$
	$x = 12:3$	$x = -5:2$	$x = 5:0{,}5$	$x = 0:3$	$x = 2:2$
	$x = 4$	$x = -2{,}5$	$x = 10$	$x = 0$	$x = 1$
Б	$0 \cdot x = 5$	$0 \cdot x = -12$ $0 \cdot x = 1{,}2$		$0 \cdot x = 3$	
	Решений нет				
В	$0 \cdot x = 0,$	x – любое действительное число			

2. Выявляем операции и последовательность их выполнения при решении частных задач:

А. Операция деления b на a;

Б. В не содержат операций.

3. Выявляем все логические условия, влияющие на дальнейший ход процесса и приводящие в конце концов к разным результатам.

А. Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ – решение уравнения.

Б. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то решений нет.

В. Если $a = 0$ и $b = 0$, то решений бесконечно много.

4. Построим окончательный алгоритм (рис. 13).

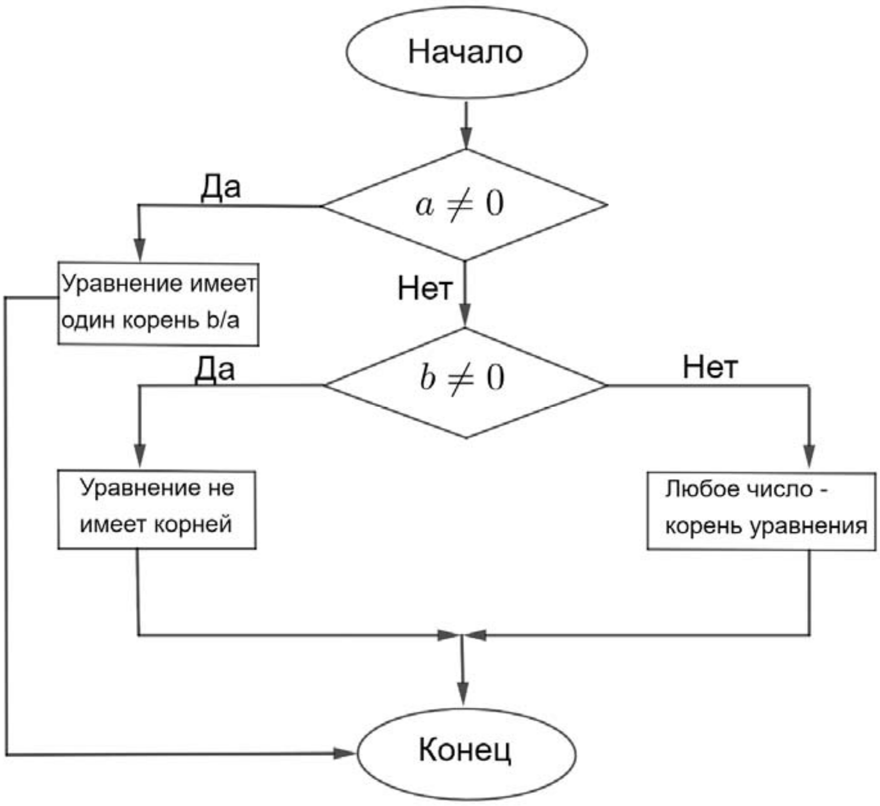


Рис. 13

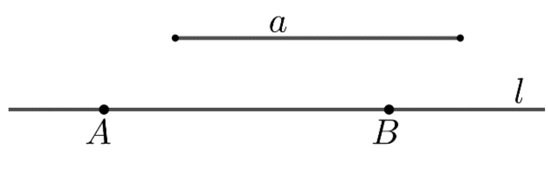
Подводя итог изучению алгоритмов, еще раз напомним, что алгоритм представляет собой программу действий для решения задач определенного типа. Такое определение имеет интуитивно содержательную трактовку понятия «алгоритм». Изучение процесса алгоритмизации младшими школьниками является значимой ступенью обучения, поскольку описание поэтапных шагов деятельности позволяет школьникам научиться контролировать свои действия. При разработке метода пошаговой детализации дети так увлекаются ходом самого процесса, что на завершающих этапах конкретного алгоритма неверных ответов практически не допускают.

3.5. Алгоритмы в задачах на построение

Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые в качестве составных частей особенно часто входят в решение более сложных задач. Обычно их называют элементарными, или основными геометрическими, задачами на построение. К числу элементарных задач чаще всего относят следующие:

1. Построить отрезок, равный данному.
2. Построить угол, равный данному.
3. Разделить отрезок пополам.
4. Разделить угол пополам.
5. Через точку на прямой провести перпендикуляр к этой прямой.
6. Из точки опустить перпендикуляр на прямую.
7. Через точку провести прямую, параллельную данной.
8. Разделить отрезок на n равных отрезков.

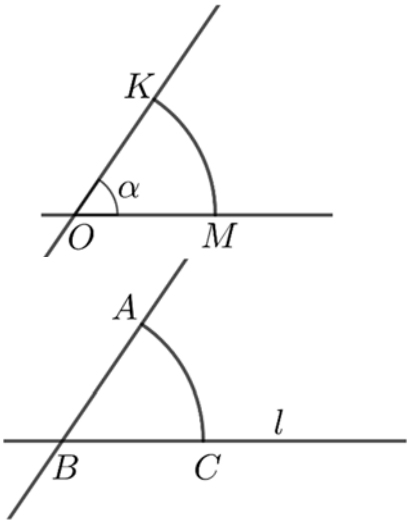
Составим подробные решения основных задач на построение с помощью циркуля и линейки. Алгоритмами этих решений без дополнительных разъяснений можно пользоваться в дальнейшем при решении других задач.



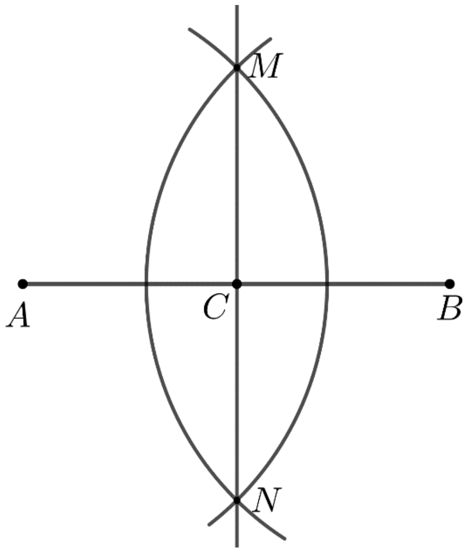
1. Построить отрезок AB, равный данному отрезку a.

1. l – произвольная прямая
2. $A \in l$
3. $|AB| = a$
4. AB искомый

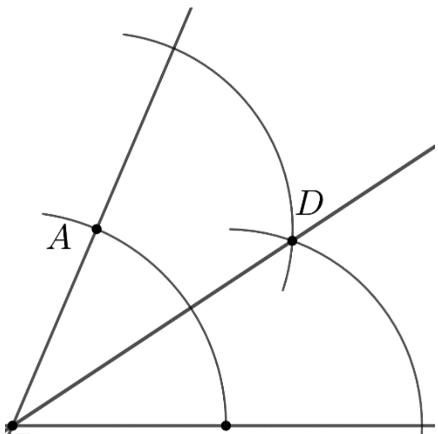
2. Построить угол $\angle ABC$, равный данному углу α.
1. l – произвольная прямая
2. $B \in l$
3. Окр. (O, r)
4. Окр. (B, r)
5. $|KM| = |AC|$
6. AB
7. $\angle ABC = \alpha$
8. $\angle ABC$ искомый

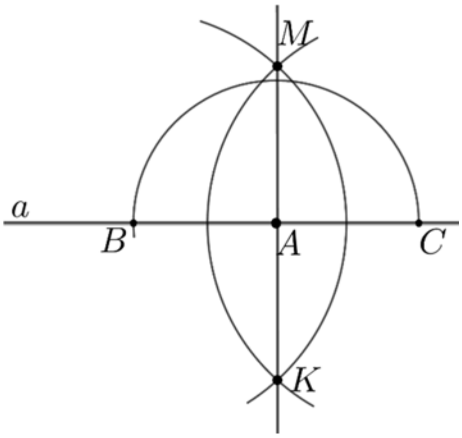


3. Разделить отрезок AB пополам (построить середину отрезка AB).
1. Окр. (A, r)
2. Окр. (B, r)
3. Окр. $(A, r) \cap$ Окр. $(B, r) = MN$
4. $MN \cap AB = C$
5. C искомый



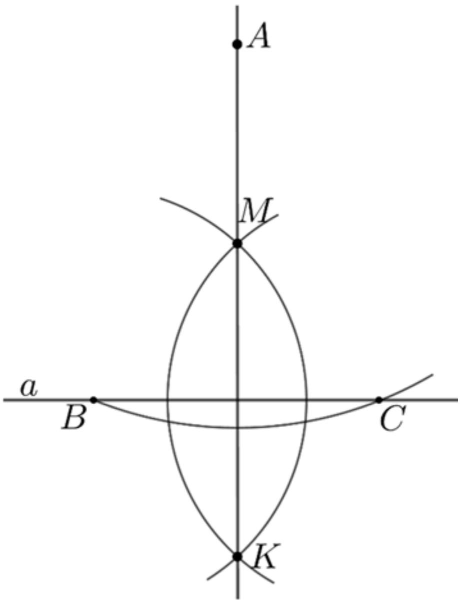
4. Разделить угол $\angle ABC$ пополам (построить биссектрису данного угла $\angle ABC$).
1. Окр. (B, r)
2. Окр. $(B, r) \cap \angle\alpha = \{A, C\}$
3. Окр.$(A, r) \cap$ Окр. $(C, r) = D$
4. BD искомая





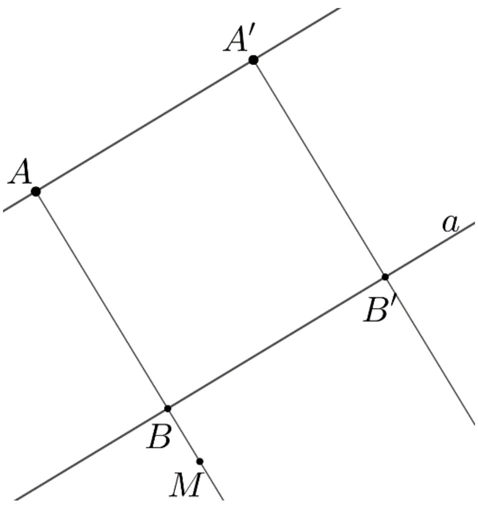
5. Через точку A на прямой a провести перпендикуляр к этой прямой.

1. Окр. (A, r)
2. Окр. $(A, r) \cap a = \{B, C\}$
3. Окр. $(B, R) \cap$ Окр. $(C, R) = \{M, K\}$
4. $MK \perp BC$
5. MK искомый



6. Из точки A опустить перпендикуляр на прямую a.

1. Окр. (A, R)
2. Окр.$(A, R) \cap a = \{B, C\}$
3. Окр. $(B, r) \cap (C, r) = \{M, K\}$
4. $MK \perp BC$
5. MK искомый

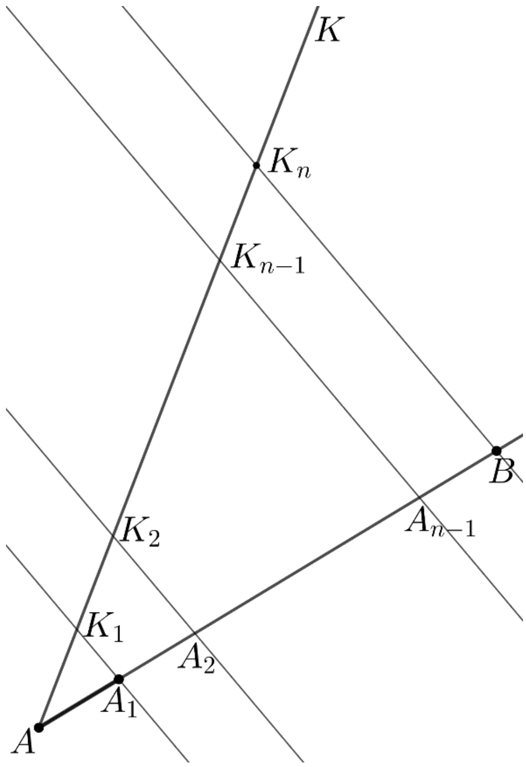


7. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой a.

1. $AM \perp a$ (см. задачу 6)
2. $AM \cap a = B$, $\rho(A, a) = |AB|$
3. $|BB'| = |AB|$, $B' \in a$
4. $A'B' \perp a$ (см. задачу 5), $A' \wedge A \in$ одной полуплоскости от прямой a
5. $AA' \parallel a$
6. AA' искомая

8. Разделить отрезок AB на n равных отрезков (найти n-ную часть отрезка AB).

1. AK, $K \notin AB$
2. $AK_1 = K_1K_2 = \cdots = K_{n-1}K_n$, $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n \in AK$
3. K_nB
4. $K_{n-1}A_{n-1} \parallel K_nB$, $A_{n-1} \in AB$
5. $K_{n-2}A_{n-2} \parallel K_nB$, … , $K_3A_3 \parallel K_nB$
6. $K_2A_2 \parallel K_nB$, $A_2 \in AB$
7. $K_1A_1 \parallel K_nB$, $A_1 \in AB$
8. $AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}B$
9. AA_1 искомый



При решении конструктивных задач необходимо пользоваться алгоритмом решения, состоящим из следующих четырех этапов:

1. анализ;
2. построение;
3. доказательство;
4. исследование.

Анализ. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью построения чертежа-наброска, изображающего данные и искомые примерно в том расположении, как это требуется условием задачи.

На чертеже следует выделить *данные* элементы и важнейшие *искомые* элементы.

Построение. Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений, которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого шага с помощью инструментов, принятых для построения.

Доказательство. Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

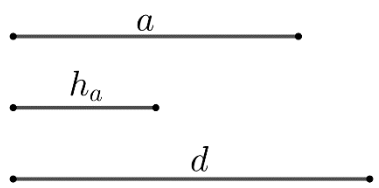
Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно выяснить следующие вопросы:

1) всегда ли (т. е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построения избранным способом;
2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить;
3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

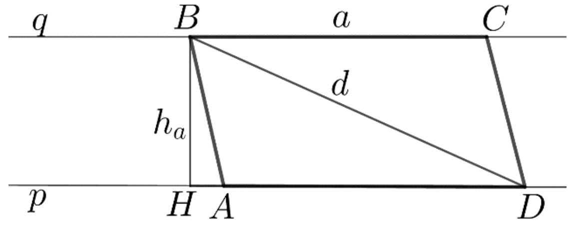
Рассмотрение всех этих вопросов и составляет исследование. Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

Пример задачи и ее решение

Задача. Построить параллелограмм по основанию a, высоте h и одной из диагоналей d [5].



Согласно условию, данными являются отрезки, представляющие основание, высоту и диагональ параллелограмма. Все эти фигуры считаются уже построенными (по AI).



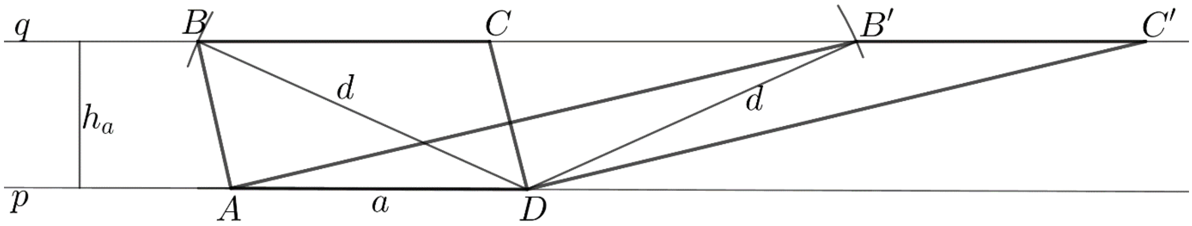
Анализ. Выполним чертеж-иллюстрацию, считая, что искомый параллелограмм $ABCD$ уже построен. Отмечаем на чертеже данные элементы: $BC = a$, $BH = h_a$, $BD = d$.

Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны AD и BC лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте h.

Поэтому можно построить треугольник ABD и затем достроить его до параллелограмма $ABCD$. Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

1. Строим параллельные прямые p и q на расстоянии h друг от друга (см. алгоритм построения на чертеже 7).
2. На прямой p откладываем отрезок $AD = a$.
3. Из точки D как из центра радиусом d проводим окружность и находим точку B ее пересечения с прямой q.
4. На прямой q от точки B откладываем отрезок $BC = a$.
5. Строим отрезки AB и CD.

Построение. Все этапы алгоритма построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов.



Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AD и BC параллельны, так как лежат на параллельных прямых p и q. Эти же стороны равны по построению: $AD = BC = a$. Значит, $ABCD$ – параллелограмм, у которого $AD = a$, $BD = d$, а высота h_a, так как расстояние между параллельными прямыми p и q равно h_a (по построению). Следовательно, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма $ABCD$ непосредственно по шагам алгоритма построения.

1. Параллельные прямые p и q на расстоянии h_a всегда можно построить и притом единственным образом.
2. Построить отрезок $AD = a$ на прямой p также можно и притом единственным образом.
3. Окружность, проведенная из центра D радиусом d, будет иметь общие точки с прямой q только тогда, когда $d \geq h_a$. Если $d =$

h_a, то получится одна общая точка B, если же $d > h_a$, то две общие точки B и B'.

4. Это построение всегда однозначно выполнимо.
5. Эти построения всегда однозначно выполнимы.

Таким образом, решение возможно, если $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$, то два решения.

3.6. Основные множества точек на плоскости, алгоритмы их построения

<u>Определение.</u> *Геометрическим местом точек* (ГМТ) является фигура, заданная путем указания свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они.

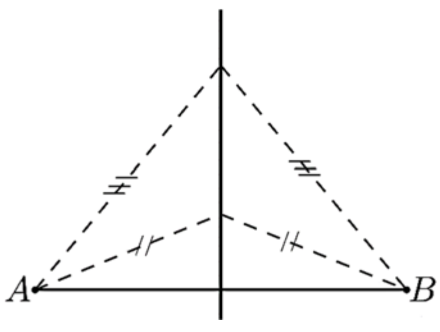
<u>Определение.</u> Свойство, при помощи которого характеризуется то или иное геометрическое место точек, называется *характеристическим свойством* точек этого геометрического места.

ГМТ может быть:

– линией (совокупностью нескольких линий);
– конечной совокупностью точек;
– областью плоскости.

Простейшие ГМТ на плоскости

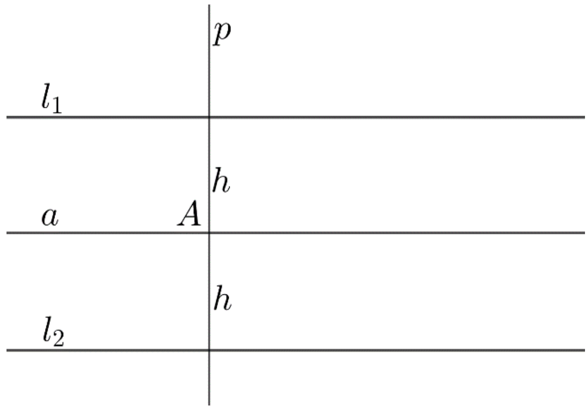
1. ГМТ (плоскости), находящихся на данном расстоянии r от некоторой заданной точки O (этой плоскости), есть по определению окружность радиусом r с центром в точке O.



2. ГМТ (плоскости), равноудаленных от двух данных (в этой плоскости) точек, есть прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к этому отрезку. Это ГМТ называют *симметралью*, или *медиатрисой*, данных точек.

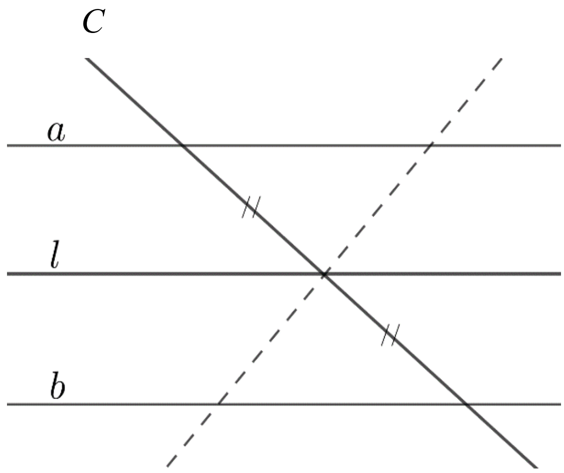
3. ГМТ (плоскости), находящихся на данном расстоянии h от данной (в этой плоскости) прямой, есть пара прямых, параллельных данной прямой.

Для построения этого ГМТ надо в любой точке A данной прямой a провести к ней перпендикуляр p, отложить на нем по обе стороны от этой прямой данный отрезок h и провести через концы отложенных отрезков прямые l_1 и l_2, параллельные данной прямой a.

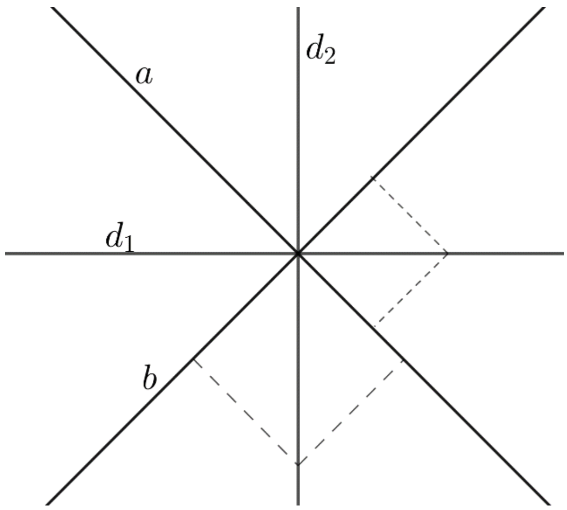


4. ГМТ (плоскости), равноудаленных от двух данных параллельных прямых (этой плоскости), есть прямая, параллельная данным прямым.

Для построения этого ГМТ проводят какую-либо прямую c, пересекающую данные прямые a и b, делят отрезок этой секущей, заключенный между данными прямыми, пополам и проводят искомую прямую через середину этого отрезка параллельно данным прямым. Полученную прямую называют *средней линией* данных параллельных прямых.



5. ГМТ (плоскости), равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых (этой плоскости), представляет собой две взаимно *перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образованных данными прямыми. Построение этого ГМТ сводится к элементарной задаче о делении угла пополам* (см. алгоритм построения на чертеже 4). *На рисунке прямые d_1 и d_2 образуют ГМТ, равноудалённых от прямых a и b.*



3.7. Тестирование по теме «Алгоритмы и их свойства»

1. Алгоритм – это…
а*)* правила выполнения определенных действий;
б) предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на достижение поставленных целей;
в) набор команд для компьютера.
2. Какой из документов является алгоритмом?
а) правила техники безопасности;
б) инструкция по получению денег в банкомате;
в) расписание уроков.
3. Дискретность – свойство алгоритма, означающее…
а) однозначность правил выполнения алгоритма;
б) правильность результатов выполнения алгоритма;
в) деление алгоритма на отдельные шаги.
4. Свойством алгоритма является…
а) конечность;
б) цикличность;
в) возможность изменения последовательности команд;
г) возможность выполнения алгоритма в обратном порядке.
5. Алгоритм называется линейным, если…
а) он составлен так, что его выполнение предполагает многократное повторение одних и тех же действий;
б) ход его выполнения зависит от истинности тех или иных условий;
в) его команды выполняются в порядке их естественного следования друг за другом независимо от каких-либо условий.
6. Алгоритм структуры «ветвление» предусматривает выбор…
а) условий;
б) алгоритмов;
в) команд (действий).
7. Алгоритм называется циклическим, если…
а) он составлен так, что его выполнение предполагает многократное повторение одних и тех же действий;
б) ход его выполнения зависит от истинности тех или иных условий;
в) его команды выполняются в порядке их естественного следования друг за другом независимо от каких-либо условий.

8. Алгоритм называется вспомогательным, если…

а) он предполагает выбор действий;

б) повторяет действия до выполнения какого-либо условия;

в) решает часть задачи и вызывается из основной программы.

9. Цикл со счетчиком зависит…

а) от некоторого условия;

б) известного числа повторений.

10. Какой тип алгоритмической структуры необходимо применить, если последовательность команд выполняется или не выполняется в зависимости от условия:

а) цикл;

б) ветвление;

в) линейный.

11. Ромб – графический объект, используемый в блок-схеме для записи…

а) ввода, вывода данных;

б) вычислительных действий;

в) конца выполнения задачи;

г) условия выполнения действий.

12. Переменная для компьютера – это

а) буква алфавита;

б) различные числа;

в) область памяти.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи по теме «Математические понятия»

Для понятий, данных в задачах № 1 – № 10: а) укажите несколько элементов, принадлежащих их объему; б) перечислите несколько свойств, входящих в содержание этих понятий.

№ 1. «кустарник», «геометрическая фигура», «натуральное число».
№ 2. «детская игрушка», «линия», «иррациональное число».
№ 3. «карусель», «чертежный инструмент», «делитель числа».
№ 4. «дерево», «площадь фигуры», «число, кратное 5».
№ 5. «континент», «многогранник», «трехзначное число».
№ 6. «дом», «медиана треугольника», «целое число».
№ 7. «дикое животное», «периметр фигуры», «нечетное число».
№ 8. «царство живой природы», «луч», «отрицательное число».
№ 9. «литературный жанр», «многоугольник», «приближение числа».
№ 10. «цвет», «четырехугольник», «число, меньшее 200».

В задачах № 11 – № 20 установите, в каких отношениях находятся понятия a, b, c. Отношения объемов A, B, C, соответствующих понятиям a, b, c, изобразите на диаграммах Эйлера – Венна.

№ 11. a – «трапеция», b – «геометрическая фигура», c – «число».
№ 12. a – «трапеция», b – «параллелограмм», c – «геометрическая фигура».
№ 13. a – «квадрат», b – «прямая», c – «геометрическое понятие».
№ 14. a – «натуральное трехзначное число», b – «натуральное число», c – «натуральное число, кратное 5».
№ 15. a – «квадрат», b – «ромб», c – «параллелограмм».
№ 16. a – «прямоугольник», b – «ромб», c – «параллелограмм».
№ 17. a – «четное число», b – «целое число», c – «нечетное число».
№ 18. a – «четное число», b – «целое число», c – «отрицательное число».
№ 19. a – «прямоугольник», b – «треугольник», c – «многоугольник».
№ 20. a – «геометрическое тело», b – «цилиндр», c – «ромб».

В задачах № 21 – № 30 проверьте правильность представленных классификаций. Являются ли эти классификации полными? В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

№ 21. а) Треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные; б) целые числа бывают положительными, отрицательными и равными нулю.

№ 22. а) Все пары окружностей делятся на концентрические и пересекающиеся; б) натуральные числа разделяются на четные, нечетные и делящиеся на 3.

№ 23. а) Параллелограммы делятся на прямоугольники и ромбы; б) целые числа разделяются на положительные и отрицательные.

№ 24. а) Треугольники делятся на разносторонние, равносторонние и равнобедренные; б) действительные числа бывают целые и дробные.

№ 25. а) Линии делятся на ломаные и кривые; б) рациональные числа разделяются на целые и дробные.

№ 26. а) Параллелограммы делятся на ромбы, прямоугольники и параллелограммы, не имеющие оси симметрии; б) натуральные числа разделяются на четные и нечетные.

№ 27. а) Трапеции делятся на равнобедренные, неравнобедренные и прямоугольные; б) рациональные числа разделяются на положительные и отрицательные.

№ 28. а) Треугольники делятся на разносторонние и имеющие хотя бы одну ось симметрии; б) натуральные числа разделяются на простые и составные.

№ 29. а) Треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные; б) положительные числа бывают кратны 2, кратны 3 и 5.

№ 30. а) Параллелограммы делятся на прямоугольники, квадраты и ромбы; б) дробные числа разделяются на положительные и отрицательные.

В задачах № 31 – № 40 сформулированы определения. Укажите в них логические ошибки, опустите лишние слова или добавьте нужные слова в этих определениях.

№ 31. а) Геометрическая фигура называется окружностью, если все ее точки одинаково удалены от одной и той же точки; б) луч есть прямая, ограниченная с одной стороны.

№ 32. а) Два угла называются смежными, если они имеют вершину, общую сторону и их сумма равна $180°$; б) отрезком называется прямая, ограниченная с двух сторон.

№ 33. а) Две плоскости параллельны, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; б) отрезком называется множество точек прямой, сумма расстояний которых от точек A и B этой прямой равна расстоянию между точками A и B.

№ 34. а) Два угла называются вертикальными, если они имеют общую вершину и их сумма равна $180°$; б) секущей называется бесконечная прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности.

№ 35. а) Два угла называются смежными, если сторона одного из них является продолжением стороны другого; б) квадратом называется прямоугольник, диагонали которого конгруэнтны и делят друг друга пополам.

№ 36. а) Два угла называются равными, если они совпадают при наложении и имеют равные градусные меры; б) ромбом называется параллелограмм, стороны которого конгруэнтны, а диагонали взаимно перпендикулярны.

№ 37. а) Параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны; б) два угла называются смежными, если они имеют общую сторону.

№ 38. а) Диаметром круга называется наибольшая хорда, проходящая через центр и делящая круг на две конгруэнтные части; б) диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две вершины многоугольника.

№ 39. а) Прямая называется касательной к окружности, если она имеет с ней одну общую точку; б) два конгруэнтных угла называются вертикальными, если стороны одного из них являются продолжениями сторон другого.

№ 40. а) Две прямые параллельны, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; б) окружность называется вписанной в многоугольник, если она находится внутри многоугольника и все его стороны касаются этой окружности.

Задачи по теме «Математическое доказательство»

В задачах № 1 – № 10 докажите справедливость числовых равенств.

№ 1. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

№ 2. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

№ 3. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

№ 4. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}$.

№ 5. $4:\left(0,6\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1,5}:\left(0,25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

№ 6. $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

№ 7. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$.

№ 8. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

№ 9. $\dfrac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

№ 10. $\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\dfrac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

В заданиях № 11 – № 20 установите равенство / тождество.

№ 11. Докажите, что если $z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$, то $z^3+3bz-2a=0$.

№ 12. Докажите, что если $a+b=1$, то $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

№ 13. Докажите, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

№ 14. Докажите тождество $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-x)(y-z)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)}=0$.

№ 15. Докажите тождество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

№ 16. Докажите, что если для чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1, \frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них выполняется также и равенство $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

№ 17. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b $a>b$ в m раз больше их среднего геометрического. Докажите, что $\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$.

№ 18. Методом математической индукции доказать тождество

$$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\cdots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$$

№ 19. Методом математической индукции доказать тождество

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{n+1}},$$

$|x| \neq 1$.

№ 20. Методом математической индукции доказать тождество

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^8}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

$|x| \neq 1$.

В задачах № 21 – № 40 доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место равенство:

№ 21. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

№ 22. $$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

№ 23. $$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}.$$

№ 24. $\dfrac{1}{1\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 15}+\dfrac{1}{15\cdot 22}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\dfrac{n}{7n+1}.$

№ 25. $\dfrac{1}{1\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 17}+\dfrac{1}{17\cdot 25}+\cdots+\dfrac{1}{(8n-7)(8n+1)}=\dfrac{n}{8n+1}.$

№ 26. $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}.$

№ 27. $\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\dfrac{n}{5(2n+5)}.$

№ 28. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}.$

№ 29. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

№ 30. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}.$

№ 31. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

№ 32. $-1+3-5+7-9+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n.$

№ 33. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}.$

№ 34. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

№ 35. $1^2+3^2+5^2\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}.$

№ 36. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$

№ 37. $1^3+3^3+5^3\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$

№ 38. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$

№ 39. $0\cdot 1^2+1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}.$

№ 40. $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n=2+(n-1)2^{n+1}.$

В задачах № 41 – № 50 доказать, используя метод математической индукции, делимость данных выражений на заданное число при любом натуральном значении переменной n.

№ 41.

а) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) \vdots 2$;

б) $(n^4 - n^2) \vdots 12$;

в) $(6^{n+2} + 7^{2n+1}) \vdots 43$;

г) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$;

д) $(3^{2n+1} + 40n - 67) \vdots 64$.

№ 42.

а) $(n^3 + 2n) \vdots 3$;

б) $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$;

в) $(3^{2n+1} + 1) \vdots 4$;

г) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) \vdots 37$;

д) $(4 \cdot 6^n + 5n - 4) \vdots 5$.

№ 43.

а) $(n^3 + 3n^2 + 5n) \vdots 3$;

б) $n^2(n^2 - 1) \vdots 4$;

в) $(49^n - 1) \vdots 6$;

г) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 2^{2n} \cdot 3^{3n+2}) \vdots 1053$;

д) $(7^n + 3n - 1) \vdots 9$.

№ 44.

а) $n(14n^2 + 9n + 1) \vdots 6$;

б) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 9$;

в) $(36^n - 1) \vdots 5$;

г) $(11^{n+1} + 12^{2n-1}) \vdots 133$;

д) $(9^{n+1} - 18n - 9) \vdots 18$.

№ 45.

а) $(n^5 - n) \vdots 5$;

б) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) \vdots 3$;

в) $(5^{2n-1} + 1) \vdots 2$;

г) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$;

д) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$.

№ 46.

а) $(n^3 + 11n) \vdots 3$;

б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 4$;

в) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \vdots 9$;

г) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$;

д) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

№ 47.

а) $(n^3 - 7n + 6) \vdots 6$;

б) $(2n^2 + n)(7n + 1) \vdots 3$;

в) $(8 \cdot 2^{3n} - 1) \vdots 7$;

г) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \vdots 45$;

д) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$.

№ 48.

а) $(n^3 + 5n) \vdots 3$; б) $(n^6 - 3n^5 +$
$+6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n) \vdots 24$;

в) $(7^{2n} - 1) \vdots 8$;

в) $(2 \cdot 7^n + 1) \vdots 3$;

г) $(4^n + 15n - 1) \vdots 3$.

№ 49.

а) $n(2n^2 - 3n + 1) \vdots 6$;

б) $(n^7 - n) \vdots 7$;

в) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 19$;

г) $(6^{2n} - 1) \vdots 35$;

д) $(9^n - 8n - 1) \vdots 8$.

№ 50.

а) $(n^3 + 5n) \vdots 6$;

б) $(2n^2 + n)(7n + 1) \vdots 6$;

в) $(3^{2n+1} + 5) \vdots 8$;

г) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$;

д) $(7^n + 3n - 1) \vdots 3$.

В задачах № 51 – № 58 доказать тождество в множестве целых неотрицательных чисел по указанной в задаче переменной, применяя метод математической индукции.

№ 51. $(a + b)c = ac + bc$ (по a и по b).

№ 52. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ (по a, по b и по c).

№ 53. $a(b + c) = ab + ac$ (по a).
№ 54. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$ (по b и по c).
№ 55. $a(b + c) = ab + ac$ (по b и по c).
№ 56. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (по a, по b и по c).
№ 57. $a \cdot b = b \cdot a$ (по a и по b).
№ 58. $a + b = b + a$ (по a и по b).

№ 59. Доказать теорему существования и единственности суммы целых неотрицательных чисел.

№ 60. Доказать теорему существования и единственности произведения целых неотрицательных чисел.

В множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, полученном в результате расширения множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, провести доказательство предложений, сформулированных в задачах № 61 – № 70.

Целое число в данном случае определяется упорядоченной парой натуральных чисел (x, y), $x, y \in \mathbb{N}$, и для элементов множества $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2$ имеет место определение отношения эквивалентности упорядоченных пар: $(\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N})\ [(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = y_1 + x_2]$.

№ 61. Докажите, что $(a + m, a) + (b + n, b) \sim (c + m + n, c)$ и $(a + m, a)(b + n, b) \sim (c + m \cdot n, c)$.

№ 62. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a, b)(n + 1, n) \sim (a, b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

№ 63. Докажите, что для любых a, b, n пары $(a + n, a)$ и $(b + n, b)$ эквивалентны.

№ 64. Докажите, что для любой пары (a, b) имеет место отношение $(a, b)(a + 1, b) \sim (a, b)(a, b) + (a, b)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

№ 65. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a, b) + (a + 1, b) \sim \big((a, b) + {}$ ${} + (a, b)\big) + (n + 1, n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

№ 66. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a, b) + (a, b) \sim (a, b)(n + 2, n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

№ 67. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a, b) + (n, n) \sim (a, b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

№ 68. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a, b)(n, n) \sim (m, m)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

№ 69. Найдите значение выражения $\big((7, 3) + (9, 20)\big)\big((5,3) - (9, 13)\big)$. Сравните полученный ответ с результатом, получаемым путем замены пар (a, b) разностями $a - b$ и последующим вычислением.

№ 70. Найдите значение выражения $(5,12)\big((8,4) + (17, 29)\big) - (7,1)$. Сравните полученный ответ с результатом, получаемым путем замены пар (a, b) разностями $a - b$ и последующим вычислением.

В задачах № 71 – № 80 указать, при каких условиях для $\mathbb{Q}^+$ положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство и доказать его. При выполнении доказательства учесть, что для записи чисел r_1, r_2, r_3 используются дроби $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ соответственно.

№ 71. $r_1 : (r_2 : r_3) = (r_1 : r_2) : r_3$.
№ 72. $r_1 - (r_2 - r_3) = (r_1 + r_3) - r_2$.
№ 73. $r_1 : (r_2 \cdot r_3) = (r_1 : r_2) : r_3$.
№ 74. $r_1(r_2 : r_3) = (r_1 \cdot r_2) : r_3$.
№ 75. $r_1 - (r_2 - r_3) = (r_1 - r_2) + r_3$.
№ 76. $(r_1 - r_2) : r_3 = r_1 : r_3 - r_2 : r_3$.
№ 77. $(r_1 - r_2) - r_3 = r_1 - (r_2 + r_3)$.
№ 78. $(r_1 + r_2) : r_3 = r_1 : r_3 + r_2 : r_3$.
№ 79. $r_1 - (r_2 + r_3) = (r_1 - r_3) - r_2$.
№ 80. $r_1(r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$.

В задачах № 81 – № 90 на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел доказать, что указанные числа являются иррациональными.

№ 81. $\sqrt{7}$ и $\sqrt{10}$.
№ 82. $\sqrt{5}$ и $\sqrt{12}$.
№ 83. $\sqrt{11}$ и $\sqrt{6}$.
№ 84. $\sqrt{8}$ и $\sqrt{13}$.
№ 85. $\sqrt{3}$ и $\sqrt{14}$.
№ 86. $\sqrt{7}$ и $\sqrt{15}$.
№ 87. $\sqrt{12}$ и $\sqrt{5}$.
№ 88. $\sqrt{8}$ и $\sqrt{3}$.
№ 89. $\sqrt{18}$ и $\sqrt{7}$.
№ 90. $\sqrt{13}$ и $\sqrt{22}$.

Задачи по теме «Алгоритмы и их свойства»

В задачах № 1 – № 10 нужно решить уравнение, используя зависимость между результатом и компонентами действий. Привести и обосновать алгоритм последовательного уменьшения количества действий.

№ 1. $\left(1-\left(\frac{484}{847}-\frac{235}{329}x\right):\frac{76}{133}\right):\frac{273}{364}+\frac{79}{237}=\frac{46}{69}$.

№ 2. $\left(1-\left(\frac{338}{1183}-\frac{231}{539}x\right):\frac{243}{567}\right):\frac{155}{186}-\frac{51}{170}=\frac{89}{178}$.

№ 3. $\left(1-\left(\frac{244}{305}-\frac{201}{335}x\right):\frac{189}{270}\right):\frac{145}{203}+\frac{3}{30}=\frac{72}{80}$.

№ 4. $\left(1-\left(\frac{89}{178}-\frac{363}{605}x\right):\frac{364}{455}\right):\frac{338}{507}+\frac{71}{568}=\frac{217}{248}$.

№ 5. $\left(1-\left(\frac{267}{712}-\frac{224}{256}x\right):\frac{201}{268}\right):\frac{120}{144}+\frac{46}{345}=\frac{168}{180}$.

№ 6. $\left(1-\left(\frac{324}{567}-\frac{155}{217}x\right):\frac{144}{252}\right):\frac{135}{180}+\frac{89}{267}=\frac{112}{168}$.

№ 7. $\left(1-\left(\frac{118}{413}-\frac{129}{301}x\right):\frac{102}{238}\right):\frac{155}{186}-\frac{57}{190}=\frac{79}{158}$.

№ 8. $\left(1-\left(\frac{168}{210}-\frac{249}{415}x\right):\frac{182}{260}\right):\frac{170}{238}+\frac{19}{190}=\frac{513}{517}$.

№ 9. $\left(1-\left(\frac{117}{234}-\frac{228}{380}x\right):\frac{388}{485}\right):\frac{178}{267}+\frac{38}{304}=\frac{259}{296}$.

№ 10. $\left(1-\left(\frac{117}{312}-\frac{217}{248}x\right):\frac{219}{292}\right):\frac{155}{186}+\frac{62}{465}=\frac{406}{435}$.

В задачах № 11 – № 20 требуется составить подробный алгоритм решения задачи на построение треугольника.

№ 11. а) Построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне; б) построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании; в) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

№ 12. а) Построить треугольник по основанию, углу, прилежащему к этому основанию, и медиане угла, противолежащего основанию; б) построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте; в) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

№ 13. а) Построить треугольник по углу и двум высотам, проведенным на стороны угла; б) построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте на боковую сторону; в) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

№ 14. а) Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне; б) построить равнобедренный треугольник по основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону; в) построить прямоугольный треугольник по катету и острому углу.

№ 15. а) Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне; б) построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при вершине в) построить прямоугольный равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

№ 16. а) Построить треугольник по двум углам и стороне, лежащей против одного из них; б) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу в) построить равносторонний треугольник по стороне.

№ 17. а) Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них; б) построить прямоугольный треугольник по катету и острому углу, прилежащему к катету; в) построить равнобедренный треугольник по основанию и углу при вершине.

№ 18. а) Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них; б) построить прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу; в) построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте на боковую сторону.

№ 19. а) Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними; б) построить равнобедренный треугольник по основанию и прилежащему углу; в) построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе (одним из двух способов).

№ 20. а) Построить треугольник по трем сторонам; б) построить равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне; в) построить прямоугольный треугольник по двум катетам.

В задачах № 21 – № 30 требуется составить подробный алгоритм решения задачи на построение четырехугольников.

№ 21. а) Построить параллелограмм по двум неравным сторонам и одной диагонали; б) построить ромб по диагонали и противолежащему углу.

№ 22. а) Построить прямоугольник по стороне и диагонали; б) построить трапецию по одному её углу, двум диагоналям и средней линии.

№ 23. а) Построить параллелограмм по стороне и двум диагоналям; б) построить трапецию по двум параллельным сторонам и двум диагоналям.

№ 24. а) Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями; б) построить дельтоид по сторонам AB, BC и диагонали AC.

№ 25. а) Построить квадрат по диагонали; б) построить трапецию по диагоналям, углу между ними и боковой стороне.

№ 26. а) Построить параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними; б) построить ромб по двум диагоналям.

№ 27. а) Построить параллелограмм по основанию, высоте и диагонали; б) построить квадрат по стороне.

№ 28. а) Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте; б) построить ромб по стороне и диагонали.

№ 29. а) Построить ромб по углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла; б) построить квадрат по сумме стороны и диагонали.

№ 30. а) Построить дельтоид по сторонам AB, BC и диагонали BD; б) построить ромб по высоте и диагонали.

В задачах № 31 – № 40 при составлении алгоритма решения конструктивной задачи использовать понятие «геометрическое место точек» (ГМТ).

№ 31. а) На данной прямой найти точку, равноудаленную от двух точек на прямой; б) найти ГМТ, для которых разность расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку. Рассмотреть три возможных случая.

№ 32. а) Построить точку, равноудаленную от всех сторон треугольника; б) найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

№ 33. а) На прямой, пересекающей стороны, найти точку, равноудаленную от сторон данного угла; б) найти ГМТ, равноудаленных от трех попарно пересекающихся прямых.

№ 34. а) В треугольнике ABC найти точку, равноудаленную от сторон угла A и вершин B и C; б) построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

№ 35. а) Построить точку, равноудаленную от всех вершин треугольника; б) построить окружность, которая касалась бы данной окружности в данной точке и данной прямой.

№ 36. а) На прямой найти точку, равноудаленную от сторон угла; б) построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности и данной прямой.

№ 37. а) Найти точку, равноудаленную от сторон угла A и находящуюся на расстоянии b от точки A; б) построить ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

№ 38. а) Найти точку, равноудаленную от вершин B и C треугольника и находящуюся на расстоянии b от вершины A; б) построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

№ 39. а) Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проведенные через другую данную точку; б) построить треугольник по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

№ 40. а) Найти ГМТ, сумма расстояний которых от сторон данного равностороннего треугольника равна его высоте; б) построить треугольник по основанию, высоте и радиусу описанной окружности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии математическим языком изложены теоретические аспекты таких фундаментальных вопросов, как понятие, доказательство, алгоритм. Содержание заданий тестов после каждого раздела и задачи к самостоятельному решению направлены на активную умственную деятельность будущего учителя начальной школы, приучение его к математической культуре, алгоритму и технике выполнения практических заданий.

Магистрант, обучающийся по программе «Педагогика и психология дошкольного и начального образования», владеющий понятиями базовых разделов теории чисел, множеств и величин, знаниями в области начальной геометрии, умениями анализировать определения, исследовать решение задачи, грамотно и содержательно выстраивать доказательство математических предложений, считается усвоившим учебную программу дисциплины «Актуальные проблемы математического образования дошкольников и младших школьников» и отвечает требованиям, предъявляемым ФГОС ВО и НОО к выпускникам высших учебных заведений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Виленкин, Н. Я.* Математика 4 – 5 классы. Теоретические основы / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1974. – 223 с.
2. *Виленкин, Н. Я.* Задачник-практикум по математике / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1977. – 208 с.
3. *Лаврова, Н. Н.* Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 184 с
4. *Пышкало, А. М.* Геометрия в I – IV классах / А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1965. – 244 с.
5. *Стойлова, Л. П.* Математика : учеб. для студентов учреждений высш. проф. образования / Л. П. Стойлова. – М, 2013. – 216 с. – ISBN 978-5-7695-9911-8.
6. *Стойлова, Л. П.* Теоретические основы начального курса математики / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2015. – 196 с. – ISBN 978-5-4468-0768-0.
7. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Целые неотрицательные числа. Величины : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-1394-0.
8. *Тихомирова, С. В.* Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов : учеб. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 152 с. – ISBN 978-5-9984-1420-6.

Дополнительная литература

9. *Истомина, Н. Б.* Методика обучения математике в начальной школе: Развивающее обучение / Н. Б. Истомина. – 2-е изд., испр. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-89308-699-7.
10. *Моро, М. И.* Математика : учеб. для 2-го кл. / М. И. Моро, М. А. Бантова. – М. : Просвещение, 2015. – ISBN 978-5-09-035640-4.
11. *Сканави, М. И.* Сборник задач по математике. Алгебра / М. И. Сканави. – М. : ОНИКС 21 век. Мир и Образование, 2002. – ISBN 5-329-00292-3.

12. *Стратилатов, П. В.* Дополнительные главы по курсу математики : учеб. пособие по факультатив. курсу для учащихся 9 кл. / П. В. Стратилатов. – М. : Просвещение, 1974. – 144 с.
13. *Тихомирова, С. В.* Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Множества / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с. – ISBN 978-5-9984-1234-9.

Интернет-источники

14. Википедия [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 24.09.2021).

15. Краткий словарь философских терминов [Электронный ресурс]. – URL: https://nenuda.ru (дата обращения: 24.09.2021).

16. Иванов, Е. А. Справочник. Логика [Электронный ресурс]. – URL: https://azbyka.ru/otechnik/Spravochniki/logika-ivanov/ (дата обращения: 24.09.2021).

17. Библиотека с книгами по математике [Электронный ресурс]. – URL: http://mathemlib.ru/books (дата обращения: 24.09.2021).

18. Математика для дошкольников [Электронный ресурс]. – URL: https://nsportal.ru/ (дата обращения: 24.09.2021).

19. Лекции по предмету «Логика» [Электронный ресурс]. – URL: https://www.blogyka.ru/ (дата обращения: 24.09.2021).

20. Алгоритм и его свойства [Электронный ресурс]. – URL: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/Informatika/ (дата обращения: 26.03.2021).

21. Бахарева, Т. А. Основные математические понятия. Словарь терминов. Математика [Электронный ресурс]. – URL: https://nsportal.ru/detskiy-sad/matematika (дата обращения: 24.09.2021).

22. КиберПедия – категория Логика [Электронный ресурс]. – URL: https://cyberpedia.su/ (дата обращения: 24.09.2021).

23. Канавина С. А. Использование алгоритмов на уроках математики в начальной школе [Электронный ресурс]. – URL: https://www.prodlenka.org/metodicheskie-razrabotki/ (дата обращения: 26.03.2021).

24. Виды алгоритмов [Электронный ресурс]. – URL: https://otherreferats.allbest.ru/programming/00505580_0.html (дата обращения: 24.09.2021).

25. Аргунов, Б. И. Геометрические построения на плоскости [Электронный ресурс]. – URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/ArgunovBalk1957ru.pdf (дата обращения: 24.09.2021).

Учебное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДОШКОЛЬНИКОВ И МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина
Технические редакторы С. А. Володин, О. В. Балашова
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 19.12.22
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 6,05. Тираж 40 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.