

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

С.И. КОНОВАЛОВ, С.А. МАКСИМОВ, В.В. САВИН

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

Учебное пособие

Владимир 2006

УДК 629.113.004.58 (07)

ББК 39.38

М74

Рецензенты:

Заведующий кафедрой автомобильного транспорта  
Нижегородского государственного технического университета,  
профессор, академик автомобильного транспорта Российской Федерации  
*Н.А. Кузьмин*

Доктор экономических наук, профессор кафедры  
«Маркетинга и экономика производства»  
Владимирского государственного университета  
*Ю.А. Дмитриев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**Коновалов, С. И.**

Моделирование производственных процессов автомобильного  
М74 транспорта : учеб. пособие / С. И. Коновалов, С. А. Максимов,  
В. В. Савин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос ун-  
та, 2006. – 244 с. – ISBN 5-89368-668-3.

Изложены основы теоретических и практических вопросов моделирования производственных процессов автомобильного транспорта. Особое внимание уделено вопросам обработки опытных данных, сводящихся к построению детерминированных и стохастических моделей, а также вопросам оптимизационного моделирования процессов автомобильного транспорта методами теории массового обслуживания, имитационного моделирования, линейного и динамического программирования, сетевого планирования.

Предназначено для студентов высших учебных заведений специальностей 190601 – автомобили и автомобильное хозяйство, 190603 – эксплуатация и обслуживание транспортных и технологических машин и оборудования, бакалавров и магистров, учащихся средних учебных заведений в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов для очного и заочного видов обучения. Может быть полезно инженерно-техническим работникам автомобильного транспорта.

Табл. 42. Ил. 104. Библиогр.: 28 назв.

УДК 629.113.004.58 (07)

ББК 39.38

ISBN 5-89368-668-3

© Владимирский государственный  
университет, 2006

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	7
Глава 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ .....	9
1.1. Математические модели .....	9
1.2. Оптимизационное моделирование .....	11
1.3. Целевая функция. Критерий оптимизации .....	11
1.4. Основные этапы оптимизационного моделирования .....	12
1.5. Алгоритмы решения инженерных задач .....	15
1.6. Основные элементы алгоритмического языка QBasic .....	19
Контрольные вопросы .....	24
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ .....	25
2.1. Регрессионный анализ .....	25
2.2. Функциональные и корреляционные зависимости .....	26
2.3. Подбор формул по данным опыта методом наименьших квадратов .....	30
2.4. Множественная регрессия .....	34
2.5. Программные средства построения математических моделей .....	37
Контрольные вопросы .....	37
Глава 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ .....	38
3.1. Основные характеристики случайных величин .....	38
3.2. Законы распределения случайной величины .....	40
3.2.1. Законы распределения дискретной случайной величины .....	40
3.2.2. Законы распределения непрерывной случайной величины .....	43
3.3. Генеральная и выборочная совокупности и их характеристики .....	51
3.4. Обработка опытных данных выборочной совокупности .....	52
3.5. Статистическая оценка гипотез. Критерии согласия .....	55
3.6. Примеры обработки опытных данных вероятностными законами .....	58

3.6.1. Обработка опытных данных показательным законом распределения .....	58
3.6.2. Обработка опытных данных нормальным законом распределения .....	62
3.6.3. Обработка опытных данных по закону Вейбулла .....	68
3.7. Использование программных средств в расчетах .....	72
Контрольные вопросы .....	73
Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ .....	74
4.1. Случайные процессы и их классификация .....	74
4.1.1. Основные характеристики случайных процессов .....	76
4.1.2. Законы распределения случайных процессов .....	79
4.2. Потоки событий .....	82
4.3. Марковские случайные процессы .....	86
4.3.1. Случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем .....	88
4.3.2. Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем .....	91
4.3.3. Процесс «гибели» и «размножения» .....	94
4.4. Моделирование методами теории массового обслуживания .....	96
4.4.1. Классификация и показатели работы систем массового обслуживания .....	98
4.4.2. Характеристики систем массового обслуживания .....	102
4.5. Оптимизация числа оборотных агрегатов методами теории массового обслуживания .....	110
Контрольные вопросы .....	114
Глава 5. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....	115
5.1. Общие положения метода статистического моделирования .....	115
5.2. Моделирование случайных чисел .....	118
5.2.1. Генерирование случайных чисел .....	118
5.2.2. Моделирование дискретной случайной величины .....	121
5.2.3. Моделирование непрерывной случайной величины .....	125
5.3. Решение задач теории массового обслуживания методом Монте-Карло .....	127
5.3.1. Частные вопросы моделирования случайных процессов системы массового обслуживания .....	127
5.3.2. Алгоритм решения задач по определению числовых характеристик систем массового обслуживания .....	131

5.3.3. Исследование характеристик функционирования станции технического обслуживания автомобилей (СТОА) методом Монте-Карло .....	134
5.4. Моделирование потребности предприятия в запасных частях .....	137
5.4.1. Статистическая модель управления запасами .....	138
5.4.2. Алгоритм процесса моделирования .....	139
5.5. Моделирование оптимальной периодичности технических воздействий .....	142
5.5.1. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по допустимому уровню безотказности.....	143
5.5.2. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по экономическим показателям .....	146
Контрольные вопросы.....	149
<b>Глава 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ СЕТЕВОГО     ПЛАНИРОВАНИЯ .....</b>	<b>150</b>
6.1. Элементы сетевых графиков .....	150
6.2. Правила построения сетевых графиков .....	153
6.3. Процесс построения сетевых графиков .....	154
6.4. Расчет параметров сетевой модели .....	157
6.4.1. Расчет продолжительности полного пути .....	157
6.4.2. Расчет времени наступления событий .....	158
6.4.3. Расчет времени выполнения работ.....	160
6.5. Сетевой график ремонта автомобилей.....	162
6.6. Оптимизация и преимущества сетевых моделей .....	169
Контрольные вопросы.....	170
<b>Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ ДИНАМИЧЕСКОГО     ПРОГРАММИРОВАНИЯ .....</b>	<b>171</b>
7.1. Общая постановка задачи динамического программирования .....	171
7.2. Принципы оптимизации задачи динамического программирования .....	172
7.3. Основное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана) .....	173
7.3.1. Предварительная (условная) оптимизация.....	175
7.3.2. Окончательная (безусловная) оптимизация .....	176

7.4. Задача о маршрутизации.....	177
7.4.1. Постановка задачи .....	177
7.4.2. Построение математической модели .....	177
7.4.3. Последовательность решения задачи .....	179
7.5. Задача замены оборудования .....	180
7.5.1. Постановка задачи .....	180
7.5.2. Построение математической модели .....	182
7.5.3. Последовательность решения задачи .....	183
Контрольные вопросы.....	188
<b>Глава 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ .....</b>	<b>189</b>
8.1. Общие положения метода линейного программирования.....	189
8.2. Двойственная задача линейного программирования .....	191
8.3. Формулировка задачи линейного программирования .....	193
8.4. Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования .....	194
8.5. Симплексный метод решения задач линейного программирования .....	195
8.5.1. Основные положения симплекс-метода .....	196
8.5.2. Алгоритм симплекс-метода .....	199
8.5.3. Решение задач линейного программирования.....	201
8.6. Оптимизация грузопотоков .....	204
8.6.1. Формулировка транспортной задачи .....	204
8.6.2. Последовательность решения «транспортной задачи».....	205
8.6.3. Пример решения задачи .....	206
8.7. Разработка рациональных маршрутов перевозок массовых грузов на основании заявок договорной клиентуры .....	210
8.7.1. Постановка задачи .....	210
8.7.2. Разработка рациональных маршрутов.....	212
8.7.3. Расчет потребного числа подвижного состава на маршруте .....	214
Контрольные вопросы.....	215
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>216</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>217</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>243</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Одним из важнейших инструментов ускорения научно-технического прогресса всех отраслей народного хозяйства, в том числе и автомобильного транспорта, является широкое применение методов моделирования производственных процессов и, особенно, современных оптимизационных методов, которые дают возможность избегать дорогостоящих экспериментов при рассмотрении вопросов организации работы автомобильного транспорта.

Учебное пособие включает восемь глав, в каждой из которых рассматриваются теоретические и практические вопросы моделирования производственных процессов современными научными методами.

Первые три главы посвящены общим вопросам моделирования. Особое внимание уделено рассмотрению вопросов построения детерминированных и стохастических моделей на основе обработки опытных данных.

В четвертой и пятой главах рассмотрены вопросы моделирования случайных процессов автомобильного транспорта методами теории массового обслуживания и статистического имитационного моделирования, которыми решается широкий круг задач автомобильного транспорта.

Шестая глава посвящена теоретическим и практическим вопросам моделирования производственных процессов автомобильного транспорта методом сетевого планирования, который позволяет решать вопросы оптимизации временных и ресурсных показателей при выполнении сложных комплексов работ.

В седьмой и восьмой главах рассмотрены теоретические и практические вопросы решения оптимизационных задач автомобильного транспорта, решение которых реализуется методами динамического и линейного программирования.

Практическая ценность рассматриваемых в учебном пособии вопросов подтверждается тем, что в современных рыночных условиях важное значение приобретают математические методы оптимизации, позволяю-

щие наряду с другими методами устанавливать зависимость параметров оптимизации от различных факторов, прогнозировать рассматриваемые процессы, находить оптимальные решения и принимать наивыгоднейшие управленческие решения.

Основной особенностью пособия является описание решения производственных задач в виде математических моделей, алгоритмов и программы их реализации.

Большинство программ реализовано на алгоритмическом языке QBasic, который в настоящее время является языком массового пользования. Поэтому приведенные в пособии алгоритмы и программы станут существенным подспорьем как при решении практических задач, так и в учебном процессе.

Пособие предназначено для студентов вузов применительно к программе курса «Моделирование производственных процессов», одновременно оно может быть полезно и для управленческих работников различных областей деятельности.

## **Глава 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Современное производство всех отраслей народного хозяйства, в том числе и автомобильного транспорта, требует широкого применения методов моделирования и особенно оптимизационного.

Для автомобильного транспорта (АТ) расчетные методы моделирования позволяют определить необходимое число постов обслуживания, запасных частей и других ресурсов для осуществления транспортного процесса.

Основным производственным процессом АТ является транспортный. На осуществление этого процесса работает ряд служб АТП – техническая, коммерческая (эксплуатации), служба снабжения, служба главного механика и т.д.

Каждая служба ведет свое производство (Пр), которое определяет свои конкретные цели (Ц), для достижения которых требуется решение определенных задач (З), каждая из которых требует свои методы решения (Р).

Всю эту последовательность действий можно представить в виде цепочки Пр – Ц – З – Р.

В учебном пособии рассматриваются все составляющие этой цепочки.

При изучении производственного процесса последний заменяют моделью с целью экономии затрат (денежных, временных, трудовых).

*Модель* – это аналог, макет или иной вид отражения наиболее существенных свойств изучаемого процесса или явления.

На практике встречаются следующие виды моделей: физические, математические, графические, аналоговые, механические и др.

### **1.1. Математические модели**

Математическими моделями называют комплекс математических зависимостей и логических выражений, отображающих существенные характеристики изучаемого явления (процесса).

Математические зависимости устанавливают зависимость между известными и искомыми величинами.

Примерами математических моделей могут служить следующие зависимости:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i \text{ – линейная зависимость,}$$

где  $c_i$  – параметр;  $x_i$  – переменные;  $y$  – искомая величина.

$$y = \int_b^a f(x) dx \text{ – интеграл для вычисления площади, работы, скорости и т.д.}$$

$y' = f'(\varphi) = 0$  – математическая модель отыскания экстремума функции  $f(\varphi)$ .

Преимущества математических моделей (математического моделирования) перед другими заключаются:

- а) в низкой стоимости их создания;
- б) быстром получении результатов исследования;
- в) возможности проведения расчетных экспериментов и проверки правильности построения модели.

К недостаткам математических моделей следует отнести то, что они абстрактны.

Математические модели можно классифицировать по ряду признаков. Одна из классификаций по характеру параметра, переменной и виду зависимости приведена на рис. 1.1.

*Детерминированными* называют такие модели, в которых значения параметра и переменных величин предполагаются заданными и достоверными при жестких связях.

*Стохастические* модели описывают случайные процессы, т. е. процессы, протекающие под действием случайных факторов (задачи теории вероятности – вероятностные законы, теория массового обслуживания).

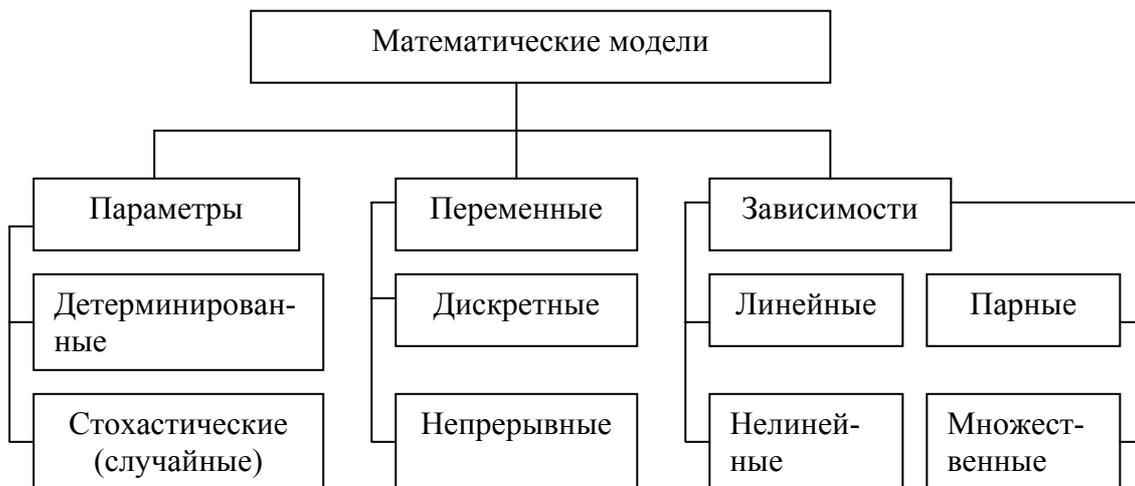


Рис. 1.1. Классификация математических моделей

## 1.2. Оптимизационное моделирование

Современное производство во всех отраслях народного хозяйства требует широкого использования методов оптимизации. Размерность производственных оптимизационных задач, как правило, велика, поэтому решать их целесообразно на ЭВМ. Одна и та же задача может быть решена различными методами одновременно, в то время когда разные задачи могут решаться одним методом. В любом случае должны послужить оптимальные (как выгоднейшие) показатели производственного процесса.

Все методы оптимизации условно можно разделить на классические и современные.

К классическим методам относят:

- методы дифференциального исчисления;
- численные методы;
- методы условной и безусловной оптимизации;
- методы перебора вариантов.

К современным методам можно отнести:

- линейное программирование;
- нелинейное программирование;
- динамическое программирование;
- стохастическое программирование;
- теория массового обслуживания;
- сетевое планирование;
- теория игр;
- теория планирования эксперимента.

## 1.3. Целевая функция. Критерии оптимизации

При решении оптимизационных задач первоначально надо установить математическую модель (математическую зависимость) вида  $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  изучаемого процесса. При этом она должна адекватно отображать его свойства.

В дальнейшем математическую зависимость вида  $W = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которую необходимо исследовать на оптимальность, будем называть целевой функцией.

Если в показатель целевой функции  $W$  вложен физический смысл, то его вместе с целевой функцией называют *критерием оптимизации* (критерий эффективности).

Одним из важнейших вопросов оптимизационного моделирования производственных процессов является выбор критерия оптимизации и описывающей его целевой функции.

Выбор критерия оптимизации (эффективности) зависит от масштаба решаемой задачи.

Различают частные и общие критерии оптимизации. Общие критерии, как правило, характеризуют народнохозяйственный эффект предприятия (прибыль, себестоимость, рентабельность и т.д.). Частные критерии – отдельные стороны производственного процесса (затраты живого труда, зарплата и т.д.).

#### 1.4. Основные этапы оптимизационного моделирования

Основными этапами оптимизационного моделирования являются следующие:

##### 1. Постановка задачи.

Она включает в себя обследование объекта (процесса), изучение факторов, влияющих на исследуемый объект, выявление существенных факторов, формулировку задачи.

##### 2. Построение математической модели.

В общем виде она записывается  $\max (\min) \bar{W} = f(\bar{x}, \bar{\alpha})$  при ограничениях (на ресурсы и т.д.)

$$q_i(\bar{x}, \bar{\alpha}) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

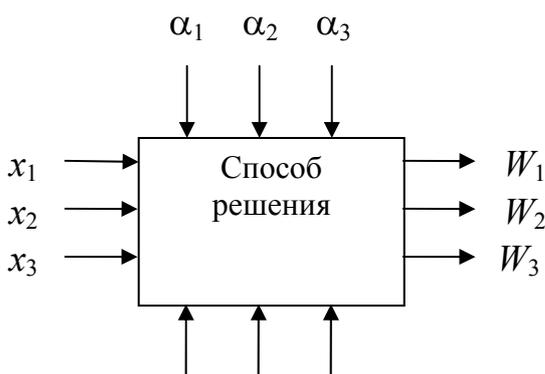


Рис. 1.2. Графическая модель процесса:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – внешние неуправляемые факторы;  
 $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  – внутренние неуправляемые факторы;  
 $W_1, W_2, W_3$  – критерии эффективности (целевая функция);  $x_1, x_2, x_3$  – управляемые переменные

где  $\bar{W}$  – целевая функция (показатель эффективности);

$\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – вектор управляемых переменных;

$\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  – вектор неуправляемых переменных;

$q_i$  – функция ограничения;  $b_i$  – показатель ограничения.

Графически математическую модель сложного процесса представлена на рис. 1.2.

### 3. Нахождение метода решения.

В зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяются следующие методы решения:

а) если  $f(\bar{x}, \bar{\alpha})$  и  $q_i(\bar{x}, \bar{\alpha})$  – линейные функции относительно переменных  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{x}$ , то имеем линейное программирование;

б) если  $f(\bar{x}, \bar{\alpha})$  и  $q_i(\bar{x}, \bar{\alpha})$  – нелинейные функции, то имеем нелинейное программирование;

в) если  $f(\bar{x}, \bar{\alpha}) = W$  можно представить в виде суммы  $\Sigma W_i = W$  и задача разбивается на ряд “шагов” (этапов), то применяют динамическое программирование;

г) если  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{x}$  – случайные величины, то применяется стохастическое программирование (моделирование).

### 4. Проверка и корректировка модели.

Здесь проверяется соответствие математической модели реальному процессу.

### 5. Решение задачи и ее реализация на практике.

Размерность производственных задач автомобильного транспорта, как правило, велика, поэтому решать их целесообразно на ЭВМ. Если в качестве обработки данных выступает ЭВМ, то решение задачи можно разбить на отдельные этапы (рис. 1.3).

*Первый этап* «Постановка задачи» заключается в изучении исследуемого явления, формулировке задачи и целей ее решения.

Определяются исходные данные и ожидаемые результаты (их содержание, объем, достоверность описываемого явления).

Этот этап заканчивается словесным описанием задачи.

Первый этап непосредственно связан со *вторым* «Математическая формулировка задачи». В итоге второго этапа должна быть получена математическая модель.

*На третьем этапе* «Разработка метода решения» производится выбор целесообразного (оптимального) математического метода решения поставленной задачи.

Результат – математическое описание выбранного метода решения.

*Четвертый этап* – «Составление алгоритма решения» задачи. Здесь производится детальный анализ выбранного метода решения. Составляется с необходимой степенью детализации с помощью блок-схемы.

*Этап* «Программирование» состоит в записи разработанного алгоритма на одном из языков программирования.

Этапы 5, 6, 7 соответствуют этапу отладки программы на ЭВМ. Программа вводится в ЭВМ и обрабатывается специальной программой – транслятором, которая переводит программу с языка программирования на язык конкретной ЭВМ. Транслятор диагностирует все ошибки, связанные с записью программы на языке программирования. Ошибки исправляются и вновь отдаются транслятору на обработку.

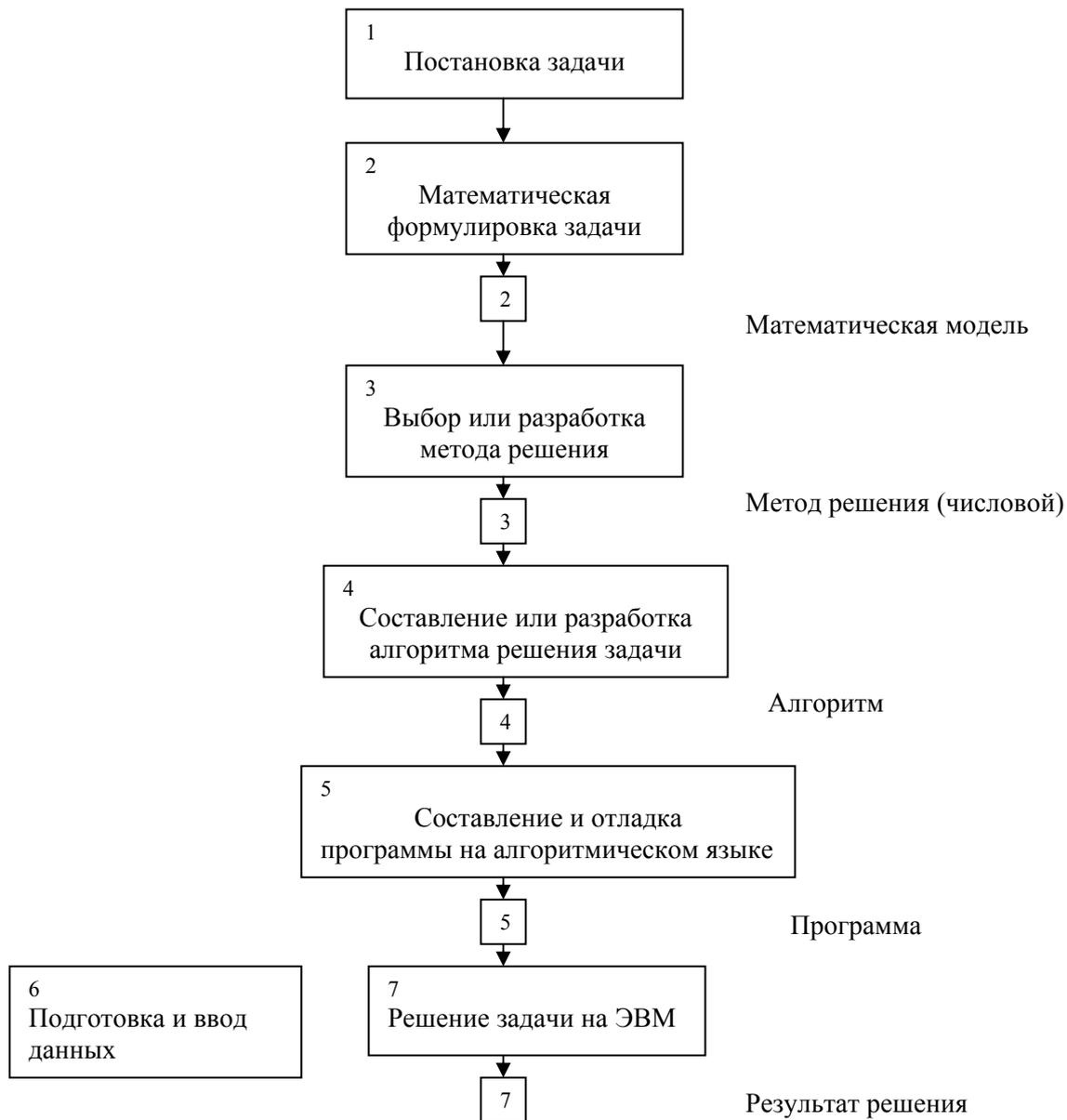


Рис. 1.3. Последовательность подготовки и решения задач на ЭВМ

Когда будут исправлены все ошибки, транслятор строит машинную программу. На данном этапе производится счет по специально подготовленным контрольным примерам, поиск и исправление ошибок.

После получения правильных результатов по всем контрольным примерам программа считается отлаженной и готовой к эксплуатации.

*Этап* «Решения задачи» заключается в получении результатов для различных вариантов исходных данных. Этот этап является регулярным счетом по программе. Для каждой готовой программы должна быть написана соответствующая инструкция по эксплуатации.

### 1.5. Алгоритмы решения инженерных задач

После построения математической модели и установления её решения составляется алгоритм решения задачи.

*Алгоритм* – конечная последовательность строго определённых правил, приводящих на основе исходных данных к решению задачи.

В практике встречаются словесные и графические описания алгоритмов.

Словесное описание алгоритма на естественном языке.

Пример: 
$$y = \arctg \left[ \sqrt{a x^3 + b} + \ln(a x^3 + b) \right]$$

при  $x = ?$ ;  $a = ?$ ;  $b = ?$

Процесс решения, заданный на естественном языке, запишется так:

1. Ввести значения  $x, a, b$ ;
2. Вычислить  $t = a \cdot x^3 + b$ ;  $z = \sqrt{t}$ ;
3. Вычислить  $S = \ln(t)$ ;
4. Вычислить  $y = \arctg(z + S)$ ;
5. Печатать  $y$ .

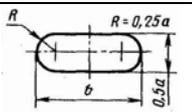
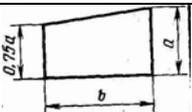
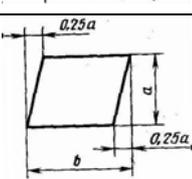
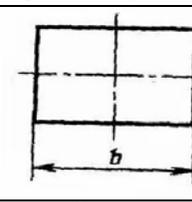
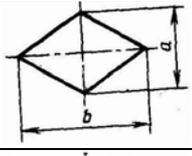
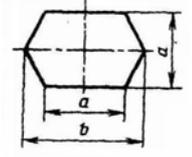
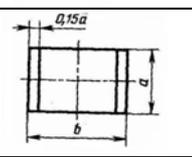
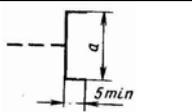
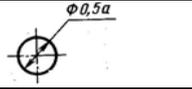
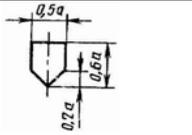
Словесным описанием алгоритма пользуются редко, в основном алгоритм решения инженерных задач описывают графическим методом, с помощью блок-схемы.

*Блок-схема* – наглядное графическое изображение алгоритма, когда отдельные действия (этапы) алгоритма изображаются при помощи различных геометрических фигур (блоков).

Обозначение блоков и их содержимого определены ГОСТами: ГОСТ 19002-80, ГОСТ 19003-80, ГОСТ 19005-85, ГОСТ 19701-90.

Наиболее часто встречающиеся операции (при разработке алгоритма) представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Наименование	Обозначение и размеры, мм	Функция
Пуск – останов		Начало, конец, прерывание процесса обработки данных или выполнения программы
Ручной ввод		Ввод данных вручную при помощи неавтономных устройств с клавиатурой, переключателей, кнопок
Ввод – вывод		Преобразование данных в форму, пригодную для обработки (ввод) или отображения результатов обработки (вывод)
Процесс		Выполнение операции или группы операций, в результате которых изменяется значение, форма представления или расположение данных
Решение		Выбор направления выполнения алгоритма или программы в зависимости от некоторых переменных условий
Модификация		Выполнение операций, меняющих команды или группы команд, изменяющих программу
Предопределенный процесс		Использование ранее созданных и отдельно описанных алгоритмов или программ
Комментарий		Связь между элементом схемы и пояснением
Линия потока		Указание последовательности связей между символами
Соединитель		Указание связи между прерванными линиями потока, связывающими символы
Межстраничный соединитель		Указание связи между разъединенными частями схем алгоритмов и программ, расположенных на разных листах

*Примечание.* Размер «а» должен выбираться из ряда 10, 15, 20 мм. Допускается увеличивать размер «а» на число, кратное 5. Размер «b» равен 1,5 «а».

Блоки соединяются линиями потока информации. Внутри блоков записываются выполняемые действия. Линии определяют направление вычислений, причем сверху вниз и слева направо. Если необходимо отразить другое направление (снизу вверх или справа налево), то на линиях ставятся стрелки. Блоки на схеме нумеруются цифрами, которые ставятся в разрыве верхней линии слева.

Практически любой сложный алгоритм представляет собой комбинацию трех типов структур:

- линейного;
- разветвляющегося;
- циклического.

*Линейный алгоритм* состоит из последовательности операций, выполняющихся только один раз в порядке их следования (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Линейный алгоритм

Как правило, все «действия», этапы являются чисто арифметическими.

На практике линейные алгоритмы встречаются редко.

*Разветвляющийся алгоритм* содержит блок проверки некоторого условия, и в зависимости от результата проверки выполняется та или иная последовательность операций, называемая ветвью. При этом форма разветвлений может быть как полной, так и сокращенной (рис. 1.5, 1.6).

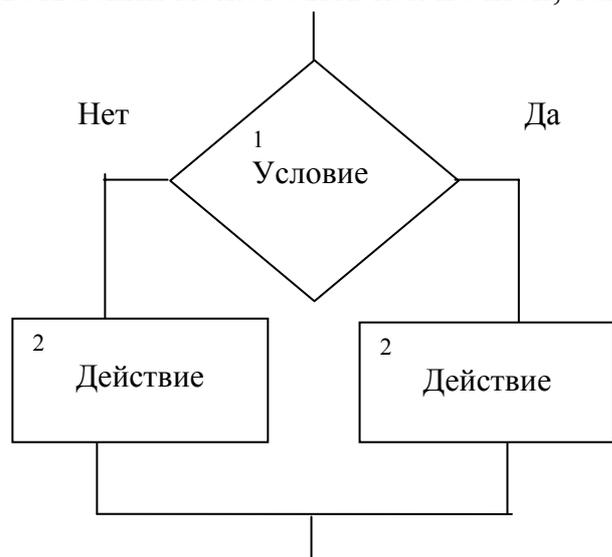


Рис. 1.5. Полная форма разветвления

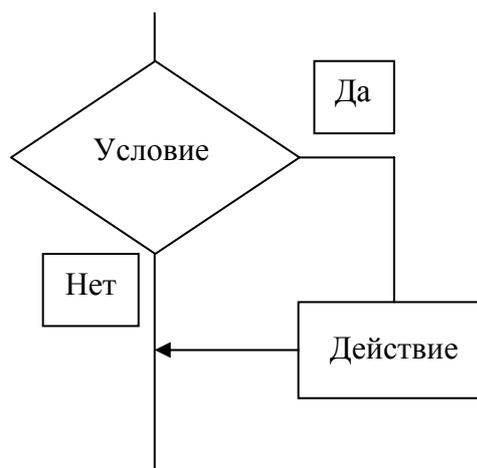


Рис. 1.6. Сокращенная форма разветвления

Циклический алгоритм содержит некую последовательность операций, выполняющихся многократно.

Различают следующие структуры циклических алгоритмов: цикл с повторением (рис. 1.7); цикл с предусловием (рис. 1.8) и цикл с постусловием (рис. 1.9).

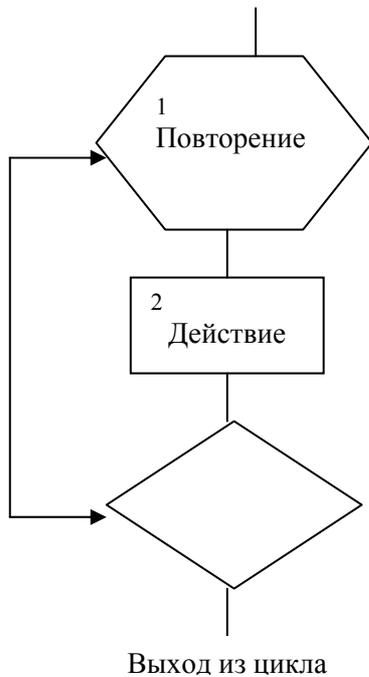


Рис. 1.7. Цикл с повторением

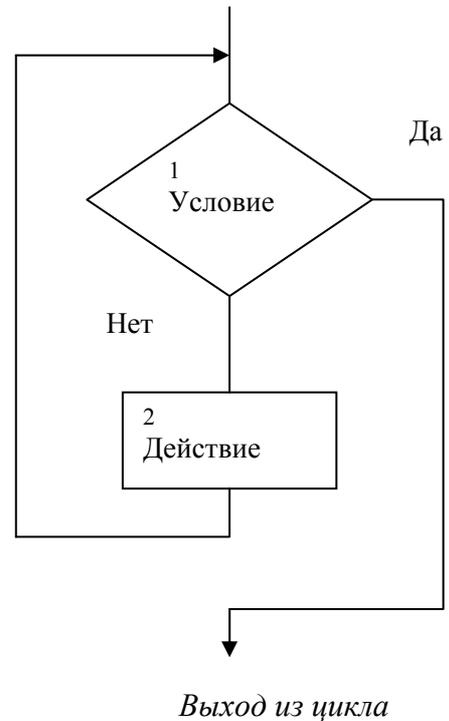


Рис. 1.8. Цикл с предусловием

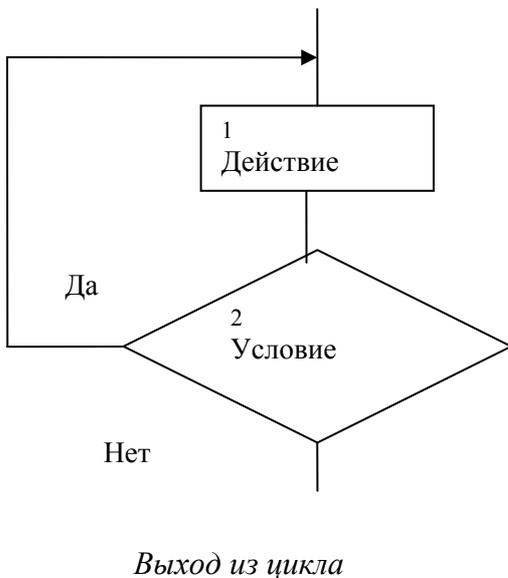


Рис. 1.9. Цикл с постусловием

Любой циклический алгоритм содержит несколько типов блоков. Основной блок, называемый телом цикла, производит требуемые вычисления.

Остальные блоки имеют вспомогательное значение. Они организуют циклический процесс: устанавливают начальные и новые значения данных, проверяют условие окончания или продолжения цикла циклического процесса.

## 1.6. Основные элементы алгоритмического языка QBasic

Для решения инженерных задач на микроЭВМ в настоящее время используется ряд алгоритмических языков. Одним из наиболее распространенных является алгоритмический язык QBasic. Он имеет свои преимущества и недостатки. К преимуществам следует отнести простой синтаксис и диалоговый режим работы.

Основные арифметические операции языка и знаки отношений приведены в табл. 1.2.

QBasic оперирует со следующими типами данных:

- целый (значения от  $-32768$  до  $32767$ , занимает 2 байта);
- длинный целый (от  $-2147483648$  до  $2147483647$ , 4 байта);
- вещественный (4 байта);
- вещественный двойной точности (8 байт);
- символьный (последовательность любых символов, каждый символ занимает 1 байт).

Таблица 1.2

Арифметические операции		Знаки операций отношений		Ограничители	
Символ	Наименование символа	Символ	Наименование символа	Символ	Наименование символа
+	Сложение	=	Равно	.	Десятичная точка
-	Вычитание	>	Больше	,	Запятая
*	Умножение	<	Меньше	;	Точка с запятой
/	Деление	>=	Больше или равно	"	Кавычка
^	Возведение в степень	<=	Меньше или равно	(	Левая скобка
		<>	Не равно	)	Правая скобка
				—	Пробел

Тип переменной определяется типом данных, которые она представляет. Указание типа переменной задается соответствующим знаком после имени:

a\$ – символьный,

a% – целый,

a& – длинный целый,

a# – вещественный двойной точности.

Если знак после имени отсутствует, то эта переменная считается по умолчанию вещественной обычной точности.

Числовые выражения включают в себя константы, переменные функции, соединенные знаками арифметических операций, при этом могут использоваться величины разных типов.

Основные стандартные функции языка QBasic представлены в табл. 1.3.

Программа на языке состоит из последовательности операторов. Оператор является основным элементом языка и описывает действия, которые необходимо выполнять для реализации алгоритма решения задачи. Операторы языка QBasic записываются в строки. Одна строка содержит один или несколько операторов, разделенных двоеточием. Например  $A = 1: b = 1$ .

Таблица 1.3

№ п/п	Функция	Математическое обозначение	Запись функции на языке QBasic	Примечание
1	Вычисление синуса	$\sin x$	SIN (X)	$x$ задан в радианах
2	Вычисление косинуса	$\cos x$	COS (X)	$x$ задан в радианах
3	Вычисление тангенса	$\operatorname{tg} x$	TAN (X)	Значение функции в радианах
4	Вычисление экспоненты	$e^x$	EXP (X)	$x < 2255$ ; $e = 2,71$
5	Вычисление натурального логарифма	$\ln x$	LOG (X)	$x > 0$
6	Вычисление арктангенса	$\operatorname{arctg} x$	ATN(X)	
7	Вычисление корня квадратного	$\sqrt{x}$	SQR (X)	$x \geq 0$
8	Вычисление абсолютного значения	$ x $	ABS (X)	
9	Выделение целой части	Целая часть числа $x$	INT (X)	
10	Генерация случайного числа с равномерно заданным законом распределения	—	RND (X)	Выдает случайное число на интервале (0, 1)

Перенос оператора на другую строку допускается. В этом случае используется знак переноса.

Строки могут нумероваться (но это не обязательно). Ссылка в нужное место программы может осуществляться также по метке.

Метка размещается в отдельной строке, начинается с буквы и содержит любое количество букв и цифр. После метки ставится двоеточие.

#### Пример

```
Ааа:  
X = x + 1  
...  
GOTO ааа
```

Если первым символом в строке апостроф (‘), то строка воспринимается как комментарий.

Имя образуется из букв от А до Z (или от а до z), знака подчеркивания \_ и цифр от 0 до 9, начинается с буквы. Имя используется для обозначения переменных, меток, процедур и т.п.

Ниже перечислены операторы языка QBasic, которые наиболее часто используются при составлении программ на языке QBasic, а также команды интерпретатора QBasic.

DATA – организует блок данных для считывания оператором READ;

DIM – резервирует место в памяти для числовых и строковых данных;

END – определяет физический конец программы;

FOR – указывает начало цикла и определяет его параметры;

NEXT – указывает конец цикла, организованного оператором FOR;

GOTO – осуществляет переход к указанной строке;

IF THEN, IF GOTO – передает управление в зависимости от истинности или ложности выражения отношения;

INPUT – вводит данные с терминала в процессе выполнения программы;

PRINT – выводит данные и результаты на терминал;

READ – считывает блок данных, организованных оператором DATA;

REM – используется для ввода примечаний и комментариев в программу пользователя;

RETURN – возвращает управление оператору, следующему за последним выполненным оператором GOSUB.

CLS – оператор очистки экрана.

В QBasic для записи операторов и переменных используются заглавные латинские буквы. Русские буквы могут быть использованы в качестве комментариев в операторах REM, PRINT.

Оператор присваивания имеет вид

*переменная = выражение.*

Оператор безусловного перехода имеет вид

*GOTO метка.*

Условный оператор имеет вид

*IF условие THEN операторы [ELSE операторы].*

Пример

IF a < b THEN t = 15 : V = 16 ELSE t = 17.

Оператор вывода PRINT USING имеет вид

PRINT USING формат; список вывода.

Формат задается в виде символьной строки (заклученной в кавычки), задающей форму вывода каждого элемента списка по следующим правилам для чисел : # – для каждой цифры, ^^^^ – для вывода в показательной форме. Остальные символы обозначают сами себя.

Пример.

##.## – будет выведено две цифры в качестве целой части и две – дробной. Если целая часть содержит более двух цифр, то перед числом будет напечатан знак %.

#.## ^^^^ – вывод будет осуществляться в показательной форме.

Для символьных строк:

"\ \" – (два пробела) – будет выведено четыре символа;

"\" – (без пробела) – будет выведено два символа.

Вообще, количество выведенных символов будет равно числу пробелов между двумя наклонными линиями + 2.

"!" – будет выведен один символ;

"&" – будут выведены все символы.

Пример.

A\$ = "КОТ": GA = 6.5

B\$ = "СОБАКА": GB = 15.3

PRINT USING "& ВЕСИТ #.#,\\" ВЕСИТ ##.# КГ"; A\$, GA, B\$, GB

При выполнении этого оператора на экране появится

КОТ ВЕСИТ 6.5, СОБАКА ВЕСИТ 15.3 КГ

Операторы цикла

1. FOR i = iнач TO iкон [STEP ih]

операторы

NEXT

$i$ ,  $i_{нач}$ ,  $i_{кон}$ ,  $i_{ш}$  соответственно, управляющая переменная цикла, ее начальное, конечное значения и шаг изменения. Если  $i_{ш} = 1$ , то шаг можно опустить. Пример.

```
FOR i =1 TO 10
```

```
....
```

```
NEXT i
```

QBasic располагает библиотекой стандартных процедур.

- |                                                                            |             |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений                        | (SIMQ.BAS)  |
| 2. Интерполирование функций                                                | (ALI.BAS)   |
| 3. Обращение матрицы и вычисление определителя                             | (MINV.BAS)  |
| 4. Умножение матриц                                                        | (GMPRD.BAS) |
| 5. Вычисление корня уравнения                                              | (RTMI.BAS)  |
| 6. Решение систем нелинейных уравнений                                     | (SNEN.BAS)  |
| 7. Вычисление корней полинома                                              | (POLRT.BAS) |
| 8. Вычисление производной                                                  | (DCAR.BAS)  |
| 9. Вычисление интеграла                                                    | (QATR.BAS)  |
| 10. Экстремум функции                                                      | (FMCG.BAS)  |
| 11. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений                 | (RKGS.BAS)  |
| 12. Сглаживание функций                                                    | (SG13.BAS)  |
| 13. Аппроксимация функций                                                  | (APFS.BAS)  |
| 14. Упорядочивание значений (используется при интерполировании функций)    | (ATSG.BAS)  |
| 15. Вычисление полиномов Чебышева (используется при аппроксимации функций) | (APCH.BAS)  |

Подключение библиотечной процедуры осуществляется оператором `$INCLUDE "имя библиотечной процедуры"`.

Полное описание алгоритмического языка QBasic изложено в литературе [19, 25].

### *РЕКОМЕНДУЕМЫЙ ПОРЯДОК РАБОТЫ НА ПЭВМ ПРИ СОЗДАНИИ И ВЫПОЛНЕНИИ ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ QBasic*

Войти в QБейсик. Для этого набрать `qb.exe` в командной строке и нажать клавишу "Ввод". Нажать на клавишу Esc.

В верхней строке экрана высвечивается главное меню.

Для первоначального ввода программы перейти в пункт FILE и подпункт NEW.

Для исправления программы войти в подпункт OPEN пункта FILE меню.

После того как программа составлена (или внесены исправления), ее необходимо записать в память на диск или дискету (пункт главного меню FILE, подпункт SAVE или клавиша F2).

**Замечание.** Рекомендуется после набора каждых 10 строк записывать программу на диск (простым нажатием клавиши F2), чтобы в случае сбоя ПЭВМ программа не пропала.

Выполнить программу (пункт RUN главного меню или клавиша F5). Выйти из QBasic (пункт FILE, подпункт EXIT или команда ALT / X).

### **Контрольные вопросы**

1. Перечислите службы АТП, обеспечивающие транспортный процесс предприятия.
2. Дайте определение понятиям: модель, математическая модель.
3. Преимущества математической модели.
4. Классификация математических моделей.
5. Перечислите современные методы оптимизации.
6. Дайте определение понятиям: целевая функция, критерий оптимизации.
7. Перечислите основные этапы оптимизационного моделирования.
8. Последовательность подготовки и решения задач на ЭВМ.
9. Дайте определение понятиям: алгоритм, программа.
10. Особенности разветвляющихся и циклических алгоритмов.
11. Перечислите стандартные функции алгоритмического языка QBasic.
12. Перечислите наиболее часто используемые операторы алгоритмического языка QBasic.

## Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Регрессионный анализ

При обработке опытных данных и построении математических моделей используют теорию корреляционно-регрессионного анализа.

Регрессионный анализ устанавливает математическую модель, связывающую зависимую переменную  $y$  с исследуемой переменной  $x$ , т.е. позволяет получить зависимость вида  $y = f(x)$  – уравнение парной регрессии.

Значение переменной  $y$  может зависеть сразу от нескольких переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В результате обработки таких статистических данных можно получить зависимость вида  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – уравнение множественной регрессии. Все уравнения регрессии подразделяются на линейные и нелинейные.

Функцию, аппроксимирующую опытные данные, называют теоретической функцией. При парной зависимости опытные данные могут быть аппроксимированы с помощью следующих функций:

- прямой линией  $y = a \cdot x + b$ ;
- параболой второго порядка  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ;
- гиперболой  $y = \frac{ax + b}{x}$ ;
- логарифмической функцией  $y = a \ln x + b$ ;
- степенной функцией  $y = ax^b$ ;
- показательной функцией  $y = ab^x$ ;
- арифметической прогрессией  $y = a + (n - 1)d$ ;
- геометрической прогрессией  $y = aq^{n-1}$ ;
- алгебраическим полиномом, т.е. рядом Маклорена

$$y = A_0 x^0 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

в котором коэффициенты ряда определяются по формулам:

$$A_0 = f(x), \quad A_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{f''(0)}{2!} \text{ и т.д.};$$

– тригонометрическим рядом, т.е. рядом Фурье

$$y = \frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

и другими функциями.

Для двухфакторной регрессионной зависимости опытные данные могут аппроксимироваться следующими функциями:

– плоскостью  $z = ax + by + c$ ;

– параболоидом второго порядка  $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + c$ ;

– гиперболоидом  $z = \frac{a}{bx + cy + d}$  и т.д.

В общем случае для  $n$ -мерного пространства и  $n$  переменных уравнения регрессии второго порядка выглядит так:

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i < j}^n B_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n B_{ii} x_i^2 + \dots,$$

где  $y$  – исследуемый признак (параметр) как функция многих переменных;  $x_i$  – факторы, оказывающие влияние на параметр;  $B_i$  – частные коэффициенты регрессии, показывающие влияние фактора  $x_i$  на исследуемый признак;  $B_{ij}$  – коэффициенты, характеризующие двойное (парное) воздействие факторов  $x_i$  и  $x_j$  на исследуемый признак.

## 2.2. Функциональные и корреляционные зависимости

Различают функциональные и корреляционные зависимости. Под функциональной понимают такую зависимость, когда с изменением одного фактора изменяется другой, при этом одному значению независимого фактора соответствует только одно значение зависимого фактора (рис. 2.1).

Корреляционная зависимость – это такая зависимость, при которой изменение одной случайной величины вызывает изменение среднего значения другой, т.е. одному значению независимой переменной могут соответствовать несколько значений зависимой переменной (рис. 2.2). Поэтому корреляционные зависимости могут быть установлены только при обработке большого количества наблюдений.

При обработке таких зависимостей пользуются корреляционным анализом, который устанавливает количественную оценку тесноты связи между изучаемыми признаками (факторами). Тесноту связи (наличие кор-

реляции) между двумя величинами можно определить визуально по полю корреляции.

Корреляционным полем называют нанесенные на график (см. рис. 2.2) в определенном масштабе точки, соответствующие одновременно значениям двух величин. В нашем случае теснота связи между параметрами  $x$  и  $y$  определяется визуально по соотношению короткой и продольной осей эллипса рассеяния наблюдений, нанесенных на поле корреляции. Чем больше отношение продольной оси к короткой, тем связь теснее.

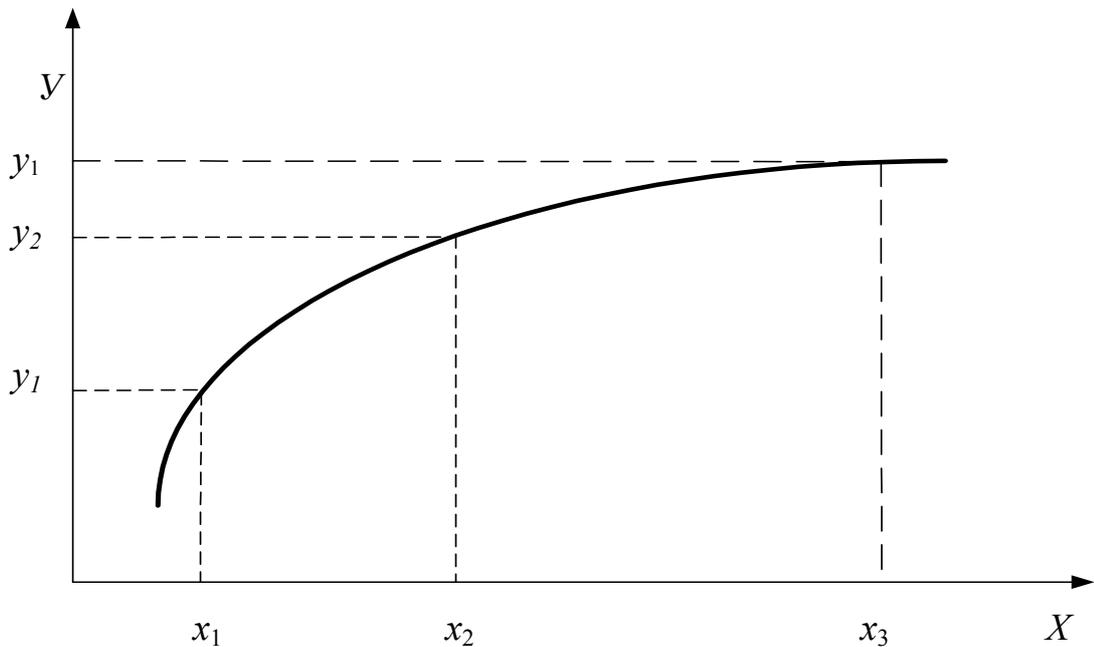


Рис. 2.1. График функциональной зависимости

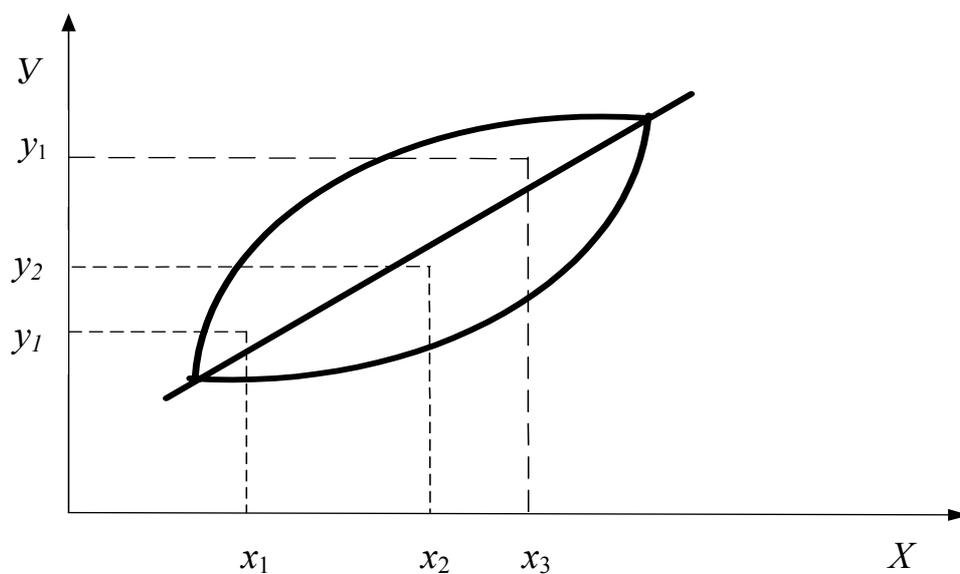


Рис. 2.2. График корреляционной зависимости

Более точно теснота связи оценивается коэффициентом корреляции  $r$ , который лежит в пределах  $0 \leq |r| \leq 1$ . При  $r = 0$  связи нет. Если  $|r| = 1$ , то между двумя величинами существует функциональная связь.

Итак, по величине коэффициента корреляции можем сделать следующее заключение:

$0 \leq |r| < 0,2$  – связи практически нет;

$0,2 \leq |r| < 0,5$  – связь слабая;

$0,5 \leq |r| < 0,75$  – связь средняя;

$0,75 \leq |r| < 0,95$  – связь сильная;

$0,95 \leq |r| \leq 1$  – практически функциональная связь.

При положительных  $r$  наблюдается прямая связь, т.е. с увеличением независимой переменной увеличивается и зависимая. При отрицательном коэффициенте корреляции существует обратная связь – с увеличением независимой переменной зависимая переменная уменьшается.

Существует ряд формул для расчета коэффициента корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

где  $r_{xy}$  – коэффициент корреляции;  $x_i, y_i$  – текущие значения наблюдаемых величин;  $\bar{x}, \bar{y}$  – средние значения этих величин;

$$r_{xy} = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где  $\bar{xy}$  – среднее значение произведения двух корреляционных величин;  $\sigma_x, \sigma_y$  – средние квадратичные отклонения соответствующих величин, которые определяются так:

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\bar{y}^2 - (\bar{y})^2}.$$

Для линейной регрессии коэффициент корреляции  $r$  является не только критерием тесноты связи, но и критерием точности аппроксимации (подбора формулы, выражающей зависимость).

Оценка точности аппроксимации криволинейной зависимостью производится при помощи корреляционного отношения

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

где  $y_i$  – текущие значения зависимой переменной;

$\tilde{y}_i$  – теоретические значения;

$\bar{y}$  – средние значения.

Корреляционное отношение принимает значения  $0 \leq \eta \leq 1$ , оно всегда положительно. Если  $\eta > r$ , то кривая точнее аппроксимирует зависимость, чем прямая; для прямой  $r = \eta$ .

Дополнительной оценкой точности аппроксимации часто применяют при оценке нелинейной регрессии, является средняя относительная ошибка аппроксимации  $\bar{\varepsilon}$ , которая определяется по формуле

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum \left| \frac{y_i - \tilde{y}_i}{y_i} \right| 100.$$

При оценке взаимного влияния трех и более переменных используют коэффициент множественной корреляции  $R$ , который для трех переменных определяется по формуле

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1}r_{yx2}r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}.$$

При расчете совокупного коэффициента корреляции необходимо предварительно определить парные коэффициенты корреляции  $r_{yx1}$ ,  $r_{yx2}$ ,  $r_{x1x2}$ . После того как все они определены, их записывают в квадратную симметрическую матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{yx1} & r_{yx2} & r_{yx3} \\ r_{yx1} & 1 & r_{x1x2} & r_{x1x3} \\ r_{yx2} & r_{x1x2} & 1 & r_{x2x3} \\ r_{yx3} & r_{x1x3} & r_{x2x3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда множественный коэффициент корреляции определяется формулой

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{11}}},$$

где  $D$  – определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;  $D_{11}$  – определитель той же матрицы с вычеркнутыми первой строчкой и первым столбцом, т.е. определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами независимыми переменными.

### 2.3. Подбор формул по данным опыта методом наименьших квадратов

В практической работе зависимость между переменными величинами часто получается в результате опыта (измерений). Обычно в этом случае зависимость оказывается заданной в виде таблицы. Функции, заданные таким образом, могут входить в дальнейшие операции и расчеты. Для удобства пользования такими зависимостями необходимо сначала подобрать формулу, хорошо описывающую опытные данные. Подбор такой формулы является существенной частью обработки экспериментальных данных. Одним из методов получения этих формул является способ наименьших квадратов.

Пусть в результате опытов найдены некоторые значения  $x_i$  и соответствующие им значения  $y_i$ , которые заданы табл. 2.1.

Таблица 2.1

$x$	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_n$

Требуется найти зависимость  $y = f(x)$ . Такой зависимостью может быть одна из следующих:

- $y = ax + b$  – линейная;
- $y = bx^a$  – степенная;
- $y = be^{ax}$  – показательная;
- $y = b + a \ln x$  – логарифмическая;

$y = \frac{a}{x} + b$  – гиперболическая и т. д.

Метод наименьших квадратов позволяет подобрать более точные значения параметров  $a$  и  $b$ . Предварительно необходимо установить общий вид аналитической функции, который можно выявить по опытным данным, если их нанести на плоскость с координатами  $xOy$ .

Зависимость  $Y$  от  $X$ , изображаемая аналитической функцией  $Y = f(X)$ , не может совпадать с экспериментальными значениями  $Y_i$  во всех  $n$  точках. Это означает, что для всех или некоторых точек имеем разность

$$\Delta_i = Y_i - f(X_i), \quad (2.1)$$

отличную от нуля (рис. 2.3).

Метод наименьших квадратов заключается в том, что подбираются параметры  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы сумма квадратов разностей (2.1) (см. рис. 2.3) была наименьшей, т.е.

$$z = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum [y_i - f(x_i)]^2 \rightarrow \min.$$

Пусть вид функции  $y = f(x)$  установлен, то её можно представить в виде  $Y = f(X) = \varphi(X, a, b)$ , где  $a$  и  $b$  – искомые параметры.

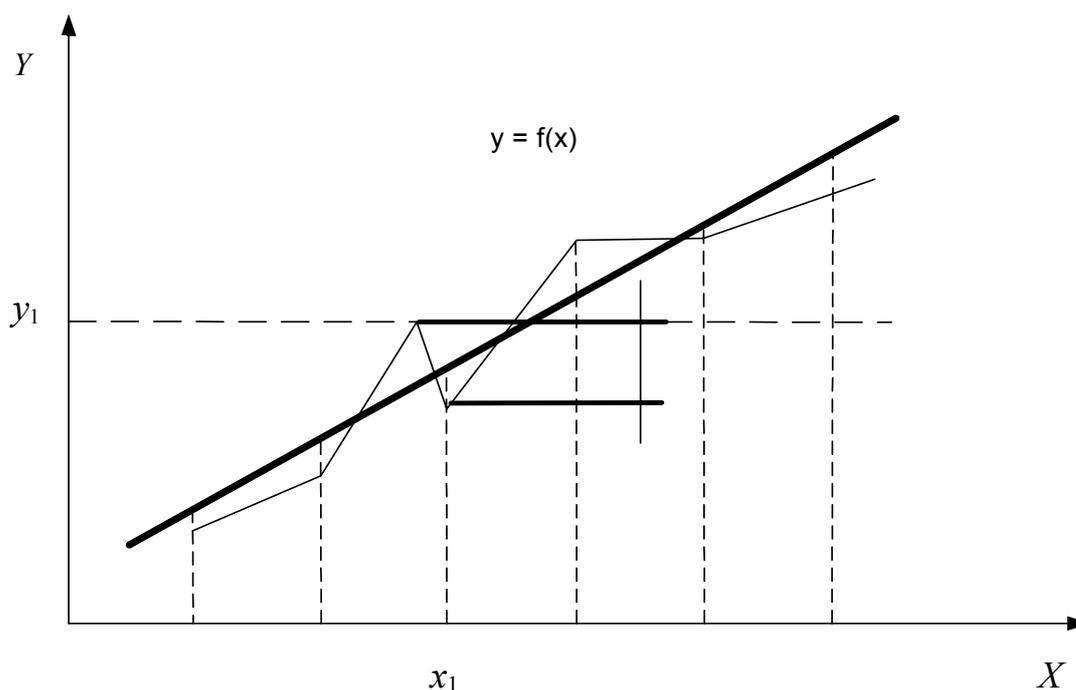


Рис. 2.3. Теоретическая и экспериментальная зависимости

Тогда

$$z = \sum [y_i - \varphi(x_i, a, b)]^2 \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Для нахождения минимума выражения (2.2) вычислим частные производные по аргументам  $a$  и  $b$  и приравняем эти производные к нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial a} &= 2 \sum [y_i - \varphi(x_i, a, b)] \varphi'_a(x_i, a, b) = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial b} &= 2 \sum [y_i - \varphi(x_i, a, b)] \varphi'_b(x_i, a, b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Система (2.3) содержит два уравнения с двумя неизвестными  $a$  и  $b$ . Решив систему, найдём значения параметров  $a$  и  $b$ . При найденных значениях параметров величина  $Z$  будет наименьшей, т. е. аналитическая зависимость будет наилучшим образом описывать экспериментальные данные.

Пример.

Пусть эмпирические данные необходимо описать линейной зависимостью  $y = ax + b$ , т.е.  $\varphi(x, a, b) = ax + b$ .

Тогда согласно методу наименьших квадратов

$$z = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min. \quad (2.4)$$

Выбираем числа  $a$  и  $b$  так, чтобы величина  $z$  была наименьшей, для чего найдем частные производные выражения (2.4.) по  $a$  и  $b$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти два условия дают нам следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i &= 0; \\ \sum y_i - a \sum x_i - nb &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Из системы (2.5) получаем:

$$b = \frac{\sum y_i}{n} - \frac{a \sum x_i}{n}; \quad a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (2.6)$$

При решении уравнений (2.6) целесообразно представить промежуточные расчеты в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

$i$	$X_i$	$Y_i$	$X_i Y_i$	$X_i^2$
1	$X_1$	$Y_1$	$X_1 Y_1$	$X_1^2$
2	$X_2$	$Y_2$	$X_2 Y_2$	$X_2^2$
...	....	...	...	...
$n$	$X_n$	$Y_n$	$X_n Y_n$	$X_n^2$
Итого	$\Sigma X_i$	$\Sigma Y_i$	$\Sigma X_i Y_i$	$\Sigma X_i^2$

*Примечание.* Если нас интересует нелинейная зависимость, то, проводя аналогичный расчет для выбранного типа функции, получим соответствующие выражения параметров  $a$  и  $b$ . Однако этого можно и не делать, если есть возможность перейти от нелинейной зависимости к линейной:

а) пусть  $y = \frac{a}{x} + b$ ; заменим  $\frac{1}{x} = x'$ , получим линейную зависимость

$$y = ax' + b;$$

б)  $y = b + a \ln x$ ; заменим  $\ln x = x'$ , получим  $y = ax' + b$ ;

в)  $y = b x^a$ ; логарифмируя, получим  $\ln y = \ln b + a \ln x$ .

Заменим  $\ln y = y'$ ;  $\ln b = b'$ ;  $\ln x = x'$ . Имеем  $y' = ax' + b'$ ;

г)  $y = b e^{ax}$ ; логарифмируя, получим  $\ln y = \ln b + ax$ .

Полагая  $\ln y = y'$ ;  $\ln b = b'$ , имеем  $y' = b' + ax$ .

Для линейных зависимостей коэффициенты  $a, a', b, b'$  находим из (2.6).

Сведение нелинейной регрессии к линейной выполняется с помощью линеаризующих преобразований в ходе ввода  $X_i, Y_i$  и при выводе  $a$  и  $b$  (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Преобразования, сводящие нелинейную регрессию к линейной

№ п/п	Функция $Y(X)$	$X'$	$Y'$
1	$a + bX$	$X$	$Y$
2	$1/(a + bX)$	$X$	$1/Y$
3	$\text{EXP}(a + bX)$	$X$	$\text{LOG}(Y)$
4	$a + b/X$	$1/X$	$Y$
5	$X/(b + aX)$	$1/X$	$1/Y$
6	$\text{EXP}(a + b/X)$	$1/X$	$\text{LOG}(Y)$
7	$a + b\text{LOG}(X)$	$\text{LOG}(X)$	$Y$
8	$1/[a + b\text{LOG}(X)]$	$\text{LOG}(X)$	$1/Y$
9	$\text{EXP}[a + b\text{LOG}(X)]$	$\text{LOG}(X)$	$\text{LOG}(Y)$

## 2.4. Множественная регрессия

Ряд задач автомобильного транспорта требует построения множественных регрессий вида

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Так, если будем рассматривать деятельность АТП, то одним из основных показателей его работы является коэффициент выпуска автомобилей на линию –  $\alpha_{в}$ , на формирование которого оказывает влияние большое число факторов. Основные из них:

- $X_1$  – обеспеченность водителями;
- $X_2$  – обеспеченность ремонтными рабочими;
- $X_3$  – обеспеченность инженерными кадрами;
- $X_4$  – обеспеченность запасными частями и т.д.

Для рассматриваемого случая

$$\alpha_{в} = y = f(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

т. е. имеем дело с построением множественной регрессии.

В более общем виде линейная множественная регрессия записывается так:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m = \sum_{i=0}^m b_i x_i,$$

где  $y$  – теоретическое значение результивного признака;

$x_i$  – аргументы (факторы);

$m$  – число изучаемых факторов;

$b_i$  – частные коэффициенты регрессии, показывающие степень влияния каждого из факторов на функцию;

$b_0$  – остаточный член, характеризующий среднее значение функции.

Для получения таких регрессий необходимо располагать статистическими (экспериментальными) данными, которые в общем случае можно представить табл. 2.4.

Таблица 2.4

$j \backslash i$	1	2	...	$J$	...	$n$	$\Sigma$
$X_1$	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1j}$	...	$X_{1n}$	$\Sigma X_{1j}$
$X_2$	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2j}$	...	$X_{2n}$	$\Sigma X_{2j}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$X_i$	$X_{i1}$	$X_{i2}$	...	$X_{ij}$	...	$X_{in}$	$\Sigma X_{ij}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$X_m$	$X_{m1}$	$X_{m2}$	...	$X_{mj}$	...	$X_{mn}$	$\Sigma X_{mj}$
$Y$	$Y_1$	$Y_2$	...	$Y_j$	...	$Y_n$	$\Sigma Y_j$

Процесс построения множественной регрессии поясним на примере.

Пример. Для случая  $y = f(x_1, x_2)$  линейная регрессия имеет вид  $y = a + b x_1 + c x_2$ . При вычислении коэффициентов  $a, b, c$  воспользуемся методом наименьших квадратов. Тогда будем иметь

$$z = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_{1j} - cx_{2j})^2 \Rightarrow \min \quad (2.7)$$

Вычислим частные производные выражения 2.7 по параметрам  $a, b$  и  $c$ , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial a} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_{1j} - cx_{2j})(-1) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial b} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_{1j} - cx_{2j})(-x_{1j}) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial c} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_{1j} - cx_{2j})(-x_{2j}) = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Преобразуя систему (2.8), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} na + b \sum_{j=1}^n x_{1j} + c \sum_{j=1}^n x_{2j} = \sum_{j=1}^n y_j \\ a \sum_{j=1}^n x_{1j} + b \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 + c \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} = \sum_{j=1}^n x_{1j} y_j \\ a \sum_{j=1}^n x_{2j} + b \sum_{j=1}^n x_{1j} x_{2j} + c \sum_{j=1}^n x_{2j}^2 = \sum_{j=1}^n x_{2j} y_j \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Система (2.9.) представляет систему линейных уравнений, решая которую одним из известных методов, найдем значения неизвестных параметров  $a, b, c$ .

Методом Крамера параметры  $a, b$  и  $c$  определяются из выражений

$$a = \frac{D_a}{D}; \quad b = \frac{D_b}{D}; \quad c = \frac{D_c}{D},$$

где  $D$  – главный определитель системы линейных уравнений (2.9);

$D_a$  – определитель системы уравнений, в котором столбец коэффициентов при  $a$  заменен столбцом свободных членов;

$D_b$  – определитель системы, в которой столбец коэффициентов при  $b$  заменен столбцом свободных членов;

$D_c$  – определитель системы, в которой столбец коэффициентов при  $c$  заменен столбцом свободных членов.

Если требуется построить математическую модель вида  $y = \sum_{i=0}^m b_i x_i$ , то для вычисления коэффициентов  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) опять воспользуемся методом наименьших квадратов, получаем систему нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum x_{1j} + \dots + b_m \sum x_{mj} = \sum y_j; \\ b_0 \sum x_{1j} + b_1 \sum x_{1j}x_{2j} + \dots + b_m \sum x_{1j}x_{mj} = \sum x_{1j}y_j; \\ \dots \\ b_0 \sum x_{mj} + b_1 \sum x_{1j}x_{mj} + \dots + b_m \sum x_{mj}x_{mj} = \sum x_{mj}y_j. \end{cases} \quad (2.10)$$

Решая систему (2.10) известным методом, найдем значения параметров  $b_i$  уравнения регрессии. Наиболее распространенным методом решения системы (2.10) является метод обращения матриц, запрограммированный в ряде стандартных программ аппроксимации.

В матричной форме система (2.10) запишется

$$XB = Y, \quad (2.11)$$

где  $X$  – исходная матрица;

$B$  – матрица исходных значений параметров;

$Y$  – матрица свободных членов.

$$X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{1j} & \dots & \sum x_{mj} \\ \sum x_{1j} & \sum x_{1j}x_{2j} & \dots & \sum x_{1j}x_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{mj} & \sum x_{1j}x_{mj} & \dots & \sum x_{mj}x_{mj} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \dots \\ B_m \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} \sum y_j \\ \sum x_{1j}y_j \\ \dots \\ \sum x_{mj}y_j \end{pmatrix}.$$

При решении системы линейных уравнений матричным способом необходимо вычислить обратную матрицу ( $X^{-1}$ ) и умножить её на правую и левую части уравнения (2.11), получим

$$\bar{X}^{-1} XB = X^{-1}Y.$$

Так как  $\bar{X} X = E$  и  $E B = B$ , то окончательное выражение для определения матричным способом параметров  $B_i$  примет вид

$$B = X^{-1} Y.$$

## 2.5. Программные средства построения математических моделей

Для повышения качества регрессионного анализа разработана программа на алгоритмическом языке QBasic, содержание которой приведено в прил. 3.

Программа обладает следующими особенностями:

- функция аппроксимации двухпараметрическая, линеаризованная функция типа  $y = ax + b$ ;
- набор аппроксимирующих функций – 9;
- программа сортирует функции по коэффициенту парной корреляции;
- работает в диалоговом режиме.

Обширная библиотека прикладных программ, обеспечивающих реализацию основных численных методов на персональных ЭВМ, приведена в учебной и справочной литературе [9, 25].

### Контрольные вопросы

1. Назначение корреляционно-регрессионного анализа.
2. Корреляционные и функциональные зависимости.
3. Коэффициент корреляции и его предельные значения.
4. Формулы вычисления коэффициентов парной и множественной корреляции.
5. Оценка точности аппроксимации нелинейной зависимости.
6. Сущность метода наименьших квадратов.
7. Виды парных регрессий.
8. Способы линеаризации нелинейных зависимостей.
9. Множественная линейная регрессия.
10. Последовательность вычисления параметров множественной регрессии методом Крамера.
11. Последовательность вычисления параметров множественной регрессии матричным способом.

### Глава 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

При изучении процессов автомобильного транспорта нередко возникает необходимость обработки больших объемов информации, представленной в виде статистических рядов. Например, пробег шин до замены, величина износа протектора шины у различных автомобилей на определенном пробеге, величина люфта рулевого управления автомобилей в процессе эксплуатации и другие случайные величины.

*Случайной* величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, которое с точностью нельзя предсказать до опыта.

Все случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Дискретная случайная величина принимает фиксированные значения на отрезке  $[a, b]$ . Непрерывная случайная величина принимает на отрезке  $[a, b]$  любое значение.

При обработке такой статистической информации определяются числовые характеристики и закон распределения рассматриваемой случайной величины.

#### 3.1. Основные характеристики случайных величин

Для количественной оценки случайной однородной величины используются следующие числовые характеристики.

Среднее арифметическое случайной величины служит характеристикой математического ожидания распределения случайной величины и вычисляется по формуле

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – значения элементов ряда;  $n$  – число элементов ряда.

Статистическая дисперсия характеризует разброс случайной величины относительно ее среднего значения. Она вычисляется по формуле

$$D' = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2.$$

Среднее квадратическое отклонение служит мерой рассеивания случайной величины относительно ее среднего значения и вычисляется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Коэффициент вариации ряда определяется отношением  $V = \sigma / \bar{X}$ . По коэффициенту вариации приближенно определяется закон распределения случайной величины, так, при  $V \leq 0,3$  распределение подчиняется нормальному закону, при  $V = 0,52$  – закону распределения Релея, а при  $V = 1,0$  – экспоненциальному (показательному) закону распределения.

Статистическая оценка коэффициента асимметрии дает дополнительную информацию о форме распределения случайной величины (рис. 3.1). Асимметрия, или скошенность, вычисляется по формуле

$$\bar{A} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\sigma^3}.$$

Статистическая оценка коэффициента эксцесса дает дополнительную информацию о форме распределения случайной величины (рис. 3.2).

Эксцесс, или островершинность, вычисляется по формуле

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\sigma^4} - 3.$$

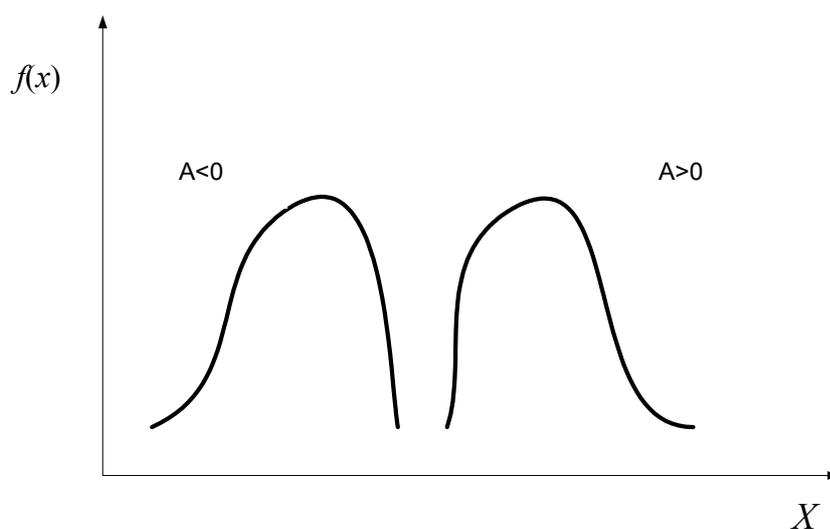


Рис. 3.1. Положительная и отрицательная асимметрия

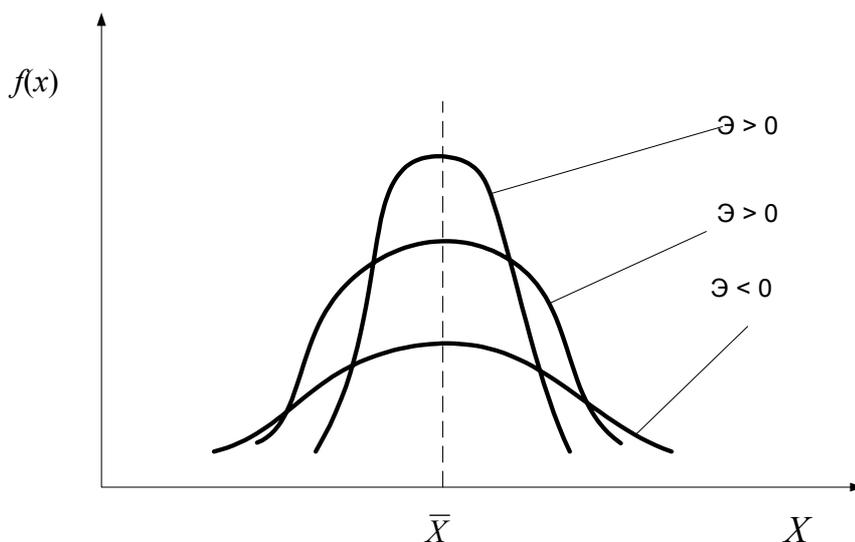


Рис. 3.2. Положительный и отрицательный эксцессы

### 3.2. Законы распределения случайной величины

Между частными значениями случайной величины и вероятностями их появления существует определенная зависимость, которая называется законом распределения.

Закон распределения случайной величины можно задать в виде таблицы, графика или формулы.

Различают законы распределения дискретной случайной величины и законы распределения непрерывной случайной величины.

#### 3.2.1. Законы распределения дискретной случайной величины

Основными вероятностями закона распределения дискретной случайной величины являются биномиальный закон и закон Пуассона.

#### **Биномиальный закон распределения**

Биномиальное распределение возникает при выполнении следующих условий:

- в результате одного испытания может появиться одно из двух противоположных событий  $A$  или  $\bar{A} = B$ ;
- вероятности указанных событий от опыта к опыту не меняются и составляют  $P(A) = p$  и  $P(B) = q$ ;
- проводится  $n$  независимых испытаний.

При выполнении указанных условий возникают различные комбинации таких событий, вероятность появления которых определяется по формуле, называемой биномиальным законом распределения

$$P_{(m,n)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} q^{n-m} p^m = C_n^m q^{n-m} p^m, \quad (3.1)$$

где  $n$  – число независимых испытаний;

$P_{(m,n)}$  – вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  появится ровно  $m$  раз;

$p$  и  $q$  – вероятности появления соответственно событий  $A$  и  $B$ , где  $q = 1-p$ ;

$C_n^m$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ .

Для биномиального распределения числовых характеристик: математическое ожидание  $M(m)$  и дисперсия  $D(m)$  выражаются с помощью формул

$$M[m] = np \text{ и } D[m] = npq.$$

### ***Распределение Пуассона***

Распределение Пуассона представляет собой предельный случай биномиального распределения для условий, когда  $p \rightarrow 0$ ;  $n \rightarrow \infty$  и  $np = a$ .

Преобразуя выражение биномиального закона при приведенных выше условиях, получим формулу распределения Пуассона:

$$P(m,n) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (3.2)$$

где  $n$  – число испытаний;

$m$  – число появлений события  $A$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ );

$P_{(m,n)}$  – вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  появится ровно  $m$  раз;

$a$  – параметр закона ( $a = np$ );

$p$  – вероятность появления события  $A$  в одном испытании.

В связи с тем что вероятность появления отдельных событий в распределении Пуассона характеризуется малой вероятностью ( $p \rightarrow 0$ ), закон Пуассона называют законом редких явлений.

Математическое ожидание  $M(m)$  и дисперсия  $D(m)$  для распределения Пуассона равны и определяются по выражению

$$M[m] = D[m] = np = a.$$

Закон Пуассона описывает:

- поток требований в зону ремонта и ТО;
- поток заявок на запасные части, узлы, агрегаты;
- случайное число отказов в течение фиксированной наработки.

Дискретная случайная величина, кроме формул 3.1 и 3.2, также может быть задана:

1) рядом распределения вероятности (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Частота значения события $A$	$m_A$	0	1	2	3	...	$m$
Вероятности, отвечающие частным значениям появления случайной величины	$P(m, n)$	$P(0, n)$	$P(1, n)$	$P(2, n)$	$P(3, n)$	...	$P(m, n)$

2) многоугольником распределения вероятности появления события  $A$  (рис. 3.3).

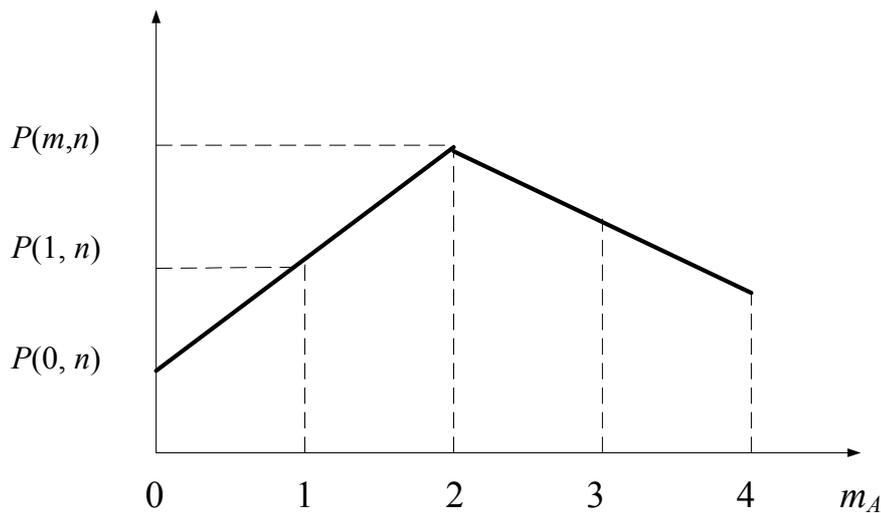


Рис. 3.3. Многоугольник распределения вероятности дискретной случайной величины

3) графиком функции распределения вероятности.

На основании ряда распределения или многоугольника распределения может быть построен график функции распределения (рис. 3.4).

Основные числовые характеристики дискретной случайной величины в этом случае определяются по формулам

$$M[m] = \sum_{i=0}^m m_i p_i \text{ — математическое ожидание;}$$

$$D[m] = \left( \sum_{i=0}^m m_i - M[m] \right)^2 p_i - \text{дисперсия.}$$

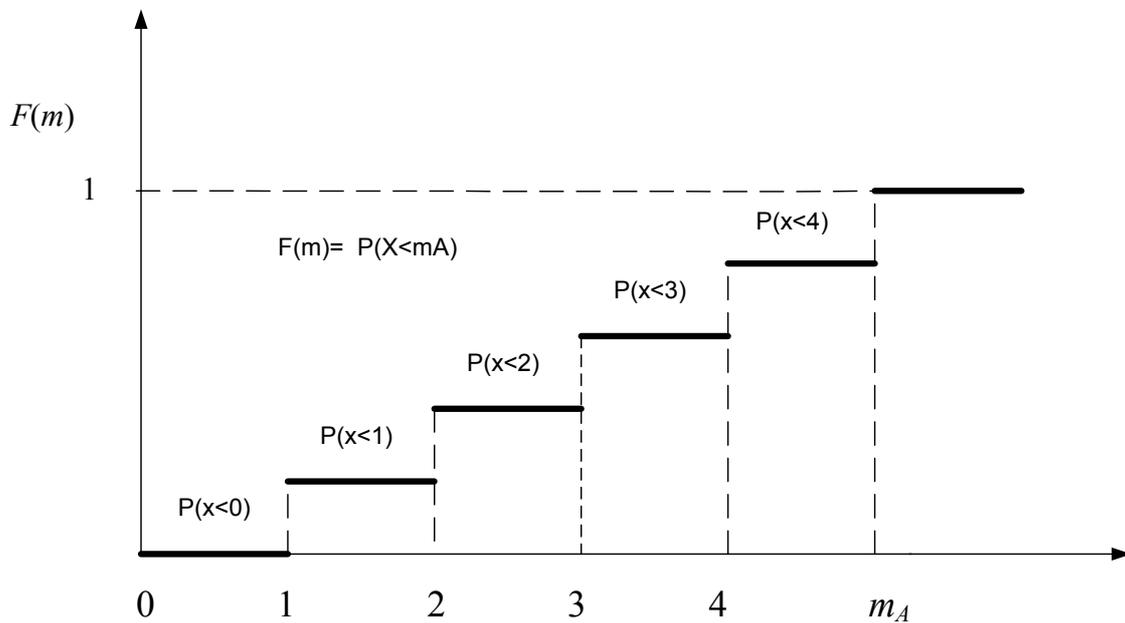


Рис. 3.4. График распределения вероятности дискретной случайной величины

### 3.2.2. Законы распределения непрерывной случайной величины

При описании непрерывных случайных величин производственных процессов автомобильного транспорта широко используются следующие вероятностные законы:

- нормальный закон распределения;
- закон равномерной плотности;
- показательный (экспоненциальный) закон распределения;
- законы Вейбулла и др.

#### **Нормальный закон распределения**

Нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-x)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $f(x)$  – плотность вероятности распределения непрерывной случайной величины;

$x_i$  – текущее значение случайной величины (аргумент);

$\bar{x}$  – математическое ожидание случайной величины (среднее значение);  
 $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение случайной величины;  
 $\pi = 3,14159$ ;  $e = 2,718$ .

График плотности вероятности распределения случайной величины нормального закона представлен на рис. 3.5.

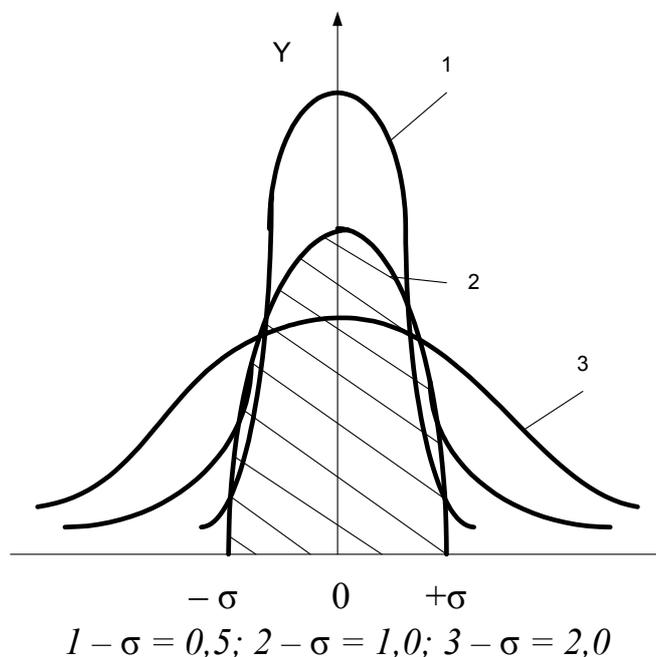


Рис. 3.5. Характер рассеяния кривой нормального распределения

Нормальный закон распределения может быть задан функцией распределения вероятностей случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \text{ то } f(x) = F'(x).$$

Числовые характеристики закона определяются формулами

$$\bar{x} = M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx.$$

Для нормального закона распределения случайная величина укладывается на участке  $x \pm 3\sigma$  и называется правилом трех сигм.

Для нормального закона распределения имеет место коэффициент вариации  $\bar{V} = \sigma/\bar{x} \leq 0,33$ .

- В отрасли автомобильного транспорта нормальный закон описывает:
- пробег до капитального ремонта агрегатов и узлов автомобиля;
  - суточные пробеги автомобилей;
  - время на операции ТО и их трудоемкости;
  - наработка деталей с постепенным характером отказов;
  - время на капитальный ремонт агрегатов и т.д.

### ***Закон равномерной плотности***

Закон равномерной плотности записывается так:

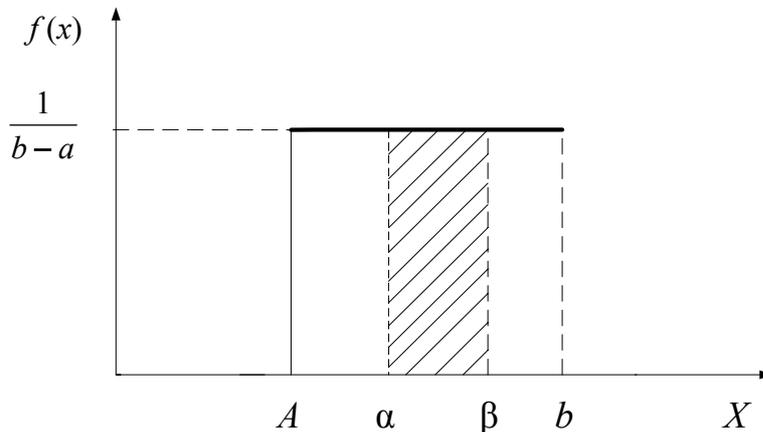
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

График плотности распределения этого закона приведен на рис. 3.6.

Так как  $F(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \left| \frac{1}{b-a} x \right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$ ,

то при  $x \geq b$ ;  $F(x) = 1$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x < b; \\ 1 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$



*Рис. 3.6. График распределения закона равномерной плотности*

Числовые характеристики закона определяются по следующим формулам:

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left| \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{a+b}{2};$$

$$D(x) = \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины  $X$  в отрезок  $[\alpha, \beta]$ , где  $[\alpha, \beta] \in [a, b]$  (см. рис. 3.6.), определяются по формуле

$$P(X \in [\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Равномерный закон распределения описывает процессы, связанные с работой светофоров, используется в задачах массового обслуживания, при статистическом моделировании процессов автомобильного транспорта.

Так, случайная величина  $x$ , распределенная по равномерному закону на отрезке  $[0, 1]$ , называется «случайными числами от 0 до 1», служит исходным материалом для получения случайной величины с любым законом распределения.

Пример. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажиры выходят на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты?

Найти  $M(t)$  и  $\sigma(t)$  случайной величины  $t$  – времени ожидания поезда.

$$f(x) = \frac{1}{2-0} = 0,5; \quad P(x \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4};$$

$$M(x) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ мин}; \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{(2-0)^2}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,58 \text{ мин.}$$

### ***Показательный (экспоненциальный) закон распределения***

Показательный закон распределения записывается так:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – параметр закона.

Так как  $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$ , то

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Графики  $f(x)$  и  $F(x)$  приведены на рис. 3.7 и 3.8.

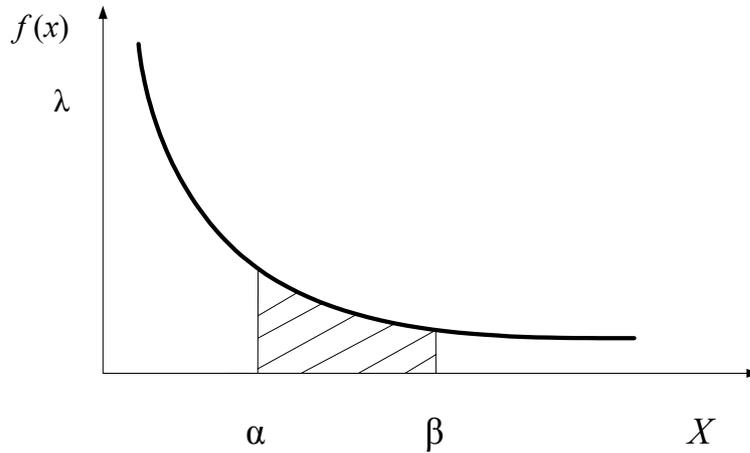


Рис. 3.7. График плотности распределения

В теории надежности  $F(x)$  характеризует вероятность распределения отказов,  $R = 1 - F(x)$  характеризует вероятность исправного состояния изделия.

Числовые характеристики закона вычисляются по формулам

$$M(x) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-x\lambda} dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$D(x) = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $[\alpha, \beta]$  (см. рис. 3.7 и 3.8) определяется выражением

$$P(x \in [\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}.$$

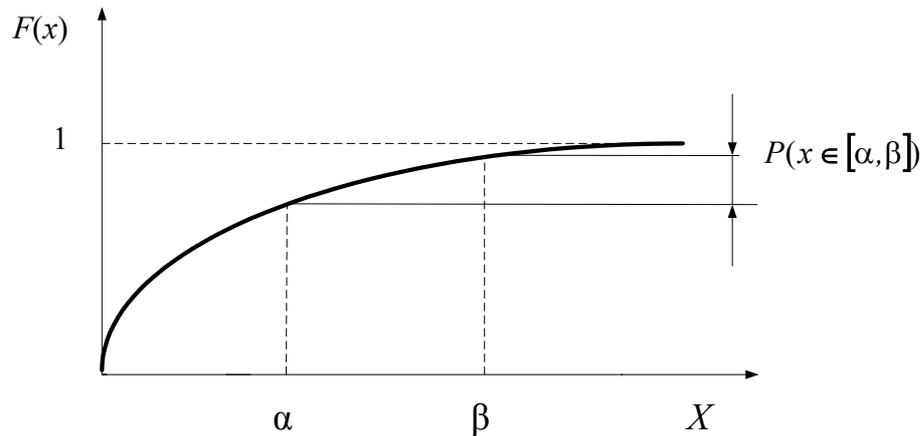


Рис. 3.8. График функции распределения

**Пример.** Время обслуживания автомобиля на СТОА распределено по показательному закону с параметром  $\lambda = 3$  автомобилям в час. Определить, сколько автомобилей будет обслужено за время от  $t = 0,13$  до  $t = 0,7$ .

**Решение.**  $P(0,3 < t < 0,7) = e^{-3 \cdot 0,13} - e^{-3 \cdot 0,7} = 0,553$ .

Экспоненциальный закон встречается в заданных надежности и массового обслуживания. Ему подчиняются:

- наработка деталей с внезапным характером отказов;
- промежутки времени между поступлениями автомобилей в зону ремонта;
- время восстановления автомобилей при текущем ремонте.

### **Закон Вейбулла**

Плотность распределения вероятности закона Вейбулла имеет вид

$$f(t) = n\mu^n t^{n-1} e^{-(\mu t)^n} \quad \text{при } t \geq 0, n \geq 0, \mu \geq 0; \quad (3.1)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, n < 0, \mu < 0,$$

где  $t$  – случайная величина (время, пробег и т. д.);

$n$  – параметр формы (при  $n = 1$  закон Вейбулла преобразуется в показательный закон, при  $n = 2$  – в закон Релея, при  $n = 3,25$  – в нормальный закон);

$\mu$  – параметр масштаба.

Итак, плотность распределения Вейбулла задается двумя параметрами  $n$  и  $\mu$ , что обуславливает широкий диапазон его применения на практике.

Распределение Вейбулла находит широкое применение при исследовании функционирования автотранспортных средств. Хорошо описывает постепенные отказы изделий.

В некоторых случаях вместо  $\mu$  применяют величину, обработанную по параметру масштаба  $\alpha = 1/\mu$ , тогда плотность вероятности записывается так:

$$f(t) = \frac{n}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n}. \quad (3.2)$$

График плотности распределения Вейбулла приведен на рис. 3.9. Функция распределения закона Вейбулла имеет вид

$$F(t) = \int_0^t n\mu^n t^{n-1} e^{-(\mu t)^n} = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^n}.$$

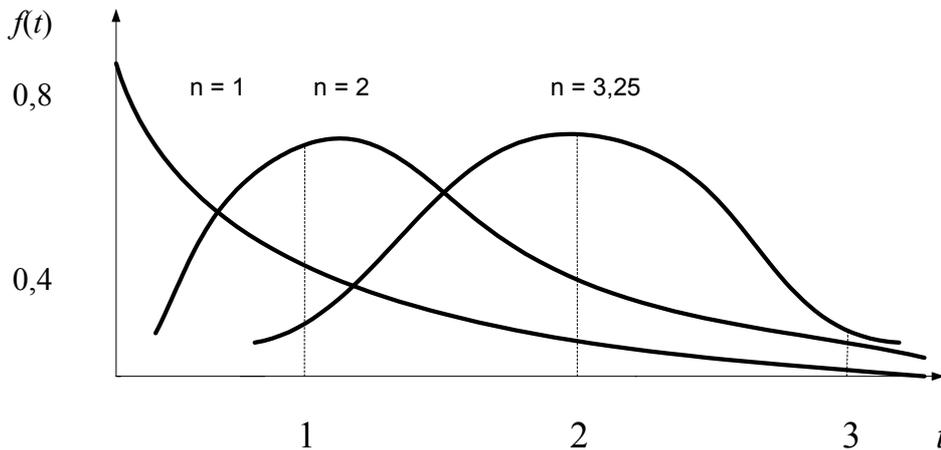


Рис. 3.9. Графики плотности распределения

В теории надежности кривая функции распределения  $F(t)$  характеризует вероятность отказа изделия, а функция

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^n}$$

характеризует вероятность исправного состояния изделия и называется кривой ресурса.

При решении задач надежности приходится вычислять интенсивность отказов изделий, которая в общем случае равна отношению плотности распределения к вероятности безотказной работы изделия

$$\lambda(t) = f(t)/R(t).$$

Очевидно, что если по мере течения времени вероятность исправной работы изделия уменьшается, то и значение интенсивности отказа изделия изменяется (возрастает) (рис. 3.10).

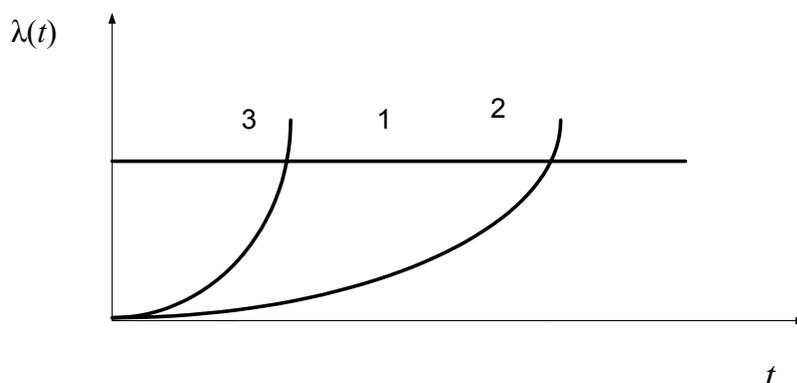


Рис. 3.10. Кривые интенсивности отказов:  
1 – показательного закона; 2 – закона Вейбулла;  
3 – нормального закона

Формулы математического ожидания и дисперсии закона Вейбулла имеют вид

$$M(t) = \int_0^{\infty} t n \mu^n t^{n-1} e^{-(\mu t)^n} dt = \int_0^{\infty} t e^{-(\mu t)^n} d(\mu^n t^n), \quad (3.3)$$

$$D(t) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-(\mu t)^n} d(\mu^n t^n) - [M(t)]^2. \quad (3.4)$$

Указанные интегралы легко вычисляются с помощью гамма-функции

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Значения гамма-функции Эйлера в зависимости от параметра  $\alpha$  приведены в табл. П 3.1.

Преобразуя выражения (3.3) и (3.4) к виду, удобному для применения гамма-функции Эйлера, получим:

$$M(t) = \frac{1}{\mu} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$D(t) = \frac{1}{\mu^2} \Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\mu} \right]^2.$$

Формула для вычисления коэффициента вариации в этом случае принимает вид

$$V = \frac{\sigma(t)}{M(t)} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \varphi(n).$$

Как видим, коэффициент вариации является функцией параметра формы закона ( $n$ ). В свою очередь, параметр формы закона  $n$  является функцией коэффициента вариации  $V$ :

$$n = \psi(V) = \psi\left[\frac{\sigma(t)}{M(t)}\right].$$

Следовательно, если известны  $M(t)$  и  $\sigma(t)$  закона Вейбулла, то можем определить значения параметра формы  $n$  и на основании этого определить параметр масштаба  $\mu$ .

Для удобства вычисления параметра формы заранее составлена табл. 1.4.

### 3.3. Генеральная и выборочная совокупности и их характеристики

Задачи, возникающие при изучении процессов автомобильного транспорта, требуют знаний основных положений теории вероятностей и математической статистики.

Если математическая статистика занимается разработкой методов сбора и обработки результатов наблюдений случайных процессов, то теория вероятностей изучает их закономерности.

При решении задач математической статистики и теории вероятностей приходится сталкиваться с понятием *генеральной* и *выборочной* совокупностей.

Генеральной совокупностью называют совокупность всех объектов (элементов), подлежащих изучению. Очевидно, что подвергать исследованию всю генеральную совокупность затруднительно или нецелесообразно. В связи с этим из генеральной совокупности извлекают лишь некоторую ее часть, называемую выборочной совокупностью (выборкой).

Используя методы математической статистики, можно определить числовые характеристики выборочной совокупности. И перенеся их по оп-

ределенным правилам на генеральную совокупность, оценить числовые характеристики последней.

Итак, пусть требуется исследовать некоторую генеральную совокупность «Г.с.» (рис. 3.11), которая характеризуется параметрами:

$M(x)$  – математическое ожидание;

$D(x)$  – дисперсия;

$\sigma(x)$  – среднее квадратическое отклонение;

$f(x)$  – плотность распределения;

$F(x)$  – функция распределения.

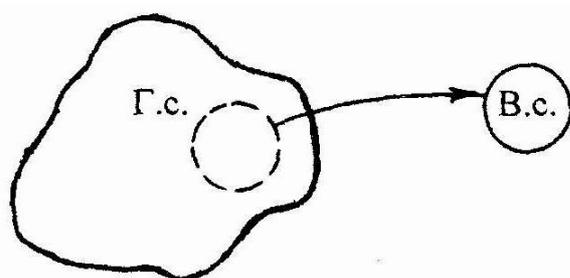


Рис.3.11. Схема процесса выборки

Непосредственно вычислить их невозможно. Однако можно оценить (принять) по данным выборочной совокупности. Для чего из генеральной совокупности извлечем выборку «В.с.», для которой методами математической статистики можем вычислить:

$X$  – среднее арифметическое;  $D^*(x)$  – статистическая дисперсия;

$\sigma^*(x)$  – статистически среднее квадратическое отклонение;

$W(x)$  – относительная частота;

$F^*(x)$  – статистическая (экспериментальная) функция распределения.

Найдя интересные нас числовые характеристики выборочной совокупности, можем перенести их при определенных условиях на всю генеральную совокупность, т.е.

$$M(x) = \bar{X}; D(x) = \frac{n}{n-1} D^*(x); \sigma(x) = \sqrt{\frac{n}{n-1} D^*(x)}.$$

### 3.4. Обработка опытных данных выборочной совокупности

Пусть имеем доброкачественный объем выборки (статистический ряд). Порядок обработки его следующий:

- зарегистрированные значения рассматриваемого признака  $X_i$  расположить в возрастающем порядке;
- найти наибольшее  $X_{\max}$  и наименьшее  $X_{\min}$  значения параметра;
- определить размах измерения значений параметра  $R = X_{\max} - X_{\min}$ ;

– вычислить число интервалов  $K$  в зависимости от объема выработки  $n$ :

$$K = 1 + 3,32 \lg n;$$

– определить ширину частичного интервала  $h$ :

$$h = R / k;$$

– определить границы интервалов, для чего установить нулевое (крайнее) значение интервала:

$$X_0 = X_{\min} - h/2.$$

Следующие границы интервалов определяются последовательным прибавлением ширины интервала  $h$  к предыдущему значению границы:

$X_1 = X_0 + h$ ,  $X_2 = X_1 + h$  и т.д. до тех пор, пока  $X_k$  не будет больше  $X_{\max}$ ;

– определить число элементов значений признаков, попавших в  $i$ -й интервал (эту величину называют опытной частотой  $m_i^*$  данного интервала);

– результаты расчета свести в таблицу 3.2, которую называют интервальным вариационным рядом.

Относительную величину частоты называют частотью  $i$ -го интервала  $W_i$

$$W_i = m_i / n.$$

Накопление частоты  $W^H$  получается путем последовательного прибавления частоты  $W_i$ , очередного интервала

$$W_i^H = \sum_{i=1}^i W_i,$$

для последнего интервала

$$W_k^H = \sum_{i=1}^k W_i = 1.$$

Таблица 3.2

Сводная таблица обработки выборочных данных

Номер интервала	Ширина интервала $X_i - X_{i-1}$	Середина интервала $\bar{X}_i$	Частота $m_i^*$	Частость $W_i$	Накопленная частость $W_i^H$
1	$X_1 - X_0$	$\bar{X}_1$	$m_1^*$	$W_1$	$W_1^H$
2	$X_2 - X_1$	$\bar{X}_2$	$m_2^*$	$W_2$	$W_2^H$
....	...	...	...	...	
$k$	$X_k - X_{k-1}$	$\bar{X}_k$	$m_k^*$	$W_k$	$W_k^H$

Основные числовые характеристики для интервального вариационного ряда вычисляются по следующим формулам:

– среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k X_i m_i^* = \sum_{i=1}^k \bar{X}_i W_i;$$

– статистическая дисперсия

$$D^*(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left( \bar{X}_i - \bar{X} \right)^2 m_i = \sum_{i=1}^k \left( \bar{X}_i - \bar{X} \right)^2 W_i = \sum_{i=1}^k W_i \left( \bar{X}_i \right)^2 - \left( \bar{X} \right)^2;$$

– среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \bar{X}_i - \bar{X} \right)^2 m_i^*}.$$

Графическое выражение закона распределения можно представить в виде гистограммы и наклонной (кумулятивной) кривой (рис. 3.12 и 3.13).

Гистограмма представляет собой набор прямоугольников, основанием каждого является длина частичного интервала, а высота  $m_i^*$  или  $W_i$  (см. рис. 3.12).

По построенной гистограмме назначается теоретический закон распределения случайной величины  $f(x)$ , для которого по формуле

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dt$$

определяется теоретическая функция распределения  $F_T(x)$ .

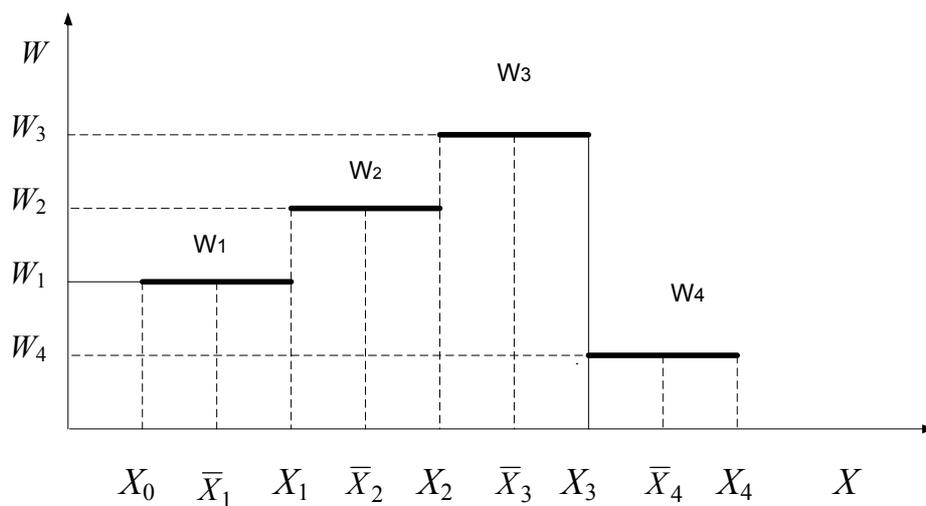


Рис. 3.12. Гистограмма распределения признака

Кумулятивная кривая строится по накопленным частотам  $W_i^H$ , она соответствует опытной функции распределения признака  $W_i^H = F_{\text{оп}}^*(x)$  (см. рис. 3.13). Соответствие опытной  $F_{\text{оп}}^*(x)$  и теоретической  $F(x)$  функции распределения может быть оценено с помощью критерия согласия.

$$W_i^H = F_{\text{оп}}^*(X).$$

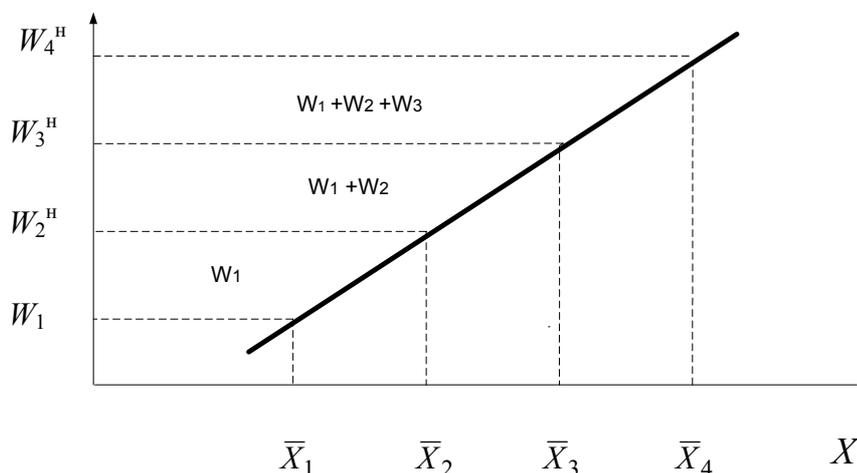


Рис. 3.13. График опытной функции распределения признака (кумулятивная кривая)

### 3.5. Статистическая оценка гипотез. Критерии согласия

При статистической обработке опытных данных одна из важнейших задач – это задача проверки гипотез о принадлежности опытных данных (гистограмм) к тому или иному вероятностному закону.

При выдвижении и принятии указанных гипотез возникают следующие четыре случая.

1. Гипотеза  $H_0$  верна и принимается.

2. Гипотеза  $H_0$  верна, но ошибочно отвергается. Возникающую при этом ошибку называют ошибкой первого рода, а вероятность ее появления называют уровнем значимости и обозначают  $\alpha$ .

$$\alpha = 1 - P_{\text{д}},$$

где  $P_{\text{д}}$  – доверительная вероятность.

3. Гипотеза  $H_0$  не верна и отвергается.

4. Гипотеза  $H_0$  не верна, но ошибочно принимается. Возникающую при этом ошибку называют ошибкой второго рода, а вероятность её появления обозначают  $\beta$ .

Для решения отмеченной задачи предложены соответствующие критерии и заранее, при заданном уровне значимости  $\alpha$ , подсчитаны и составлены таблицы, в которых помещены критические (табличные) значения указанных критериев.

При практической проверке рассматриваемых гипотез происходит сопоставление опытных значений критерия  $K_{\text{оп}}$  с табличным значением критерия  $K_{\text{кр}}$  ( $K_{\text{табл}}$ ) и далее в зависимости от соотношения  $K_{\text{оп}} < > K_{\text{кр}}$  принимают или отвергают выдвинутую гипотезу.

### ***Критерии статистической оценки гипотез***

Рассмотрим порядок статистической проверки правдоподобия гипотезы о принадлежности опытных данных к заданному виду вероятностного закона. Решение этой задачи производится в два этапа:

– по виду гистограммы (многоугольника) или, исходя из физической сущности рассматриваемого явления, делают предварительное суждение, т.е. выдвигается гипотеза о принадлежности опытных данных к конкретному вероятностному закону;

– применяя метод моментов, проверяют правдоподобие выдвинутой гипотезы.

Сущность метода моментов состоит в том, что параметры сглаживающего закона должны сохранить основные черты статистического распределения, т.е. чтобы было равенство математического ожидания и дисперсии статистического и сглаживающего распределений.

Проверка правдоподобия гипотезы о принадлежности опытных данных к заданному виду вероятностного закона может производиться с помощью критериев Пирсона, Колмогорова, Романовского, Фишера, Кохрена, Стьюдента и др.

#### ***1. Критерий $\chi^2$ Пирсона***

Критерий  $\chi^2$  Пирсона записывается в виде следующего альтернативного условия:

$$P_{\text{опытн}}(\chi^2, r) = \begin{cases} \geq \alpha - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону не отвергается;} \\ < \alpha - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону отвергается } (\alpha = 0,05). \end{cases}$$

$\chi^2$  вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i},$$

где  $r$  – число степеней свободы,  $r = k - s$ ;

$k$  – число интервалов гистограммы;

$s$  – число наложенных связей.

В число наложенных связей входят понятия

$$\sum_{i=1}^k P = 1; \quad \bar{x} = M[x]; \quad D[x] = \frac{n}{n-1} D^*[x].$$

Значения вероятностей  $P_{\text{опытн}}(\chi^2, r)$ , вычисленные в зависимости от числа степеней свободы  $r$  и опытного значения  $\chi^2$ , приведены в табл. П 1.2.

### 2. Критерий Романовского

$$K_p = \frac{\chi^2 - K}{\sqrt{2K}} = \begin{cases} \leq 3 - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону не отвергается;} \\ > 3 - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону отвергается,} \end{cases}$$

где  $\chi^2$  – критерий Пирсона;  $K$  – число интервалов.

### 3. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова записывается в виде альтернативного условия:

$$P(\lambda) = P\left\{ \max \left| F_{\text{опытн}}^*(x) - F_{\text{теор}(x)} \right| \sqrt{n} \right\} = \begin{cases} \geq P_d - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону не отвергается;} \\ < P_d - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных к рассматриваемому вероятностному закону отвергается,} \end{cases}$$

где  $n$  – объем выборки (число всех испытаний);

$F^*(x)_{\text{опытн}}$  – опытное значение функции распределения;

$F(x)_{\text{теор}}$  – теоретическое значение функции распределения;

$P_d$  – доверительная вероятность.

Для критерия Колмогорова имеется заранее составленная таблица (табл. П1.1).

### 3.6. Примеры обработки опытных данных вероятностными законами

#### 3.6.1. Обработка опытных данных показательным законом распределения

Математической моделью возникновения показательного (экспоненциального) закона являются такие условия, когда единичные повреждения приводят к внезапному отказу сложного изделия, например, перегорание лампочки, прокол шины, поломка коленчатого вала и пр.

Плотность вероятности показательного закона распределения такова:

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \quad \text{при } x > 0,$$

где  $x$  – случайная величина;

$\mu$  – параметр закона, представляющий интенсивность отказов;

$\bar{x} = 1/\mu$  – средний ресурс.

Рассмотрим на примере порядок сглаживания экспериментальных данных показательным законом применительно к теории надежности.

Статистическими наблюдениями установлено, что у автомобиля ГАЗ-53А лампочки указателей поворота перегорели на пробеге (тыс. км): 8,3; 18,4; 27,8; 47,1; 74; 19,7; 3; 11,8; 17,4; 14; 9,7; 34,1; 4; 31,9; 42; 7,3; 85,2; 39,6; 53; 57; 21,8; 58,4; 38,1.

Требуется:

1) установить закон, которому подчиняется исследуемое явление, и проверить правдоподобность сделанной гипотезы по критерию согласия Пирсона при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;

2) рассчитать и построить теоретическую кривую частот отказа лампочек;

3) рассчитать и построить кривые вероятности отказа и вероятности исправной работы лампочек.

Решение:

1. Определяем величину интервала вариационного ряда

$$\Delta h = \frac{R}{1 + 3,31 \lg n} = \frac{82}{1 + 3,31 \lg 23} = 15 \text{ (тыс. км)}.$$

2. Строим гистограмму распределения частот отказа лампочек (рис. 3.14.).

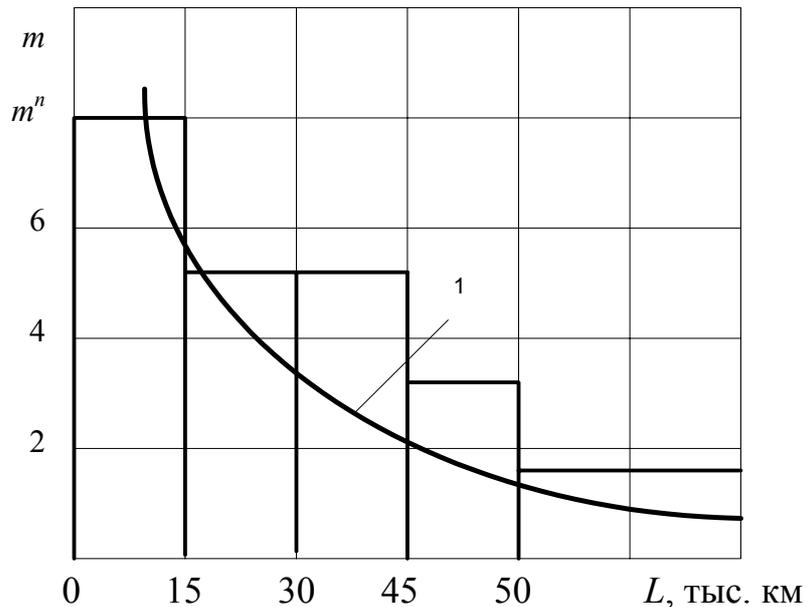


Рис. 3.14. Гистограмма распределения частот отказа

По характеру гистограммы распределения частот отказа лампочек предполагаем, что их отказ следует показательному закону.

3. Определяем средний ресурс лампочек

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 L_i m_i = \frac{1}{23} (8 \cdot 7,5 + 5 \cdot 22,5 + 5 \cdot 37,5 + 3 \cdot 52,5 + 1 \cdot 67,5 + 1 \cdot 82,5) = 29 \text{ (тыс. км)}.$$

4. Рассчитываем интенсивность отказа лампочек

$$\mu = \frac{1}{L} = \frac{1}{29} = 0,0345 \text{ (тыс. км}^{-1}\text{)}.$$

5. Вычисляем теоретические вероятности попадания в разряды:

$$P_{ikk}(L_i < L_{icc} < L_{i+1}) = e^{-\mu L_i} - e^{-\mu L_{i+1}};$$

$$P_{1yc}(0 < L_{1cp} < 15) = e^{-0,0345 \cdot 0} - e^{-0,0345 \cdot 15} = 0,404;$$

$$P_{2yc}(15 < L_{2cp} < 30) = e^{-0,0345 \cdot 15} - e^{-0,0345 \cdot 30} = 0,241;$$

$$P_{3yc}(30 < L_{3cp} < 45) = e^{-0,0345 \cdot 30} - e^{-0,0345 \cdot 45} = 0,143;$$

$$P_{4yc}(45 < L_{4cp} < 60) = e^{-0,0345 \cdot 45} - e^{-0,0345 \cdot 60} = 0,086;$$

$$P_{5yc}(60 < L_{5cp} < 75) = e^{-0,0345 \cdot 60} - e^{-0,0345 \cdot 75} = 0,051;$$

$$P_{6yc}(75 < L_{6cp} < 90) = e^{-0,0345 \cdot 75} - e^{-0,0345 \cdot 90} = 0,026.$$

6. Находим нормирующий множитель

$$C = 1/\sum P_{iyc} = 1/0,951 = 1,052.$$

7. Вычисляем исправленные вероятности  $P_i = P_{iyc}C$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= 0,404 \cdot 1,052 = 0,425; & P_2 &= 0,241 \cdot 1,052 = 0,254; \\ P_3 &= 0,143 \cdot 1,052 = 0,150; & P_4 &= 0,086 \cdot 1,052 = 0,090; \\ P_5 &= 0,051 \cdot 1,052 = 0,054; & P_6 &= 0,026 \cdot 1,052 = 0,027. \end{aligned}$$

8. Определяем теоретические частоты  $m_i = P_i n$ :

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,425 \cdot 23 = 9,775; & m_2 &= 0,254 \cdot 23 = 5,842; & m_3 &= 0,150 \cdot 23 = 3,450; \\ m_4 &= 0,090 \cdot 23 = 2,070; & m_5 &= 0,054 \cdot 23 = 1,242; & m_6 &= 0,027 \cdot 23 = 0,621. \end{aligned}$$

9. Вычисляем значение критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{набл}}^2 &= \sum_{i=1}^k \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} = \frac{(8 - 9,775)^2}{9,775} + \frac{(5 - 5,842)^2}{5,842} + \frac{(5 - 3,450)^2}{3,450} + \frac{(3 - 2,070)^2}{2,070} + \\ &+ \frac{(1 - 1,242)^2}{1,242} + \frac{(1 - 0,621)^2}{0,621} = 1,835. \end{aligned}$$

По табл. П1.2 находим критическое значение критерия  $\chi^2$  для  $\alpha = 0,05$  и  $S = 4$ :

$$\begin{aligned} \chi_{\text{кр}(\alpha; S)}^2 &= \chi_{\text{кр}(0,05;4)}^2 = 9,5; \\ S &= k - 2, \end{aligned}$$

где  $k$  – число столбцов гистограммы.

Если  $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$ , то гипотеза о принадлежности экспериментальных данных к показательному закону распределения принимается

$$\chi_{\text{кр}}^2 = 9,5; \chi_{\text{набл}}^2 = 1,835; 9,5 > 1,835.$$

Результаты расчета показательного закона распределения заносим в табл. 3.3.

10. На рис. 3.14 по данным строки 6 строим теоретический закон распределения отказа лампочек (кривая 1).

11. По данным строк 8 и 9 строим кривые вероятности отказа (кривая 1) и вероятности исправной работы лампочек (кривая 2, рис. 3.15).

Таблица 3.3

№ строки	Параметр	Номер разряда						Примечание
		1	2	3	4	5	6	
1	Границы разрядов, $\alpha_i - \alpha_{i+1}$	0 15	15 30	30 45	45 60	60 75	75 90	
2	Середины разрядов $\alpha_{i\text{ср}}$	7,5	22,5	37,5	52,5	67,5	82,5	
3	Опытные частоты, $m_i^*$	8	5	5	3	1	1	$\Sigma = 23$
4	Вероятность усеченного распределения $P_{i\text{yc}}$	0,404	0,241	0,143	0,086	0,051	0,026	$\Sigma = 0,95$
5	Исправленные вероятности $P_i = P_{i\text{yc}} C$	0,425	0,254	0,150	0,090	0,054	0,027	$\Sigma = 1,0$
6	Теоретические частоты $m_i = n P_i$	9,775	5,842	3,450	2,070	1,242	0,621	$\Sigma = 23$
7	Критерий согласия Пирсона $\frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}$	0,322	0,121	0,696	0,418	0,047	0,231	$\Sigma = 1,835$
8	Функция ненадежности $F(L)$	0,425	0,679	0,829	0,919	0,973	1,000	
9	Функция надежности $1 - F(L)$	0,575	0,321	0,171	0,081	0,027	0,000	

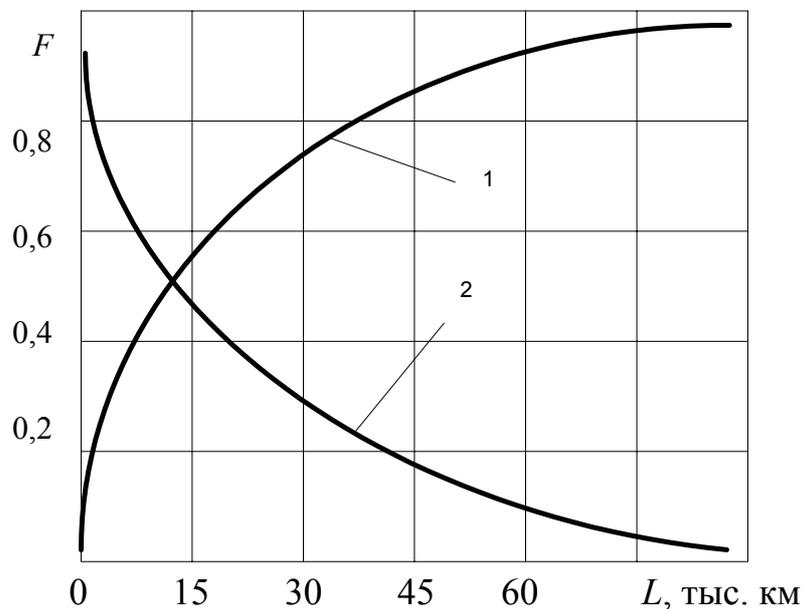


Рис. 3.15. График распределения отказов и исправной работы лампочек

Программа обработки опытных данных показательным законом приведена в прил. 4

### 3.6.2. *Обработка опытных данных нормальным законом распределения*

Математической моделью возникновения нормального закона распределения служит действие большого количества различных независимых факторов или слабо зависимых источников.

Применительно к математической теории надежности закон хорошо описывает постепенные отказы, вызываемые выходом из строя их отдельных элементов.

Плотность вероятности нормального закона распределения следующая:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где  $x$  – случайная величина;  $\bar{x}$  – среднее значение рассматриваемой случайной величины;  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение, характеризующее разброс случайной величины относительно ее среднего значения. Рассмотрим на примере порядок сглаживания экспериментальных данных нормальным законом распределения применительно к исследованию технического состояния автомобилей.

У 79 автомобилей ГАЗ-24Т измерен люфт рулевого управления:  
9; 18; 7; 12; 14; 6; 10; 9; 16; 6; 14; 7; 14; 6; 11; 12; 13; 7; 7; 18;  
18; 8; 10; 6; 10; 8; 9; 10; 10; 9; 8; 9; 16; 9; 11; 12; 14; 14; 15; 26;  
9; 17; 9; 11; 9; 10; 8; 18; 16; 15; 8; 10; 17; 16; 16; 12; 19; 12; 14; 20;  
19; 16; 12; 12; 11; 14; 14; 14; 17; 7; 4; 5; 6; 5; 5; 4; 7; 6; 6 град.

Требуется:

- 1) установить закон, которому подчиняется распределение люфта рулевого управления автомобиля ГАЗ-24Т, и проверить правдоподобность сделанной гипотезы по критерию согласия Пирсона при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и по критерию согласия Романовского;
- 2) построить графики опытной и теоретической интегральных функций.

Решение:

1. Определяем величину интервала вариационного ряда

$$\Delta h = \frac{R}{1 + 3,31 \lg n} = \frac{22}{1 + 3,31 \lg 79} = 3,04 \approx 3 \text{ (град)}.$$

2. Строим гистограмму распределения люфта рулевого управления автомобиля ГАЗ-24Т (рис. 3.16).

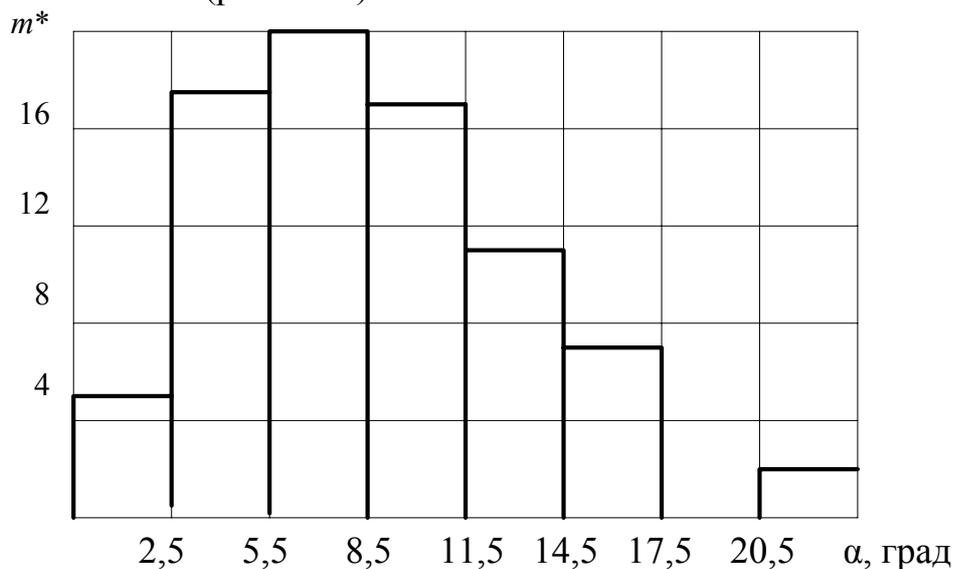


Рис. 3.16. Гистограмма распределения признака

Люфт рулевого управления, равный 26 град, резко отличается от остальных экспериментальных данных. Проверим принадлежность его к данной выборке по правилу трех средних квадратичных отклонений.

3. Вычисляем среднее арифметическое значение люфта рулевого управления:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \alpha_i m_i = \frac{1}{78} (5 \cdot 4 + 18 \cdot 7 + 20 \cdot 10 + 17 \cdot 13 + 11 \cdot 16 + 7 \cdot 19) = 11,23 \text{ (град)}.$$

4. Вычисляем дисперсию:

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i a_i^2 - \bar{a}^2 = \frac{1}{78} (5 \cdot 4^2 + 18 \cdot 7^2 + 20 \cdot 10^2 + 17 \cdot 13^2 + 11 \cdot 16^2 + 7 \cdot 19^2) - 11,23^2 = 17,18.$$

4.1. Среднее квадратичное отклонение люфта рулевого управления

$$\sigma(a) = \sqrt{17,18} = 4,14.$$

5. Определяем границы допустимого разброса люфта рулевого управления относительно его среднего значения:

$$11,23 \pm 3 \cdot 4,17 = [1,28; 23,74].$$

Следовательно, люфт рулевого управления  $\alpha = 26$  является аномальным и должен быть исключен из дальнейшего анализа.

6. Исключив anomальное значение люфта рулевого управления из выборки, определяем величину интервала вариационного ряда:

$$\Delta h = \frac{R}{1 + 3,3 \lg n} = \frac{16}{1 + 3,3 \lg 78} = 2,2 \approx 2 \text{ (град)}.$$

7. Строим повторно гистограмму распределения люфта рулевого управления (рис. 3.17).

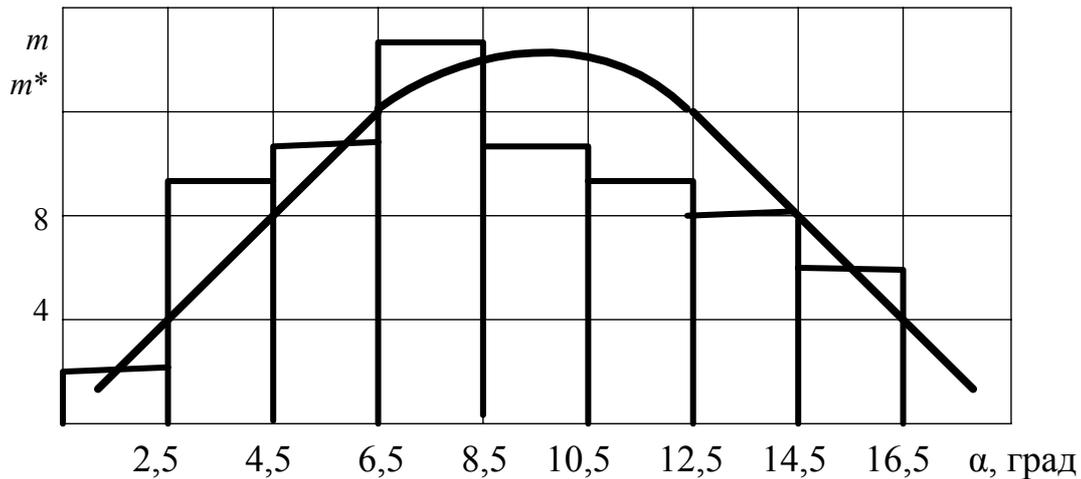


Рис. 3.17. Гистограмма распределения люфта рулевого управления

8. Рассчитываем опытные вероятности попадания в разряды:

$$P_i^* = \frac{m_i^*}{n}$$

$$\begin{aligned} P_1^* &= 0,0256; & P_2^* &= 0,1282; & P_3^* &= 0,1410; \\ P_4^* &= 0,2051; & P_5^* &= 0,1410; & P_6^* &= 0,1282; \\ P_7^* &= 0,1026; & P_8^* &= 0,0897; & P_9^* &= 0,0385. \end{aligned}$$

9. Записываем формулу плотности вероятности нормального закона распределения, подставляя в нее значения  $\bar{\alpha}$  и  $\sigma(\alpha)$ :

$$f(\alpha) = 0,0957 e^{-0,0288(\alpha - 11,23)^2}$$

10. Рассчитываем значения функции  $f(\alpha)$  для середин разрядов гистограммы:

$$f(3,5) = 0,0957 e^{-0,0288(3,5 - 11,23)^2} = 0,0171;$$

$$f(5,5) = 0,0957 e^{-0,0288(5,5 - 11,23)^2} = 0,0372;$$

$$f(7,5) = 0,0957 e^{-0,0288(7,5 - 11,23)^2} = 0,0641;$$

$$\begin{aligned}
f(9,5) &= 0,0957e^{-0,0288(9,5-11,23)^2} = 0,0878; \\
f(11,5) &= 0,0957e^{-0,0288(11,5-11,23)^2} = 0,0955; \\
f(13,5) &= 0,0957e^{-0,0288(13,5-11,23)^2} = 0,0825; \\
f(15,5) &= 0,0957e^{-0,0288(15,5-11,23)^2} = 0,0566; \\
f(17,5) &= 0,0957e^{-0,0288(17,5-11,23)^2} = 0,0308; \\
f(19,5) &= 0,0957e^{-0,0288(19,5-11,23)^2} = 0,0133.
\end{aligned}$$

11. Определяем нормирующий множитель:

$$C = \frac{1}{\sum f(\alpha)} = \frac{1}{0,4849} = 2,0623.$$

12. Рассчитываем теоретические вероятности попадания в разряды  $Pf(\alpha)C$ :

$$\begin{aligned}
P_1 = f_1(3,5)C &= 0,035; & P_2 = f_2(5,5)C &= 0,077; \\
P_3 = f_3(7,5)C &= 0,132; & P_4 = f_4(9,5)C &= 0,181; \\
P_5 = f_5(11,5)C &= 0,197; & P_6 = f_6(13,5)C &= 0,170; \\
P_7 = f_7(15,5)C &= 0,117; & P_8 = f_8(17,5)C &= 0,064.
\end{aligned}$$

13. Рассчитываем теоретические частоты попадания в разряды  $m_i = P_i n$ :

$$\begin{aligned}
m_1 &= 0,035 \cdot 78 = 2,75; & m_2 &= 0,077 \cdot 78 = 5,98; & m_3 &= 0,132 \cdot 78 = 10,31; \\
m_4 &= 0,181 \cdot 78 = 14,13; & m_5 &= 0,197 \cdot 78 = 15,36; & m_6 &= 0,170 \cdot 78 = 13,27; \\
m_7 &= 0,117 \cdot 78 = 9,10; & m_8 &= 0,064 \cdot 78 = 4,95; & m_9 &= 0,027 \cdot 78 = 2,14.
\end{aligned}$$

14. Вычисляем значения критерия  $\chi^2$  Пирсона:

$$\begin{aligned}
\chi^2_{\text{набл}} &= \sum_{i=1}^9 \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} = \frac{(2 - 2,75)^2}{2,75} + \frac{(10 - 5,98)^2}{5,98} + \frac{(11 - 10,3)^2}{10,3} + \frac{(16 - 14,18)^2}{14,18} + \\
&+ \frac{(11 - 15,36)^2}{15,36} + \frac{(10 - 13,27)^2}{13,27} + \frac{(8 - 9,11)^2}{9,11} + \frac{(6 - 4,95)^2}{4,05} + \frac{(3 - 2,14)^2}{2,14} = 5,96
\end{aligned}$$

По табл. П1.2 находим критическое значение критерия  $\chi^2$  для  $\alpha = 0,05$  и  $S = 6$ :

$$\chi^2_{\text{кр}(\alpha; S)} = \chi^2_{\text{кр}(0,05;6)} = 12,6,$$

где  $S = k - 3$ ;  $k$  – число столбцов гистограммы.

Если  $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ , то гипотеза о принадлежности экспериментальных данных к нормальному закону распределения принимается, в противном случае – отклоняется.

15. Проверяем гипотезу о принадлежности экспериментальных данных к нормальному закону распределения по критерию согласия Романовского.

$$\text{Если } \frac{\chi_{\text{набл}}^2 - S}{\sqrt{2S}} < 3, \text{ то гипотеза принимается,}$$

$S = k - 3$ ,  $k$  – число столбцов гистограммы.

$$\frac{5,96 - 6}{\sqrt{2 \cdot 6}} = -0,0144 < 3.$$

Гипотеза о принадлежности экспериментальных данных к нормальному закону распределения по критерию Романовского принимается.

Результаты расчета нормального закона распределения заносим в табл. 3.4.

16. По данным строк 9 и 10 табл. 3.4 строим графики опытной (1) и теоретической (2) интегральных функций (рис. 3.18).

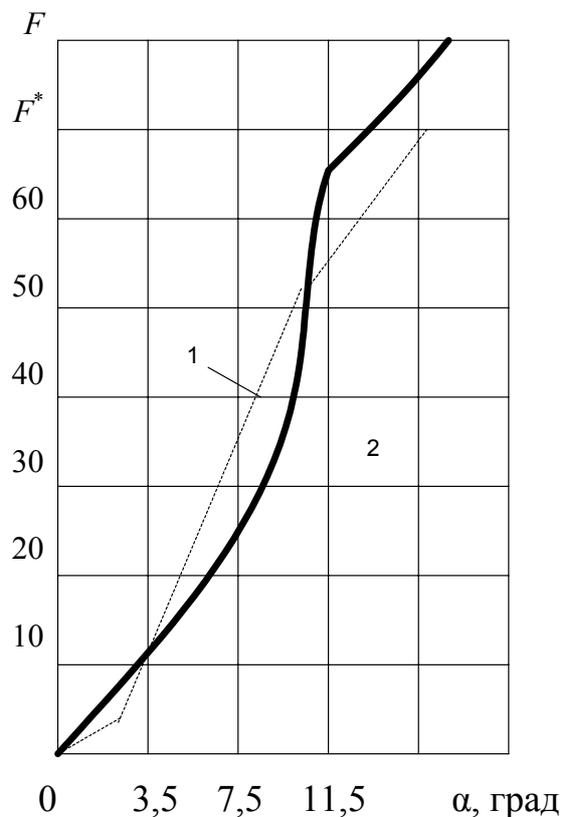


Рис. 3.18. Графики интегральных функций

Таблица 3.4

Номер строки	Параметр	Номер разряда									Примечание
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	Границы разрядов $\alpha_i - \alpha_k$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5	18,5	
		4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	
2	Средины разрядов $\alpha_{\text{ср}}$	3,5	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5	
3	Опытные частоты $m_i^*$	2	10	11	16	11	10	8	7	3	78
4	Опытные вероятности $P_i^* = \frac{m_i}{n}$	0,0256	0,1282	0,1410	0,2051	0,1410	0,1282	0,1026	0,0897	0,0385	0,9999
5	Значение функции $f(a)$	0,0171	0,0372	0,0641	0,0878	0,0955	0,0825	0,0566	0,0308	0,0133	0,4849
6	Теоретические вероятности $P_i = f(\alpha)C$	0,035	0,077	0,132	0,181	0,197	0,170	0,117	0,064	0,027	1,000
7	Теоретические частоты $m_i = nP_i$	2,75	5,98	10,31	14,13	15,36	13,27	9,10	4,95	2,14	77,98
8	Квадраты отклонений $\frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}$	0,28	1,62	0,04	0,22	1,73	1,07	0,15	0,60	0,25	5,96
9	Накопленные опытные частоты $F^*(\alpha) = \sum m_i^*$	2	12	23	39	50	60	68	75	78	
10	Накопленные теоретические частоты $F(a) = \sum m_i$	2,75	8,73	19,04	33,17	48,53	61,80	70,90	75,85	77,99	

### 3.6.3. Обработка опытных данных по закону Вейбулла

Порядок проверки гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла рассмотрим на примере.

Пример. Исследуется закон распределения длины пробега ножного тормоза автомобилей МАЗ-500 до его отказа. Статистическими наблюдениями было зафиксировано 29 результатов, которые представлены интервальным вариационным рядом:

Номер интервала, $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Границы интервала $\alpha_i - \beta_i$ , тыс. км.	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110	110 – 120
Число отказов $m_i^*$ в интервале	9	14	18	7	9	9	4	4	2	1	1	1

Требуется:

- 1) установить закон, которому следует рассматриваемое явление и проверить правдоподобность принятой гипотезы при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ;
- 2) построить кривую вероятности выхода изделия из строя и кривую вероятности исправной работы (кривую ресурса).

Решение.

1. Вычисляем опытные относительные частоты выхода изделия из строя по интервалам наработки  $W_i = m_i^* / n$ :

$$W_1 = 9/79 = 0,114; W_2 = 14/79 = 0,177 \text{ и т.д.}$$

Результаты счета заносим в табл. 3.5 по данным строки 4 и строим гистограмму распределения признака (рис. 3.19).

Рассматриваем гистограмму и делаем предположение, т.е. выдвигаем гипотезу, что изучаемое явление – длина пробега ножного тормоза на автомобилях МАЗ-500 до его отказа – распределена по закону Вейбулла:

$$f(L) = n\mu^n L^{n-1} e^{-(\mu L)^n},$$

где  $n$  и  $\mu$  – соответственно параметр формы и параметр масштаба.

2. Вычисляем статистическое математическое ожидание пробега изделия:

$$M[L] = \sum_{i=1}^k \frac{L_i m_i^*}{n} = \frac{5 \cdot 9 + 15 \cdot 14 + \dots + 115 \cdot 1}{79} = 36,6 \text{ (тыс. км).}$$

Таблица 3.5

Статистическая таблица длины пробега ножного тормоза автомобилей МАЗ-500 до его выхода из строя

Номер п/п	Показатель	Номер интервала											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Границы интервала $\alpha_i - \beta_i$ , тыс. км	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110	110 – 120
2	Середины интервалов, $L_i$	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
3	Опытные частоты $m_i^*$	9	14	18	7	9	9	4	4	2	1	1	1
4	Опытные частоты $W$	0,144	0,172	0,228	0,089	0,114	0,014	0,050	0,050	0,025	0,013	0,013	0,013
5	Теоретические вероятности $P(L_i)$	0,140	0,179	0,167	0,144	0,117	0,085	0,058	0,040	0,028	0,020	0,012	0,01
6	Теоретические частоты $m_i$	11	14	13	11,3	9,2	6,8	4,5	3,2	2,2	1,6	1,0	1,0
7	Слагаемые критерия Пирсона $\chi^2(L_i)$	0,363	0	1,192	1,63	0,04	0,74	0,055	0,20	0,018	0,22	0	0
8	Теоретическая функция распределения $F(L_i)$	0,140	0,319	0,486	0,630	0,747	0,832	0,890	0,930	0,958	0,978	0,99	1,0
9	Вероятность исправной работы $R(L_i)$	0,860	0,681	0,514	0,370	0,253	0,168	0,110	0,070	0,042	0,022	0,01	0

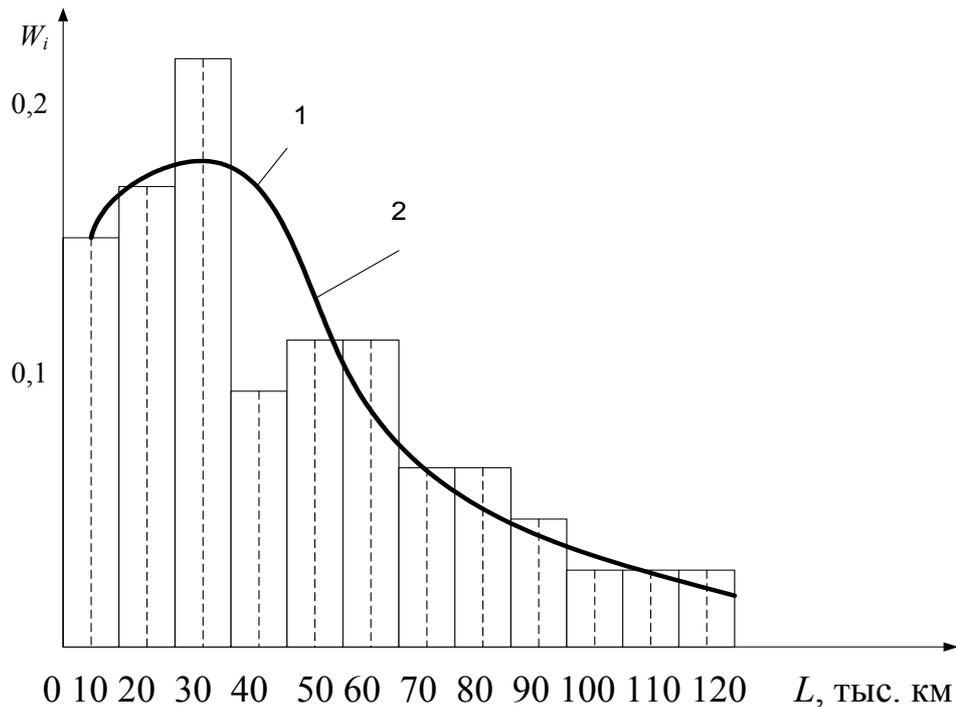


Рис. 3.19. Гистограмма распределения длины пробега ножного тормоза автомобилей МАЗ-500: 1 – до его выхода из строя; 2 – сглаживающая кривая закона Вейбулла

3. Вычисляем статистическую дисперсию:

$$D^*[L] = \sum_{i=1}^k \frac{L_i^2 m_i^*}{n} - (M[L])^2 = \frac{5^2 \cdot 9 + 15^2 \cdot 14 + \dots + 115^2 \cdot 1}{79} - 36,6^2 = 576.$$

4. Находим несмещенное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma[L] = \sqrt{\frac{n}{n-1} D^*[L]} = \sqrt{\frac{79}{78} 576} \cong 24,1.$$

5. Находим коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma[L]}{M[L]} = \frac{24,1}{36,6} = 0,660.$$

6. В табл. П1.4 для найденного коэффициента  $V = 0,660$  находим значение первого параметра закона (параметр формы, равный  $n \approx 1,5$ ).

7. Находим второй параметр закона (параметр масштаба) по формуле

$$\mu = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{M[L]} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1,5}\right)}{36,6} \cong 0,025.$$

Для вычисления значения гамма-функции Эйлера использованы данные табл. П1.3.

Значение обратного параметра масштаба

$$\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,025} = 40.$$

8. Вычисляем теоретические вероятности попадания случайной величины в интервалы по формуле

$$P(\alpha_i < L_i < \beta_i) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\left(\frac{L}{a}\right)^n} d\left[\left(\frac{L}{a}\right)^n\right] = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{a}\right)^n} - e^{-\left(\frac{\beta_i}{a}\right)^n},$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – соответственно ближний и дальний пределы интегрирования;  $P(L_1) = 0,14$ ;  $P(L_2) = 0,179$  и т.д. (см. строку 5 табл. 3.5).

На основе данных строки 5 наносим на гистограмму сглаживающую ее теоретическую кривую закона Вейбулла (см. рис. 3.19).

9. Вычисляем теоретические частоты:

$$m_1 = P(L_1)n = 0,14 \cdot 79 = 11;$$

$$m_2 = P(L_2)n = 0,179 \cdot 79 = 14,03$$

и т.д. (см. строку 6 табл. 3.5).

10. Вычисляем слагаемые критерия Пирсона:

$$\frac{(m_1^* - m_1)^2}{m_1} = \frac{(9 - 11)^2}{11} = 0,363; \quad \frac{(m_2^* - m_2)^2}{m_2} = \frac{(14 - 14)^2}{14} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Суммируя слагаемые критерия Пирсона, получаем:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i} = 0,363 + 0 + \dots + 0,22 = 5,2.$$

Проверяем правдоподобность принятой гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла.

*По критерию Пирсона*

$$P_{\text{оп}}(\chi^2, r_k) = P_{\text{оп}}(5,2; 9) = 0,8 > 0,05.$$

Следовательно, по критерию Пирсона при уровне значимости = 0,05 гипотеза о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла не отвергается.

*По критерию Романовского*

$$K_p = \frac{\chi^2 - K}{\sqrt{2K}} = \frac{5,2 - 12}{\sqrt{2 \cdot 12}} = -1,42 < 3.$$

Как видим, по критерию Романовского гипотеза о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла не отвергается.

12. Для построения кривой вероятностей отказа изделия  $F(L)$  и противоположной ей кривой (кривой ресурса  $R(L)$ ) воспользуемся формулами:

$$F(L_i) = \sum_1^i P(L_i),$$

$F(L_1) = 0,140$ ;  $F(L_2) = 0,140 + 0,179 = 0,319$  и т.д. (см. строку 8 табл. 3.5);

$$R(L_i) = 1 - F(L_i),$$

$R(L_1) = 1 - 0,140 = 0,86$ ;  $R(L_2) = 1 - 0,319 = 0,681$  (см. строку 9 табл. 3.5).

По данным строк 8 и 9 табл. 3.5 строим графики  $F(L)$  и  $R(L)$  (рис. 3.20).

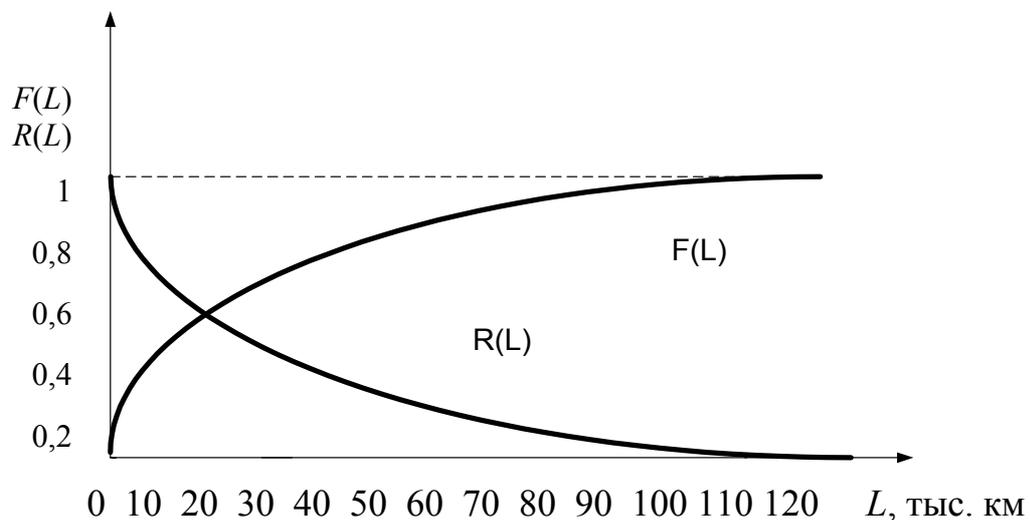


Рис. 3.20. График вероятностей отказа изделия  $F(L)$  и кривой ресурса  $R(L)$

### 3.7. Использование программных средств в расчетах

Один из упрощенных вариантов программных средств обработки опытных данных показательным законом распределения приведен в прил. 4.

В настоящее время при обработке опытных данных широко используются программные средства системы STATISTICA [3].

STATISTICA является интегрированной системой комплексного статистического анализа и обработки данных в среде WINDOWS и занимает лидирующее положение на рынке статистического программного обеспечения.

Система STATISTICA соединяет в себе статистические методы обработки данных с новейшими компьютерными технологиями, открывает несравненно большие возможности для численного и углубленного статистического анализа данных.

Большим достоинством системы является наличие встроенного языка STATISTICA BASIC, который имеет собственную библиотеку, где находится большое число различных функций распределения, плотности различных законов: биномиального, Пуассона, Релея, нормального,  $\chi^2$ , Вейбулла, Стьюдента и др. законов.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определения дискретной и непрерывной случайной величины.
2. Перечислите основные характеристики случайных величин.
3. Особенности биномиального закона распределения.
4. Особенности закона Пуассона.
5. Особенности нормального закона распределения.
6. Особенности закона равномерной плотности.
7. Особенности показательного закона распределения.
8. Особенности закона Вейбулла.
9. Дайте определения генеральной и выборочной совокупности.
10. Основные характеристики выборочной совокупности и способы их вычисления.
11. Основные характеристики генеральной совокупности и способы их вычисления.
12. Дайте определение понятию «интервальный вариационный ряд».
13. Что такое гистограмма и с какой целью она строится?
14. Особенности критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона.
15. Особенности критерия согласия Романовского.
16. Особенности критерия согласия Колмогорова.
17. Последовательность обработки опытных данных показательным законом.
18. Последовательность обработки опытных данных нормальным законом.
19. Последовательность обработки опытных данных законом Вейбулла.

## Глава 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 4.1. Случайные процессы и их классификации

Случайным процессом  $X(t)$  называется процесс, значения которого при любом фиксированном  $t = t_0$  являются случайной величиной  $X(t_0)$ .

Случайная величина  $X(t_0)$ , в которую обращается случайный процесс при  $t = t_0$ , называется сечением случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента  $t$  (рис. 4.1).

Случайный процесс записывается в виде функции двух аргументов - времени  $t$  и элементарного события  $\omega$

$$X(t) = \varphi(t, \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad x(t) \in \Theta,$$

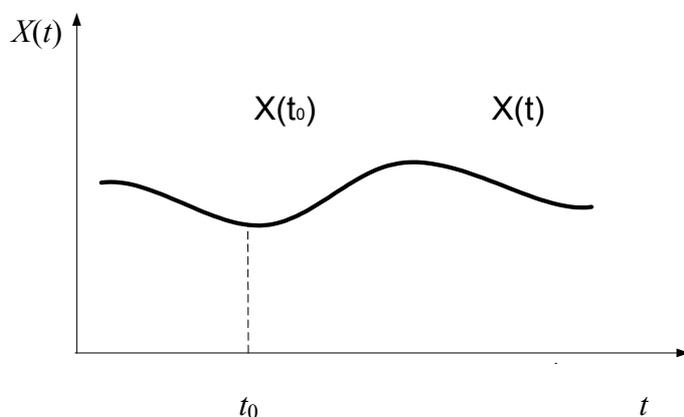


Рис. 4.1. График случайного процесса

где  $\omega$  – элементарное событие, появляющееся в результате опыта;

$\Omega$  – пространство элементарных событий;

$T$  – область (множество) значений аргумента  $t$  функции  $X(t)$ ;

$\Theta$  – множество возможных значений случайного процесса  $X(t)$ .

Предположим, что опыт, в ходе которого случайный процесс протекает, уже произведен, т. е. произошло элементарное событие  $\omega \in \Omega$ . Это означает, что случайный процесс уже не случаен и зависимость его от  $t$  приняла вполне определенный вид. Это уже обычная, неслучайная функция аргумента  $t$ . Мы будем её называть реализацией случайного процесса  $X(t)$  в данном опыте.

Реализацией случайного процесса  $X(t)$  называется неслучайная функция  $X(t)$ , в которую превращается случайный процесс  $X(t)$  в результате опыта (рис. 4.2).

Реализацию случайного процесса как функцию  $\varphi$  от аргумента  $t$ , изменяющейся в пределах множества  $T$ , при фиксированном элементарном событии  $\omega = \omega_0$ , записывают так:

$$X(t) = \varphi(t, \omega_0) \quad (t \in T),$$

$$(x(t) \in \Theta).$$

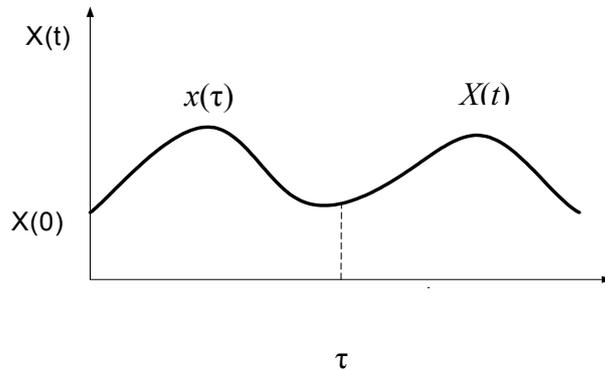


Рис. 4.2. График реализации случайного процесса

Пример. Записывая с помощью прибора напряжение  $U$  питания ЭВМ в зависимости от времени  $t$  на участке  $(0, \tau)$ , получим реализацию  $u(t)$  случайного процесса  $U(t)$ , где  $u_0$  — номинальное напряжение питания (рис. 4.3).

Если проведен не один опыт, а несколько, в результате каждого из которых наблюдается какая-то реализация случайного процесса  $x_i(t)$  ( $i$  — номер опыта), то получим несколько различных реализаций случайного процесса:  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  или семейство реализаций.

Семейство реализаций случайного процесса — основной экспериментальный материал, на основе которого можно получить характеристики случайного процесса (рис. 4.4).

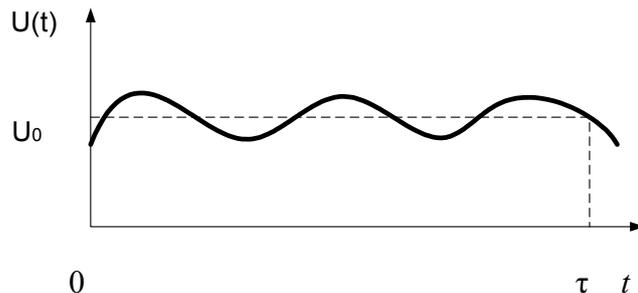


Рис. 4.3. График реализации случайного процесса

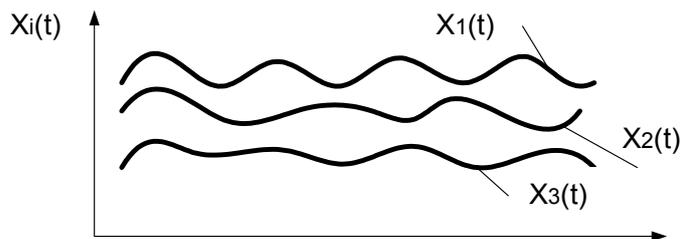


Рис. 4.4. График семейства реализаций случайного процесса

Случайные процессы классифицируются «по времени» и «по состояниям» системы.

Случайный процесс  $X(t)$  называется процессом с дискретным временем, если система, в которой он протекает, может менять свое состояние только в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , число которых конечно.

Случайный процесс  $X(t)$  называется процессом с непрерывным временем, если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить в любой момент времени  $t$  наблюдаемого периода  $\tau$ .

Случайный процесс  $X(t)$  называется процессом с непрерывным состоянием, если его течение в любой момент  $t$  представляет собой непрерывную случайную величину и множество её значений  $\Theta$  несчетно.

Случайный процесс  $X(t)$  называется процессом с дискретным состоянием, если в любой момент времени  $t$  множество его состояний  $\Theta$  конечно или счётно.

#### 4.1.1. Основные характеристики случайных процессов

Основными характеристиками случайных процессов являются: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, начальный и центральные моменты разных порядков и т.д.

Математическим ожиданием случайного процесса  $X(t)$  называется неслучайная функция  $m_x(t)$ , которая при любом значении аргумента  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса

$$m_x(t) = M[x(t)],$$

где  $m_x(t)$  – средняя функция.

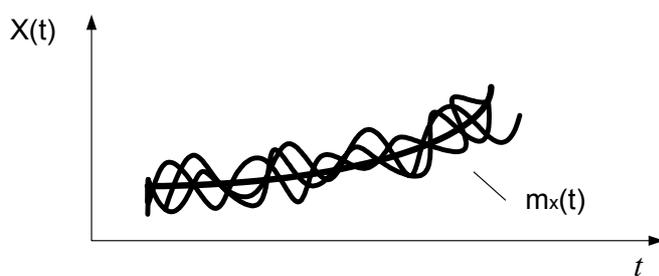


Рис. 4.5. График случайного процесса

Пример. Если сечение случайного процесса  $X(t)$  при данном  $t$  представляет дискретную случайную величину с рядом распределения  $X(t)$  (рис. 4.5)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	...	$x_i(t)$	...
$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	...	$p_i(t)$	...

то его математическое ожидание вычисляется по формуле

$$m_x(t) = M[X(t)] = \sum_i x_i(t) p_i(t),$$

где  $x_1(t), x_2(t)$  и т.д. – первое, второе и т.д. значения, которые может принимать случайная величина;  $X(t)$  – сечение случайного процесса при данном  $t$ ;  $p_1(t), p_2(t)$  и т. д. – соответствующие вероятности.

Если сечение случайного процесса  $X(t)$  при данном  $t$  представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью  $f(t, x)$ , то его математическое ожидание может быть вычислено по формуле

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t, x)dx.$$

Центрированным случайным процессом  $\overset{0}{X}(t)$  называется процесс, который получается, если из случайного процесса  $X(t)$  вычесть его математическое ожидание

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Начальным моментом  $k$ -го порядка случайного процесса  $X(t)$  называется математическое ожидание  $k$ -ой степени соответствующего сечения случайного процесса

$$\alpha_k(t) = M[(X(t))^k].$$

Центральный момент  $k$ -го порядка – математическое ожидание  $k$ -ой степени центрированного случайного процесса

$$\mu_k(t) = M[(X(t) - m_x(t))^k].$$

Дисперсия случайного процесса

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[X^2(t)] - m_x^2(t).$$

Дисперсией случайного процесса  $X(t)$  называется неслучайная функция  $D_x(t)$ , которая при любом значении аргумента  $t$  равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса  $X(t)$ .

Если сечение  $X(t)$  представляет собой дискретную случайную величину с рядом распределения  $X(t)$

$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...
$p_1(t)$	$p_2(t)$	...	$p_i(t)$	...

то дисперсия случайного процесса находится по формуле

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum (x_i - m_x(t))^2 p_i(t),$$

где  $i$  – номер возможного значения случайной величины  $X(t)$  при данном  $t$ ;  $p_i(t)$  – вероятность этого значения.

Если сечение  $X(t)$  представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью  $f(t, x)$ , то дисперсия случайного процесса может быть вычислена по формуле

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(t, x) dx.$$

Средним квадратическим отклонением  $\sigma_x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии  $D_x(t)$

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)}.$$

Степень зависимости (связи) между двумя случайными величинами  $X$  и  $Y$  определяется их ковариацией

$$K_{xy} = M[XY] - m_x m_y.$$

Аналогичная характеристика вводится и для случайного процесса.

Рассмотрим две случайных величины – два сечения случайного процесса для моментов  $t$  и  $t'$  (рис. 4.6.):  $X(t)$  и  $X(t')$ . Для этих двух случайных величин можно найти ковариацию (обозначим её  $K_x(t, t')$ ):

$$K_x(t, t') = M[X(t) X(t')] - m_x(t) m_x(t').$$

Последняя функция называется корреляционной функцией случайного процесса.

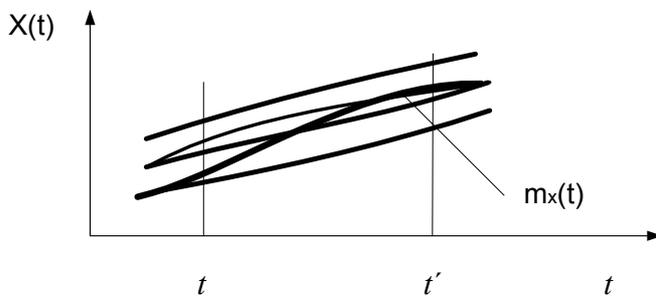


Рис. 4.6. График случайного процесса

Итак, корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$  – неслучайная функция  $K_x(t, t')$  двух аргументов  $t$  и  $t'$ , которая при каждой паре значений аргументов  $t$  и  $t'$  равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса:  $X(t)$  и  $X(t')$ . На рис. 4.7 показан вид поверхности, изображающей корреляционную функцию  $K_x(t, t')$ . Поверхность  $K_x(t, t')$  симметрична относительно вертикальной плоскости  $H$ , проходящей через биссектрису координатного угла  $t0t'$ .

Линия пересечения плоскости  $H$  с поверхностью  $K_x(t, t')$  дает аппликуату, равную дисперсии случайного процесса  $X(t)$

$$D_x(t) = K_x(t, t').$$

Нормированной корреляционной функцией  $r_x(t, t')$  случайного процесса  $X(t)$  называется функция, полученная делением корреляционной функции  $K_x(t, t')$  на произведение средних квадратических отклонений  $\sigma_x(t), \sigma_x(t')$ :

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')}.$$

Нормированная корреляционная функция по модулю не превосходит единицу:

$$|r_x(t, t')| \leq 1.$$

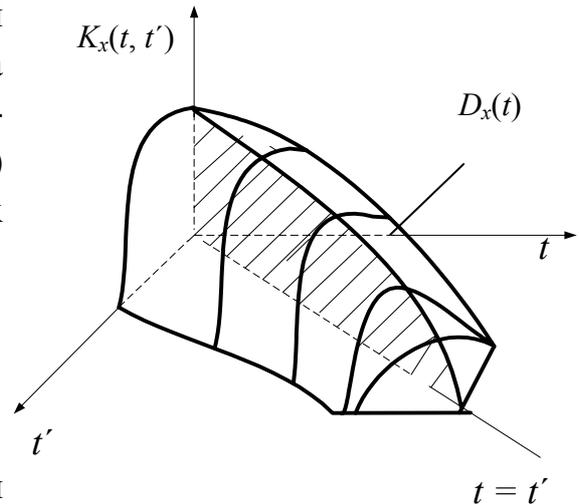


Рис. 4.7. График корреляционной функции

#### 4.1.2. Законы распределения случайных процессов

Для различных типов случайных процессов разработаны различные методы их изучения и описания.

В ряде задач случайные процессы бывает удобно выражать через простейшие (элементарные) случайные функции.

Элементарной случайной функцией (ЭСФ) называют такую функцию аргумента  $t$ , где зависимость от  $t$  представлена обычной, неслучайной функцией, в которую в качестве параметров входят одна или несколько обычных, не зависящих от  $t$  случайных величин.

Пример 1. ЭСФ имеет вид  $Y(t) = X e^{-t}$  ( $t > 0$ ), где  $X$  – непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале  $(-1, 1)$ .

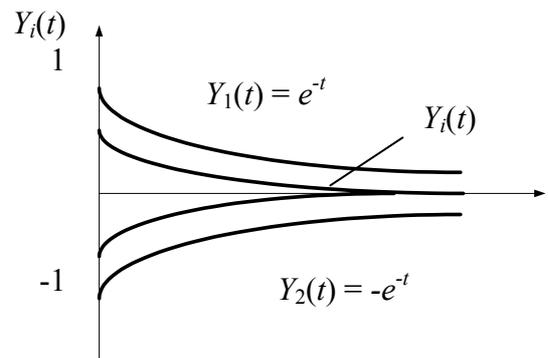


Рис. 4.8. График семейства ЭСФ  $y(t) = x e^{-t}$

Семейство реализации ЭСФ  $Y(t)$  показано на рис. 4.8. Каждая из них представляет собой показательную кривую с ординатами, пропорциональными ординатам кривой  $e^{-t}$  (жирная линия); отдельные реализации (тонкие линии) различаются между собой масштабом по оси ординат. Когда слу-

чаянная величина  $X$  принимает отрицательное значение, соответствующая реализация лежит ниже оси абсцисс.

Пример 2. ЭСФ имеет вид  $Y(t) = e^{-tx}$  ( $t > 0$ ), где  $x$  – случайная величина, принимающая только положительные значения;  $Y_i(t)$  –  $i$ -я реализация, представляющая собой показательную кривую, проходящую через точку с координатами  $(0, 1)$ , различаются они между собой скоростью стремления к нулю или  $t \rightarrow \infty$  (рис. 4.9).

Пример 3. ЭСФ имеет вид  $Y(t) = at + X$ , где  $X$  – случайные величины,  $a$  – неслучайная величина.

Каждая реализация (рис. 4.10) представляет собой прямую с угловым коэффициентом  $a$ , параллельную прямой  $y = at$ , различаются реализации начальными ординатами.

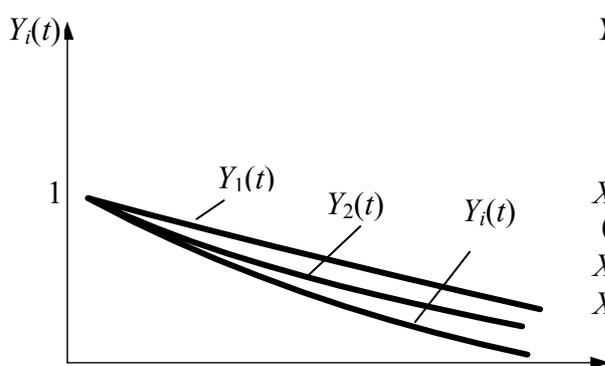


Рис. 4.9. График семейства ЭСФ  $y(t) = e^{-tx}$

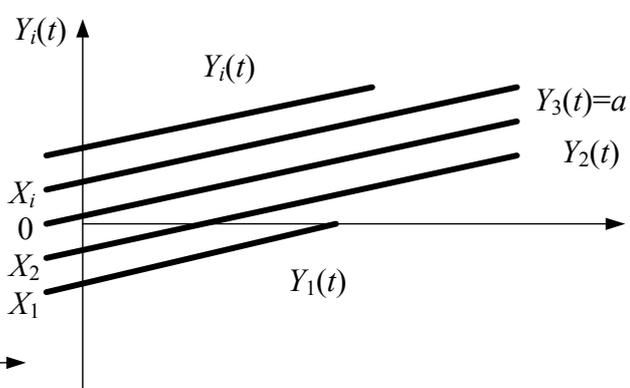


Рис. 4.10. График семейства ЭСФ  $y(t) = at + x$

Пример 4.  $Y(t) = Xt + a$ , где  $X$  – случайная величина;  $a$  – неслучайная величина.

Каждая из реализаций – прямая линия, проходящая через точку  $(0, a)$  (рис. 4.11). Реализации различаются угловыми коэффициентами.

Пример 5. ЭСФ имеет вид  $Y(t) = X \cos(at)$ , где  $X$  – случайная величина,  $a$  – неслучайная величина.

Семейство реализаций показано на рис. 4.12; каждая из них – косинусоида, ординаты которой умножены на тот или другой случайный коэффициент. Реализации различаются между собой амплитудой, т.е. масштабом по оси ординат.

Известно, что универсальной исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является её функция распределения  $F(x) = P\{X < x\}$ ,

т.е. вероятность того, что случайная величина  $X$  принимает значение, меньше заданного  $x$ .

Пусть имеем случайный процесс  $X(t)$ . Любое сечение случайного процесса  $X(t)$  представляет собой случайную величину, которая имеет закон распределения

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}.$$

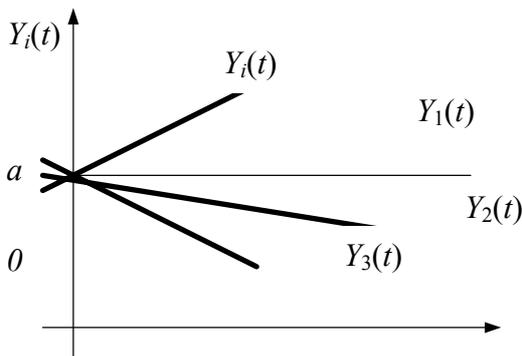


Рис. 4.11. График семейства ЭСФ  $y(t) = xt + a$

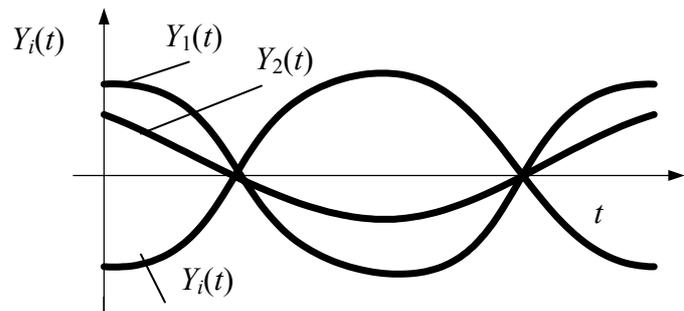


Рис. 4.12. График семейства ЭСФ  $y(t) = x \cdot \cos(at)$

Эта функция зависит от двух аргументов: во-первых, от значения  $t$ , для которого берется сечение; во-вторых, от значения  $x$ , меньше которого должна быть случайная величина  $X(t)$ . Она называется одномерным законом распределения случайного процесса  $X(t)$ . Очевидно, одномерный закон распределения не может служить полной исчерпывающей характеристикой случайного процесса  $X(t)$ .

Более полной (но все еще не исчерпывающей) характеристикой будет двумерный закон распределения, представленный совместной функцией распределения двух сечений случайного процесса, взятых соответственно для моментов  $t_1$  и  $t_2$ :

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}.$$

Эта функция уже не двух, а четырех аргументов. Очевидно, теоретически можно неограниченно увеличивать число значений и получить при этом все более полную характеристику случайного процесса. Однако оперировать со столь громоздкими характеристиками, зависящими от многих аргументов, крайне неудобно. В инженерных приложениях обычно ограничиваются одномерным, иногда – двумерным законом распределения случайного процесса.

## 4.2. Поток событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток автомобилей, подъезжающих на заправочную станцию; поток заявок на ремонт, поступающих в ремонтную организацию; поток отказов (сбоев) ЭВМ в ходе её работы; поток забитых шайб при игре в хоккей и т.п.

Поток событий представляет собой в общем случае просто последовательность случайных точек  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  на оси времени  $Qt$  (рис. 4.13) с разделяющими их случайными интервалами  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n, \dots$ , так что

$$T_1 = Q_1 - Q_0, T_2 = Q_2 - Q_1, \dots, T_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

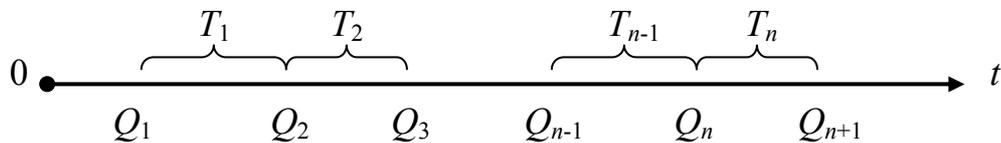


Рис. 4.13. График потока событий

Потоки событий различаются между собой по их внутренней структуре: по закону распределения интервалов  $T_1, T_2, \dots$ , между событиями, их взаимной зависимости или независимости и т.д.

Выделяют следующие виды потоков событий: регулярный; простейший (пуассоновский); Пальма; Эрланга и т.д.

### Свойства и классификация потоков событий

Поток событий, в котором интервалы между событиями строго одинаковые и равны определённой неслучайной величине  $\tau$  (рис. 4.14), называется регулярным.

Регулярный поток событий довольно редко встречается на практике; он представляет определенный интерес как предельный случай для других потоков.

Простейшим (пуассоновским) потоком называют поток событий, обладающий свойствами ординарности, без последдействия и стационарности.

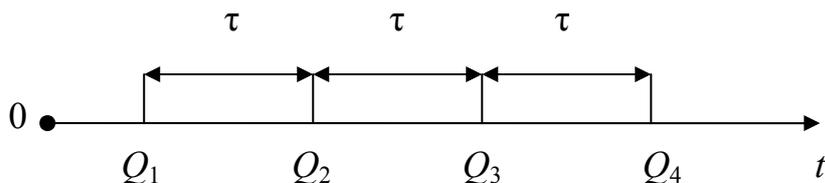


Рис. 4.14. График регулярного потока событий

Поток событий называется *ординарным*, если события в нем появляются поодиночке, а не по 2, 3, и т.д. В математической формулировке однородность потока означает, что вероятность попадания на участок  $\Delta t$  (рис. 4.15.) двух и более событий пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события.

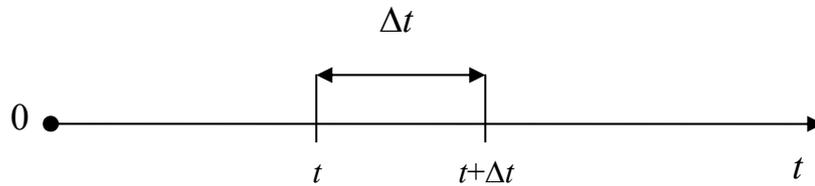


Рис. 4.15. График простейшего потока событий

Интенсивность (плотность) однородного потока событий в момент времени  $t$  определяется отношением

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[X(t, \Delta t)]}{\Delta t},$$

где  $M[X(t, \Delta t)]$  – математическое ожидание случайной величины  $X(t, \Delta t)$ ;  $X(t, \Delta t)$  – случайное число событий, попадавших на элементарный участок  $(t, t + \Delta t)$ .

Физический смысл интенсивности  $\lambda(t)$  потока событий – это среднее число событий, приходящихся на единицу времени для элементарного участка  $\Delta t$ , примыкающего к  $t$ .

Интенсивность потока событий  $\lambda(t)$  может быть любой неотрицательной функцией времени  $\lambda(t) \geq 0$  и имеет размерность [время<sup>-1</sup>].

Очевидно, что среднее число событий ординарного потока, приходящееся на интервал времени  $\tau$ , примыкающий к точке  $t$ :

$$M[X(t, \tau)] = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt.$$

В частности, при постоянной интенсивности потока

$$M[X(t, \tau)] = \int_t^{t+\tau} \lambda dt = \lambda \tau.$$

Поток событий называется потоком *без последействия*, если для любых неперекрывающихся участков времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  (рис. 4.16) число событий  $X_1 = X(t_1, \tau_1), X_2 = X(t_2, \tau_2), \dots, X_n = X(t_n, \tau_n)$ , попадавших на эти участки, представляет собой независимые случайные величины, т.е. веро-

ятность попадания любого числа событий на один из участков не зависит от того, сколько их попало на другие.

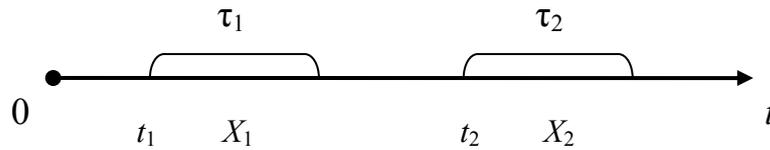


Рис. 4.16. График потока событий

Если поток *без последдействия* ординарен и имеет постоянную интенсивность  $\lambda$ , то число событий  $X(t, \tau)$ , попавших на участок времени длины  $\tau$ , имеет распределение Пуассона с параметром  $a = \lambda\tau$ :

$$P\{X(t, \tau) = k\} = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Поток событий называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики не меняются со временем. В частности, для стационарного потока событий вероятность попадания того или иного числа событий на участок длины  $\tau$  зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси времени  $Ot$  этот участок расположен (рис. 4.17). Отсюда следует, что для стационарного потока событий его интенсивность  $\lambda(t)$  постоянна:

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$$

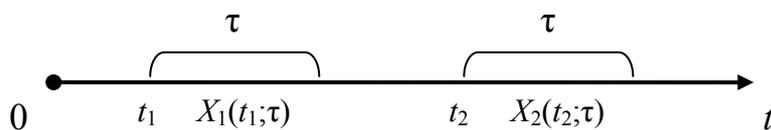


Рис. 4.17. График стационарного потока событий

Для простейшего потока событий вероятность того, что на участке времени длиной  $\tau$  наступит ровно  $k$  событий, определяется по формуле

$$P\{X(t, \tau) = k\} = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $a = \lambda\tau$ ,  $\lambda$  – интенсивность потока.

Стационарный поток с ограниченным последствием называется *поток Пальма*. Для такого потока интервалы  $T_1, T_2, \dots$  между событиями представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Поток Пальма отличается от простейше-

го тем, что интервалы между соседними событиями представляют собой неотрицательную величину с отличным от показательного закона распределения.

Потоки Пальма широко применяются в теории восстановления – разделе теории надежности технических устройств.

Потоки Эрланга  $i$ -го порядка с параметром  $\lambda$  называются потоком Пальма, у которого интервалы между событиями распределены по закону

$$f^{(k)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (t > 0),$$

где  $k = 2, 3, \dots$  – порядок закона Эрланга.

При  $k = 1$  имеем простейший поток. Отметим, что поток Эрланга  $k$ -го порядка может быть получен из простейшего с помощью его «просеивания» (или «разряжения»); при этом в простейшем потоке сохраняется каждое  $k$ -е событие, а все промежуточные отбрасываются. Например, если в простейшем потоке с интенсивностью  $\lambda$  сохранить каждое второе событие, а промежуточное выбрасывать, то получится поток Эрланга 2-го порядка. На рис. 4.18 показана процедура формирования этого потока из простейшего: кружками отмечены сохраняемые в потоке события, обычными точками – отбрасываемые. Очевидно, что интенсивность  $T^{(2)}$  между двумя событиями есть сумма двух независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром  $\lambda$ , равным интенсивности исходного простейшего потока.

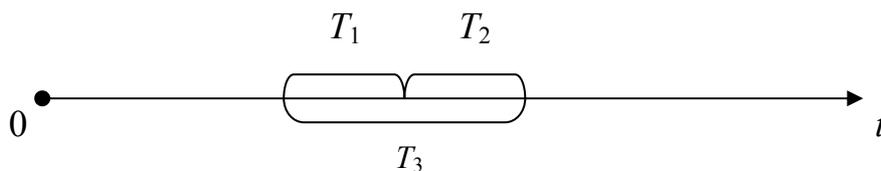


Рис. 4.18. График потока Эрланга

Уточним понятие сложения потоков событий. Сумму двух потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  принято называть потоком  $\Pi^{(2)}$ , в котором моменты появления событий состоят из моментов появления событий в потоках  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 4.19).

Очевидно, что если складывают два стационарных потока событий  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , то суммарный поток событий  $\Pi^{(2)}$  также будет стационарным, его интенсивность будет равна сумме интенсивностей складываемых потоков:

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Сумма любого числа стационарных потоков даёт стационарный поток с интенсивностью, равной сумме интенсивностей складываемых потоков.

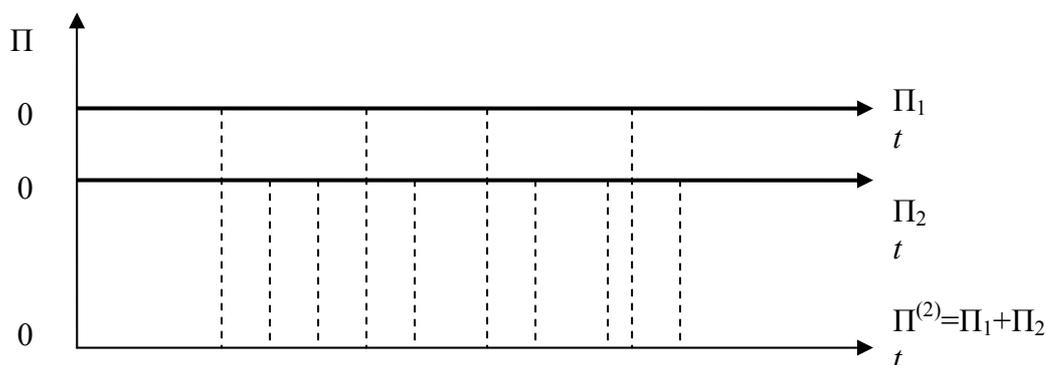


Рис. 4.19. График сложения потока событий

Поток событий имеет две основные формы задания: аналитическую и эмпирическую. Аналитическая форма более удобна для практического использования, так как задает поток с помощью компактных математических формул. Эмпирическая форма применяется, когда аналитическая форма не даёт необходимой точности. Это имеет место, например, для процессов обслуживания автомобилей в случае значительных колебаний интенсивности поступления и ухода автомобилей в течение рассматриваемого периода. Здесь приходится учитывать плановые моменты поступления и ухода автомобилей, т.е. расписание, а также возможные отклонения от них.

Наиболее просто аналитическому описанию поддаётся пуассоновский поток. Однако с течением времени интенсивность потока может меняться. Поэтому для правильной организации производственного процесса (обслуживания) необходимо выделять периоды различной интенсивности потока и решать задачу для каждого периода.

Для изучения колебаний интенсивности потока событий используют вероятностные методы анализа потока событий и регрессионные методы оценки интенсивности потока событий (см. гл. 2 и 3).

### 4.3. Марковские случайные процессы

Рассмотрим физическую систему  $S$ , в которой протекает случайный процесс с дискретными состояниями:  $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ , число которых ко-

нечно. При этом под системой  $S$  будем понимать технологическое устройство (автомобиль, ремонтная мастерская, СТОА, АЗС и т.д.).

Процесс с дискретными состояниями характеризуется тем, что система  $S$  скачками время от времени переходит из одного состояния ( $S_i$ ) в другое ( $S_j$ ).

При изучении таких процессов каждое состояние принято изображать в виде прямоугольника или кружка, а возможные переходы из состояния в состояние – стрелками, соединяющими эти прямоугольники. Полученную схему называют графиком состояний.

Пример. Система  $S$  автомобиль, может находиться в одном из пяти возможных состояний (рис. 4.20).  $S_1$  – исправный, работает;  $S_2$  – неисправен, ожидает ремонта;  $S_3$  – осматривается;  $S_4$  – ремонтируется;  $S_5$  – списан.

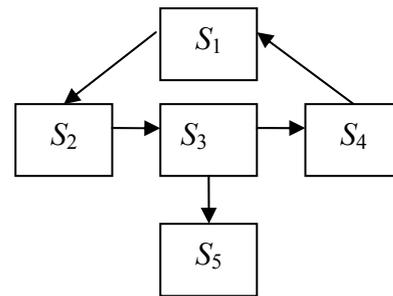


Рис. 4.20. Граф состояний системы

При анализе случайных процессов, протекавших в системах с дискретными состояниями, важную роль играют вероятности состояний.

Обозначим  $S(t)$  состояние системы  $S$  в момент  $t$ . Вероятность  $i$ -го состояния в момент  $t$  называется вероятностью события, состоящего в том, что в момент  $t$  система будет в состоянии  $S_i$ , обозначим её  $p_i(t)$ :

$$p_i(t) = P\{S(t) = S_i\},$$

где  $S(t)$  – случайное состояние системы в момент  $t$ .

Очевидно, что для системы с дискретными состояниями  $S_1, S_2, \dots, S_i$  в любой момент времени  $t$  сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_i p_i(t) = 1$$

как сумма вероятностей полной группы независимых событий.

Отметим, что случайный процесс, протекающий в системе  $S$  с дискретными состояниями  $S_1, S_2, \dots, S_i$ , называется *марковским*, если для любого момента времени  $t$  вероятность каждого из состояний системы в будущем (при  $t > t_0$ ) зависит только от ее состояния в настоящем (при  $t = t_0$ ) и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние, т.е. не зависит от её появления в прошлом (при  $t < t_0$ ) (рис. 4.21).

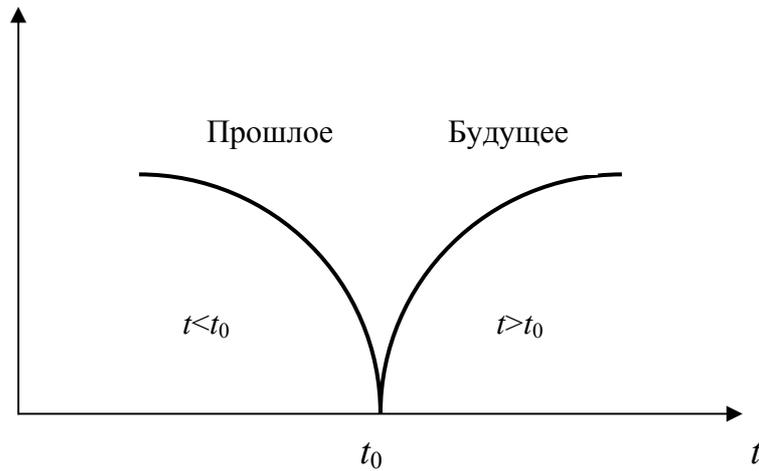


Рис. 4.21. График марковского случайного процесса

### 4.3.1. Случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Пусть имеется система  $S$  с дискретными состояниями  $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ . Случайные переходы (перескоки) системы из одного состояния в другое могут происходить только в определенные (фиксированные) моменты времени  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ . Эти моменты принято называть шагами процесса;  $t_0 = 0$  – его начало. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы  $S$  по состояниям. После первого шага система может оказаться в одном (и только в одном) из своих возможных состояний  $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots, S_i^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}$ , на втором шаге –  $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots, S_i^{(2)}, \dots, S_n^{(2)}$  и т.д.

Предположим, что граф состояний системы  $S$  имеет вид, представленный на рис. 4.22.

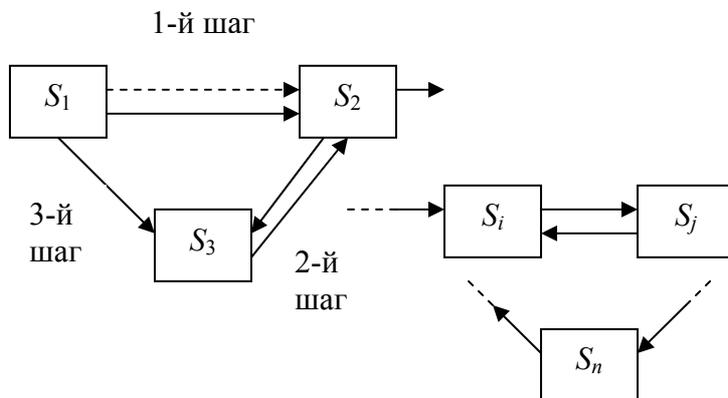


Рис. 4.22. Граф состояний

Процесс блуждания системы  $S$  по состояниям можно представить как последовательность или «цепь» событий, состоящих в том, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  система находится в одном из состояний (например в состоянии  $S_2^{(0)}$ ; в момент первого шага перешла из него скачком в

состояние  $S_2^{(1)}$ , из которого на втором шаге перешла в  $S_2^{(2)}$ , на третьем шаге перешла из  $S_3^{(2)}$  в  $S_3^{(3)}$ , что означает задержку системы в состоянии  $S_3$ , и т.д.).

Переход системы из состояния  $S_i$  в него же означает задержку системы в состоянии  $S_i$ . Процесс задержки возможен для любого состояния, однако он стрелками на графе не отмечается, так как все расчеты можно вести и без них.

При описании таких случайных процессов вводят две основных характеристики: вероятности состояний  $P_i(k)$  и вероятности перехода  $P_{ij}$ .

Вероятность состояния  $P_i(k)$  обозначает вероятность того, что система  $S$  после  $k$ -го шага находится в  $S_i$ -м состоянии:

$$P_i(k) = P\{S(k) = S_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots).$$

Вероятности перехода  $P_{ij}$  означают вероятность перехода системы  $S$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  за один шаг. Вероятность  $P_{ii}$  означает вероятность задержки системы в состоянии  $S_i$  за один шаг.

Если известны вероятности перехода из одного состояния в другое за один шаг, то их можно записать в виде квадратичной таблицы (матрицы) размерности  $mn$ :

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{1j} & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{2j} & P_{2n} \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{ij} & P_{in} \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{nj} & P_{nn} \end{vmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки системы в данном состоянии  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Так как на каждом шаге система  $S$  может находиться только в одном из возможных состояний, то для любой  $i$ -й строки матрицы сумма всех стоящих в ней вероятностей  $P_{ij}$  равна единице:

$$\sum_{i=1}^n P_{ij} = 1.$$

В силу последнего условия вероятность задержки для любого состояния можно получить из выражения

$$P_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} P_{ij}.$$

Чтобы найти вероятность состояний  $P_i(k)$ , необходимо также знать начальное распределение вероятностей. Так, если известно, что в начальный момент система  $S$  находится во вполне определенном состоянии, например  $S_1$ , то вероятность  $P_1(0)$  равна единице, а все остальные – нулю:

$$P_1(0) = 1, \quad P_2(0) = P_3(0) = \dots = P_n(0) = 0.$$

При нахождении вероятностей состояний на  $k$ -м шаге  $P_i(k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) удобно пользоваться так называемым размеченным графом состояний системы  $S$ , где возле каждой стрелки, ведущей из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ , проставлена переходная вероятность  $P_{ij}$ ; вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы сумм вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из данного состояния  $S_i$ .

Рассмотрим размеченный граф состояний (рис. 4.23). Для этого графа состояний вероятности задержки равны:

$$P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13}); \quad P_{22} = 1 - P_{23}; \quad P_{23} = 1 - P_{32}.$$

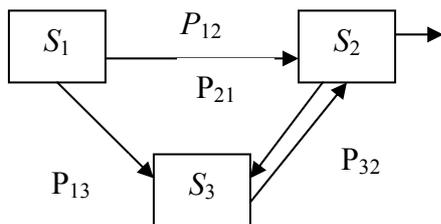


Рис. 4.23. Размеченный граф состояний

Теперь покажем, как найти вероятность нахождения системы  $S$  на  $k$ -м шаге в состоянии  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), если задана матрица переходных вероятностей  $\|P_{ij}\|$  или, что равнозначно, размеченный граф состояний.

Предположим, что в начальный момент (перед первым шагом) система находится в состоянии  $S_1$ , тогда для начального момента (0)

$$P_1(0) = 1; \quad P_2(0) = 0; \quad P_3(0) = 0.$$

Очевидно, вероятности состояний после первого шага

$$P_1(1) = P_{11}; \quad P_2(1) = P_{12}; \quad P_3(1) = P_{13},$$

так как за первый шаг система может перейти в состояние  $S_1, S_2, S_3$  с вероятностями  $P_{11}, P_{12}, P_{13}$ .

Вероятности состояний после второго шага вычисляются по формуле полной вероятности с гипотезами (предположениями), что после первого шага система была в одном из состояний  $S_1, S_2, S_3$ . Получим

$$\begin{aligned} P_1(2) &= P_1(1)P_{11} + P_2(1)P_{21} + P_3(1)P_{31}; \\ P_2(2) &= P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} + P_3(1)P_{32}; \\ P_3(2) &= P_1(1)P_{13} + P_2(1)P_{23} + P_3(1)P_{33}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В общем виде уравнения (4.1) можно записать так:

$$P_i(2) = \sum_{j=1}^n P_j(1)P_{ji}.$$

Таким образом, мы выразим распределение вероятностей на втором шаге через распределение вероятностей на первом шаге и матрицу  $\|P_{ij}\|$ . Переходя таким же способом от  $k = 2$  к  $k = 3$  и т.д., получим рекуррентную формулу

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1)P_{ji} \quad (k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n),$$

позволяющую шаг за шагом вычислять вероятности состояний системы  $S$ .

#### **4.3.2. Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем**

Рассмотрим систему  $S$ , у которой переход из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  происходит в произвольный момент времени  $t$ . Поставим задачу найти вероятности состояний такого процесса, т.е.

$$P_1(t), P_2(t), \dots, P_i(t), \dots, P_n(t),$$

где  $P_i(t)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  система будет находиться в состоянии  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Отметим, что система вероятностей состояний для любого момента времени равна 1, так как события, состоящие в том, что в момент времени  $t$  система находится в состояниях  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – несовместимы и образуют полную группу событий

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) = 1.$$

Для решения поставленной задачи введем новую характеристику случайного процесса  $\lambda_{ij}$  – плотность вероятности перехода (интенсивность потока событий).

Плотность вероятности перехода  $\lambda_{ij}$  называют пределом отношения вероятности перехода системы за время  $\Delta t$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  к длине промежутка  $\Delta t$ , т.е.

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.2)$$

где  $P_{ij}(\Delta t)$  – вероятность того, что система, находящаяся в момент времени  $t$  в состоянии  $S_i$ , за время  $\Delta t$  переходит из него в состояние  $S_j$ .

Из выражения (4.2)

$$P_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t.$$

Если известны плотности вероятностей перехода  $\lambda_{ij}$  для всех пар состояний  $S_i, S_j$ , то представляется возможность определить вероятности состояний  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  как функцию времени. Для чего проставим  $\lambda_{ij}$  на график состояний, получим размеченный граф состояний. Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова, решая которую, найдем вероятности состояний  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ .

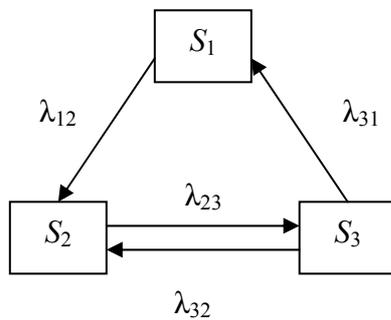


Рис. 4.24. Размеченный граф состояний

Правила составления дифференциальных уравнений Колмогорова рассмотрим на конкретном примере. Пусть имеем размеченный граф состояний дискретного случайного процесса с непрерывным временем (рис. 4.24), где  $S_1, S_2, S_3$  – возможные состояния системы. Отметим, что в моменты времени  $t$  система  $S$  может находиться в любом из состояний  $S_1, S_2, S_3$ .

Рассмотрим состояние  $S_1$  и найдем по формуле полной вероятности  $P_1(t + \Delta t)$  – вероятность того, что в момент времени  $(t + \Delta t)$  система  $S$  будет находиться в состоянии  $S_1$ , которая определится выражением

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t) + P_2(t)\lambda_{21}\Delta t, \quad (4.3)$$

где  $P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t)$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  система была в состоянии  $S_1$  и за время  $\Delta t$  не перейдет в другое состояние (в нашем случае  $S_2$ );

$P_2(t)\lambda_{21}\Delta t$  – вероятность того, что в момент времени  $t$  система была в состоянии  $S_2$  и за время  $\Delta t$  перешла из него в состояние  $S_1$ .

Преобразуем выражение (4.3) – перенесем  $P_1(t)$  в левую часть, разделим на  $\Delta t$  и перейдем к пределу:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t).$$

Рассуждая аналогично для состояний  $S_2$  и  $S_3$ , получим систему дифференциальных уравнений, называемую уравнениями Колмогорова:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -\lambda_{23}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{32}P_3(t); \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= -(\lambda_{31} + \lambda_{32})P_3(t) + \lambda_{23}P_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Для решения системы уравнений (4.4) необходимо выбрать начальные условия. Например, если при  $t = 0$  система находится в состоянии  $S_1$ , то для начального условия ( $t = 0$ ) будут справедливы значения

$$P_1(0) = 1; P_2(0) = P_3(0) = 0.$$

Одно из уравнений системы (4.4) можно заменить нормировочным условием  $\sum_{i=1}^n P_i(t) = 1$ , которое справедливо для любого момента времени  $t$ .

*Примечание.* Структура записи уравнений системы (4.4) подчинена определенным правилам:

- а) в левой части каждого уравнения записывается производная вероятности рассматриваемого состояния;
- б) правая часть содержит столько членов (слагаемых), сколько стрелок связано с данным состоянием;
- в) каждое слагаемое равно произведению плотности вероятности, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка;
- г) если стрелка направлена из состояния, то соответствующее слагаемое имеет знак «минус», а если в состояние – знак «плюс».

Отметим, что при  $t \rightarrow \infty$  в системе устанавливается стационарный режим, для которого вероятности  $P_1, P_2, P_3$  уже не зависят от времени, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = P_i.$$

Вероятности  $P_1, P_2, P_3$  и т.д. называют предельными вероятностями состояний, для вычислений которых необходимо в системе (4.4) положить, что все производные равны нулю, т.е.

$$\frac{dP_i}{dt} = 0.$$

Действительно, в предельном (установившемся) режиме все вероятности состояний постоянны, значит, и их производные равны 0.

В этом случае система дифференциальных уравнений (4.4) превращается в систему обычных линейных алгебраических уравнений (4.5), которое совместно с нормировочным условием  $\sum P_i = 1$  дает возможность вычислить все вероятности состояний

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{12}P_1 - \lambda_{31}P_3 &= 0; \\ \lambda_{23}P_2 - \lambda_{12}P_1 - \lambda_{32}P_3 &= 0; \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})P_3 - \lambda_{23}P_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

### 4.3.3. Процесс «гибели» и «размножения»

Случайный процесс, который имеет размеченный граф в виде цепочки (рис. 4.25), в которой каждое состояние связано прямой и обратной связью с соседними состояниями, при этом в любой момент времени он может увеличиться на единицу либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным, называют процессом гибели и размножения.

Интенсивности потока событий, ведущих к увеличению функции  $X(t)$  («размножению»), обозначены  $\lambda_{ij}$ , где индекс  $i$  соответствует индексу того состояния, из которого выходит стрелка, а индекс  $j$  – тому состоянию, в которое входит стрелка. Интенсивности потока событий, ведущих к уменьшению функции («гибели»), обозначены  $\lambda_{ji}$ .

Очевидно, что одномерный закон распределения процесса гибели и размножения  $X(t)$  можно описать с помощью системы уравнений Колмогорова для размеченного графа (рис. 4.25).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -(\lambda_{12} + \lambda_{10})P_1(t) + \lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{21}P_2(t); \\ &\dots\dots\dots; \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -\lambda_{n,n-1}P_n(t) + \lambda_{n-1,n}P_{n-1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где  $P_i(t) = P\{S(t) = S_i\} = P\{X(t) = i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Систему уравнений (4.6) нужно решать при начальных условиях  $P_i(0) \geq 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), при этом  $\sum_{i=0}^n P_i(0) = 1$ .

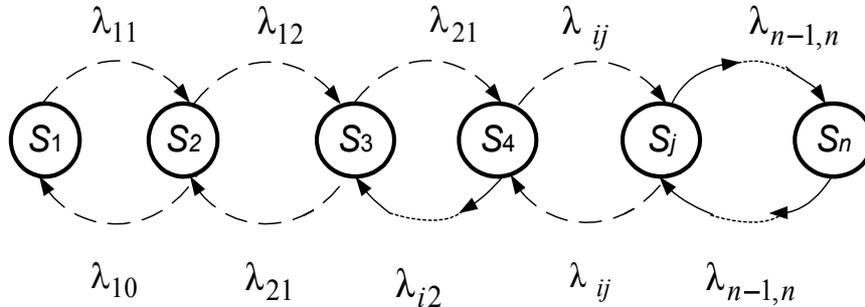


Рис. 4.25. Граф состояний

Предельные вероятности состояний для простейшего процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, могут быть получены из системы уравнений (4.6), в которой нужно все интенсивности потоков взять постоянными, а все производные вероятностей состояний положить равными нулю:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1 &= 0; \\ -\lambda_{12}P_1 - \lambda_{10}P_1 + \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2 &= 0; \\ -\lambda_{23}P_2 - \lambda_{21}P_2 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 &= 0; \\ \dots\dots\dots; \\ -\lambda_{n,n-1}P_{n-1} + \lambda_{n-1,n}P_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Решим систему (4.7) при условии, что

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1.$$

Выразим из первого уравнения системы (4.7) вероятность  $P_1$  через  $P_0$ , получим

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0.$$

Так как  $\lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1$ , то из второго уравнения системы (4.7)

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{10}\lambda_{21}} P_0.$$

Далее аналогично

$$\left. \begin{aligned} P_3 &= \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{32}} P_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\lambda_{32}} P_0; \\ P_j &= \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ji}} P_i; \\ P_n &= \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} P_{n-1} = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\dots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10}\lambda_{21}\dots\lambda_{n,n-1}} P_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Таким образом, любую предельную вероятность  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можно выразить через предельную вероятность  $P_0$ . Вероятность  $P_0$  можно найти из нормировочного условия

$$P_0 + P_0 \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}} = 1.$$

Откуда

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}}}. \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) дают возможность вычислить предельные вероятности состояний простейшего процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме при конечном числе состояний.

#### 4.4. Моделирование методами теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания описывает процессы, протекающие в системах массового обслуживания (СМО) (рис. 4.26). К СМО относятся ремонтные мастерские, станции технического обслуживания, автозаправочные станции и т.д.

Случайный характер потока заявок приводит к тому, что в СМО происходит какой-то случайный процесс. Если случайный процесс – марковский, то функционирование СМО можно описать системой дифференциальных уравнений, а в предельном случае – системой линейных алгебраических уравнений, решением которых определяются характеристики работы СМО.

Методы теории массового обслуживания позволяют решать следующие задачи автомобильного транспорта:

- определить количество линий или постов ТО и Р автомобилей;
- определить рациональное количество оборотных агрегатов;
- производить расчет количества постов погрузки и разгрузки автомобилей, а также многие другие задачи.

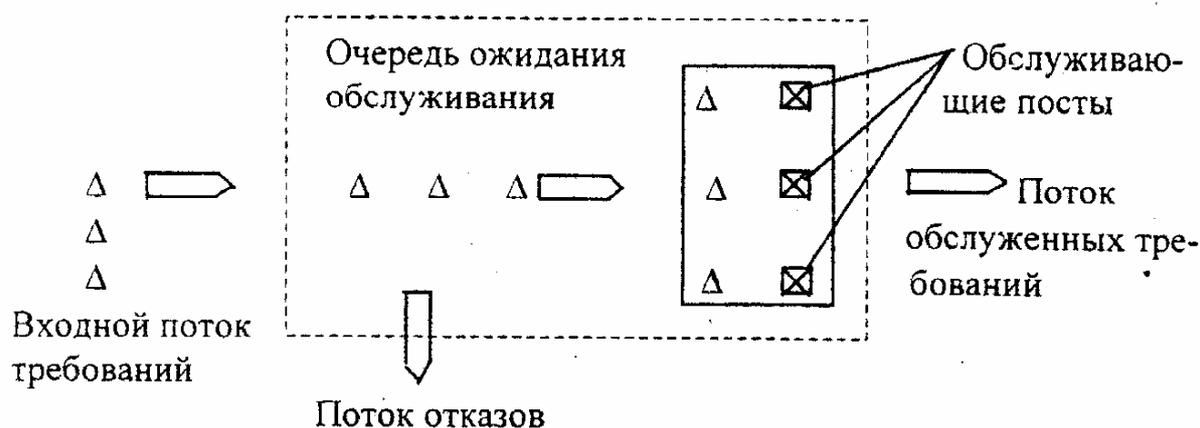


Рис. 4.26. Схема СМО

При анализе работы СМО необходимо знать её основные исходные параметры:

- интенсивность потока заявок  $\lambda$ ;
- трудоёмкость обслуживания одной заявки  $T_p$ ;
- число каналов обслуживания  $n$ ;
- число мест ожидания  $m$ ;
- количество операторов на каждом канале  $d$ ;
- условия, накладываемые на образование очереди.

При описании режима работы СМО используются промежуточные параметры:

- время обслуживания одной заявки  $t_0 = T_p/d$ ;
- производительность каждого канала обслуживания  $\mu = 1/t_0$  (среднее число заявок, обслуживаемое каналом в единицу времени);
- приведенная интенсивность обслуживания  $\alpha = \lambda/\mu$ ;
- коэффициент загрузки  $\beta = \alpha/n$ .

#### 4.4.1. Классификация и показатели работы систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания подразделяются по ряду признаков.

1. По времени ожидания ( $T_x$ ):

– без ожидания или с потерями требований ( $T_x = 0$ );

– с ожиданием или без потерь ( $T_x = 0 - \infty$ );

– с ограниченным временем ожидания ( $T_x = 0 - \tau$ ).

Системы с неограниченным ожиданием начала технического воздействия являются наиболее реальными. Это обусловлено тем, что в условиях Российской Федерации перегоны (нулевые пробеги) до поста обслуживания весьма велики. Существует дефицит запчастей и материалов, отсутствует оперативная связь между региональными СТОА, не развиты фирменные системы сервиса и т.п. Поэтому клиент вынужден ждать начала обслуживания иногда и вне зоны ожидания.

2. По числу требований в сутки ( $N_c$ ):

– с ограниченным входящим потоком, или замкнутые ( $N_c = 0 \dots k$ );

– с неограниченным потоком, или открытые ( $N_c = 0 \dots \infty$ ).

Число требований на СТОА не может быть заранее ограничено, системы являются открытыми (разомкнутыми).

3. По количеству каналов (обслуживающих аппаратов):

– с ограниченным числом обслуживающих аппаратов ( $x = 0 \dots n$ );

– с неограниченным числом обслуживающих аппаратов ( $x = 0 \dots \infty$ ).

4. По числу фаз ( $r$ ):

– однофазные ( $r = 1$ );

– многофазные ( $r > 1$ ).

Многофазные СМО используются при поточном виде обслуживания (например диагностика ТО).

5. По уровню организации:

– упорядоченные (энтропия  $\mathcal{E} = 0$ );

– неупорядоченные ( $\mathcal{E} > 0$ ).

Порядок обслуживания устанавливается в результате анализа СМО.

При дальнейшем рассмотрении вопросов функционирования СМО мы остановимся на двух основных видах:

– СМО с отказами;

– СМО с ожиданием обслуживания.

В системах с отказами обслуживаются только те требования, которые поступают в момент времени, когда хотя бы один из каналов обслуживания был свободен. Если все каналы заняты, то заявка покидает СМО необслуженной.

В СМО с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, ждет освобождения канала обслуживания, т. е. встает в очередь.

Различают одноканальные и многоканальные СМО с ожиданием, при этом на длину очереди могут быть наложены ограничения, определяющие максимальную длину очереди.

Все показатели (характеристики) функционирования СМО можно разделить на четыре группы:

- вероятностные;
- временные;
- количественные;
- качественные.

### *Вероятностные показатели*

Будем говорить, что требование находится в СМО, если оно ожидает обслуживания или находится на обслуживании. Обозначим  $J$  число требований, находящихся в СМО. Так как с течением времени это число меняется, то  $J$  является случайной величиной. Предположим, что произведено очень большое количество наблюдений над СМО, в результате которых установлена доля случаев, когда в системе наблюдалось ровно  $J$  требований. Эта величина называется вероятностью  $p_J$  того, что в СМО имеется  $J$  требований.

Все вероятности состояний должны удовлетворять условию нормировки, согласно которому сумма всех вероятностей должна равняться единице, т. е.

$$\sum_{j=0}^{m+s} p_j = 1.$$

Требование получает отказ в том и только в том случае, если в момент своего поступления в СМО застаёт занятыми как все каналы, так и все места накопления. Если в системе имеется  $n$  аппаратов и  $m$  мест накопителя, то вероятность данного события

$$P_{\text{отк}} = P_{m+n}.$$

Эта вероятность называется вероятностью отказа.

Вероятность нахождения в СМО не более  $i$  требований

$$P_{<i} = \sum_{j=0}^i p_j .$$

Вероятность отсутствия очереди

$$P_{\text{от.оч}} = P_{<n} = \sum_{j=0}^n p_j .$$

Вероятность того, что требованию не придется ожидать начала обслуживания,

$$P_{(A_M < n)} = 1 - P_{(A_M = n)} = P_{\text{от.оч}} - P_n .$$

Вероятность наличия очереди

$$P_{\text{н.оч}} = \sum_{j=m+1}^{m+n} p_j .$$

Вероятность того, что все обслуживающие аппараты заняты,

$$P_{(A_M = n)} = \sum p_j = P_{\text{н.оч}} + P_n .$$

Вероятность обслуживания

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} .$$

### ***Количественные показатели***

Среднее число свободных обслуживающих аппаратов

$$A_c = \sum_{i=0}^n (n-i) p_i .$$

Среднее число требований занятых обслуживающих аппаратов

$$A_M = \sum_{i=0}^n i p_i + n \sum_{i=n+1}^{m+n} p_i = n - A_c .$$

Среднее число требований в накопителе

$$A_H = \sum_{i=s+1}^{m+n} (i-n) p_i .$$

Среднее число требований в обслуживающей системе

$$A = \sum_{i=0}^{n+m} i p_i = A_H + A_M .$$

Среднее число требований, получающих отказ за единицу времени,

$$A_{\text{отк}} = \lambda P_{\text{отк}} .$$

### **Временные показатели**

Важным показателем является среднее время ожидания начала обслуживания  $T_{ож}$ . Сумма среднего времени ожидания  $T_{ож}$  и обслуживания  $T_{обсл}$  равна среднему времени пребывания требования в системе  $T_{сист}$ :

$$T_{сист} = T_{ож} + T_{обсл}.$$

Установим полезную связь между средним числом требований, находящихся в системе, и средним временем пребывания требования в системе. Так как за единицу времени в систему поступает  $\lambda$  требований, а средняя продолжительность пребывания одного требования в системе есть  $T_{сист}$ , то суммарная продолжительность нахождения всех требований в системе за единицу времени равна ( $\lambda T_{сист}$ ). Но так как в системе находится в среднем  $A$  требований, то эта величина равна произведению единицы времени на  $A$ , т. е.

$$A = \lambda T_{сист}.$$

Аналогично можно вывести формулу

$$A_H = \lambda T_{ож}.$$

### **Качественные показатели**

Приведенные показатели характеризуют степень использования обслуживающих аппаратов и затраты времени на пребывание требований в системе (в очереди и на обслуживание). Обычно бывает необходимым соизмерить эти величины, чтобы найти экономически оптимальное решение. В связи с этим предположим, что за единицу времени пребывания требования в системе обслуживания имеют место убытки, равные  $C$ . Кроме того, эксплуатация одного аппарата приводит за единицу времени к расходам, равным  $K$ . Отметим, что в величину  $K$  обычно входят как эксплуатационные расходы, так и удельные капитальные затраты на один аппарат, связанные с его приобретением и приходящиеся на единицу времени. Пусть далее отказ в обслуживании одного требования влечет убыток, равный  $C_0$ .

Тогда приведенные средние затраты, связанные с эксплуатацией  $n$  аппаратов, поступлением в систему в единицу времени  $\lambda$  требований и убытками от отказов требованиям, в единицу времени в среднем составляют

$$\mathcal{E} = C_0 \lambda P_{отк} + C T_{сист} \lambda + K n.$$

В этом выражении  $T_{\text{сист}}$  (среднее время пребывания одного требования в системе), а вместе с ним и слагаемое  $(CT_{\text{сист}}\lambda)$  уменьшаются с ростом числа обслуживающих аппаратов  $n$ . В противоположность этому слагаемое  $Kn$  с ростом числа аппаратов увеличивается. Задача состоит, следовательно, в выборе такого значения  $n$ , при котором критерий ( $\Theta$ ) будет минимален. Такой выбор  $n$  обеспечивает минимизацию приведенных затрат, связанных с приобретением и эксплуатацией аппаратов и непроизводительным пребыванием требований в системе обслуживания.

Отметим также, что за счет дополнительных затрат часто имеется возможность уменьшить среднюю длительность обслуживания одного требования  $T_{\text{обс}}$ . При этом будет уменьшаться и величина  $T_{\text{сист}}$  – среднее время пребывания требования в системе. В этом случае для нахождения оптимального решения в критерий  $\Theta$  следует ввести также указанные дополнительные затраты.

Следующие показатели качества функционирования СМО:

– коэффициент загрузки поста

$$K_3 = \lambda\mu/n;$$

– коэффициент использования аппаратов

$$K_{\text{исп}} = A_M/n.$$

#### **4.4.2. Характеристики систем массового обслуживания**

##### ***Системы массового обслуживания с отказами***

Пусть имеем  $n$ -канальную СМО с отказами, в которую поступает поток требований (автомобилей) на обслуживание с интенсивностью  $\lambda$ , интенсивность обслуживания одного канала равна  $\mu$ . Определим показатели эффективности работы такой системы.

Построим размеченный граф состояний системы (рис. 4.27), где состояния системы пронумерованы по числу занятых каналов, т. е.

$S_0$  – все каналы свободны;

$S_1$  – занят один канал, остальные свободны;

$S_2$  – заняты два канала, остальные свободны;

.....

$S_n$  – заняты все  $n$  каналов.

По стрелке слева направо систему переводит поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . По стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживаний интенсивностью  $k\mu$ , где  $k$  – число занятых каналов.

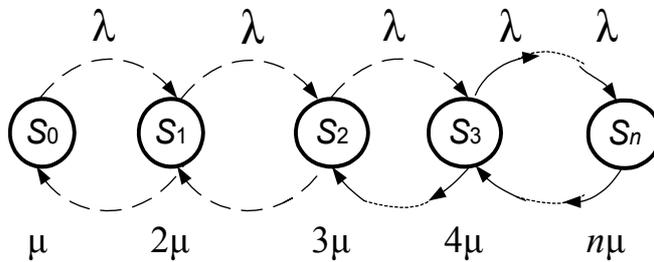


Рис. 4.27. Размеченный граф состояний

Для вычислений предельных вероятностей состояний системы ( $P_i$ ) запишем систему линейных уравнений. Согласно рис. 4.27 будем иметь:

Таблица 4.1

$k$	Цепочка уравнений	Вероятность состояния системы
1	$\lambda P_0 = \mu P_1$	$P_1 = \frac{\alpha}{1!} P_0$
2	$\lambda P_1 = 2\mu P_2$	$P_2 = \frac{\alpha}{2} P_1 = \frac{\alpha^2}{2!} P_0$
3	$\lambda P_2 = 3\mu P_3$	$P_3 = \frac{\alpha}{3} P_2 = \frac{\alpha^3}{3!} P_0$
4	$\lambda P_3 = 4\mu P_4$	$P_4 = \frac{\alpha}{4} P_3 = \frac{\alpha^4}{4!} P_0$
.....	.....	.....
$k$	$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$	$P_k = \frac{\alpha}{k} P_{k-1} = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$
....	.....	.....
$n$	$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$	$P_n = \frac{\alpha}{n} P_{n-1} = \frac{\alpha^n}{n!} P_0$

Рекуррентное выражение для определения вероятности состояния

$$P_k / P_{k-1} = \alpha/k ,$$

где  $\alpha = \lambda/\mu$ .

Запишем нормировочное условие

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1.$$

Решая его совместно с системой уравнений табл. 4.1, получим:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}}.$$

Остальные вероятности состояний найдём из выражений табл. 4.1.

Зная предельные вероятности состояний  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ , вычислим характеристики работы СМО.

*Вероятностные характеристики:*

– вероятность того, что все каналы заняты и отказ в обслуживании,

$$P_{\text{отк}} = P_n;$$

– относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_n.$$

*Количественные характеристики:*

– среднее число занятых постов

$$M_n = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n = \alpha(1 - P_{\text{отк}});$$

– среднее число каналов, свободных от обслуживания,

$$N_0 = n - M_n;$$

– абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda(1 - P_n).$$

*Временная характеристика –*

– среднее время обслуживания

$$t_{\text{обс}} = 1/\mu.$$

*Качественные характеристики:*

– коэффициент занятости каналов

$$K_3 = M_n/n;$$

– коэффициент простоя каналов

$$K_{\text{пр}} = 1 - K_3.$$

### Системы массового обслуживания с ожиданием

#### 1. Одноканальная СМО с ожиданием.

Пусть СМО имеет один канал, на которую поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Интенсивность обслуживания канала равна  $\mu$ . Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что число мест в очереди равно  $m$ , т. е., если заявка, пришедшая в момент, когда в очереди стоит  $m$  заявок, покидает СМО необслуженной.

Будем нумеровать состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе (как обслуживаемых, так и ожидающих обслуживания):

$S_0$  – канал свободен;

$S_1$  – канал занят, очереди нет;

$S_2$  – канал занят, одна заявка в очереди;

.....

$S_{m+1}$  – канал занят,  $m$  заявок в очереди.

Составим размеченный граф состояний системы (рис. 4.28.)

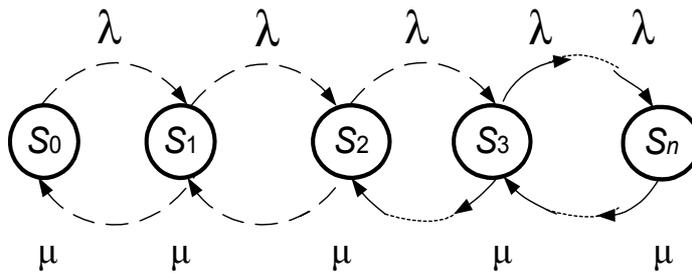


Рис. 4.28. Размеченный граф состояний

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для данного процесса имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu) P_1(t) + \lambda P_0(t) + \mu P_2(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu) P_2(t) + \lambda P_1(t) + \mu P_3(t); \\ &\dots \\ \frac{dP_{m+1}}{dt} &= -\mu P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Добавим к этой системе начальные условия. Например, если при  $t = 0$  система находится в состоянии  $S_0$ , то начальные условия примут вид

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_{m+1}(0) = 0.$$

Проинтегрировав систему (4.13) при принятых начальных условиях, получим все вероятности состояния как функции времени:

$$P_0(t); P_1(t); P_2(t); \dots P_{m+1}(t),$$

которые в любой момент времени  $t$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{m+1} P_i(t) = 1. \quad (4.14)$$

Если в системе дифференциальных уравнений (4.13) положить все производные, равные нулю (при  $t \rightarrow \infty$  зависимость от времени пропадает), то она превращается в систему обычных линейных алгебраических уравнений, которая совместно с нормированным условием (4.14) дает возможность вычислить все предельные вероятности состояний.

При  $\frac{dP_i}{dt} = 0$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1; \\ \lambda P_1 + \mu P_1 &= \lambda P_0 + \mu P_2; \\ \lambda P_2 + \mu P_2 &= \lambda P_1 + \lambda P_3; \\ \dots &\dots; \\ \mu P_{m+1} &= \lambda P_m. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

После преобразований система (4.15) переписется в виде цепочки уравнений (табл. 4.2).

Таблица 4.2

1	$P_1 = \alpha P_0$
2	$P_2 = \alpha P_1 = \alpha^2 P_0$
3	$P_3 = \alpha P_2 = \alpha^3 P_0$
...	.....
$m + 1$	$P_{m+1} = \alpha P_m = \alpha^{m+1} P_0$

Окончательное выражение для  $P_0$  имеет вид

$$P_0 = \frac{1}{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m+1}}.$$

Остальные вероятности состояний можно найти по формулам табл. 4.2.

### *Многоканальная СМО с ожиданиями*

Пусть имеем  $n$ -канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ , интенсивность обслуживания одного канала равна  $\mu$ , число мест в очереди ограничено заданным числом  $m$ . Вычислить основные характеристики СМО.

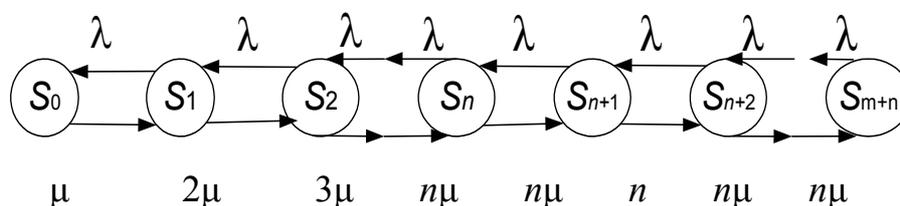
Состояния системы будем нумеровать по числу заявок, связанных с системой:

- $S_0$  – все каналы свободны;
- $S_1$  – занят только один канал;
- $S_2$  – заняты только два канала;
- $S_n$  – заняты все  $n$  каналов.

Когда СМО находится в любом из этих состояний, очереди еще нет. После того как будут заняты все каналы обслуживания, а заявки продолжают поступать, образуется очередь. Тогда состояния системы будут:

- $S_{n+1}$  – заняты все  $n$  каналов и одна заявка в очереди;
- $S_{n+2}$  – заняты все  $n$  каналов и две заявки в очереди;
- .....
- $S_{n+m}$  – заняты все  $n$  каналов и все  $m$  мест в очереди.

Граф состояний системы представлен на рис. 4.29.



*Рис. 4.29. Размеченный граф состояний*

Действительно, переход системы в состояние с большими номерами (слева направо) вызывается только потоком заявок с интенсивностью  $\lambda$ . По стрелкам справа налево систему переводит поток обслуживания, интенсивность которого равна  $\mu$ , умноженная на число занятых каналов. Действительно, полная интенсивность потока обслуживания возрастает с подключением новых каналов вплоть до такого состояния  $S_n$ , когда все  $n$  каналов окажутся занятыми. С появлением очереди интенсивность обслуживания больше не увеличивается, так как она уже достигла максимума, равного ( $n\mu$ ).

Не повторяя соответствующих рассуждений, запишем сразу в окончательном виде основные формулы (табл. 4.3), отражающие работу СМО с ожиданием, введя для упрощения записи обозначение

$\lambda/\mu = \alpha$  – приведенная интенсивность;  $\alpha/n = \beta$  – нагрузка.

Таблица 4.3

	Цепочка уравнений	Вероятность состояния системы
До возникновения очереди		
1	$\lambda P_0 = \mu P_1$	$P_1 = \frac{\alpha}{1!} P_0$
2	$\lambda P_1 = 2\mu P_2$	$P_2 = \frac{\alpha}{2} P_1 = \frac{\alpha^2}{2!} P_0$
3	$\lambda P_2 = 3\mu P_3$	$P_3 = \frac{\alpha}{3} P_2 = \frac{\alpha^3}{3!} P_0$
4	$\lambda P_3 = 4\mu P_4$	$P_4 = \frac{\alpha}{4} P_3 = \frac{\alpha^4}{4!} P_0$
...	.....	.....
$k$	$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$	$P_k = \frac{\alpha}{k} P_{k-1} = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$
...	.....	.....
$n$	$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$	$P_n = \frac{\alpha}{n} P_{n-1} = \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
После возникновения очереди		
1	$\lambda P_n = n\mu P_{n+1}$	$P_{n+1} = \beta P_n = \beta^1 P_n = \beta \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
2	$\lambda P_{n+1} = n\mu P_{n+2}$	$P_{n+2} = \beta P_{n+1} = \beta^2 P_n = \beta^2 \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
3	$\lambda P_{n+2} = n\mu P_{n+3}$	$P_{n+3} = \beta P_{n+2} = \beta^3 P_n = \beta^3 \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
4	$\lambda P_{n+3} = n\mu P_{n+4}$	$P_{n+4} = \beta P_{n+3} = \beta^4 P_n = \beta^4 \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
...	.....	.....
$l$	$\lambda P_{n+l-1} = n\mu P_{n+l}$	$P_{n+l} = \beta P_{n+l-1} = \beta^l P_n = \beta^l \frac{\alpha^n}{n!} P_0$
...	.....	.....
$m$	$\lambda P_{n+m-1} = n\mu P_{n+m}$	$P_{n+m} = \beta P_{n+m-1} = \beta^m P_n = \beta^m \frac{\alpha^n}{n!} P_0$

Вычислим основные характеристики СМО, для чего запишем нормировочное условие

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n+m} = 1$$

и подставим в него значения вероятностей  $P_i$ , выраженные через вероятность  $P_0$ , тогда вероятность того, что все каналы свободны, определяется по выражению

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{l=1}^m \beta^l}.$$

Другие вероятности состояний определяются по данным табл. 4.3.

Вероятность того, что все каналы и места ожидания заняты и заявка получает отказ в обслуживании,

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \beta^m \frac{\alpha^n}{n!} P_0.$$

Относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}}.$$

Среднее число каналов, занятых обслуживанием,

$$M_3 = \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=1}^m P_{n+k} = \alpha q.$$

Среднее число каналов, свободных от обслуживания,

$$N_0 = \sum_{k=0}^n (n-k)P_k = n - M_3.$$

Среднее число заявок в накопителе  $A_H = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n)P_k.$

Абсолютная пропускная способность  $A = \lambda q.$

Среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди  $\bar{t}_o = \frac{A_H}{\lambda}.$

Среднее время пребывания заявки в системе  $\bar{t}_c = \bar{t}_o + \frac{1}{\mu}$ .

Коэффициент занятости каналов  $K_3 = M_3/n$ .

Коэффициент простоя каналов  $K_{пр} = 1 - K_3$ .

Программа расчета основных показателей СМО, составленная на алгоритмическом языке Q Basic, приведена в прил. 5.

#### **4.5. Оптимизация числа оборотных агрегатов методами теории массового обслуживания**

Рациональное управление производством и распределением оборотного фонда запасных частей, узлов и агрегатов, используемых при ремонте автомобилей, имеет важное производственное значение.

Одним из методов решения поставленной задачи может служить математический аппарат теории массового обслуживания, описывающий процессы, протекающие в СМО.

В системах массового обслуживания поток требований является случайным. Случайно и время обслуживания. Работа СМО протекает нерегулярно; то образуется очередь на обслуживание, то происходит простой постов (аппаратов) обслуживания. Задача теории массового обслуживания – установить оптимальную (с минимальными простоями) зависимость между характером потока требований, числом постов и их производительностью (временем обслуживания), правилами работы системы обслуживания.

Наиболее часто в качестве критериев (показателей эффективности работы систем массового обслуживания) используются показатели среднего времени ожидания требования начала обслуживания; среднего размера очереди на обслуживание; вероятности того, что в системе обслуживания будет находиться определенное количество требований; среднее число аппаратов, занятых или свободных от обслуживания, и ряд других. Однако наиболее целесообразно использовать экономические показатели оценки эффективности функционирования систем массового обслуживания, которые дают обобщенную характеристику производственного процесса. В этом случае в качестве критерия эффективности функционирования СМО обычно выбираются общие денежные затраты, связанные и простоями ав-

томобилей в ожидании обслуживания, и затраты на создание и эксплуатацию постов (аппаратов).

Пример. В автотранспортном предприятии, имеющем одномарочный подвижной состав, применяется агрегатный метод ремонта. Ремонт осуществляется путем замены неисправного агрегата на годный, взятый со склада. При отсутствии на складе агрегатов автомобиль ожидает ремонта.

В данном примере входящий поток требований образуют автомобили с неисправными агрегатами. Обслуживающими аппаратами являются оборотные агрегаты. Дисциплина замены агрегатов – в порядке поступления требований, а процесс замены их можно рассматривать как СМО с ожиданием.

Задачу оптимизации оборотного фонда агрегатов автотранспортного предприятия сведем к отысканию минимума целевой функции

$$z = C_{ож} A_n + C_N A_c,$$

где  $C_{ож}$  – издержки в рублях, вызываемые простоем одного автомобиля в ожидании поступления отремонтированного агрегата в течение суток;

$A_n$  – среднее число неисправных автомобилей, ожидающих поступления отремонтированных агрегатов (среднее число автомобилей в накопителе);

$C_N$  – издержки, вызываемые неиспользованием одного отремонтированного агрегата в течение суток;

$A_c$  – среднее число неиспользованных агрегатов (пролежавших на складе).

$C_{ож}$  и  $C_N$  определяются путем калькуляции.  $A_n$  и  $A_c$  определяются методами теории массового обслуживания для конкретных условий производственной деятельности АТП и зависят от числа оборотных агрегатов  $N$ .

Если автомобили поступают на ремонт (замену агрегата) с интенсивностью  $\lambda$ , а среднее время возврата агрегата на склад составляет  $T_{об} = 1/\mu$ , то для разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием имеем следующие расчетные формулы.

Для упрощения формул используется выражение  $a = \lambda/\mu$ .

Загрузка  $\beta = a/n$ .

Вероятность того, что все обслуживающие аппараты (агрегаты) свободны,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^N}{N!(1-\beta)}}.$$

Вероятность того, что все обслуживающие аппараты (агрегаты) заняты,

$$P_H = \frac{P_0 a^N}{N!(1-\beta)}.$$

Среднее число требований (автомобилей) в накопителе

$$A_H = \frac{P_H q}{(1-\beta)^2}.$$

Среднее число свободных обслуживающих аппаратов (агрегатов)

$$A_C = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N-k}{k!} a^k = N - a.$$

Первоначальное расчетное число оборотных агрегатов определяется по условию  $a \leq N_{\min}$ .

Изменением числа оборотных агрегатов от  $N_{\min}$  до  $N$  (рис. 4.30) определим оптимальное число оборотных агрегатов из условия целевой функции  $z = C_{ож} A_H + C_N A_C \rightarrow \min$ .

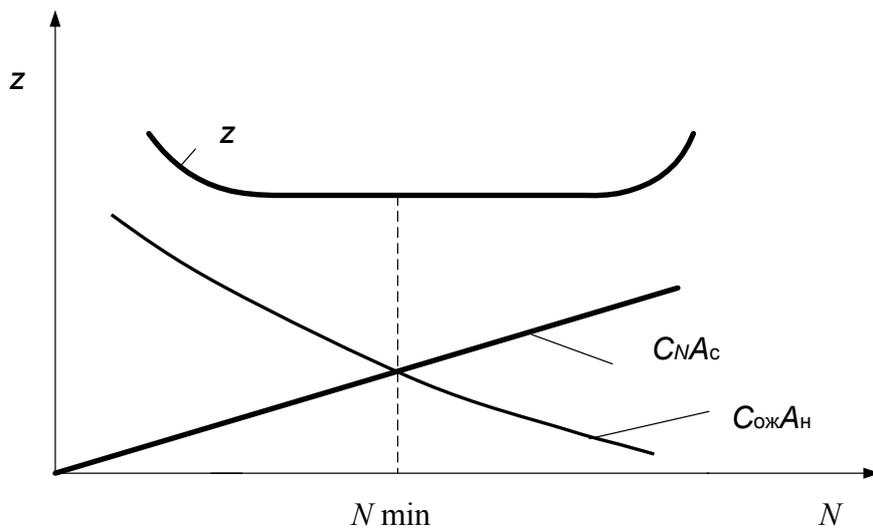


Рис. 4.30. График затрат в системе массового обслуживания

Расчет параметров функционирования подобных систем массового обслуживания целесообразно осуществлять на ЭВМ. Алгоритм решения данной задачи представлен на рис. 4.31. Программа может иметь следующее содержание (прил. 6).

Результаты счета по приведенной программе для одного варианта исходных данных могут иметь вид:

- исходные данные  $L = 1$ ;  $TI = 3$ ;  $C_{ож} = 25$ ;  $C_N = 3$ ;
- приведенная интенсивность  $A = 3$ ;  $N = 8$ .

### Результаты вычислений

$N$	$Z$	$A_{\text{авт}}$	$A_{\text{агр}}$	$V$
4	155.83	6.11321	1	99843.2
5	28.1392	.885569	2	127.691
6	13.9572	.198286	3	14.1821
7	13.2352	.0494094	4	.721927
8	15.3108	.0124308	5	-2.07553

где  $N$  – кол-во каналов (агрегатов) обслуживания;  $Z$  – затраты суммарные, руб.  $A_{\text{авт}}$  – среднее число неисправных автомобилей в накопителе;  $A_{\text{агр}}$  – среднее число неиспользованных агрегатов;  $V$  – изменение суммарных затрат, руб.

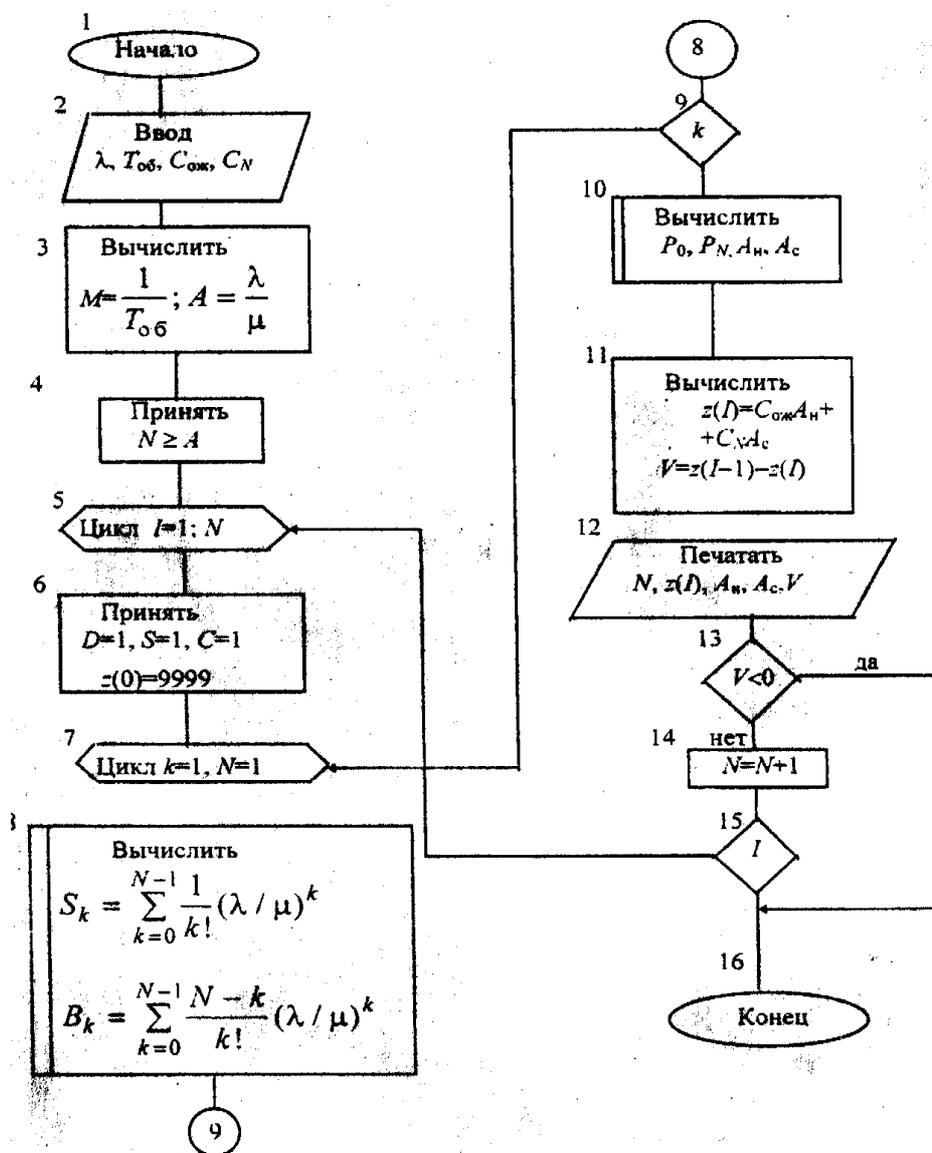


Рис. 4.31. Блок-схема алгоритма программы оптимизации числа оборотных агрегатов

## Контрольные вопросы

1. Дайте определения следующим понятиям: случайный процесс; реализация случайного процесса; сечение случайного процесса.
2. Приведите классификацию случайных процессов.
3. Перечислите основные характеристики случайных процессов.
4. Дайте определение потоку событий, назовите признаки, по которым они подразделяются.
5. Перечислите свойства простейшего потока событий.
6. Что такое интенсивность потока событий? Физический смысл интенсивности потока событий.
7. Особенности потока Пальма и Эрланга.
8. Дайте определение марковскому случайному процессу.
9. Назовите основные характеристики случайного процесса с дискретными состояниями и дискретным временем.
10. Правила записи уравнений Колмогорова.
11. Дайте определение предельным вероятностям состояний.
12. Изобразите графически случайный процесс чистого «размножения» и процесс чистой «гибели».
13. Перечислите признаки, по которым подразделяются СМО.
14. Назовите основные исходные параметры, которые используются при анализе работы СМО.
15. Запишите основные вероятностные показатели функционирования СМО.
16. Изобразите размеченный граф состояний многоканальной СМО с ожиданием.
17. Запишите формулы подсчета среднего числа занятых каналов и среднего числа заявок, стоящих в очереди.

## **Глава 5. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Основным преимуществом имитационных моделей по сравнению с аналитическими является возможность решать задачи исключительной сложности с учетом случайных факторов.

Метод имитационного моделирования удается успешно реализовать с помощью ЭВМ. Однако использование ЭВМ для целей имитационного моделирования требует умения разработки моделирующего алгоритма, который должен воспроизвести формальный процесс сложной системы. Моделирующий алгоритм позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях производственного процесса в произвольный момент времени.

Разработка моделирующего алгоритма невозможна без глубокого знания моделируемого объекта и его функционирования, причем в процессе разработки происходит углубление и уточнение понимания объекта. Поэтому процесс разработки модели имеет и самостоятельное значение, так как позволяет обнаружить недостатки, вскрыть резервы, открыть новые возможности объекта еще до моделирования и дать важные практические рекомендации по совершенствованию объекта и повышению эффективности его функционирования.

Одним из преимуществ моделирования производственных процессов является возможность рассмотрения переменных факторов во всем диапазоне их значений.

Имитационное моделирование, при котором воспроизводятся случайные явления, называется статистическим имитационным моделированием. Статистическое имитационное моделирование базируется на численном статистическом методе решения математических задач, называемом методом Монте-Карло.

### **5.1. Общие положения метода статистического моделирования**

Метод статистического моделирования обычно включает следующие этапы.

1. Вначале дается описание функционирования системы, т.е. описание задач, стоящих перед системой, уточняются исходные (отправные) положения; рассматриваются ограничения; выделяются подпроцессы; намечаются характеристики, которые требуется получить на выходе, и выбираются целевая функция или критерий, с помощью которого будет производиться оценка эффективности функционирования системы.

2. Производится сбор и обработка информации, характеризующие работу подпроцессов системы и всего процесса в целом.

3. Производится формализация работы системы, т.е. выделяются главные факторы и исключаются второстепенные, которыми можно пренебречь. На основе этого составляется отвечающая система – адекватная математическая модель процесса.

4. Составляется алгоритм принятой математической модели в виде операторной блок-схемы.

5. Составляется на алгоритмическом языке программа для многократного воспроизведения на ЭВМ процесса при числе реализаций, обеспечивающих заданную точность.

6. Производится моделирование работы системы на ЭВМ и выдача на печать основных результатов моделирования. Обычно при этом получают:

а) точечные оценки, т.е. математическое ожидание, дисперсию для каждого из подпроцессов и по всему процессу в целом;

б) интервальные оценки, т.е. доверительные интервалы и доверительные полосы разброса среднего результата для каждого из подпроцессов и всего процесса в целом;

в) кривые уравнений регрессии, характеризующие зависимость исследуемых параметров от различных аргументов.

Кроме перечисленного могут вычисляться специальные характеристики, присущие рассматриваемому явлению. Все это позволяет прогнозировать течение процесса и, следовательно, введением соответствующих поправок оптимизировать его течение.

Если случайный процесс, протекающий в системе, происходит под действием произвольного потока событий, то его математическую модель построить трудно. В этом случае можно использовать метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), который основан на законе больших чисел.

В общем виде закон больших чисел (теорема П.Л. Чебышева) записывается так

$$\lim P\left(\left|\frac{\sum x_i}{N} - M(x)\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1,$$

где  $P$  – вероятность сложного события;

$M(x) = \bar{X}$  – математическое ожидание случайной величины;

$M(x) = \frac{\sum x_i}{N}$  – среднее арифметическое наблюдаемых значений;

$N$  – число испытаний (число реализаций);

$\varepsilon$  – сколь угодно малое положительное число.

Теорема Чебышева формулируется так: «При большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию».

При переходе к относительным (без размерности) параметрам имеем частный случай закона больших чисел (теорема Я. Бернулли), который аналитически записывается так:

$$\lim P\left(\left|\frac{m_i^*}{N} - P\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1,$$

где  $m_i^*$  – число появления события (частота);

$P_i^* = \frac{m_i^*}{N}$  – частость события;

$P$  – вероятность события.

Теорема Я. Бернулли формулируется так: «При большом числе испытаний частость события сводится по вероятности к вероятности события».

Графически закон больших чисел (и его частный случай) представлен на рис. 5.1.

Из рис. 5.1 следует, что по мере увеличения числа испытаний среднее арифметическое наблюдаемое

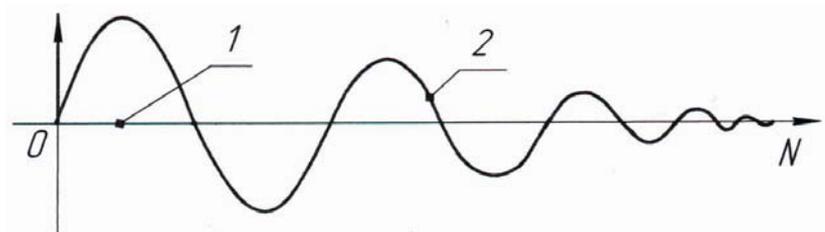


Рис. 5.1. Графическое изображение закона больших чисел: 1 – математическое ожидание случайной величины  $M(x)$  (вероятность события  $P$ ); 2 – среднее арифметическое наблюдаемых значений  $M^*(x)$  (частость события  $P_i^*$ )

даемых значений случайной величины  $M^*(x)$  и частоты события  $P_i^*$  асимптотически и неограниченно приближаются к математическому ожиданию  $M(x)$  и вероятности события  $P$ .

Это означает, что если произвести большое число испытаний, то получаемые статистические характеристики (средние значения) могут рассматриваться как истинные. Указанное положение и составляет математическую основу метода статистического моделирования, т.е. метода Монте-Карло.

Итак, идея метода Монте-Карло проста и состоит в следующем: производится «розыгрыш» процесса (явления) с помощью специально организованной процедуры, дающей случайный результат. Каждый «розыгрыш» дает новую, отличную от других, реализацию исследуемого процесса. Если таких реализаций проведено много, то это множество реализаций можно использовать как статистический материал, обработав который методами математической статистики, получаем интересные характеристики: вероятности состояний, математическое ожидание и т.д.

## 5.2. Моделирование случайных чисел

### 5.2.1. Генерирование случайных чисел

При моделировании процессов автомобильного транспорта наиболее простой и распространенной является равномерная случайная последовательность чисел в интервале от 0 до 1.

Для получения (генерирования) равномерно распределенных случайных чисел существует несколько методов:

а) если моделирование осуществляется вручную (без помощи ЭВМ), то для получения случайных чисел от 0 до 1 используют таблицы случайных чисел, составленные с помощью какого-либо генератора случайных чисел, например рулетки, аппарата жеребьевки и т. д.;

б) если расчет ведется с использованием ЭВМ, то она сама выдает случайные числа с помощью генератора случайных чисел.

При генерировании случайных чисел, находящихся в интервале  $(A, B)$ , на алгоритмическом языке Бейсик используется выражение  $(B - A) * \text{RND} + A$ .

Пример.

```
FOR I = 1 TO 4: X = (7 - 5) * RND + 5: PRINT X: NEXT
```

Результаты, выведенные на терминал,

5,08146; 6,05659; 5,12876; 5,31561;

в) метод использования специальных программ.

Алгоритм и блок-схема (рис. 5.2) одной из специальных программ для вычисления случайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $(0, 1)$ , могут иметь следующее содержание.

1. Выбирается произвольная пара действительных чисел  $P$  и  $D$ .
2. Задается число  $E = I$ .
3. Вычисляются вспомогательные числа:  $V = D + E$  и  $A = V / P$ .
4. Принимается за случайное число  $R$ , дробная часть числа  $A$ .
5. Вычисляется случайный множитель  $E = V - PZ$ , где  $Z$  – целая часть числа  $A$ .
6. Процесс повторяется, начиная с 3-го пункта.
7. В результате выполнения алгоритма получается бесконечная последовательность чисел, которая рассматривается как случайная, равномерно распределенная в интервале  $(0, 1)$ .

#### Программа работы на ЭВМ

‘Программа вычисления случайных чисел

```
PRINT “ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ”
```

```
PRINT “ВВЕДИТЕ ЧИСЛА P, D, M”
```

```
PRINT “P, D – ЛЮБАЯ ПАРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ”
```

```
INPUT “M – ТРЕБУЕМОЕ КОЛИЧЕСТВО СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН”; P,
```

```
D, M
```

```
PRINT “P = ”; P; “D = ”; “M = ”; M
```

```
E = 1
```

```
PRINT “РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА”
```

```
FOR I = 1 TO M
```

```
V = D * E: A = V / P: Z = INT(A): R(I) = A - Z: E = V — P * Z
```

```
PRINT “R(“; I;”) =”; R(I)
```

```
NEXT
```

```
END
```

В процессе работы по программе задаются следующие исходные данные:  $P$  и  $D$  – пара действительных чисел;  $M$  – требуемое количество случайных чисел.

В результате работы по программе получим:

исходные данные

$P = 5.9$ ;  $B = 4.5$ ;  $M = 8$

равномерно распределенные случайные числа

$R(1) = .762712$ ;  $R(2) = .432204$ ;  $R(3) = .944916$ ;  $R(4) = .252123$

$R(5) = .134554$ ;  $R(6) = .605492$ ;  $R(7) = .724714$ ;  $R(8) = .261211$

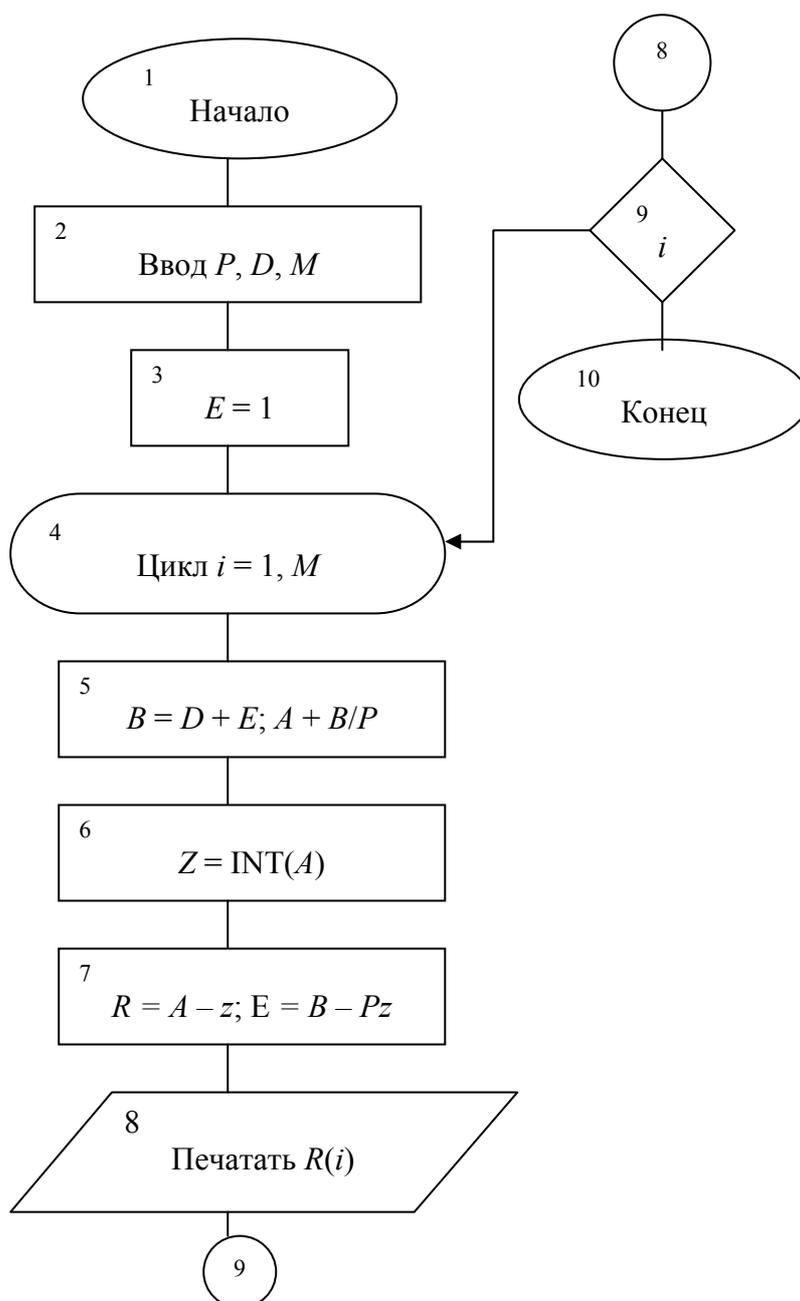


Рис. 5.2. Блок-схема алгоритма моделирования равномерно распределенных случайных чисел в интервале (0, 1)

### 5.2.2. Моделирование дискретной случайной величины

Рассмотрим порядок моделирования дискретной случайной величины на примере.

Пример. Задана дискретная случайная величина  $X$  своим рядом распределения (табл. 5.1).

Таблица 5.1

№ п/п	Параметр	Обозначение	Значение		
			3	5	7
1	Частные значения случайной величины	$X_i$	3	5	7
2	Вероятности, отвечающие значениям случайной величины	$P(x)_i$	0,26	0,40	0,34
3	Интегральная функция	$F(x)_i$	0,26	0,66	1,00

Требуется промоделировать случайную величину, отвечающую этому закону распределения.

Решение.

Строим график интегральной функции дискретной случайной величины. Для этого по оси абсцисс откладываем частные значения случайной величины  $X_i$ , а по оси ординат – отвечающие им вероятности  $F(x)_i = \sum P(x)_i$  (рис. 5.3).

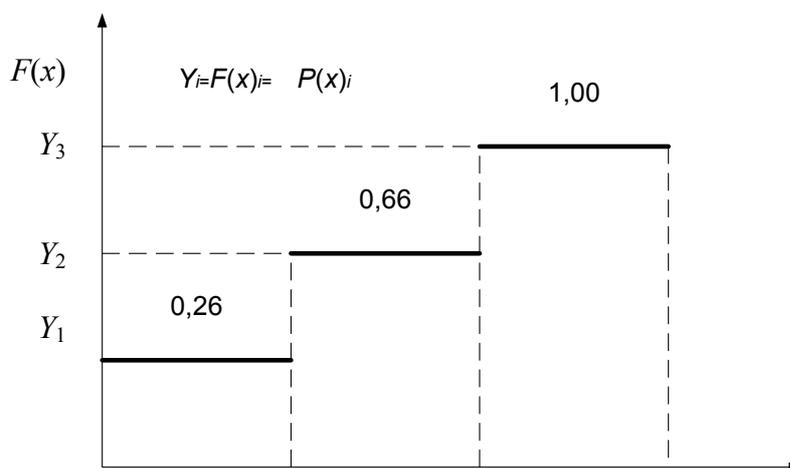


Рис. 5.3. График функции распределения вероятностей дискретной случайной величины

При этом значениям  $P(x)$  соответствуют:

$Y_1 = F(x)_1$  – от 0 до 0,26 включительно отвечает  $X_1 = 3$ ;

$Y_2 = F(x)_2$  – от 0,26 до 0,66 отвечает  $X_2 = 5$ ;

$Y_3 = F(x)_3$  – от 0,66 до 1,00 отвечает  $X_3 = 7$ .

Воспользуемся случайными равномерно распределенными числами в интервале ( $0 \leq R_i \leq 1$ ), запишем их в первую строку табл. 5.2. Каждому из указанных чисел отвечает вполне определенное значение  $X_i$  (вторая строка табл. 5.2).

Таблица 5.2

$R_i$	0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	0,76	0,52	0,01
$X_i$	3	3	7	3	5	7	5	3

Алгоритм моделирования дискретной случайной величины, заданной своим рядом распределения, содержит следующие действия.

1. Вычисляем значения накопленных вероятностей по формуле

$$F(x)_i = \sum_{j=1}^i P(x_j)$$

и строим отвечающий им график.

2. Устанавливаем значения случайных чисел, равномерно распределенных в интервале ( $0 \leq R_i \leq 1$ ).

3. Для каждого из чисел по графику  $F(x)$  (см. рис. 5.3) находим отвечающие им значения  $X_i$ , представляющие отдельные реализации данной случайной величины  $X$ .

Если дискретная величина задана достаточно длинным рядом распределения и если при этом требуется, чтобы результат вычислений мало отличался от истинного значения, то в этом случае от ручного моделирования переходят к машинному, т. е. вычисления ведут с помощью ЭВМ.

Блок-схема алгоритма решения такой задачи приведена на рис. 5.4, где  $N$  – число значений дискретного признака;  $M$  – число разыгрываемых случайных величин;  $X(i)$  – значения признака;  $P(i)$  – вероятность появления признака;  $F(i)$  – значение интегральной функции;  $R(i)$  – значение случайной величины.

Программа моделирования дискретной случайной величины, заданной своим законом распределения, на алгоритмическом языке Бейсик может иметь вид

```

‘МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
PRINT “ВВЕДИТЕ N, M”
PRINT ”N – ЧИСЛО ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО ПРИЗНАКА”

```

```

INPUT "М – ЧИСЛО РАЗЫГРЫВАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН"; N,
M
DIM X(N), P(N), F(N)
PRINT #1, 'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ'
PRINT 'М ='; M; 'N ='; N
PRINT 'X(i) – ЗНАЧЕНИЕ ПРИЗНАКА'
PRINT "P(i) – ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ПРИЗНАКА"
FOR I = 1 TO N
INPUT 'ВВЕДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ X(' I '), P(' I ')'; X(I), P(I)
PRINT 'X(' I ')='X(I), 'P(' I ')='P(I)
NEXT
PRINT 'РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ'
F(0) = 0: FOR I = 1 TO N: F(I) = F(I - 1) + P(I): NEXT
K = 1: FOR I = 1 TO M: R(I) = RND:
WHILE R(I) > F(K): K = K + 1: WEND
PRINT "R(" I ; " ) ="; R(I); "X(" I ; " ) ="; X(K)
NEXT
END

```

Результаты счета по программе при известном законе распределения дискретной случайной величины могут иметь вид:

исходные данные

N = 3;	M = 5
X(1) = 2	P(1) = .3
X(2) = 5	P(2) = .4
X(3) = 8	P(3) = .3

результаты вычислений

R(1) = .0407319	X(1) = 2
R(2) = .528293	X(2) = 5
R(3) = .803172	X(3) = 8
R(4) = .0643915	X(4) = 2
R(5) = .157805	X(5) = 2

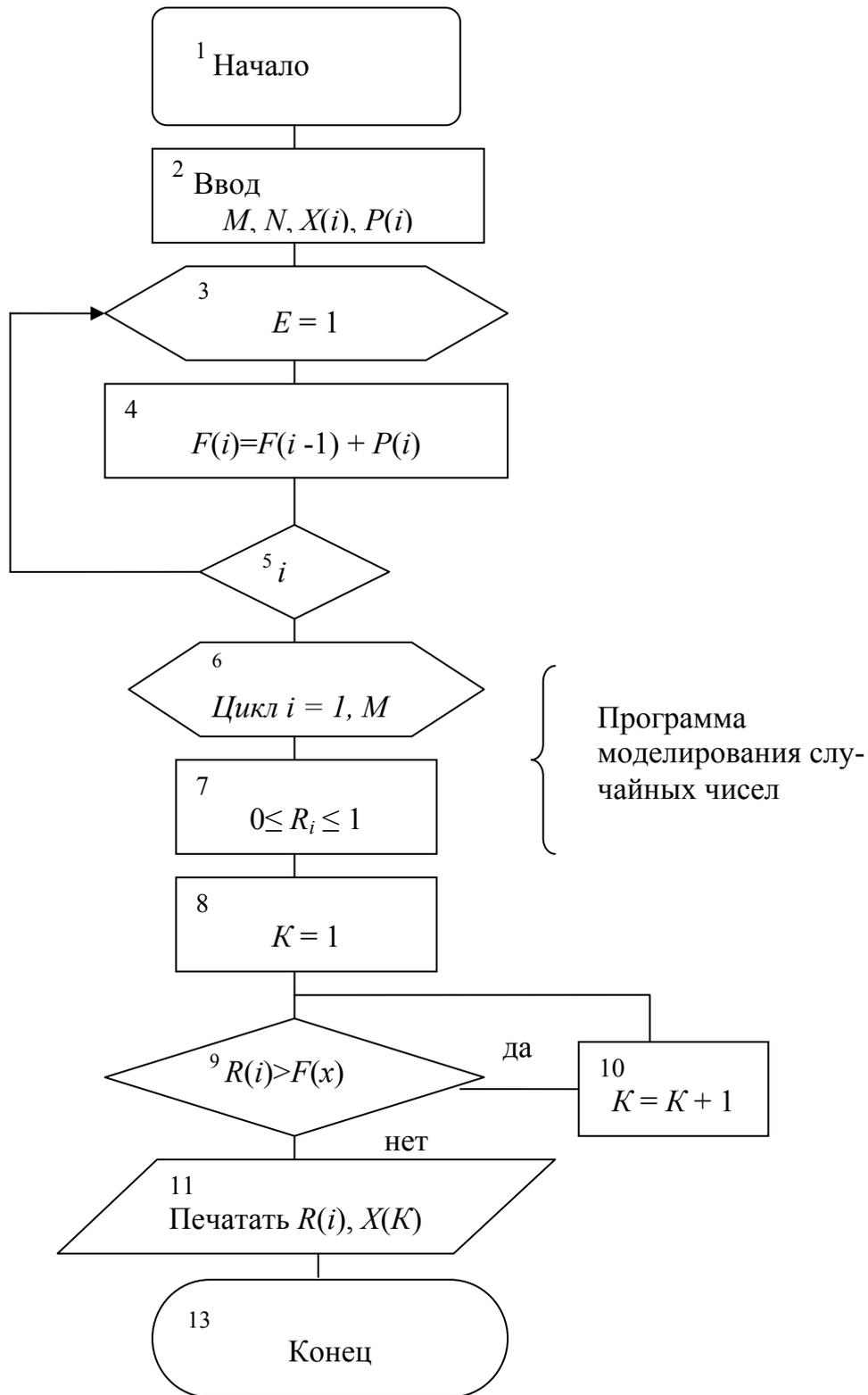


Рис. 5.4. Блок-схема алгоритма моделирования дискретной случайной величины

### 5.2.3. Моделирование непрерывной случайной величины

Если случайная величина  $T$  непрерывна и известна плотность вероятности распределения ее  $f(t)$ , то моделирование значений  $T$  осуществляется следующей процедурой:

1) перейти от плотности вероятности  $f(t)$  к функции распределения  $F(t)$  по формуле

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt;$$

2) затем найти для функции  $F$  обратную ей функцию  $F^{-1}$ ;

3) разыграть случайное число  $R_i$  от 0 до 1 и взять от него эту обратную функцию

$$T_i = F^{-1}(R_i).$$

Доказывается, что случайная величина  $T$  имеет как раз нужное нам распределение. Графически процедура розыгрыша случайной величины  $T_i$  имеет вид, представленный на рис. 5.5.

Разыгрывается случайное число  $R_i$  от 0 до 1 и для него ищется случайная величина  $T_i$ , при которой  $T_i = F^{-1}(R_i)$  (на рис. 5.5 показано стрелкой).

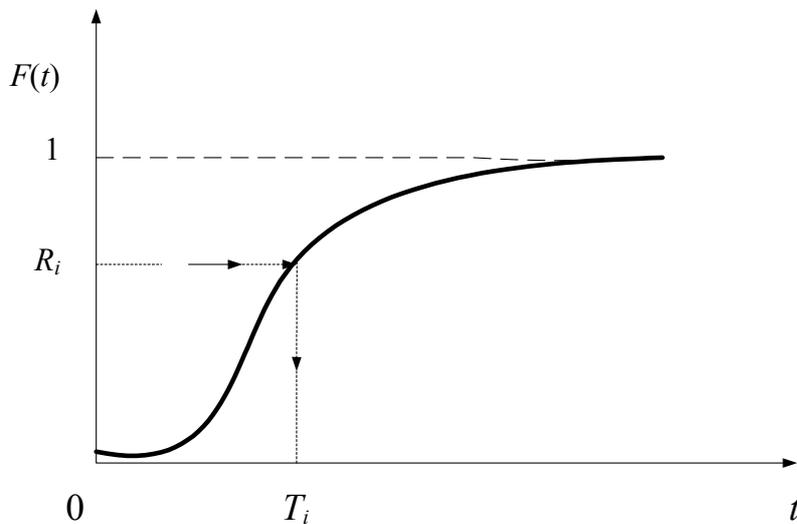


Рис. 5.5. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Пример. Пусть требуется разыграть случайную величину  $T$ , которая имеет закон распределения  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  – показательный закон. Здесь  $T$  – случайная величина (интервал времени между приходящими заявками на обслуживание, время обслуживания одной заявки и т.д.);  $f(t)$  – плотность распределения случайной величины.

1. Найдем функцию распределения  $F(t)$ :

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

При  $t = 0$   $F(t) = 0$ ;

$t = \infty$   $F(t) = 1$ ;

$F(t) = 0 \dots 1 = R_i$ .

2. Вычислим обратную функцию  $F^{-1}$  и по ней определим случайную величину  $T_i$ . Так как  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = y$ , то  $e^{-\lambda t} = 1 - y$ . Логарифмируя последнее выражение, получим  $\lambda t = \ln(1 - y)$ , откуда

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y) \quad \text{или} \quad T_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y_i), \quad \text{где } y_i = 0 \dots 1 = R_i.$$

Алгоритмы моделирования случайных величин, распределенных по основным вероятностным законам, приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Вероятностный закон	Плотность вероятности закона	Алгоритм
Показательный закон	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$T_i = -\frac{1}{\lambda} \ln y_i$
Закон Релея	$f(t) = 2\lambda^2 t e^{-(\lambda t)^2}$	$T_i = \frac{1}{\lambda} \sqrt{-\ln y_i}$
Закон Вейбулла	$f(t) = n\lambda^n t^{(n-1)} e^{-(\lambda t)^n}$	$T_i = \frac{1}{\lambda} \sqrt[n]{-\ln y_i}$
Закон равномерной плотности	$F(x) = 1/(b - a)$	$X_i = (b - a) y_i + a$
Нормальный закон	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$X_i = \arg Q(Y_i)\sigma(X) + X_{CP}$

Программа моделирования непрерывной случайной величины, распределенной по закону Вейбулла, и результаты счета по ней могут иметь вид.

PRINT 'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ'

PRINT 'N – ПАРАМЕТР ЗАКОНА'; 'L. – ИНТЕНСИВНОСТЬ'

PRINT 'M – КОЛИЧЕСТВО РАЗЫГРЫВАЕМЫХ ВЕЛИЧИН'

INPUT 'ВВЕДИТЕ N, E, M'; N, L, M

PRINT 'N = '; N, 'L = 'L; 'M = '; M

PRINT 'РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ'

```

FOR I = 1 TO M: R(I) = RND: T(I) = 1 / L*(-LOG(R(I)) ^ (1 / N)
PRINT 'R(' I ')='R(' I '); ' T(' I ')=' T(I)
NEXT: END

```

исходные данные

N – параметр закона; L – интенсивность; M – количество разыгрываемых величин

N = 2; L =2; M = 10

результаты вычислений

R( 1 ) = .0407319	T( 1 ) = .894531
R( 2 ) = .528293	T( 2 ) = .399407
R( 3 ) = .803172	T( 3 ) = .234087
R( 4 ) = .0643915	T( 4 ) = .828066
R( 5 ) = .157805	T( 5 ) = .679411
R( 6 ) = .367305	T( 6 ) = .500391
R( 7 ) = .783585	T( 7 ) = .246919
R( 8 ) = .395769	T( 8 ) = .481384
R( 9 ) = .322346	T( 9 ) = .532006
R( 10 ) = .372165	T( 10 ) = .497096

### **5.3. Решение задач теории массового обслуживания методом Монте-Карло**

Рассмотренные выше способы моделирования различных случайных величин позволяют применять метод Монте-Карло для решения различных инженерных и экономических задач. Так, например, он может применяться для определения числовых характеристик функционирования сложных стохастических процессов. Часто метод Монте-Карло применяют для решения задач теории массового обслуживания, не попадающих под марковский случайный процесс.

#### ***5.3.1. Частные вопросы моделирования случайных процессов систем массового обслуживания***

При исследовании характеристик функционирования систем массового обслуживания (СМО) методами статистического моделирования часто приходится разыгрывать интервалы времени прибытия заявок на обслуживание и время обслуживания заявки распределенных по тому или иному вероятностному закону.

Для реализации этих процессов определяется одним из известных методов равномерно распределенные случайные числа  $y_i = R_i$  в интервале от 0 до 1.

Далее определяем интервалы времени прибытия заявок на СМО по выражению

$$T_i^* = F^{-1}(R_i^*)$$

и время обслуживания  $i$ -й заявки

$$T_i^{**} = F^{-1}(R_i^{**}).$$

Предположим, что СМО имеет два канала обслуживания и два места в очереди. Для данной СМО в зависимости от величин  $T_i^*$  и  $T_i^{**}$  можем иметь четыре варианта ее функционирования.

*1-й вариант.* Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления требований на обслуживание и случайного времени обслуживания заявок были получены следующие числа в минутах:

$$T_{i\text{заявок}}^* = 0; 25; 30; 40; 50 \text{ и т.д.}$$

$$T_{i\text{обсл}}^{**} = 20; 22; 25; 30 \text{ и т.д.,}$$

Полученные значения времени отложим на соответствующих осях рис. 5.6.

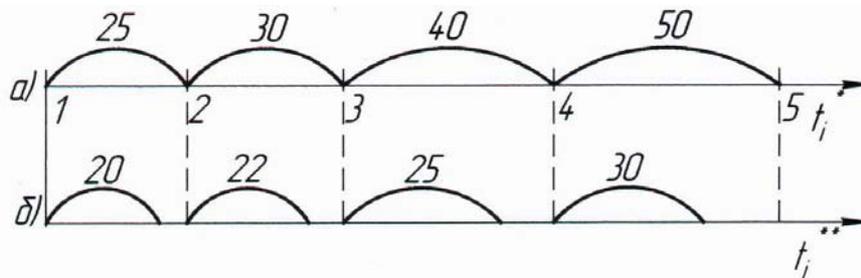


Рис. 5.6. Схема работы СМО: а – время поступления заявок; б – время обслуживания заявок

При этих условиях будет работать только первый канал. Второй канал будет простаивать без работы и заявок, ожидающих в очереди, не будет.

*2-й вариант.* Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и случайного времени обслуживания были получены следующие числа в минутах:

$$T_{i\text{заявок}}^* = 0; 20; 18; 15 \text{ и т.д.,}$$

$$T_{i\text{обсл}}^{**} = 25; 30; 17 \text{ и т.д.}$$

Полученные значения времени отложим на соответствующих осях рис. 5.7.

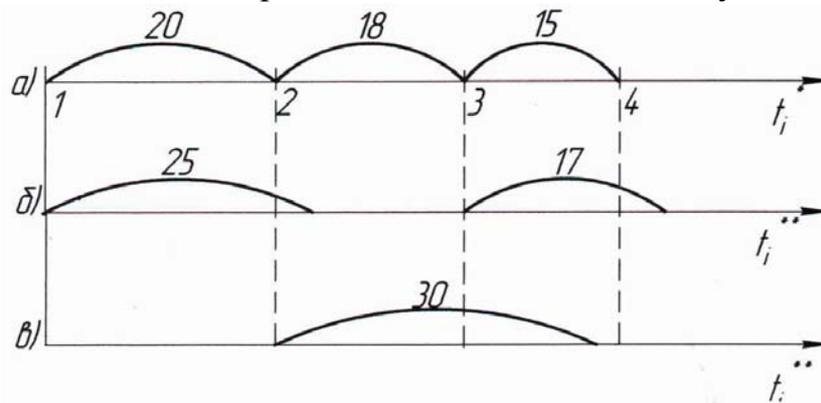


Рис. 5.7. Схема работы СМО: а – время поступления заявок; б – время обслуживания заявок первым каналом; в – время обслуживания вторым каналом

При этих условиях, как видно из рис. 5.7, будут работать оба канала. Заявок, ожидавших в очереди, не будет.

3-й вариант. Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и времени обслуживания были получены следующие числа:

$$T_{i\text{заявок}}^* = 0; 20; 50; 60 \text{ и т.д.},$$

$$T_{i\text{обсл}}^{**} = 3 \text{ ч}; 2 \text{ ч}; 1 \text{ ч } 20 \text{ мин}; 1 \text{ ч } 40 \text{ мин и т.д.}$$

Полученные числа отложим на соответствующих осях рис. 5.8.

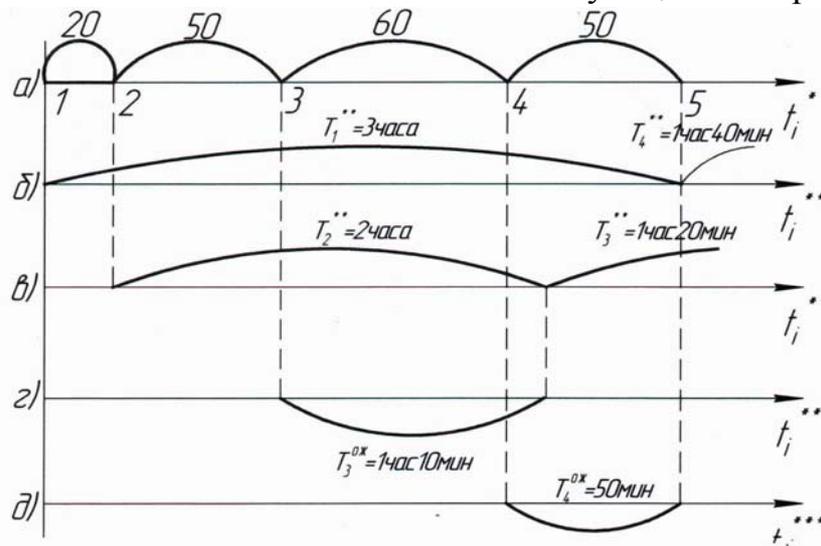


Рис. 5.8. Схема работы СМО: а – время поступления заявки; б – время обслуживания первой и четвертой заявок; в – время обслуживания второй и третьей заявок; г – время нахождения в очереди третьей заявки; д – время нахождения в очереди четвертой заявки

Для заданных условий будут работать оба канала. Третья и четвертая заявки будут ожидать в очереди. Поскольку СМО предусмотрено два места в очереди, поэтому обе заявки (третья и четвертая) будут обслужены.

*4-й вариант.* Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и случайного времени обслуживания их были получены следующие числа:

$$T_{i\text{заявок}}^* = 0; 20; 50; 40; 20; 20 \text{ и т.д.},$$

$$T_{i\text{обсл}}^{**} = 4 \text{ ч}; 3 \text{ ч } 40 \text{ мин}; 4 \text{ ч } 5 \text{ мин}; 4 \text{ ч } 10 \text{ мин и т.д.}$$

Полученные числа отложим на соответствующих осях рис. 5.9.

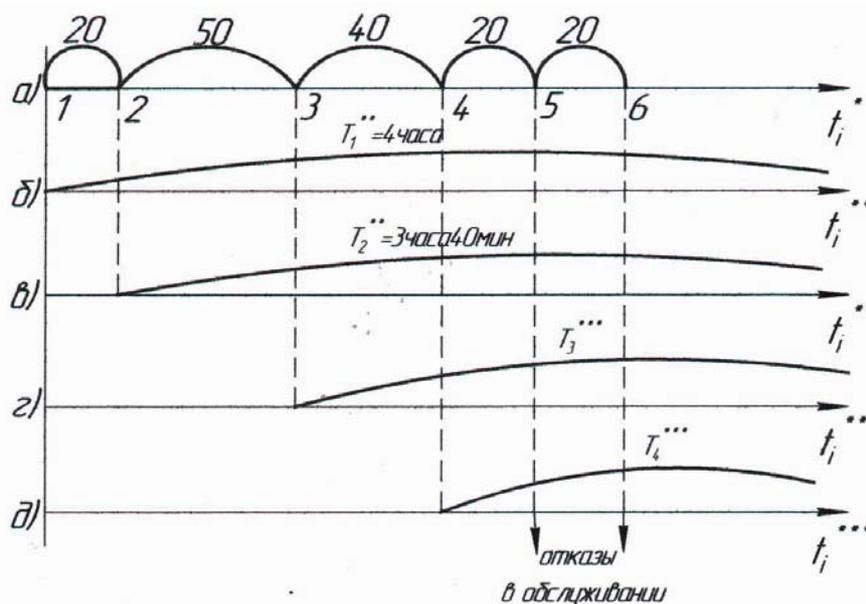


Рис. 5.9. Схема работы СМО: а – время поступления заявки; б – время обслуживания первой заявки; в – время обслуживания второй заявки; г – время нахождения в очереди третьей заявки; д – время нахождения в очереди четвертой заявки

Из рис. 5.9 видно, что для заданных условий будут работать оба канала. Третья и четвертая заявки будут стоять в очереди. Поскольку СМО предусматривает лишь два места в очереди, то пятая и шестая заявки получают отказ в обслуживании и уйдут необслуженными.

Следует учесть, что в СМО могут быть наложены и другие условия на образование очереди.

### 5.3.2. Алгоритм решения задач по определению числовых характеристик систем массового обслуживания

Рассмотрим на примере порядок применения метода статистического моделирования для определения числовых характеристик функционирования станции технического обслуживания автомобилей (СТОА).

Пример. Исследуется эффективность работы СТОА, имеющей в своем распоряжении  $N$  постов. Станция начинает работать в  $T_0 = 8.00$  и заканчивает в  $T_{\text{конц}} = 20.00$ . Станция работает по схеме с ожиданием прибывших машин в очереди с ограничением по времени.

Статистическими наблюдениями установлено, что автомобили прибывают на станцию в случайные моменты времени  $T_i^*$ , при этом время между двумя автомобилями распределено по закону Вейбулла с параметрами  $n, \lambda, L_0$ . Время, расходуемое на обслуживание автомобилей  $T_i^{**}$ , случайно и распределено по закону Релея с параметром  $\mu$ . Время пребывания в очереди  $T_i^{***}$  случайно и распределено по показательному закону с параметром  $\nu$ .

Входными данными для решения поставленной задачи служат  $\lambda, \mu, \nu$ , получаемые на основе статистической обработки экспериментальных данных.

Для указанных условий требуется найти числовые характеристики функционирования системы:

- число обслуживаемых автомобилей;
- число автомобилей, ожидающих в очереди;
- число автомобилей, покидающих очередь необслуженными.

Решение.

Ввиду того, что поток требований на обслуживание не является пуассоновским, а время обслуживания распределено не по показательному закону, задача не может быть решена с помощью основных положений теории массового обслуживания. Примем для её решения метод статистического моделирования.

Целевая функция в рассматриваемой задаче представляет собой производительность работы станции за один рабочий день, есть функция многих случайных аргументов.

$$W = \varphi(T_i^*, T_i^{**}, T_i^{***}, T_0, T_{\text{конц}} \dots),$$

где  $T_0$  – начало работы станции;  $T_{\text{конц}}$  – конец рабочего дня.

Ввиду того что рассматриваемая задача представляет собой некоторый процесс во времени, моделирование работы станции будем осуществлять в дискретной схеме с шагом дискретности, равном одному месяцу. Это означает, что информация о течении процесса будет выдаваться на

первое число каждого текущего месяца. Решение задачи покажем в виде блок-схемы (рис. 5.10).

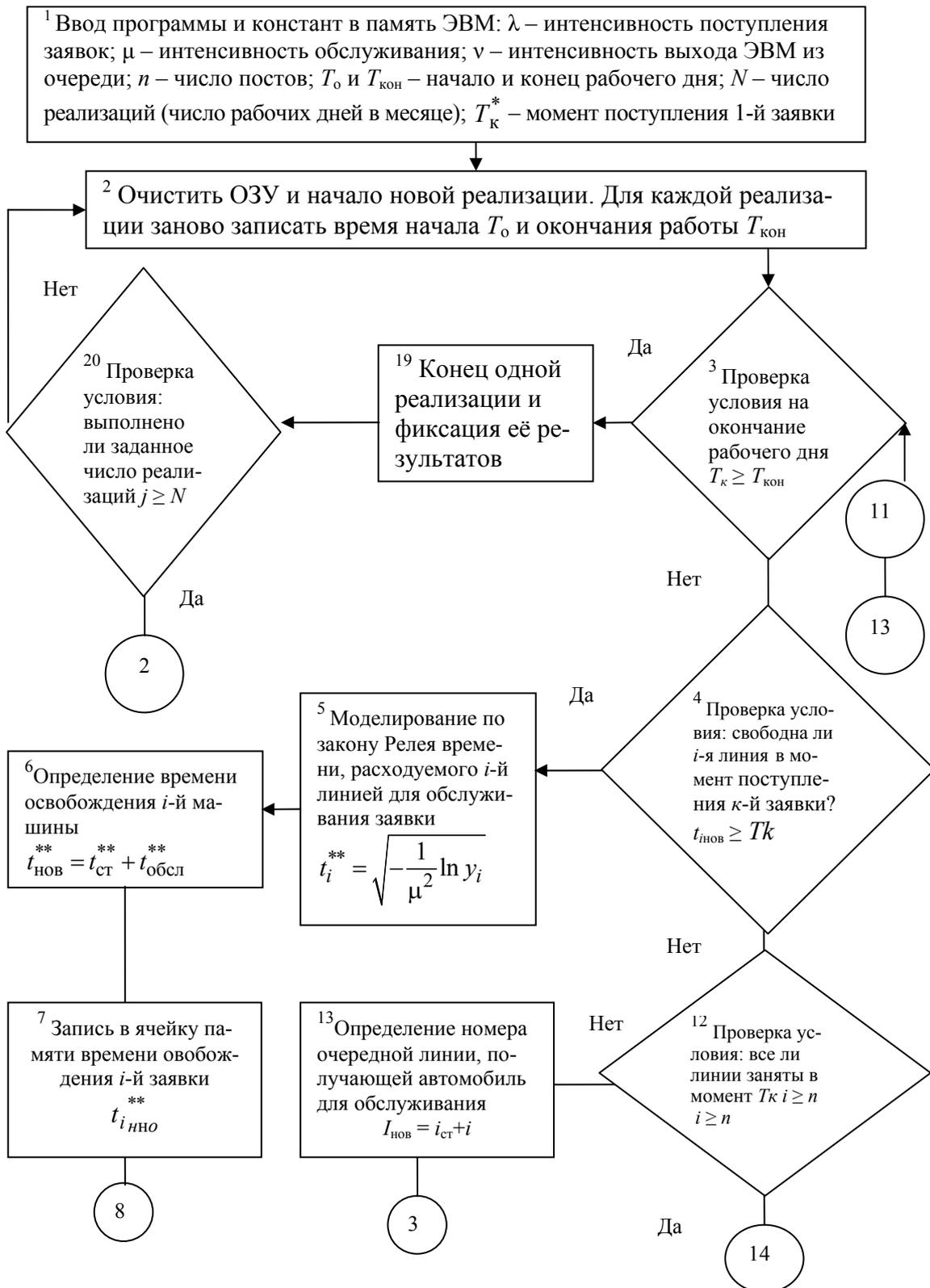


Рис. 5.10. Блок-схема алгоритма решения задачи по определению числовых характеристик функционирования СТОА

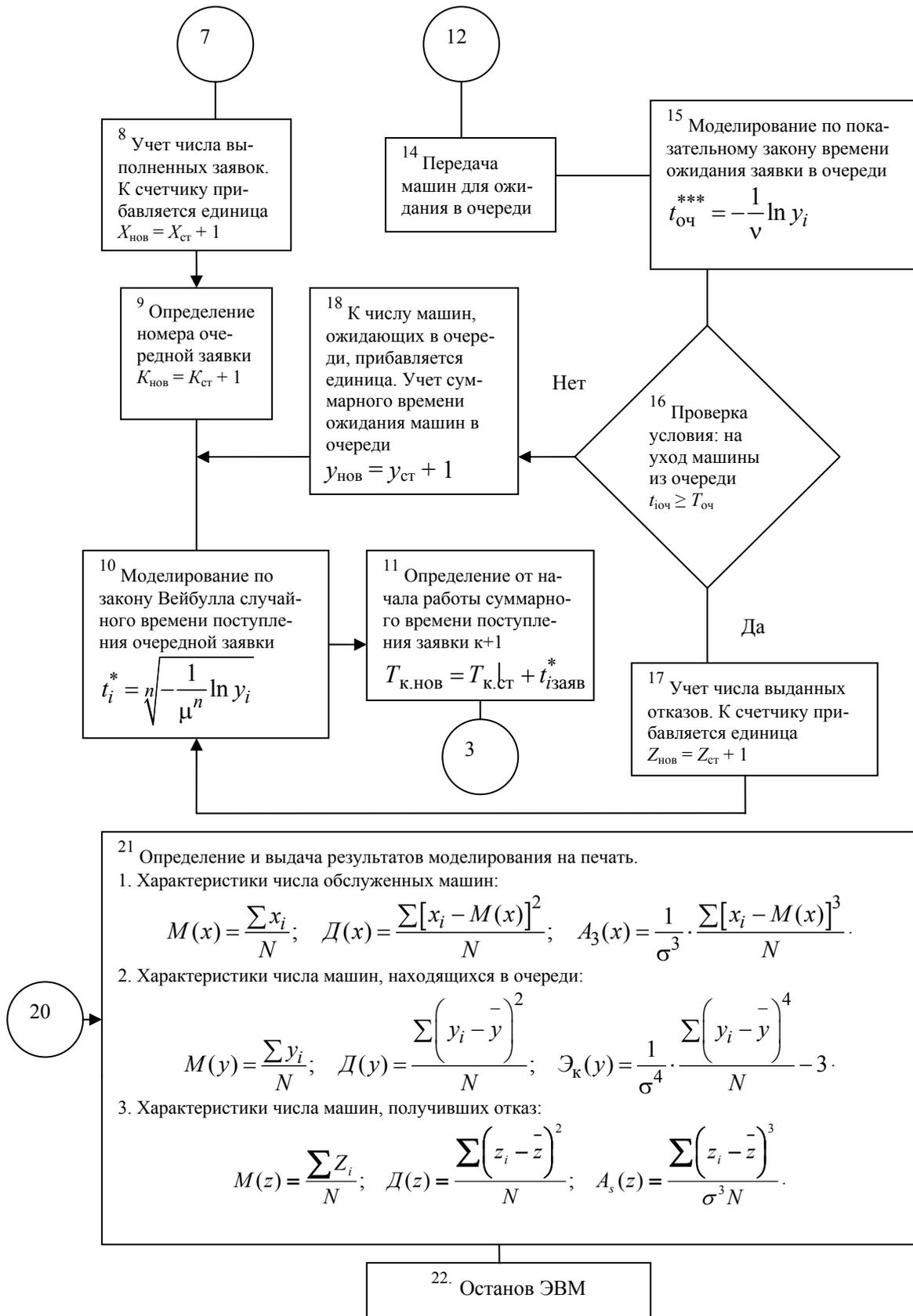


Рис. 5.10. Окончание

**5.3.3. Исследование характеристик функционирования  
станции технического обслуживания автомобилей (СТОА)  
методом Монте-Карло**

Рассмотрим на примере порядок применения метода статистического моделирования для определения числовых характеристик функционирования станции технического обслуживания (СТОА).

Пример. Исследуется СТОА методом статистического моделирования для одной реализации, которая имеет два канала и два места для ожидания в очереди. Интенсивность поступления заявок  $\lambda = 1,5$  заявки в час, интенсивность обслуживания одного канала  $\mu = 0,5$  заявки в час.

1. Составляем размеченный граф состояний (рис. 5.11),

где  $S_0$  – все каналы свободны;

$S_1$  – занят один канал;

$S_2$  – заняты оба канала;

$S_3$  – оба канала заняты и одна заявка в очереди;

$S_4$  – оба канала заняты и две заявки в очереди.

2. Разыгрываем интервалы времени прибытия и время обслуживания заявок, для чего воспользуемся алгоритмом моделирования случайной величины  $T$ , распределенной по показательному закону, т.е.

$$T_i^* = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y_i); \quad T_i^{**} = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - y_i),$$

где  $T_i^*$  – интервал времени прибытия заявок на СМО;

$T_i^{**}$  – время обслуживания  $i$ -й заявки.

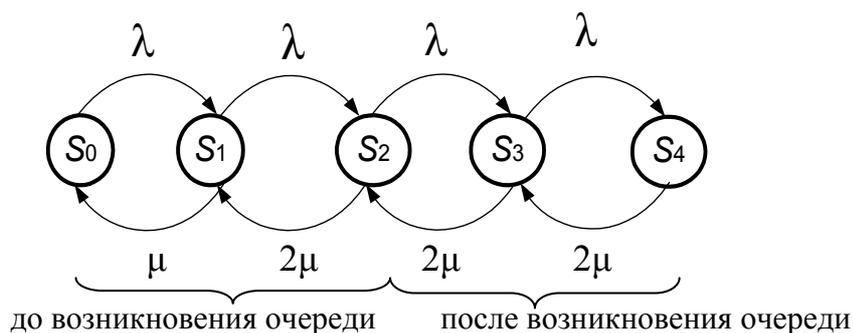


Рис. 5.11. Граф состояний

Случайные числа  $V_i = R_i$  от 0 до 1 берем из табл. П2.1 и П2.2.

3. Составляем таблицу времени прибытия и времени обслуживания заявок (табл. 5.4) и изображаем процедуру моделирования графически (см. рис. 5.11).

Таблица 5.4

## Время прибытия

Номер заявки (розыгрыша)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Случайное число $U_i$	37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80
Промежуток времени между двумя заявками $T_i^*$	0,23	0,39	0,11	0,33	0,02	0,51	1,11	0,32	0,27	1,62	0,14	0,81
Момент прибытия $i$ -й заявки $t_i^*$	0,23	0,62	0,73	1,06	1,08	1,59	1,70	2,02	2,29	3,90	4,04	4,85

## Время обслуживания

Номер заявки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Случайное число $U_i$	47	25	44	52	66	95	27	0,7	99	53	59	36
Время обслуживания $T_i^{**}$	1,27	0,32	1,16	1,47	2,16	5,99	0,63	0,15	9,21	1,51	1,78	0,89
Начало обслуживания $t_{in}^{**}$	0,23	0,62	0,94	1,50	2,10	2,97	Отказ	Отказ	4,26	8,96	Отказ	10,47
Конец обслуживания $t_{ik}^{**}$	1,50	0,94	2,10	2,97	4,26	8,96			13,57	10,47		11,36

Для графического изображения процесса моделирования работы СМО возьмем несколько координатных осей, которые имеют один и тот же масштаб отсчета времени. На первой оси отложим астрономическое время, на второй отметим моменты поступления заявок на обслуживание. На оси  $S_0$  изобразим состояние системы, когда все каналы свободны, на осях  $S_1$  и  $S_2$  – состояние первого и второго каналов, на осях  $S_3$  и  $S_4$  – состояние первого и второго мест в очереди.

До момента  $t_1^*$  – прихода первой заявки – все каналы и все места в очереди свободны. В момент приходит первая заявка и занимает первый канал. Сколько времени он будет занят, решается разыгрыванием.

Первое разыгранное значение времени обслуживания откладываем на оси  $S_1$  от точки с абсциссой  $t_1^*$ , отмечаем его жирной линией. В момент  $t_2^*$  – прихода второй заявки – первый канал занят, заявка занимает второй канал. Разыгрываем еще одно значение  $T_2^{**}$  и обозначаем жирной линией на оси  $S_2$  от точки с абсциссой  $t_2^*$  и т.д.

Заявка, пришедшая в момент, когда все каналы и места в очереди заняты, получает отказ (она покидает СМО необслуженной).

Предположим, что моделирование реализации продолжено нами достаточно долго. Определим вероятные характеристики СМО. Вероятности  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  того, что система находится в состоянии  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$ , найдем по отношениям

$$p_0 \approx \frac{\sum T_0}{T}; \quad p_1 \approx \frac{\sum T_1}{T}; \quad p_2 \approx \frac{\sum T_2}{T}; \quad p_3 \approx \frac{\sum T_3}{T}; \quad p_4 \approx \frac{\sum T_4}{T},$$

где  $\sum T_0, \sum T_1, \sum T_2, \sum T_3, \sum T_4$  – суммы времени нахождения системы в состояниях  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4$  (берутся из данных рис. 5.12);  $T$  – рассматриваемый интервал времени (8 часов).

Очевидно,  $\sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2 + \sum T_3 + \sum T_4 = T$ .

Вероятность отказа найдется на большом участке времени  $T$  как отношение числа  $N^*$  заявок, получивших отказ, к общему числу заявок, поступивших за это время:

$$P_{\text{отк}} = \frac{N^*}{N};$$

- относительная пропускная способность  $q = 1 - P_{\text{отк}}$ ;
- абсолютная пропускная способность  $Q = \lambda q$ ;
- среднее число занятых каналов  $\bar{p} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4)$ ;

– среднее число заявок в очереди  $\bar{m} = 0(p_0 + p_1 + p_2) + 1p_3 + 2p_4$ .

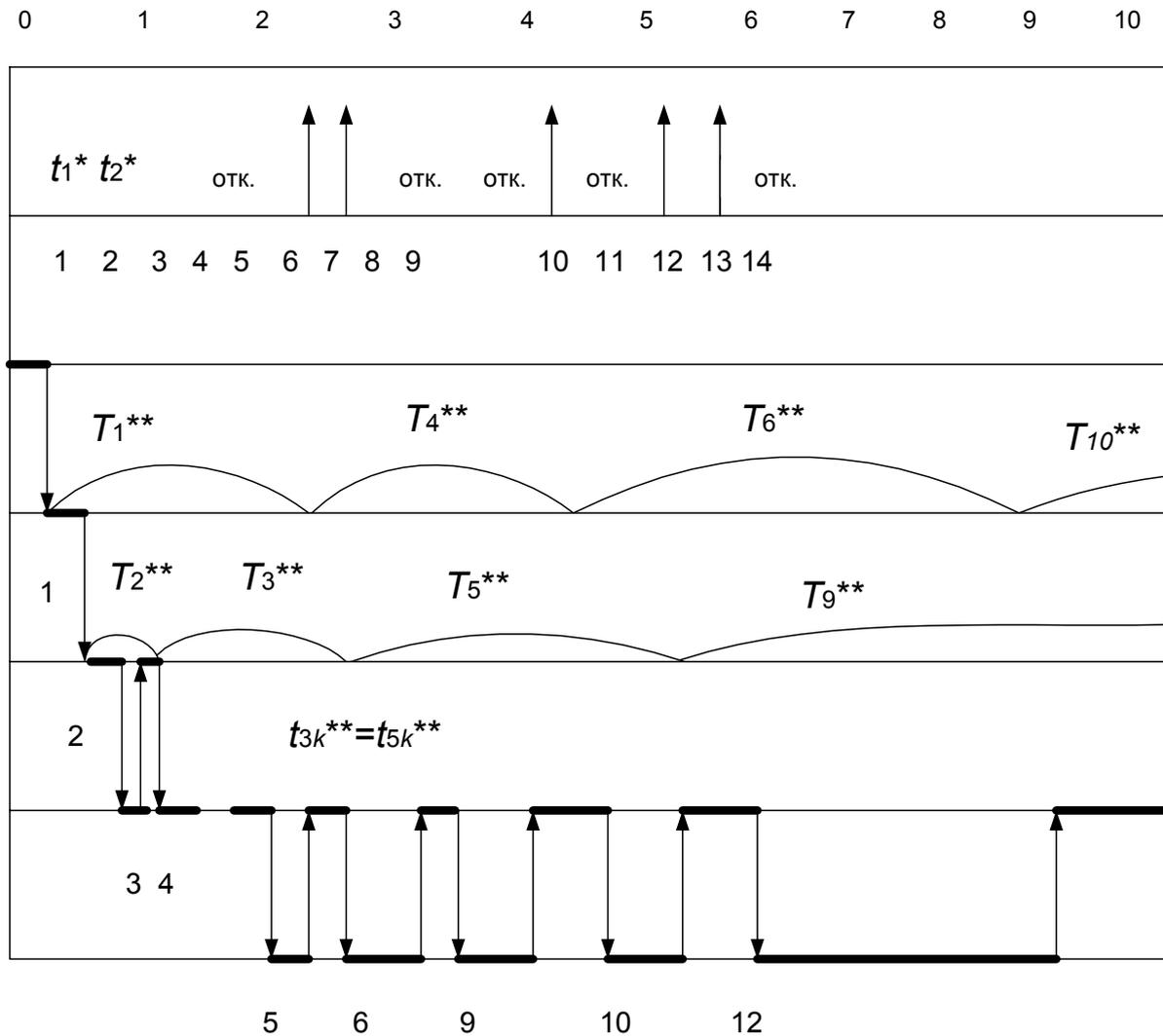


Рис. 5.12. Графический процесс моделирования

#### 5.4. Моделирование потребности предприятия в запасных частях

При планировании и управлении уровнями запасных частей (узлов, агрегатов) на складах АТП (центральном, промежуточном, оборотных агрегатов) в ряде случаев необходимо учитывать несколько случайных факторов, которые имеют место в процессе функционирования технической службы и службы снабжения предприятия. К ним относятся: случайное время отказа автомобиля, случайное время пополнения запасов, случайные величины потребности и объемы пополнения запасных частей. Поэтому в

практике расчетов потребности запасных частей широкое распространение нашел метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), позволяющий моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы.

#### 5.4.1. Статистическая модель управления запасами

Расчет потребности в запасных частях (узлах, агрегатах) методом статистического моделирования рассмотрим на примере работы склада, с которого в произвольный момент времени  $t$  по требованию выдается случайное количество агрегатов (узлов, запасных частей) одного наименования  $V_t$ . Если в данный момент  $t$  запас  $X$  на складе достаточен, то запрос  $V_t$  удовлетворяется полностью. Если запас недостаточен для полного удовлетворения требования, то он удовлетворяется только на величину запаса, имеющегося на складе. В последнем случае предприятие несет потери от дефицита, величина которых пропорциональна количеству недоданных технической службе агрегатов, т. е.  $C_{\text{деф}} = \kappa(V_t - X)$ , где  $\kappa$  – потери предприятия из-за простоя одного автомобиля при дефиците агрегатов на складе.

Поступление агрегатов на склад предприятия от поставщиков происходит также в случайные моменты времени  $\tau$  и в случайном объеме  $Y_t$ . Затраты на содержание и хранение агрегатов на складе  $C_{\text{хр}} = \lambda \bar{X}$ , где  $\lambda$  – стоимость хранения и содержания одного агрегата на складе за период  $T$ ;  $\bar{X}$  – средний запас на складе за период  $T$ .

Необходимо найти такой плановый уровень начального запаса агрегатов  $X_0$  на складе, при котором суммарные издержки предприятия будут минимальными:  $(C_{\text{деф}} + C_{\text{хр}}) \rightarrow \min$  (рис. 5.13).

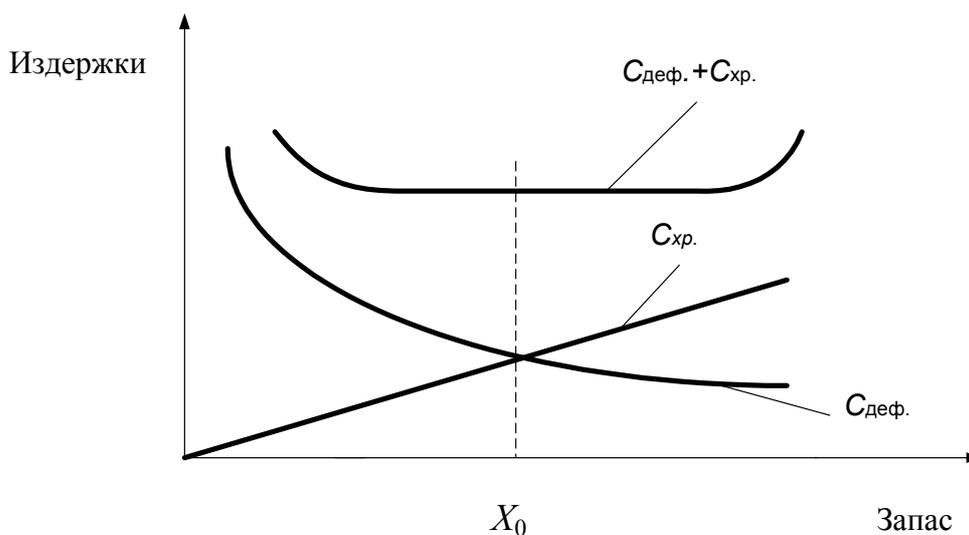


Рис. 5.13. Зависимость издержек предприятий от величины начального запаса

Таким образом, здесь имеют место четыре случайные величины: момент поступления требования на отпуск агрегатов со склада  $t$ ; объем этого требования  $V_t$ ; момент поступления агрегатов на склад от поставщиков  $\tau$  и объем этой поставки  $Y_\tau$ .

Законы распределения указанных случайных величин устанавливаются на основе обработки информации, содержащейся в карточках складского учета.

Для дальнейшего решения задачи введем величины:

$V_{i+1} = t_{i+1} - t_i$  – длительность интервала между  $(i + 1)$ -й и  $i$ -й выдачей агрегатов со склада;

$\mu_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$  – длительность интервала между  $(i + 1)$ -й и  $i$ -й поставками агрегатов на склад.

Так как  $\tau_i$  и  $t_i$  – величины случайные, следовательно, величины  $v_{i+1}$  и  $\mu_{i+1}$  будут также случайными.

Для решения данной задачи необходимы исходные данные, в качестве которых могут служить различные значения планового уровня начального запаса агрегатов  $X_0$ .

Расчеты на ЭВМ при различных исходных данных по всему плановому периоду  $T$  (год) позволяют имитировать реальные процессы, протекающие на предприятии, для чего значения случайных величин устанавливаем с помощью генератора случайных чисел, закон распределения которых должен соответствовать закону распределения случайных величин по данному предприятию.

В результате расчетов по всем выбранным уровням начального запаса  $X_0$  выявляем зависимость суммарных затрат за весь период по хранению запаса агрегатов и из-за дефицита в случае отказа в удовлетворении требований из-за отсутствия агрегатов на складе.

#### **5.4.2. Алгоритм процесса моделирования**

Процесс моделирования потребности предприятия в запасных частях (узлах, агрегатах) представляем блок-схемой на рис. 5.14, который предполагает следующие операции.

1. Установить начальные значения запаса  $X = X_0$ .
2. В соответствии с взятыми на складе данными первичного учета и их распределениями с помощью датчика случайных чисел получить величины длительности интервалов  $v_i$  и  $\mu_i$  и определить момент первого поступления требования на выдачу агрегата со склада или поступления на склад  $t_1 = t_0 + v_1$ ;  $\tau_1 = \tau_0 + \mu_1$ .

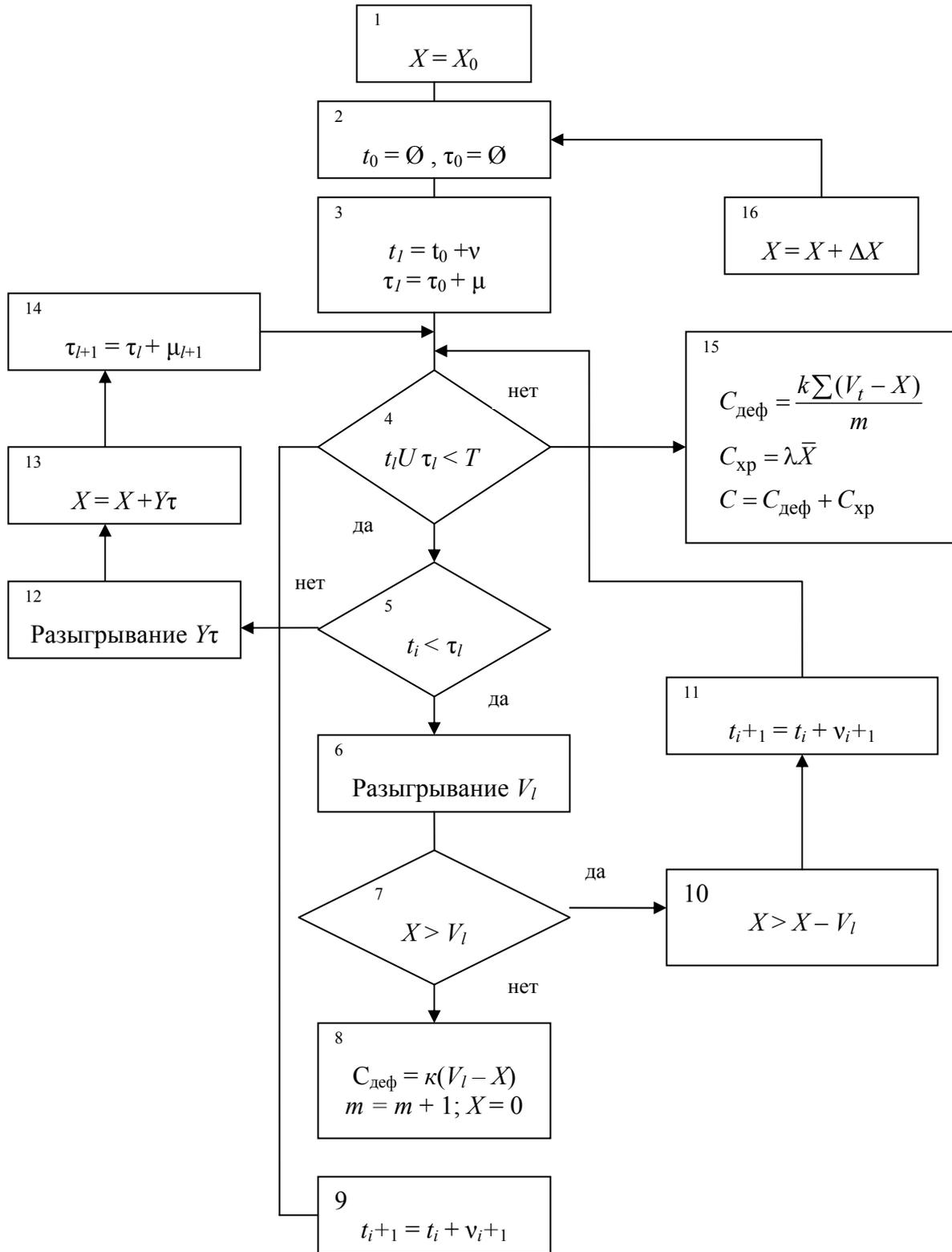


Рис. 5.14. Блок-схема процесса моделирования потребности предприятия в запасных частях

3. До начала моделирования время равно нулю:  $t_0 = 0$ ;  $\tau_0 = 0$ .
4. Проверить, истекло ли время моделирования ( $t_i \cup \tau_i < T$ )?  
Нет – выполняем п. 5, да – п. 15.
5. Проверить, что поступило раньше поставка на склад или требование на отпуск? Требование – п. 6, поставка – п. 12.
6. Аналогично п. 3 определить случайную величину требования.
7. Проверить, превосходит ли величина требования имеющийся запас?  
Да – п. 8, нет – п. 10.
8. Определить размер потерь из-за дефицита при неполном удовлетворении требования  $C_{\text{деф}} = \kappa(V_\tau - X)$ , зафиксировать случай дефицита ( $m = m + 1$ ), запас снижаем до нуля ( $X = 0$ ).
9. Определить момент следующего поступления требования на склад, т. е. случайную величину  $V_i$ :  $t_{i+1} = t_i + v_{i+1}$ . Перейти к п. 4.
10. Требование на выдачу агрегатов полностью удовлетворяется, так как оно меньше имеющегося запаса, и запас уменьшается на величину  $V_i$ :  $X = X - V_i$ .
11. Определить момент следующего поступления требования на склад, т.е. случайную величину  $V_i$ :  $t_{i+1} = t_i + v_{i+1}$ . Перейти к п. 4.
12. При поступлении поставки от поставщика на склад аналогично п. 3 определить случайную величину объема этой поставки, т. е. величину  $Y_\tau$ .
13. Запас увеличивается на величину поставки  $X = X + Y_\tau$ .
14. Аналогично п. 3 определить случайную величину момента поступления следующей поставки  $\mu_\tau$ :  $\tau_{i+1} = \tau_i + \mu_{i+1}$ . Перейти к п. 4.
15. Время моделирования истекло, т.е. закончился период  $T$ . Определяются величина средних потерь из-за дефицита  $C_{\text{деф}} = \frac{\kappa \sum (V_t - X)}{m}$  и затраты предприятия на хранение  $C_{\text{хр}} = \lambda \bar{X}$ .
16. Повторить процесс моделирования для нового значения номинального запаса  $X = X_0 + \Delta X$ . Перейти к п. 2.

Процесс моделирования повторяется для многих значений величины начального запаса, пределы которого изменяются от минимальной до максимальной величины в соответствии с вместимостью склада.

Шаг изменения начального запаса  $\Delta X$  выбирается таким образом, чтобы было возможно по результатам расчета графически представить зависимость суммарных затрат предприятия от величины начального запаса

и найти кривую с точкой, в которой достигается минимум функции суммарных издержек.

Программа моделирования потребности предприятия в запасных частях на ЭВМ может иметь вид (представленный прил. 7).

### 5.5. Моделирование оптимальной периодичности технических воздействий

Периодичность технических воздействий (ТВ) – это нормативная наработка (в километрах пробега или часах работы) между двумя последовательно проводимыми однородными работами ТО или ТР.

Различают следующие методы определения (корректирования) периодичности ТВ: простейшие (методы аналогии по прототипу); аналитические, основанные на результатах наблюдений и основных закономерностях ТЭА; имитационные, основанные на моделировании случайных процессов.

Наиболее разработанными и предпочтительными являются аналитические методы определения периодичности ТВ, к которым относятся:

1) метод определения периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности основан на выборе такой рациональной периодичности ТО, при которой вероятность отказа  $F$  элемента не превышает заранее заданной величины, называемой риском (рис. 5.15).

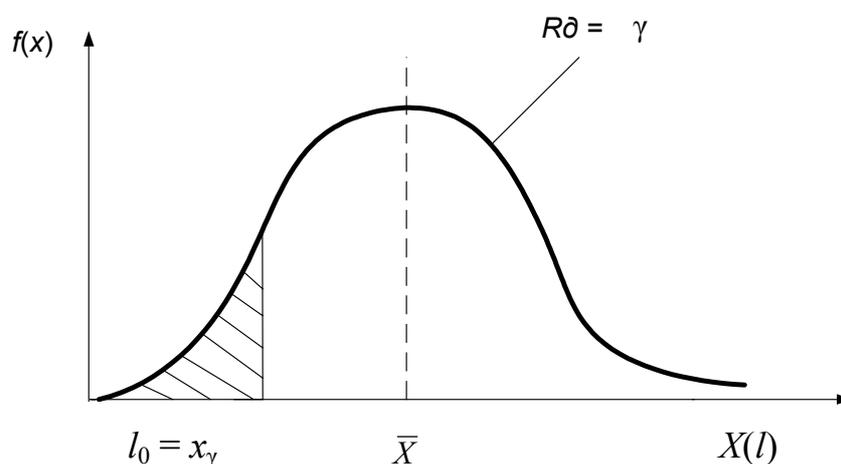


Рис. 5.15. Определение периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности

Вероятность безотказной работы  $P_d$ , при которой наработка на отказ больше назначенной периодичности обслуживания  $l_0$ , определяет безотказность элемента автомобиля

$$P_{\text{д}} \{x_i \geq l_0\} = R_{\text{д}} = \gamma, \quad \text{т.е. } l_0 = x_{\gamma},$$

где  $x_i$  – наработка на отказ;  $R_{\text{д}}$  – допустимая вероятность безотказной работы;  $\gamma = 1 - F$ ;  $x_{\gamma} - \gamma$  – процентный ресурс;  $F$  – вероятность отказа.

Для агрегатов и механизмов, обеспечивающих безопасность движения,  $R_{\text{д}} = 0,90 - 0,98$ . Для прочих узлов и агрегатов  $R_{\text{д}} = 0,65 - 0,90$ ;

2) технико-экономический метод сводится к определению суммарных удельных затрат на ТО и ремонт автомобилей и их минимизации. Минимальным суммарным затратам соответствует оптимальная периодичность технического обслуживания  $l_0$ . При этом удельные затраты на ТО

$$C_{\text{ТО}} = d/l,$$

где  $l$  – периодичность ТО;  $d$  – стоимость выполнения операций ТО. Увеличение периодичности ТО, как правило, приводит к сокращению ресурса элемента и росту удельных затрат на ремонт

$$C_{\text{р}} = C/L,$$

где  $C$  – разовые затраты на ремонт;  $L = l$  – периодичность.

Выражение  $u = C_{\text{ТО}} + C_{\text{р}} \rightarrow \min$  является целевой функцией, экстремальное значение которой соответствует оптимальному решению. Определение минимума целевой функции и оптимальности  $l_0 = l_{\text{опт}}$  значения периодичности ТО проводится графиком (рис. 5.16).

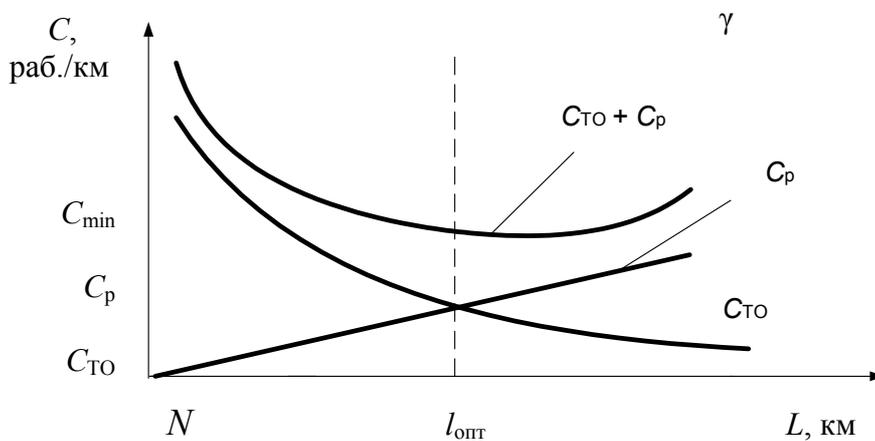


Рис. 5.16. График оптимизации периодичности ТВ технико-экономическим методом

### 5.5.1. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по допустимому уровню безотказности

В процессе работы группы автомобилей возникают отказы конкретного узла, механизма автомобиля, наработка которых  $X_i$  случайна и подчи-

няется одному из известных законов распределения:  $f(x); \bar{x}; V_x; \sigma_x$ . По данному узлу, механизму может выполняться предупредительное техническое обслуживание с установленной периодичностью  $l$ . В реальных условиях фактическая периодичность ТО  $l_i$  главным образом из-за изменений среднесуточного пробега автомобилей также имеет некоторую вариацию и характеризуется законом распределения  $\varphi(l), \bar{l}; \sigma_l$  и  $V_l$ .

Если периодичность определяется по допустимому уровню безотказности, то задача формулируется следующим образом.

Необходимо определить оптимальную периодичность ТО  $l_0$ , при которой вероятность безотказной работы будет не ниже заданной, т.е.  $R \geq R_d$ .

Если рассматриваемый процесс происходит под действием произвольного потока событий, то его математическую модель построить трудно. В этом случае можно использовать метод статистического моделирования (метод Монте-Карло).

Рассмотренная выше методика позволяет получить случайные величины  $X_i$  и  $l_i$ , распределенные соответственно по законам  $f(x)$  и  $\varphi(l)$ .

Итак, очевидный смысл имитационного моделирования оптимизации периодичности в рассматриваемом примере состоит:

- 1) в воспроизводстве и фиксации двух возможных событий:  
А – отказа автомобиля, если  $X_i < l_i$ ;  
Б – выполнения ТО, т.е. предупреждение отказа, если  $X_i \geq l_i$ ;
- 2) определении вероятностей этих событий, соответственно  $P(A) = F$  (отказ) и  $P(B) = R$  (профилактика);
- 3) сравнении фактического ( $R$ ) и заданного значения вероятности безотказной работы ( $R_d$ ).

Последовательность имитационного моделирования оптимизации периодичности технических воздействий по допустимому уровню безотказности элементов автомобилей представление алгоритмом на рис. 5.17.

В блоке 1 предусмотрена подготовка исходных данных для моделирования значений массивов  $[x]$  и  $[l]$  соответственно: наработка на отказ и периодичность технических воздействий; назначение допустимого уровня безотказности  $R_d$  и объема реализаций  $M$ .

Банки исходных данных формируются или из фактических значений  $X_i$  и  $l_i$ , полученных за определенный период времени на предприятии по отчетным данным, или расчетом на основе характеристик законов распределения  $f(x)$  и  $\varphi(l)$ , если они известны. Для чего используются генераторы случайных чисел (блоки 2 и 3). Получаем массив случайных величин  $X_i$  и  $l_i$  называемой реализацией (блок 4).

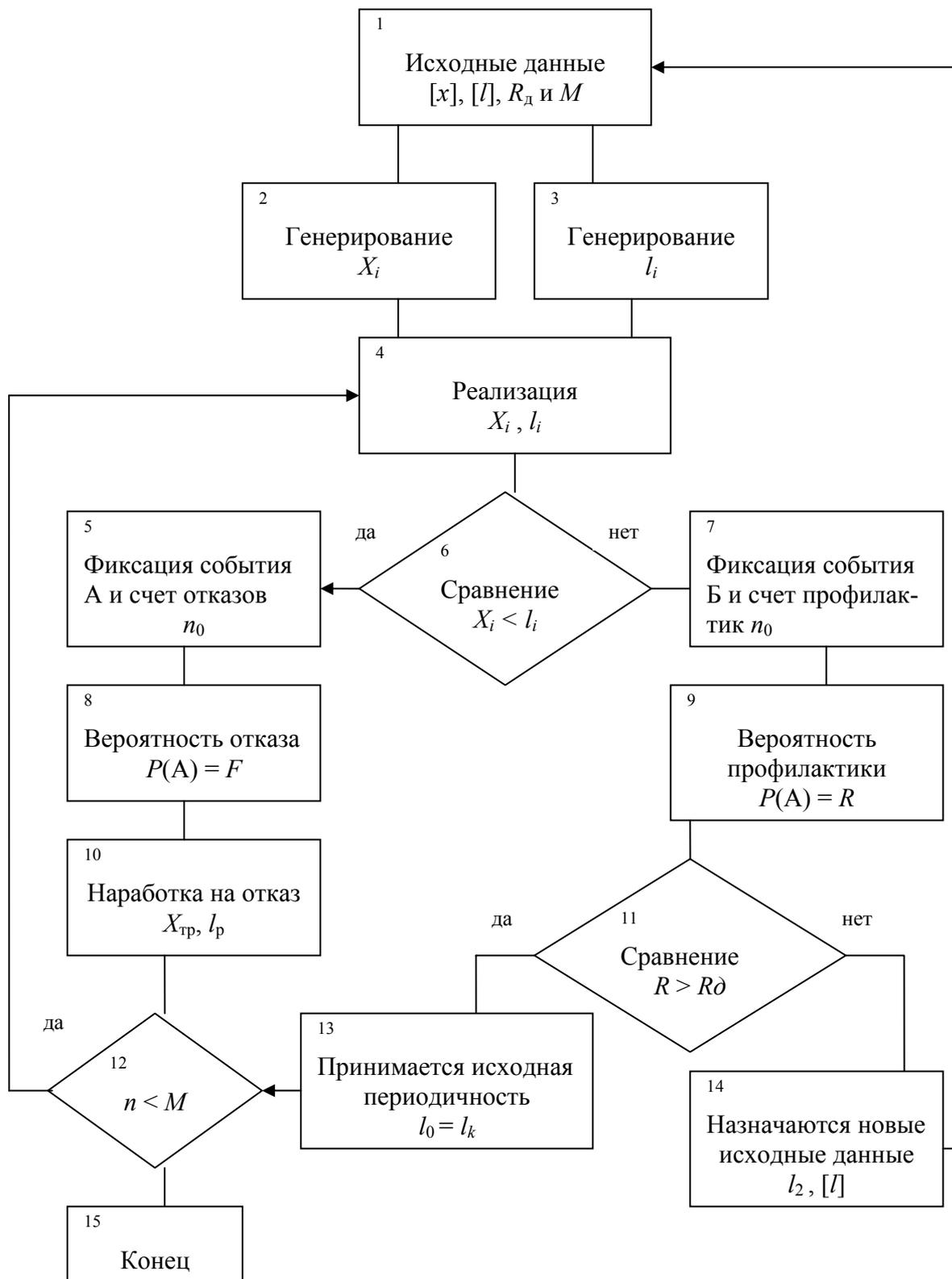


Рис. 5.17. Блок-схема алгоритма моделирования оптимальной периодичности ТО по безотказности

В блоке б производится сравнение  $X_i$  и  $l_i$  и фиксация событий А или Б.

Если наработка до отказа меньше периодичности ТО:  $X_i < l_i$ , то событие А – отказ (блок 5), или наработка больше или равна периодичности ТО:  $X_i \geq l_i$ , то событие Б – выполнение ТО, т. е. безотказная работа узла при данной реализации (блок 7).

При многократном повторении реализаций в блоках 5 и 7 определяются числа событий А и Б:

$N_0$  – число зафиксированных при моделировании ТО (событий Б);

$n = n_0 + n_n$  – общее число реализаций.

Необходимое число реализаций определяется, исходя из требуемой точности оценки вероятности наступления событий А и Б.

Блоки 8 и 9 предусматривают определение вероятностей событий А и Б.

$P(A) = F \approx \frac{n_0}{n}$  – вероятность отказа (блок 8);

$P(B) = R \approx \frac{n_n}{n}$  – вероятность профилактики (блок 9).

В блоке 11 предусматривается сравнение полученного значения вероятности безотказной работы  $R$  с заданной  $R_d$ .

Если  $R \geq R_d$ , то поставленная цель достигнута, а выбранная периодичность является рациональной  $l_k = l_0$  (блок 13). При этом оценка наработки на случай текущего ремонта в межосмотровые периоды (блок 10)

$$X_{\text{ТР}} \approx \frac{\sum_{z=1}^Z X_z}{n_0},$$

где  $z$  – количество событий, соответствующих отказу.

Если  $R < R_d$ , то всю процедуру имитационного моделирования необходимо повторить, но при новом значении исходной периодичности  $\bar{l}_2 < \bar{l}_1$  (блок 14).

### **5.5.2. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по экономическим показателям**

Так как целевая функция технико-экономического метода оптимизации периодичности технического обслуживания элементов автомобиля в общем виде описывается выражением

$$C_{\text{общ}}(l_{\text{об}}) = \frac{C_{\text{отк}}}{l_{\text{н}}} + \frac{C_{\text{об}}}{l_{\text{об}}} \Rightarrow \min,$$

где  $C_{\text{общ}}(l_{\text{об}})$  – средняя (удельная) стоимость ремонта и технического обслуживания;

$C_{\text{отк}}$  – средняя стоимость устранения отказа;

$l_{\text{н}} = \bar{x}$  – средняя наработка на отказ;

$C_{\text{об}} = \bar{d}$  – средняя стоимость операции технического обслуживания;

$l_{\text{об}}$  – наработка на выполнение операций технического обслуживания.

Поэтому при моделировании оптимальной периодичности ТО необходимо иметь массивы данных:

$[x]$  – массив наработки на отказ;

$[l]$  – массив наработки на выполнение операций ТО;

$[C]$  – массив разовых затрат на устранение отказа;

$[d]$  – массив разовых затрат на выполнение операций ТО.

Последовательность имитационного моделирования оптимальной периодичности ТО рассматриваемым методом изображена на рис. 5.18 и включает следующие элементы:

- 1) задание исходных данных:  $[x]$ ,  $[l]$ ,  $[c]$ ,  $[d]$ ,  $M$  (блок 1);
- 2) генерирование и реализация  $X_i$ ,  $l_i$ ,  $C_i$ ,  $d_i$  (блоки 2 – 8);
- 3) идентификация событий:  $X_i < l_i$  – отказ (блок 9),  $X_i \geq l_i$  – профилактика (блок 11);
- 4) определение вероятностей событий  $F$  и  $R$  (блоки 14, 15);
- 5) в блоках 8, 9 и 13 определяется суммарная удельная стоимость ТО и ремонта одной реализации

$$C_{\Sigma}(l_k) = C_{\text{ТО}} + C_{\text{ТР}}.$$

При многократном повторении процедуры моделирования в блоке 16 вычисляется среднее значение суммарной удельной стоимости ТО и ремонта для исходной периодичности  $l_i$  по формуле

$$\bar{C}_{\Sigma}(l_k) = \frac{\sum C_{\Sigma}}{n}, C,$$

где  $n$  – число реализации при исходной периодичности  $l_1$ ;

7) блок 18 предусматривает повторение всей процедуры моделирования для следующих значений периодичности ТО:  $(\bar{l}_2; \bar{l}_3; \bar{l}_k \dots \bar{l}_r)$ ;

8) в блоках 19, 20 производится сравнение полученных значений  $\bar{C}_{\Sigma}(l_k)$  и выбор оптимальной периодичности, соответствующей минимальному значению целевой функции, т.е.  $l_0 = l_2$  при  $C_{\Sigma}(l_2) = U_{\text{min}}$ ;

9) уровень безотказности при оптимальном решении оценивается соотношением  $R \cong \frac{n_n}{n}$ , полученным в цикле моделирования для  $l_2 = l_0$  (блок 15);

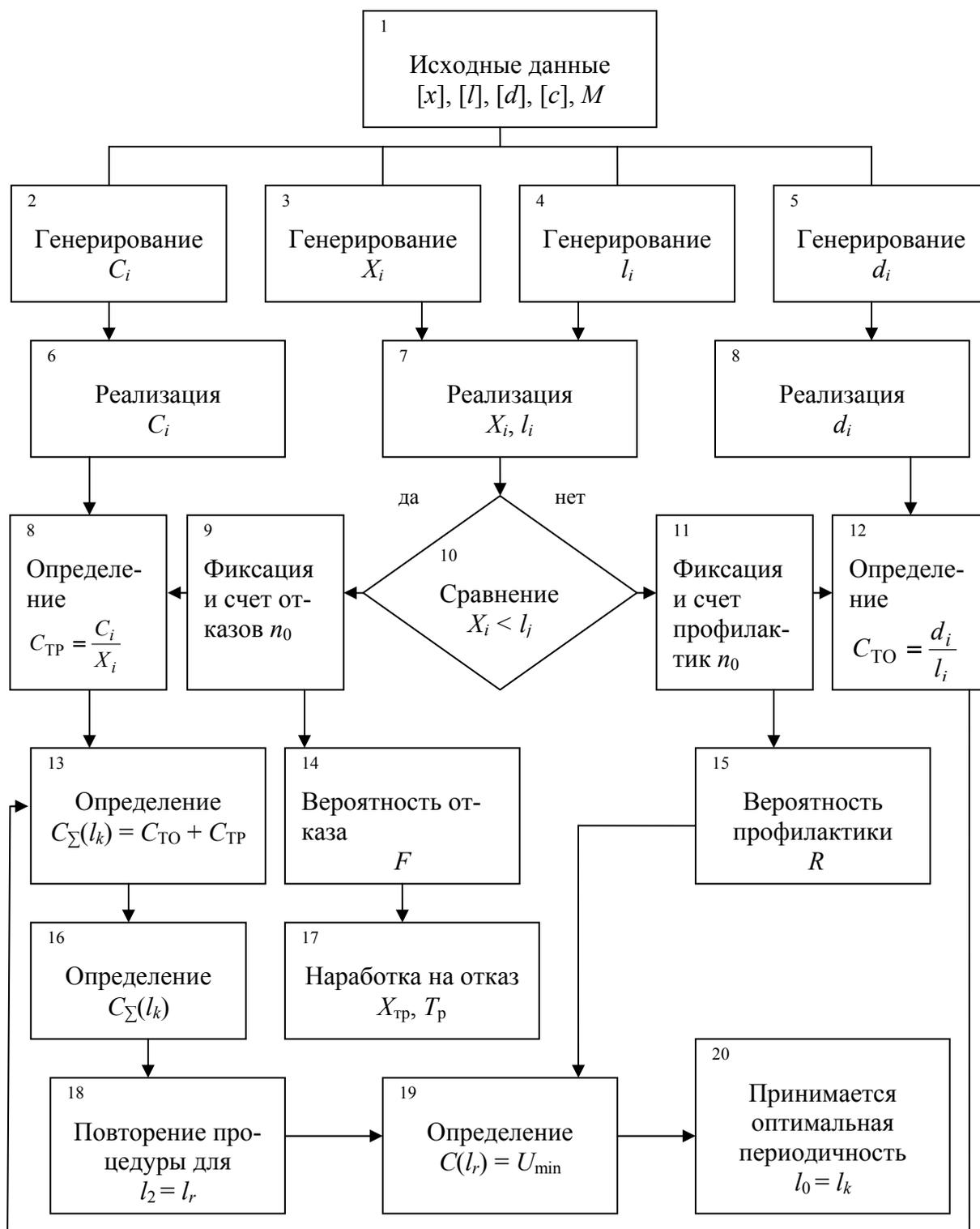


Рис. 5.18. Блок-схема алгоритма моделирования оптимальной периодичности ТО технико-экономическим методом

10) замыкающая проверка полученных результатов осуществляется по формуле

$$C_{\Sigma} = \frac{cF + dR}{l_0R + \bar{l}_pF},$$

где  $c$  и  $d$  – средние исходные значения стоимости устранения отказа и операций технического обслуживания;

$l_0$  – оптимальное значение периодичности ТО;

$\bar{l}_p$  – средняя наработка на отказ;

$$\bar{l}_p \cong \bar{X}_{TP} = \frac{\sum_{Z=1}^Z X_Z}{n_0},$$

где  $z$  – количество событий оптимального цикла, соответствующих отказу.

### Контрольные вопросы

1. Перечислите преимущества имитационного моделирования.
2. Перечислите основные этапы статистического моделирования.
3. В чем сущность метода Монте-Карло?
4. Каковы особенности моделирования дискретной случайной величины?
5. Каковы особенности моделирования непрерывной случайной величины?
6. Какие типы задач автомобильного транспорта целесообразно решать методом статистического моделирования.
7. Какова последовательность розыгрыша интервала времени прибытия заявок на обслуживание и времени обслуживания заявок?
8. Числовые характеристики функционирования СТОА.
9. Особенности моделирования функционирования СТОА методом Монте-Карло.
10. Перечислите случайные факторы, которые имеют место при планировании и управлении уровнями запасных частей на складах АТП.
11. Запишите целевую функцию издержек предприятия от величины начального запаса и назовите её составляющие.
12. Последовательность моделирования потребности предприятия в запасных частях.
13. Перечислите методы определения и корректирования периодичности технических воздействий.
14. Особенности метода определения периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности элементов автомобиля.
15. Особенности технико-экономического метода определения оптимальной периодичности ТВ.

## **Глава 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ**

Сетевое планирование – метод научного планирования и управления производственными процессами, выполняющими большие объемы работ.

Методы сетевого планирования находят широкое применение во многих отраслях народного хозяйства, в том числе и на автомобильном транспорте.

На автомобильном транспорте методами сетевого планирования описываются процессы технического обслуживания и ремонта автомобилей, перевозочные и строительные процессы и т.д.

Сетевое планирование имеет ряд преимуществ:

- обеспечивает наглядность технологической последовательности работ;
- позволяет составить оперативные и текущие планы, а также прогнозировать сложные процессы;
- позволяет выявить скрытые ресурсы времени и материальных средств при выполнении производственных процессов и значительно повысить их эффективность.

Чтобы приступить к сетевому планированию (моделированию) того или иного производственного процесса, необходимо иметь перечень, последовательность и продолжительность (трудоемкость) выполнения операций (работ), соответствующих рассматриваемому производственному процессу.

Сетевое планирование сопровождается построением рабочих таблиц и сетевых графиков, к рассмотрению элементов которых мы и перейдем.

### **6.1. Элементы сетевых графиков**

При построении сетевых графиков используют два логических понятия (элемента) – работа и событие.

В сетевом планировании термин «работа» предусматривает процесс, предшествующий совершению какого-либо события. Термин «событие» выражает собой определенный результат выполнения работы (или работ).

На сетевом графике события изображают кружком, а работы – ориентированными стрелками.

Фрагмент сетевого графика приведен на рис. 6.1.

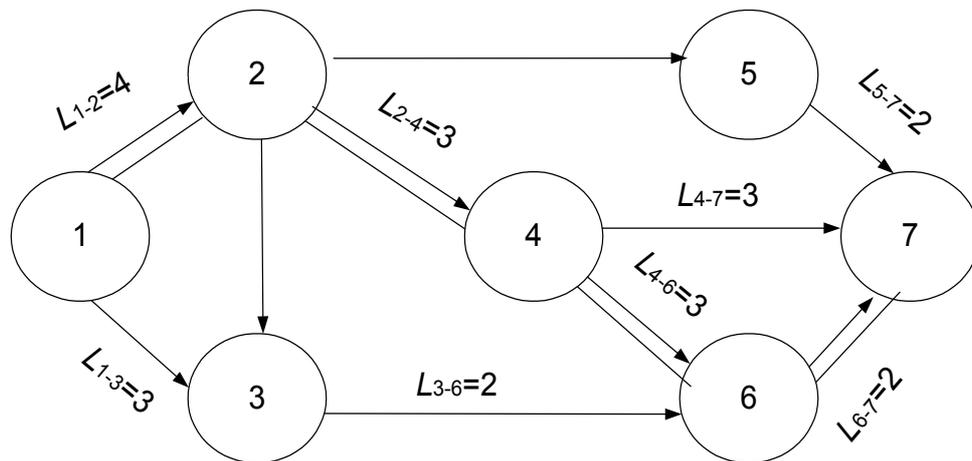


Рис. 6.1. Фрагмент сетевого графика

Каждому событию присваивается определенный номер (обычно цифрой), т.е. 1, 2, 3 и т.д.

Каждая работа, изображенная на сетевом графике стрелкой, объединяет только два события, поэтому принято работу на сетевом графике обозначать номерами предшествующего ( $i$ -го) и последующего ( $j$ -го) событий, т.е. 1 – 2, 2 – 5, 5 – 7 и т.д.

Продолжительность работы проставляется над стрелками, т. е.  $L_{1-2} = 4$ ,  $L_{2-5} = 5$  и т.д.

Сетевой график представляет собой последовательность работ и событий, отражающих их технологическую взаимосвязь.

На сетевом графике выделяют два события: начальное (1) (исходное) и конечное (7) (завершающее). Все остальные события называются промежуточными.

Исходное событие отражает начало выполнения всего комплекса работ и не имеет предшествующего события.

Завершающееся событие отражает конечную цель всего комплекса работ и не имеет последующего события.

Термин «работа» включает три понятия.

1. «Фактическая работа», т.е. трудовой процесс, приводящий к достижению определенных результатов и требующих затрат времени и ресурсов.

2. «Ожидание» – технологический перерыв в работе, не требующий затрат труда, но требующий затрат времени (высыхание краски, отверждение цемента и т.д.).

3. «Зависимость» (фиктивная работа) – логическая связь между событиями, не требующая затрат времени и ресурсов, но показывающая, что возможность начала одной работы зависит от результатов другой.

На сетевых графиках фактическую работу и ожидание изображают сплошными стрелками, а зависимости – пунктирными.

Сетевой график строят в масштабе или без масштаба. В последнем случае обязательно над стрелками проставляют продолжительность работы в единицах времени.

Любая последовательность работ от одного события к другому (любому) называется путем и обозначается  $L(2 - 5 - 7)$ , т. е. каждый путь обозначают буквой  $L$  и номерами событий, через которые он проходит.

Длина любого пути определяется суммарной продолжительностью составляющих его работ.

Полный путь – это путь от исходного до завершающего события.

В сетевом графике, как правило, имеется несколько полных путей с различной продолжительностью.

Так, для нашего примера имеем пять полных путей, длина которых

$$L_1(1 - 2 - 5 - 7) = 4 + 5 + 1 = 10;$$

$$L_2(1 - 2 - 4 - 7) = 4 + 3 + 3 = 10;$$

$$L_3(1 - 2 - 4 - 6 - 7) = 4 + 3 + 3 + 2 = 12;$$

$$L_4(1 - 2 - 3 - 6 - 7) = 4 + 1 + 2 + 2 = 9;$$

$$L_5(1 - 3 - 6 - 7) = 4 + 2 + 2 = 8.$$

Полный путь, имеющий максимальную продолжительность, называют критическим путем.

Работы, лежащие на критическом пути, называются критическими работами.

Для нашего примера  $L_{кр}(1 - 2 - 4 - 6 - 7) = 12$  единиц времени. Для большей наглядности его выделяют двойными или жирными линиями.

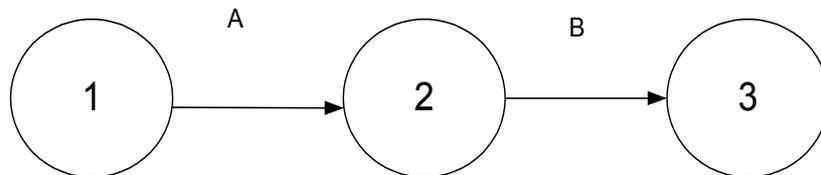
Критический путь ( $L_{кр}$ ) определяет общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

Полные пути, продолжительность которых меньше  $L_{кр}$ , называются не критическими. У них имеется резерв времени, в пределах которого время выполнения работ может быть увеличено, что не приводит к увеличению общей продолжительности наступления завершающего события.

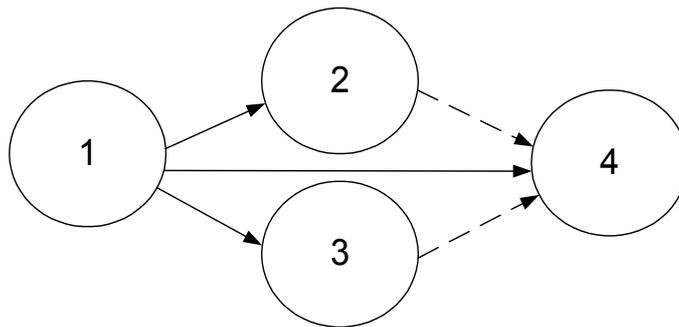
## 6.2. Правила построения сетевых графиков

При построении сетевых графиков необходимо учитывать следующие правила.

1. Между двумя событиями на графике может находиться только одна работа.

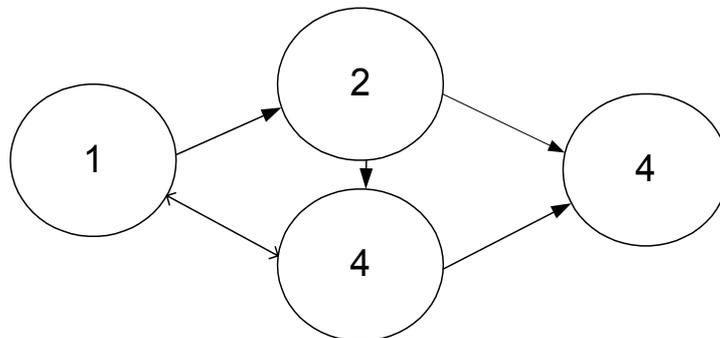


2. Если одно событие служит началом нескольких работ, которые заканчиваются также в одном событии, то необходимо ввести фиктивные работы и дополнительные события со своими номерами.

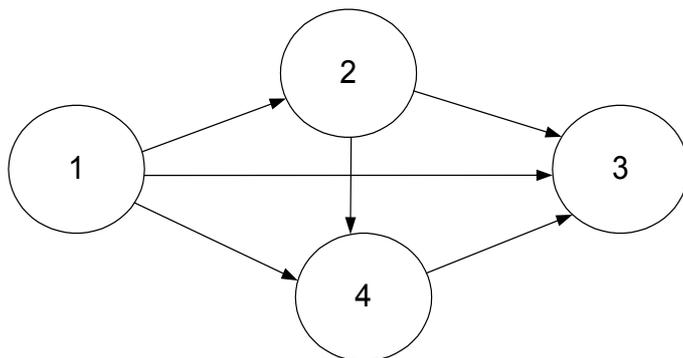


3. Все события, кроме завершающего, должны иметь последующую работу. Наличие «тупиков» в сети указывает на ошибку. Также в сети не должно быть событий, в которые не входит ни одна работа (исключение составляет исходное событие).

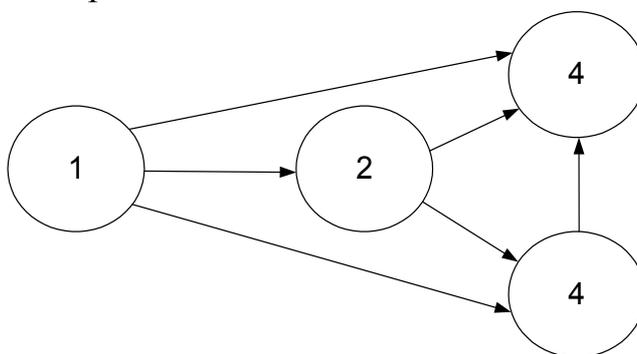
4. В сетевом графике не должно быть замкнутых контуров, т.е. путей, которые начинаются и заканчиваются в одном и том же событии.



5. При построении сетевых графиков следует избегать взаимного пересечения стрелок:



Правильное изображение сети:



### 6.3. Процесс построения сетевых графиков

Процесс сетевого планирования и управления (СПУ) включает в себя четыре взаимосвязанных этапа.

1. Описание комплекса работ, определение их продолжительности и последовательности.

2. Построение сетевого графика.

3. Расчет и анализ параметров сетевого графика.

4. Оптимизация сетевого графика, контроль и оперативное управление ходом выполнения комплексом работ.

Пример. Составить сетевой график сменно-суточного плана перевозки грузов автомобильным транспортом.

1. Определяем перечень работ в составе сетевого графика (табл. 6.1).

2. Построение сетевого графика.

При этом пользуемся основными правилами построения сетевых графиков, а также учитываем, что взаимосвязанные работы выполняются последовательно, независимые работы выполняются как последовательно, так и параллельно.

Строим сетевой график сменно-суточного плана перевозки грузов (рис. 6.2).

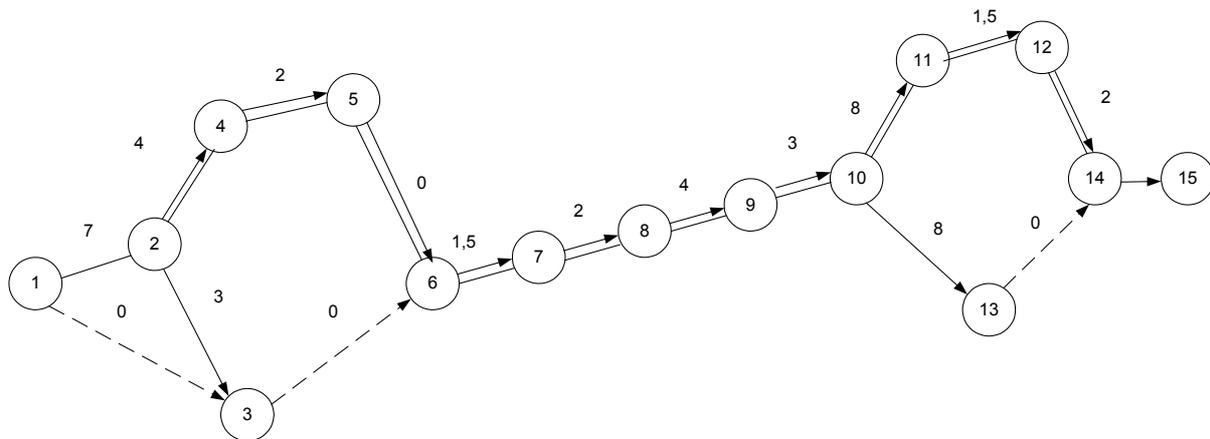


Рис. 6.2. Сетевой график сменно-суточного плана перевозки грузов

Таблица 6.1

№ п/п	Наименование работ	Код работ	Продолжительность, ч
1	Получение заявки на перевозку грузов от клиентуры	1 – 2	7
2	Определение корреспондирующих точек и расстояний между ними	2 – 3	3
3	Определение объемов перевозок	2 – 4	4
4	Выбор подвижного состава для осуществления перевозок	4 – 5	2
5	Фиктивная работа (зависимость)	5 – 6	0
6	Разработка рациональных маршрутов перевозок	6 – 7	1,5
7	Расчет потребного парка подвижного состава	7 – 8	2
8	Составление маршрутных ведомостей (разрядки)	8 – 9	4
9	Выписка путевых листов	9 – 10	3
10	Доставка грузов потребителям	10 – 11	8
11	Контроль за работой подвижного состава на линии	10 – 13	8
12	Прием товарно-транспортных документов	11 – 12	1,5
13	Обработка товарно-транспортных документов	12 – 14	2
14	Составление диспетчерского отчета	14 – 15	2

*Примечание.* Продолжительность работ выбрана условно.

При построении сетевого графика использованы следующие основные правила.

1. События обозначают кружочками, внутри ставится номер события (выделяются начальное, конечное и промежуточные события).

2. События соединяются ориентированной стрелкой, которая направлена от предшествующего события к последующему (стрелка представляет собой на сетевом графике работу).

3. Любые два события могут быть соединены не более чем одной стрелкой.

4. В начальное событие не входит ни одна стрелка.

5. Из конечного события не выходит ни одна стрелка.

6. События сетевого графика нумеруются так, чтобы для каждой работы номер начального события был меньше, чем номер конечного.

7. Каждую работу кодируют двумя цифрами. Первая цифра означает начало работы и соответствует номеру предшествующего события.

8. Продолжительность работы проставляется над стрелками.

9. Часть работ выполняется последовательно (6 – 7), (7 – 8), (8 – 9) и т.д. Это означает, что начало каждой последующей работы зависит от окончания предшествующей.

10. Работы (10 – 11), (10 – 13) могут начинаться в один и тот же момент времени с наступлением события 10. Эти работы не зависят во времени одна от другой и могут выполняться параллельно.

11. Фиктивные работы (1 – 3), (3 – 6) и т.д. устанавливают логическую взаимосвязь, и продолжительность их равна 0.

12. Весь комплекс работ завершается, как только окончится работа (14 – 15) и свершится событие 15.

Составление сетевого графика сменно-суточного плана перевозок этим считается законченным.

При разработке сетевых графиков необходимо учитывать следующие условия.

1. Ни одно условие не может произойти до тех пор, пока не будут заключены все входящие в него работы.

2. Ни одна работа, выходящая из данного события, не может начинаться до тех пор, пока данное событие не произойдет.

На сетевом графике выдается критический путь для последующей его минимизации. Для чего определяют время начала и окончания каждой операции, время наступления каждого события, а также устанавливают возможность изменения этих параметров с целью оптимизации сетевой модели.

## 6.4. Расчет параметров сетевой модели

Расчет параметров сетевой модели ведется для полных путей, событий и работ.

При расчетах определяют следующие параметры:

1) для полных путей сетевого графика:

–  $t(L_i)$  – продолжительность любого полного пути;

–  $t(L_{кр})$  – продолжительность критического пути;

–  $R(L_i)$  – полный резерв времени пути.

2) для событий:

–  $T_i^{(p)}, T_i^{(n)}$  – ранний и поздний сроки совершения события;

–  $R_i$  – резерв времени события.

3) для работ:

–  $t_{ij}^{(рн)}, t_{ij}^{(ро)}$  – ранний срок начала и окончания работ;

–  $t_{ij}^{(пн)}, t_{ij}^{(по)}$  – поздний срок начала и окончания работ;

–  $r_{ij}^{(п)}, r_{ij}^{(св)}$  – полный и свободный резервы времени работы.

При расчете этих параметров используют графический и табличный методы.

### 6.4.1. Расчет продолжительности полного пути

1. Расчет продолжительности любого полного пути осуществляется по формуле

$$t(L_i) = \sum_{L_i} t_{ij}.$$

Расчет сведем в табл. 6.2.

Таблица 6.2

№ п/п	Путь $L_i$	Продолжительность пути $t(L_i)$	Резерв $R(L_i)$	Примечание
1	1 – 2 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14 – 15	$7 + 4 + 2 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 1,5 + 2 + 2 = 37$	0	Критический путь
2	1 – 2 – 4 – 5 – 6 – 2 – 8 – 9 – 10 – 13 – 14 – 15	$7 + 4 + 2 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0 + 2 = 33,5$	3,5	
3	1 – 2 – 3 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14 – 15	$7 + 3 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 1,5 + 2 + 2 = 34$	3,0	
4	1 – 2 – 3 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 13 – 14 – 15	$7 + 3 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0 + 2 = 30,5$	4,5	
5	1 – 3 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 14 – 15	$0 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 1,5 + 2 + 2 = 24$	13,0	
6	1 – 3 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 13 – 14 – 15	$0 + 0 + 1,5 + 2 + 4 + 3 + 8 + 0 + 2 = 20,5$	16,5	

2.  $t(L_h) = \max \sum_{L_i} t_{ij}$  – продолжительность критического пути (в нашем

примере это путь 1).

3. Полный резерв времени пути

$$R(L_i) = t(L_{кр}) - t(L_i).$$

Повышение суммарной продолжительности всех работ, лежащих на пути  $L_i$ , на величину  $R(L_i)$  не увеличивает время наступления завершающего события.

#### 6.4.2. Расчет времени наступления событий

Расчет произведем на сетевом графике (рис. 6.3).

При графическом методе записи расчетных параметров осуществляются непосредственно на сетевом графике.

Для чего каждый кружок сетевого графика делим на четыре части (секторы), в этих секторах записываются следующие данные:

- верхний – предназначен для записи номера события  $i$ ;
- правый – для записи раннего срока свершения события  $T_i^p$ ;
- левый – для записи позднего срока свершения события  $T_i^n$ ;
- нижний – для записи резерва времени события  $R_i$ .

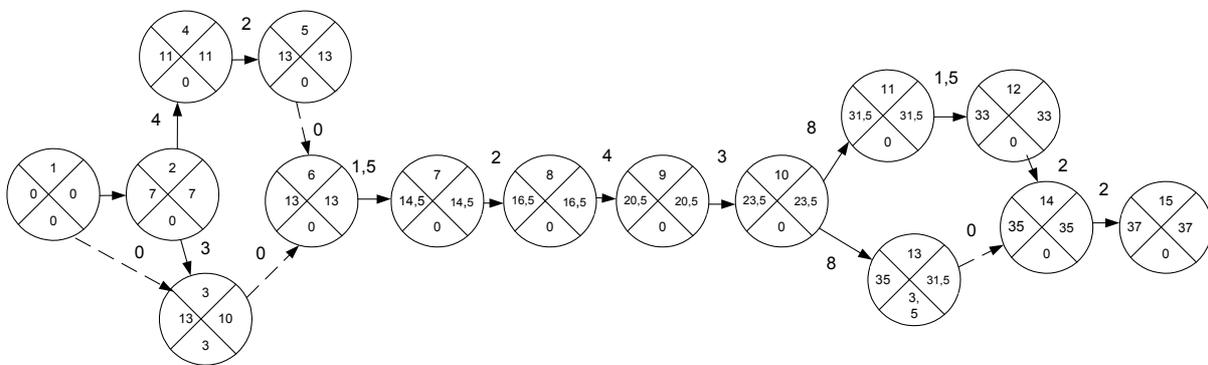


Рис. 6.3. Сетевой график с указанием времени наступления событий

1. Наиболее ранний срок поступления  $i$ -го события в сети  $T_i^p$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $i$  – одно из событий сети.

$T_i^p$  – минимально необходимое время между наступлением начального и данного события.

Для начального события  $T_1^P = 0$  – наиболее ранний срок равен 0. При расчете  $T_i^P$  последовательно переходят от начального события к событию, все более от него удаленному. Тогда для любого другого события  $j$  этот показатель определяется по формуле

$$T_j^P = \max \left[ T_i^P + t_{ij} \right],$$

где  $T_i^{(P)}$  – наиболее ранний срок поступления события  $i$ , предшествующего событию  $j$ ;  $t_{ij}$  – продолжительность работы ( $i - j$ ).

Для конечного события сетевого графика наиболее ранний срок наступления его равен продолжительности критического пути и называется критическим временем сетевого графика.

2. Наиболее поздний срок наступления события в сети  $T_i^N$ .

Этот показатель рассчитывается от конца сетевого графика к началу, т.е. в направлении, обратном определению наиболее раннего срока наступления событий.

Для конечного события ( $k$ ) делается предположение, что наиболее ранний срок его наступления равен наиболее позднему сроку, т.е.

$$T_k^P = T_k^N.$$

Для критического пути также верно равенство

$$T_{кр}^P = T_{кр}^N.$$

Тогда для начального –  $T_1^N = 0$ .

Для других событий сетевого графика  $T_i^N$  определяется по формуле

$$T_i^N = \min \left[ T_j^N - t_{ij} \right],$$

где  $T_j^N$  – наиболее поздний срок наступления последующего события  $j$ ;

$t_{ij}$  – продолжительность работы ( $i - j$ ).

Этот показатель определяет наиболее допустимое время наступления события, не требующее увеличения времени на осуществление всего комплекса работ.

Допустимый срок наступления события  $T_j^D$

$$T_j^P \leq T_j^D \leq T_j^N.$$

Данное неравенство показывает, что допустимый срок наступления события должен находиться в диапазоне изменений от наиболее раннего срока наступления до наиболее позднего срока наступления данного события.

Для критических событий

$$T_{\text{крс}}^p = T_{\text{крс}}^d = T_{\text{крс}}^n.$$

3. Резерв времени событий  $R_i$ .

Рассчитав ранние и поздние сроки наступления каждого события, можно определить резервы времени событий по формуле

$$R_i = T_i^n - T_i^p.$$

Резервы времени всех критических событий равны 0.

$$R_{\text{икр}} = 0.$$

### 6.4.3. Расчет времени выполнения работ

Расчет времени выполнения работ проводят после того, как определены  $T_i^p$  и  $T_i^n$  для всех событий.

1. Ранний срок начала работ ( $t_{ij}^{p.H}$ ) равен раннему сроку наступления события, из которого исходит данная работа (рис. 6.4), т.е.

$$t_{ij}^{p.H} = T_i^p.$$

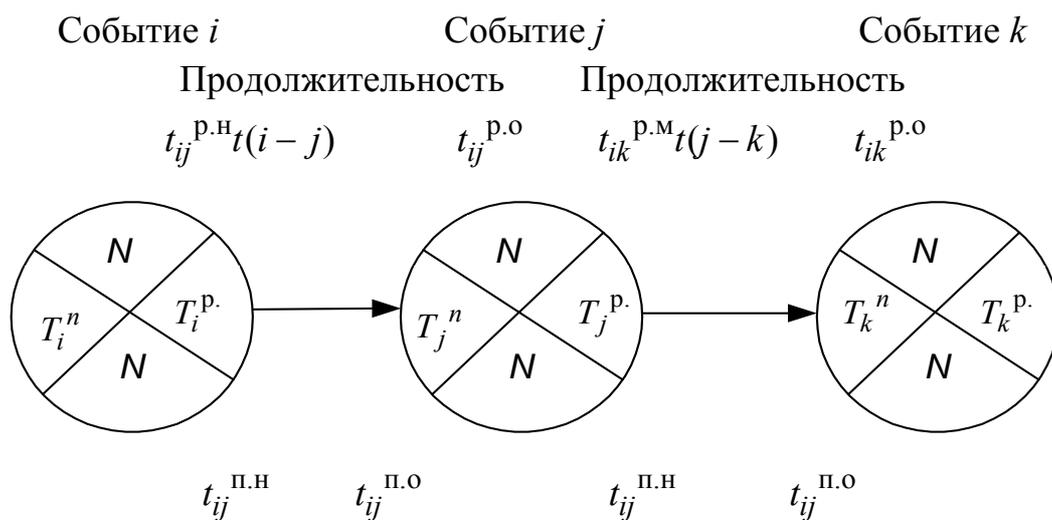


Рис. 6.4. Фрагмент сетевого графика

Если эту оценку выразить через характеристики работ, то можем записать:

$$t_{jk}^{p.H} = t_{ij}^{p.H} + t_{ij},$$

где  $t_{ij}$  – предшествующая работа;  $t_{jk}$  – последующая работа.

2. Ранний срок окончания работы определяется путем прибавления к раннему сроку начала работы продолжительности самой работы

$$t_{ij}^{p.o} = T_i^p + t_{ij} \quad \text{или} \quad t_{ij}^{p.o} = t_{ij}^{p.H} + t_{ij}.$$

3. Поздний срок окончания работы равен позднему сроку наступления последующего события

$$t_{ij}^{п.о} = T_j^n \quad \text{или} \quad t_{ij}^{п.о} = t_{jk}^{п.о} - t_{ij}.$$

4. Поздний срок начала работы находится путем вычитания из позднего срока наступления последующего события продолжительности работы, т.е.

$$t_{ij}^{п.H} = T_j^n - t_{ij} \quad \text{или} \quad t_{ij}^{п.H} = t_{ij}^{п.о} - t_{ij}.$$

5. Полный резерв времени работы показывает время, на которое можно перенести начало данной работы (или увеличить её продолжительность), не изменяя при этом длины критического пути и определяется по формулам

$$r_{ij}^n = t_{ij}^{п.H} - t_{ij}^{p.H} \quad \text{или} \quad r_{ij}^n = T_j^n - T_i^p - t_{ij}.$$

Для всех работ, лежащих на критическом пути,  $r_{крij}^п = 0$ .

6. Свободный резерв времени работы – часть полного резерва времени работы, которая сохраняется у нее при условии, что начальное событие работы совершится в самый поздний срок, а конечное – в самый ранний срок и определяется по формулам

$$r_{ij}^{св} = r_{ij}^n - R_i - R_j \quad \text{или} \quad r_{ij}^{св} = T_j^p - T_i^п - t_{ij}.$$

Результаты расчета временных характеристик работ рассматриваемого сетевого графика сведены в табл. 6.3.

Таблица расчета временных характеристик сетевого графика

№ п/п	Код работы	Продолжительность работ	Начало работ		Окончание работ		Запас времени
			раннее	позднее	раннее	позднее	полный
1	1 – 2	7	0	0	7	7	0
2	2 – 3	3	7	10	10	13	3
3	2 – 4	4	7	7	11	11	0
4	4 – 5	2	11	11	13	13	0
5	5 – 6	0	13	13	13	13	0
6	6 – 7	1,5	13	13	14,5	14,5	0
7	7 – 8	2	14,5	14,5	16,5	16,5	0
8	8 – 9	4	16,5	16,5	20,5	20,5	0
9	9 – 10	3	20,5	20,5	23,5	23,5	0
10	10 – 11	8	23,5	23,5	31,5	31,5	0
11	10 – 13	8	23,5	27	31,5	35	3,5
12	11 – 12	1,5	31,5	31,5	33	33	0
13	12 – 14	2	33	33	35	35	0
14	14 – 15	2	35	35	32,0	37	0

### 6.5. Сетевой график ремонта автомобилей

Дополнительно принципы построения сетевых графиков рассмотрим на основе перечня работ ремонта автомобиля и времени их выполнения (табл. 6.4.)

В таблице указано, что выполнение работ  $a_3$ ,  $a_4$  и  $a_5$  может начаться только после окончания работы  $a_2$ ; работы  $a_6$  – после окончания  $a_3$  и т.д. Установление очередности и полного перечня работ – очень важный вопрос при составлении исходных данных для сетевой модели и исследуемого процесса.

Используя данные табл. 6.4, можно построить сетевой график (рис. 6.5), где работы изображены векторами (стрелками), а события, состоящие в окончании работ и возможности начать новые работы, – кружками.

Чтобы отразить на графике зависимость непосредственно не опирающихся друг на друга работ, вводится фиктивная работа, имеющая нулевые затраты времени для ее выполнения. Она наносится на график пунктирной линией и нужна лишь для того, чтобы изобразить на сети требуе-

мую очередность работы. Например, на рис. 6.5 событие 11 (начало работы  $a_{12}$ ) возможно только тогда, когда будут выполнены работы  $a_9$  и  $a_{10}$ , связанные через фиктивные работы (9 – 11) и (10 – 11).

Таблица 6.4

№ п/п	Вид работ	Условное обозначение вида работ	Предшествующий вид работ	Продолжительность работ, ч
1	Подготовка автомобиля к ремонту и постановка его на место разборки	$a_1$	-	2
2	Разборка автомобиля на основные узлы	$a_2$	$a_1$	8
3	Разборка и дефектовка деталей двигателя	$a_3$	$a_2$	6
4	Разборка и дефектовка деталей трансмиссии	$a_4$	$a_2$	6
5	Разборка и дефектовка деталей рулевого управления и ходовой части	$a_5$	$a_2$	4
6	Комплектовка деталей двигателя	$a_6$	$a_3$	4
7	Комплектовка деталей трансмиссии	$a_7$	$a_4$	4
8	Комплектовка деталей ходовой части и рулевого управления	$a_8$	$a_5$	3
9	Сборка и испытание двигателя	$a_9$	$a_6$	12
10	Сборка и испытание ходовой части и рулевого управления	$a_{10}$	$a_8$	10
11	Сборка и испытание трансмиссии	$a_{11}$	$a_7$	14
12	Сборка автомобилей из узлов и обкатка	$a_{12}$	$a_9, a_{10}, a_{11}$	34
13	Покраска	$a_{13}$	$a_{12}$	2
14	Приемка автомобиля из ремонта	$a_{14}$	$a_{13}$	0,5

Часть работ выполняется последовательно (2 – 3), (3 – 6), (6 – 9) и т. д. Это означает, что начало каждой последующей работы зависит от окончания предшествующей.

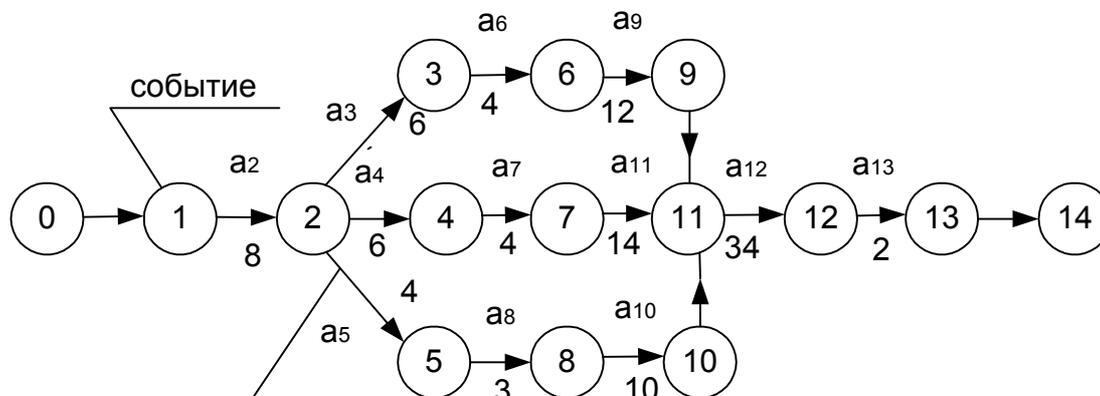


Рис. 6.5. Упрощенный сетевой график ремонта автомобиля

Работы (2 – 3), (2 – 4), (2 – 5) могут начинаться в один и тот же момент времени с наступлением события 2. Эти работы не зависят во времени одна от другой и могут выполняться параллельно.

Фиктивные работы (9 – 11), (10 – 11) устанавливают логическую взаимосвязь, и продолжительность их равна 0.

После построения сетевого графика производится расчет параметров модели: продолжительность критического пути, сроков наступления событий и времени выполнения работ.

Критический путь – это последовательность технологически взаимосвязанных работ от начального до конечного событий, имеющая максимальную продолжительность. Найдем критический путь для рассмотренного примера, определив время выполнения работ по каждой из трех ветвей:

верхняя ( $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_6 \rightarrow a_9 \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{14}$ )

$$T_B = 2 + 8 + 6 + 4 + 12 + 34 + 2 + 0,5 = 68,5 \text{ (ч);}$$

средняя ( $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow a_7 \rightarrow a_{11} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{14}$ )

$$T_C = 2 + 8 + 6 + 4 + 14 + 34 + 2 + 0,5 = 70,5 \text{ (ч);}$$

нижняя ( $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_5 \rightarrow a_8 \rightarrow a_{10} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{14}$ )

$$T_H = 2 + 8 + 4 + 3 + 10 + 34 + 2 + 0,5 = 63,5 \text{ (ч).}$$

Наибольшее время выполнения работ мы получили на средней ветви графика, этот путь и является критическим

$$T_{кр} = T_C = 70,5 \text{ (ч).}$$

Работам, лежащим на критическом пути, уделяется особое внимание, поскольку всякая задержка в выполнении любой из этих работ приводит к срыву окончания всего комплекса работ.

Расчет сроков наступления событий ведется в следующей последовательности.

Первоначально определяется наиболее ранний срок наступления  $j$ -го события в сети  $T_p(j)$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – одно из событий сети. Для начального события наиболее ранний срок равен 0, т.е.  $T_p(1) = 0$ . Для любого другого события этот показатель определяется по формуле

$$T_p(j) = \max[T_p(i) + t_{ij}],$$

где  $T_p(i)$  – наиболее ранний срок наступления события  $i$ , предшествующего событию  $j$ ,  $t_{ij}$  – продолжительность работы ( $i - j$ ) (рис. 6.6.).

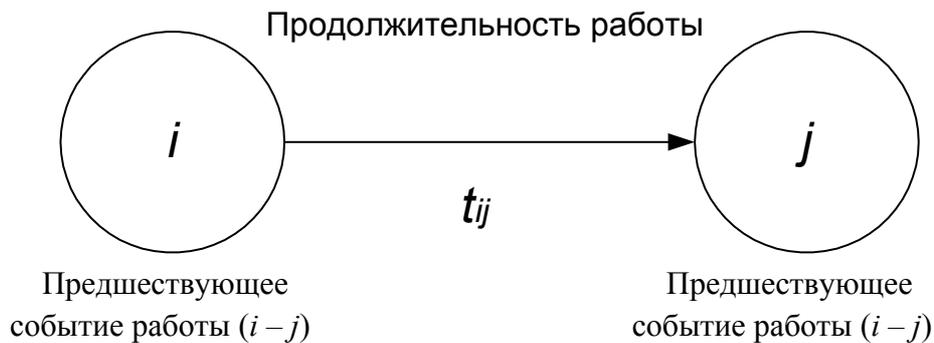


Рис. 6.6. Элементы сетевого графика

Для конечного события сетевого графика наиболее ранний срок наступления равен продолжительности критического пути.

Наиболее поздний срок наступления события в сети  $T_n(i)$  определяется по формуле

$$T_n(i) = \min[T_n(j) - t_{ij}],$$

где  $T_n(j)$  – наиболее поздний срок наступления последующего события  $j$ ;  $t_{ij}$  – продолжительность работы  $i - j$ .

Этот показатель рассчитывается от конца сетевого графика к началу, т.е. в направлении, обратном определению наиболее раннего срока наступления событий. Для конечного события  $k$  делается предположение, что наиболее ранний срок его наступления равен наиболее позднему сроку, т.е.

$T_p(k) = T_n(k)$ . Для критических событий сетевого графика  $T_p(i) = T_n(i)$ . Для начального события  $T_n(1) = 0$ .

Допустимый срок наступления события  $T_a(j)$   $T_p(j) \leq T_a(j) \leq T_n(j)$ .

Данное неравенство показывает, что допустимый срок наступления события должен находиться в диапазоне изменений от наиболее раннего срока наступления до наиболее позднего допустимого срока наступления данного события. Для критических событий  $T_p(i) = T_a(i) = T_n(i)$ .

Результаты расчетов сроков наступления событий для сетевого графика, представленного на рис. 6.5, приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

№ п/п	Событие	Срок наступления	
		наиболее ранний $T_p(i)$	наиболее поздний $T_n(i)$
0	Автомобиль поставлен на ремонт	0	0*
1	Начата разборка автомобиля на узлы	2	2*
2	Начата разборка узлов автомобиля	10	10*
3	Закончена разборка и дефектовка деталей двигателя	16	18
4	Закончена разборка и дефектовка деталей трансмиссии	16	16*
5	Закончена разборка и дефектовка ходовой части и рулевого управления	14	21
6	Начата сборка двигателя	20	22
7	Начата сборка трансмиссии	20	20*
8	Начата сборка ходовой части и рулевого управления	17	24
9	Закончена сборка и испытание двигателя	32	34
10	Закончена сборка ходовой части и рулевого управления	27	34
11	Закончена сборка трансмиссии и начата сборка автомобиля из узлов	34	34*
12	Закончена сборка автомобиля	68	68*
13	Закончена покраска автомобиля	70	70*
14	Автомобиль принят с ремонта	70,5	70,5*

\* События, лежащие на критическом пути.

В рамках сетевого графика каждая работа характеризуется следующими временными параметрами.

1) Раннее начало работы –  $t_{ij}^{p.H}$  определяется как продолжительность пути наибольшей длины от начального события до предшествующего события данной работы. Раннее начало любой последующей работы ( $j - k$ ) равно сумме значений раннего начала и продолжительности работы ( $i - j$ ), предшествующей для данной работы (см. рис. 6.4):

$$t_{kj}^{p.H} = t_{ij}^{p.H} + t_{ij}.$$

Раннее начало работ, выходящих из первого события, равно нулю. Если данной работе предшествуют две и большее количество работ, то ее раннее начало равно максимальному значению сумм раннего начала и продолжительности предшествующей работы  $t_{jk}^{p.H} = \max [t_{ij}^{p.H} + t_{ij}]$ .

Раннее начало работы  $j - k$  равно наиболее раннему сроку наступления предшествующего события  $j$ , т.е.  $t_{jk}^{p.H} = T_p(j)$ .

2. Раннее окончание работы  $t_{ij}^{p.O}$  определяется как сумма раннего начала работ и ее продолжительности  $t_{ij}^{p.O} = t_{ij}^{p.H} + t_{ij}$ .

3. Позднее начало работ  $t_{ij}^{п.О}$  представляет собой самый поздний срок начала работы, который не вызывает задержки выполнения всего комплекса в целом. Позднее начало работы рассчитывается в обратном порядке, от конца сетевого графика к началу, и определяется как разность между продолжительностью критического пути от конечного состояния графа до предшествующего события данной работы.

4. Позднее окончание работы  $t_{ij}^{п.О}$  равно времени окончания работы, если она была начата в поздний срок, и поэтому определяется как сумма позднего начала и ее продолжительности  $t_{ij}^{п.О} = t_{ij}^{п.H} + t_{ij}$ .

Если известно позднее окончание последующей работы, то для данной работы значение позднего окончания определится следующим образом:

$$t_{ij}^{п.О} = t_{jk}^{п.О} - t_{jk}.$$

Позднее окончание работы  $t_{ij}^{п.О}$  сетевого графика всегда равно наиболее позднему сроку наступления последующего события  $T_{п}(j)$ , т.е.  $t_{ij}^{п.О} = T_{п}(j)$ .

Результаты счета временных параметров работ сведены в табл. 6.6.

Из таблицы следует, что значение критического пути определяется по максимальной величине их ранних окончаний работ  $t_{ij}^{p.o}$  и равно 70,5.

Позднее окончание работы (13 – 14), завершающееся событием 14, равно максимальному значению их ранних окончаний работ и также определяет продолжительность критического пути.

Работы, у которых ранние начала и окончания соответственно равны поздним началам и окончаниям, лежат на критическом пути и не имеют запасов времени. Для данного графика к этим работам относятся (0 – 1), (1 – 2), (2 – 4), (4 – 7), (7 – 11), (11 – 12), (12 – 13), (13 – 14).

Таблица 6.6

Количество работ, предшествующих данной работе	Код работы	Продолжительность работы, ч	Начало работы		Окончание работы		Запас времени
			раннее	позднее	раннее	позднее	полный
			$t_{ij}^{p.n}$	$t_{ij}^{п.н}$	$t_{ij}^{p.o}$	$t_{ij}^{п.о}$	$r_{ij}^{п}$
0	0 – 1	2	0	0	2	2	0
1	1 – 2	8	2	2	10	10	0
1	2 – 3	6	10	12	16	18	2
1	2 – 4	6	10	10	16	16	0
1	2 – 5	4	10	12	14	21	7
1	3 – 6	4	16	18	20	22	2
1	4 – 7	4	16	16	20	20	0
1	5 – 8	3	14	21	17	24	7
1	6 – 9	12	20	22	32	34	2
1	7 – 11	14	20	20	34	34	0
1	8 – 10	10	17	24	27	34	7
1	9 – 11	0	32	34	32	34	2
1	10 – 11	0	27	34	27	34	7
3	11 – 12	34	34	34	68	68	0
1	12 – 13	2	68	68	70	70	0
1	13 – 14	0,5	70	70	70,5	70,5	0

Полный (общий) запас времени  $r_{ij}^{п}$ , представляющий собой время, на которое можно перенести начало работ ( $i - j$ ) или, наоборот, увеличить их продолжительность без изменения общего срока выполнения комплекса работ, определяется по формуле  $r_{ij}^{п} = t_{ij}^{п.н} - t_{ij}^{p.n}$ .

## 6.6. Оптимизация и преимущества сетевых моделей

После того как построен исходный сетевой график и рассчитаны основные параметры сетевой модели, необходимо дать оценку полученным результатам. Если критический путь больше установленного срока, предложенного руководством, то необходимо осуществить оптимизацию сетевого графика.

Под оптимизацией понимают процесс улучшения сетевого графика:

- а) путем уменьшения общего времени выполнения работ критического пути (оптимизация по времени);
- б) обеспечения выполнения всего комплекса работ при ограниченных ресурсах (оптимизация по ресурсам).

*Оптимизация сетевого графика по времени* заключается в сокращении критического пути и проводится в следующем порядке:

- 1) уточнение времени выполнения работ;
- 2) сокращение времени выполнения критических работ за счет совершенствования технологии их производства;
- 3) изучаются возможности замены последовательно выполняемых работ параллельными там, где это допускается технологией, с целью сокращения продолжительности работ;
- 4) перераспределение ресурсов с некритических на критические работы, выполнение последних в две или три смены;
- 5) сокращаются сроки выполнения комплекса работ за счет привлечения дополнительных ресурсов, а также применения технологических условий производства комплекса работ.

Если исходный вариант сетевого графика имеет продолжительность критического пути, соответствующую директивному сроку или не превышает этот срок, то он считается оптимальным и может быть рекомендован к утверждению и выполнению.

*Оптимизация сети по ресурсам.* Оптимизация сетевого графика по времени без учета ограничений по ресурсам предполагает, что потребность в ресурсах может быть установлена в необходимые сроки. Однако такой подход к разработке сетевых графиков не исключает решения задачи наиболее рационального распределения ресурсов, поэтому после оптимизации сетевой модели по критерию «времени» производится ее оптимизация по ресурсам.

Преимущества сетевых моделей следующие.

1. Сетевые графики дают четкое представление об общем объеме работ комплекса.
2. Обеспечивают наглядность технологической последовательности работ.
3. Сетевые модели обеспечивают распределение средств и рабочей силы, что создает условия для наилучшего использования ресурсов.
4. Позволяют осуществлять текущее планирование выполнения работ, прогнозировать сложные процессы, выявлять «узкие места» производства.
5. Сократить потери времени при выполнении всего комплекса работ.
6. Выбрать оптимальный вариант выполнения работ.

### **Контрольные вопросы**

1. Назначение сетевого планирования.
2. Элементы сетевых графиков и их отображение на сетевой модели.
3. Что такое «критический путь»?
4. Перечислите основные правила построения сетевых графиков.
5. Перечислите этапы построения сетевых графиков.
6. Параметры сетевых моделей для полного пути и способы их вычисления.
7. Параметры сетевых моделей для событий и способы их вычисления.
8. Параметры сетевых моделей для работ и способы их вычисления.
9. Допустимый срок наступления события и резерв времени события.
10. Полный и свободный резерв времени работы и способы их вычисления.
11. Сущность оптимизации сетевого графика по времени и по ресурсам.
12. Преимущества сетевых моделей.

## Глава 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование – особый метод решения оптимизационных задач. Особенностью данного метода является то, что для нахождения оптимального решения задача разбивается на этапы (шаги) и оптимальное решение отыскивается постепенно шаг за шагом.

Методом динамического программирования решаются следующие задачи автомобильного транспорта:

- задачи маршрутизации;
- задачи замены оборудования и подвижного состава;
- оптимизация управления запчастями;
- оптимизация распределения ресурсов и др.

### 7.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Пусть имеем некоторую физическую систему (автомобиль), которая с течением времени может менять свое состояние (процесс старения автомобиля и т.п.), т. е. в системе происходит какой-то процесс. Поставим задачу управлять этим процессом.

Итак, система  $S$  (автомобиль) может из начального состояния  $S_0$  перейти в конечное состояние  $S_m$ , но не просто, а под действием некоторого управления  $U$  (рис. 7.1).

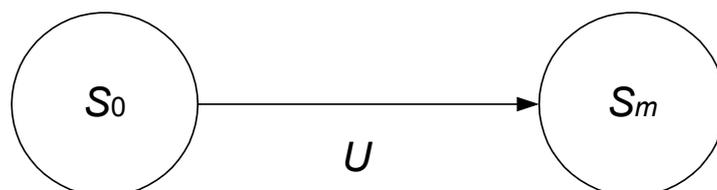


Рис. 7.1. Схема состояний системы

Управление должно быть таким, чтобы оно дало некоторый «выигрыш», который обозначим через  $W$ . Этот выигрыш зависит от управления, т.е.

$$W = f(U).$$

Очевидно, что мы должны найти такое управление, при котором выигрыш будет максимальным, т.е.

$$W_{\max} = \max_u \{f(u^*)\},$$

где  $u$  – возможные управления;  $u^*$  – оптимальное управление;  $\max_u$  – максимум по  $u$ , т.е. максимальное значение  $f(u)$  при всех возможных управлениях  $U$ .

Итак, общую задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом.

*Из множества возможных управлений  $U$  надо найти такое оптимальное управление  $U$ , которое переводит физическую систему  $S$  из начального состояния  $S_0$  в конечное состояние  $S_m$  так, чтобы при этом выигрыш  $W$  обращался в максимум.*

## 7.2. Принципы оптимизации задач динамического программирования

Принципы оптимизации сводятся к следующему.

1. Процесс перемещения системы из состояния  $S_0$  в состояние  $S_m$  разбивается искусственно или естественно на несколько шагов (этапов) (рис. 7.2. и 7.3.).

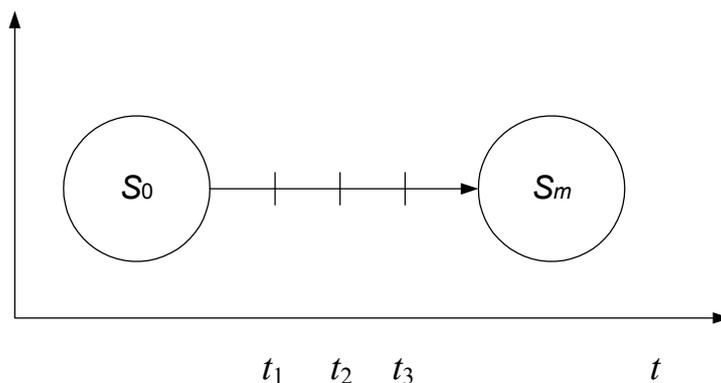


Рис. 7.2. Состояние системы

В данном случае имеем  $t$  шагов.

2. Производится пошаговая оптимизация, заключающаяся в получении выигрыша на каждом шаге.

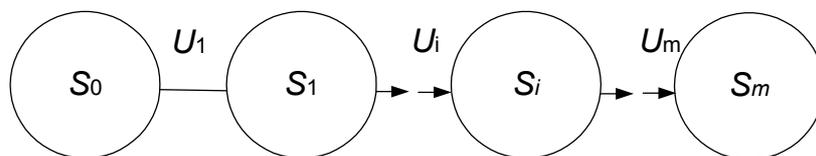


Рис. 7.3. Схема состояний системы

Если выберем на первом шаге управление  $U_1$ , то выигрыш на этом шаге от принятого управления

$$W_1 = f(S_0, U_1).$$

Для  $i$ -го шага с управлением  $U_i$  выигрыш

$$W_i = f(S_{i-1}, U_i) \text{ и т.д.}$$

То есть выигрыш на  $i$ -м шаге есть функция состояния и принятого управления.

Процедура построения оптимального управления включает две стадии:

- 1) предварительную (условную);
- 2) окончательную (безусловную).

Предварительная (условная) оптимизация производится по шагам в обратном порядке – от последнего шага к первому. На предварительной стадии определяется для каждого шага условное оптимальное управление и условный оптимальный выигрыш.

Окончательная (безусловная) оптимизация производится также по шагам, но в естественном порядке – от первого шага к последнему.

На окончательной стадии определяется для каждого шага окончательное (безусловное) оптимальное управление и безусловный оптимальный выигрыш.

В основе процедуры оптимизации задач динамического программирования лежит уравнение Беллмана, к рассмотрению которого и перейдем.

### 7.3. Основное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана)

Пусть имеем задачу динамического программирования, рассматривающую процесс перехода системы  $S$  из состояния  $S_0$  в состояние  $S_m$ .

Для решения данной задачи процесс перехода системы из состояния  $S_0$  в состояние  $S_m$  разбиваем на  $m$  шагов. Получаем рис. 7.4.

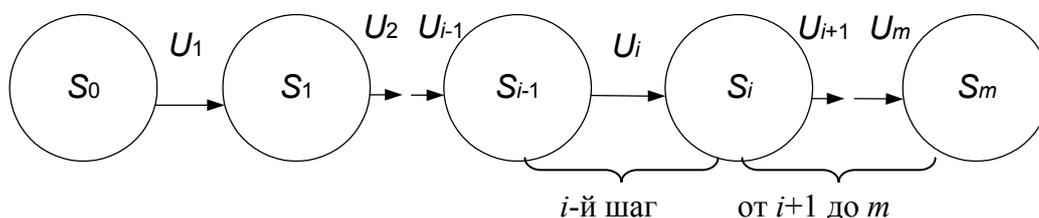


Рис. 7.4. Схема состояний системы

Будем управлять этим процессом, т.е. принимать управления  $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow$  и т.д.

1. Выберем на  $i$ -м шаге управление  $U_i$ , которое дает на этом шаге выигрыш  $W_i$ :

$$W_i = f(S_{i-1}, U_i) = W_i(S_{i-1}, U_i).$$

Подобный выигрыш мы можем иметь на каждом шаге от 1 до  $m$ .

2. Обозначим оптимальный общий выигрыш, получаемый на всех шагах, следующих за  $i$  через

$$W_{i+1}^*(S_i)$$

(общий выигрыш на шагах от  $(i + 1)$  до  $m$ , который выбирается оптимальным).

3. Таким образом, общий выигрыш, который мы имеем на всех шагах, начиная с  $i$ -го, можем представить формулой

$$W_i(S_{i-1}) = w_i(S_{i-1}, U_i) + W_{i+1}^*(S_i),$$

т.е. общий выигрыш равен сумме выигрышей:

- выигрыш на  $i$ -м шаге  $w_i$ ;
- оптимальный выигрыш на всех последующих шагах, начиная с  $i + 1$  до  $m$  –  $W_{i+1}^*(S_i)$ .

4. В соответствии с принципом оптимизации мы должны выбирать на  $i$ -м шаге такое управление  $U_i = u_i$ , при котором выигрыш был бы максимальным, т.е.

$$W_i^*(S_{i-1}) = \max_{U_i} \{w_i(S_{i-1}, U_i) + W_{i+1}^*(S_i)\}. \quad (7.1)$$

Выражение (7.1) характеризует условный оптимальный выигрыш на всех шагах с  $i$ -го до  $m$  (до конца) и называется рекуррентным уравнением Беллмана.

Вычисление составляющих выражения (7.1) начинают с последнего  $m$ -го шага.

### 7.3.1. Предварительная (условная) оптимизация

Используя уравнение (7.1), определим условный оптимальный выигрыш на последнем шаге  $m$ :

$$W_m^*(S_{m-1}) = \max \{W_m(S_{m-1}, U_m)\}. \quad (7.2)$$

Отметим, что последнее слагаемое в формуле (7.1) равно 0, так как за  $S_m$  нет другого состояния.

Выражение (7.2) определяет условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, который достигается при управлении

$$U_m = u_m(S_{m-1}).$$

Схематические соотношения (7.1) и (7.2) можем проиллюстрировать рис. 7.5.

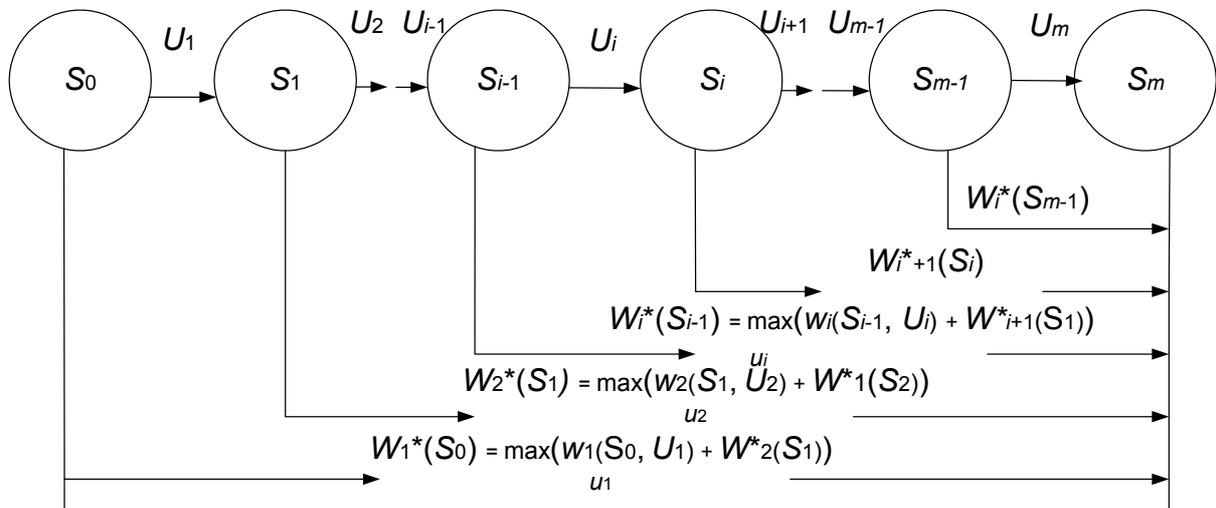


Рис. 7.5. Схема состояний системы

Итак, зная выигрыш на шаге  $m$ , можем найти выигрыш на шаге  $m - 1$ , для чего используем рекуррентную формулу (7.1), т.е., используя выражение (7.1), можем построить всю цепочку условных оптимальных управлений и условных оптимальных выигрышей.

Действительно, зная  $W_m^*(S_{m-1})$ , можно по рекуррентному уравнению Беллмана (7.1) найти  $W_{m-1}^*(S_{m-2})$  и  $u_{m-1}(S_{m-2})$ , а затем  $W_{m-2}^*(S_{m-3})$  и  $u_{m-2}(S_{m-3})$  и т. д. до последнего от конца (первого) шага  $W_1^*(S_1)$  и  $U_1(S_0)$ .

Функция  $W_1^*(S_0)$  – есть условный оптимальный выигрыш за всю операцию, т.е. на всех шагах, начиная с последнего и до первого.

На этом предварительная оптимизация заканчивается: найдены условный оптимальный выигрыш и условное оптимальное управление для каждого шага.

### 7.3.2. Окончательная (безусловная) оптимизация

Предположим, что исходное состояние  $S_0$  нам полностью известно. Подставим это состояние  $S_0$  в формулу для условного оптимального выигрыша  $W_1^*(S_0)$ .

Получим

$$W_{\max} = W_1^*(S_0),$$

а оптимальное управление на этом шаге

$$U_1 = u_1(S_0).$$

Далее, зная исходное состояние  $S_0^*$  и управление  $U_1$ , можем найти состояние  $S_1^*$  системы после первого шага:

$$S_1^* = \varphi_1(S_0^*, u_1).$$

Зная состояние  $S_1^*$ , можно найти оптимальное управление на втором шаге  $U_2 = u_2(S_1^*)$ , а затем  $S_2^* = \varphi_2(S_1^*, u_2)$  и т.д.

Таким образом, идя по цепочке (рис. 7.6), мы определим один за другим все шаги оптимального управления и оптимальное управление операцией в целом  $u = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ . На этом процесс оптимизации заканчивается.

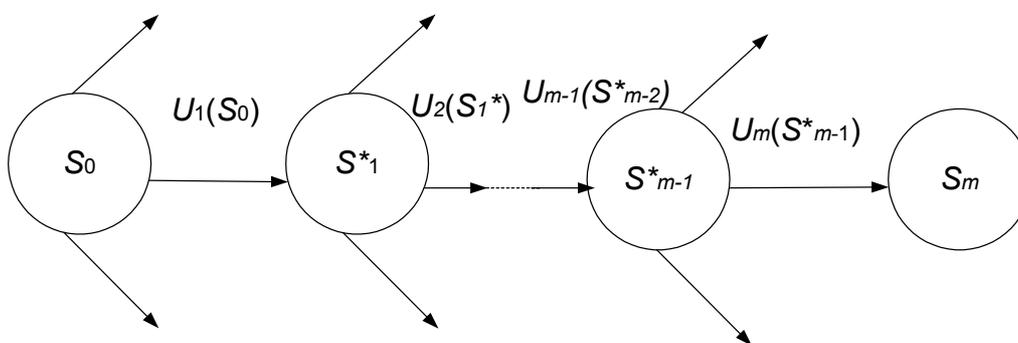


Рис. 7.6. Схема состояний системы

Принципы и методы динамического программирования рассмотрим на примере задачи выбора кратчайшего маршрута на транспортной сети.

## 7.4. Задачи о маршрутизации

### 7.4.1. Постановка задачи

Найти кратчайший путь из пункта  $A$  в пункт  $B$  на сети, изображенной на рис. 7.7, где пункты обозначены кружками, а соединяющие их дороги отрезками (стрелками). Расстояния  $a_{ij}$  между пунктами проставлены над стрелками.

$A_1$

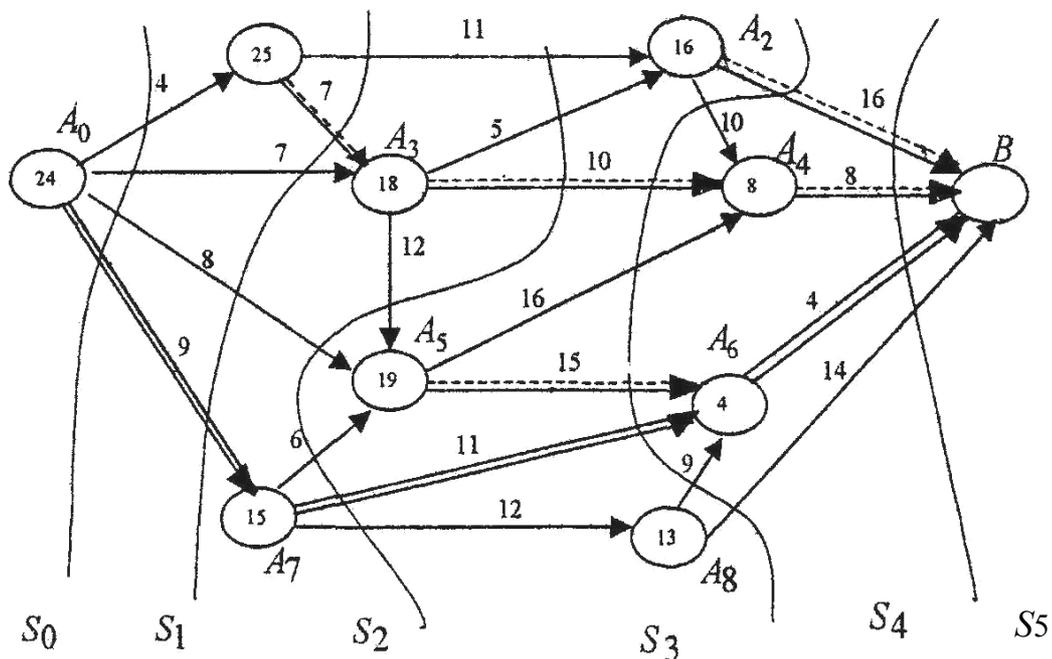


Рис. 7.7. Схема транспортной сети

С точки зрения интересов оптимизации после каждого ближайшего шага (выбора кратчайшего расстояния из точки  $A_i$  в точку  $A_j$ ) следует двигаться по маршруту  $A_0 - A_1 - A_3 - A_2 - A_4 - B$ .

Длина этого маршрута ( $4 + 7 + 5 + 10 + 8$ ) равна 34.

Решив эту задачу методом динамического программирования, мы убедимся, что этот маршрут не является оптимальным.

### 7.4.2. Построение математической модели

Пусть задана ориентированная сеть, содержащая  $N$  точек (узлов). Найти кратчайший путь из точки 1 в точку  $N$  (рис. 7.8), если задана матрица  $a_{ij}$  расстояний из точки  $i$  в точку  $j$ .

Обозначим через  $W_j^*$  минимальный путь из точки  $i$  в точку  $N$ . Оптимальный маршрут из любой точки  $i$  должен обладать тем свойством, что каков бы ни был способ достижения пункта  $i$ , последующее решение должно быть оптимальным для части пути, начинающегося в точке  $i$  (принцип оптимальности).

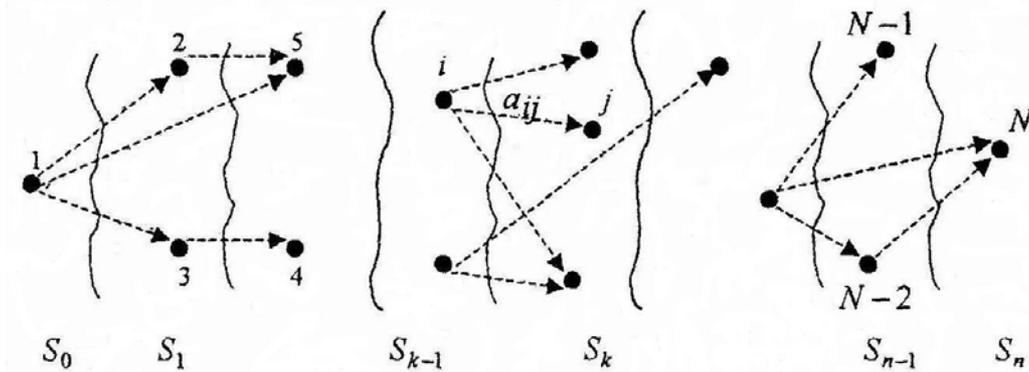


Рис. 7.8. Схема участником транспортной сети

Пусть из точки  $i$  можем перейти в точку  $j$ , расстояние между этими точками равно  $a_{ij}$ . Точка  $j$  должна выбираться таким образом, чтобы путь из  $j$  в  $N$  был частью оптимального из  $i$  в  $N$ . Обозначим минимальный путь из  $j$  в  $N$  через  $W_j^*$ . Тогда  $i$  выбирается из условия минимизации суммы

$$a_{ij} + W_j^*.$$

Таким образом получаем уравнение Беллмана

$$W_i^* = \min_{j \neq i} \{a_{ij} + W_j^*\}. \quad (7.3)$$

Для реализации уравнения (7.3) разделим условно все точки сети на  $n$  множеств по числу шагов  $1, 2, \dots, n$  (см. рис. 7.8.). К множеству  $S_0$  отнесем точки, из которых можно попасть в  $N$  не более чем за  $n$  шагов, к  $S_1$  - точки из которых можно попасть в  $N$  не более чем за  $n - 1$  шагов и т.д.

Если  $i \in S_{k-1}$ , то будем считать, что  $j \in S_k$ . Тогда уравнение (7.3) примет вид

$$W_k^*(i) = \min_{\substack{i \in S_{k-1} \\ j \in S_k}} \{a_{ij} + W_{k+1}^*(j)\}.$$

Так как точка  $N$  единственна и относится к множеству  $S_n$ , тогда

$$W_{n+1}^*(N) = 0.$$

Множество  $S_{n-1}$  состоит из точек  $i$ , из которых можно попасть в  $N$  не более чем за один шаг, поэтому

$$W_n^*(i) = \min_{i \in S_{n-1}} \{a_{in}\} = a_{in}, \quad U_n^*(i) = N,$$

где  $U_n^*(i)$  – условное оптимальное управление (решение) на  $n$ -м переходе из точки  $i$  в  $N$  по кратчайшему пути.

Аналогично для точек  $i \in S_{n-2}$

$$W_{n-1}^*(i) = \min_{\substack{i \in S_{n-2} \\ j \in S_{n-1}}} \{a_{ij} + W_n^*(j)\} = \min_{\substack{i \in S_{n-2} \\ j \in S_{n-1}}} \{a_{ij} + a_{jN}\}, \quad U_{n-1}^*(i)$$

и т.д. В итоге условной оптимизации получим совокупность условных оптимальных решений  $U_k^*(i)$ , используя которые последовательно определим точки, соответствующие оптимальному маршруту.

### 7.4.3. Последовательность решения задачи

**Решение.** Отнесем к множеству  $S_4$  точки  $A_4$  и  $A_6$ , из которых можно попасть в точку  $B$  не более чем за один шаг; к  $S_3$  – точки  $A_2$ ,  $A_5$  и  $A_8$ , из которых можно попасть в точку  $B$  не более чем за два шага; к  $S_2$  – точки  $A_3$  и  $A_7$ , из которых можно попасть в точку  $B$  не более чем за три шага; к  $S_1$  – точку  $A_1$  (не более чем за четыре шага до точки  $B$ ), к  $S_0$  – точку  $A_0$ .

Условные оптимальные маршруты, начинающиеся в точке  $A_i$  и идущие в точку  $A_j$ , будем изображать дополнительной пунктирной стрелкой, а условные минимальные пути от  $A_i$  до  $B$  записывать в кружках точки  $A_i$ . Сначала найдем

$$W_5^*(A_4) = 8, \quad U_5^*(A_4) = B.$$

$$W_5^*(A_6) = 4, \quad U_5^*(A_6) = B.$$

Далее определим

$$W_4^*(A_2) = \min \begin{cases} 16 & \text{при } U_4(A_2) = B, \\ 10 + 8 = 18 & \text{при } U_4(A_2) = A_4, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } W_4^*(A_2) = 16, \quad U_4^*(A_2) = B.$$

$$W_4^*(A_5) = \min \begin{cases} 16 + 8 = 24 & \text{при } U_4(A_5) = A_4, \\ 15 + 4 = 19 & \text{при } U_4(A_5) = A_6, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } W_4^*(A_5) = 19, \quad U_4^*(A_5) = A_6.$$

$$W_4^*(A_8) = \min \begin{cases} 9 + 4 = 13 & \text{при } U_4(A_8) = A_6, \\ 14 & \text{при } U_4(A_8) = B, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } W_4^*(A_8) = 13, \quad U_4^*(A_8) = A_6.$$

$$W_3^*(A_3) = \min \begin{cases} 5 + 16 = 21 & \text{при } U_3(A_3) = A_2, \\ 10 + 8 = 18 & \text{при } U_3(A_3) = A_4, \\ 12 + 9 = 21 & \text{при } U_3(A_3) = A_5, \end{cases}$$

т.е.  $W_3^*(A_3) = 18, U_3^*(A_3) = A_4.$

$$W_3^*(A_7) = \min \begin{cases} 6 + 19 = 25 & \text{при } U_3(A_7) = A_5, \\ 11 + 4 = 15 & \text{при } U_3(A_7) = A_6, \\ 12 + 18 = 30 & \text{при } U_3(A_7) = A_8, \end{cases}$$

т.е.  $W_3^*(A_7) = 15, U_3^*(A_7) = A_6.$

$$W_2^*(A_1) = \begin{cases} 11 + 16 = 27 & \text{при } U_2(A_1) = A_2, \\ 7 + 18 = 25 & \text{при } U_2(A_1) = A_3, \end{cases}$$

т.е.  $W_2^*(A_1) = 25, U_2^*(A_1) = A_3.$

$$W_1^*(A_0) = \begin{cases} 4 + 25 = 29 & \text{при } U_1(A_0) = A_1, \\ 7 + 18 = 25 & \text{при } U_1(A_0) = A_3, \\ 8 + 19 = 27 & \text{при } U_1(A_0) = A_5, \\ 9 + 15 = 24 & \text{при } U_1(A_0) = A_7, \end{cases}$$

т.е.  $W_1^*(A_0) = 24, U_1^*(A_0) = A_7.$

Получаем, что минимальный путь равен  $W_1^*(A_0) = 24$ . Соответствующий маршрут проходит через точки  $A_0, A_7, A_6, B$ . На рис. 7.7 он выделен двойной линией.

## 7.5. Задача замены оборудования

### 7.5.1. Постановка задачи

Одной из проблем, с которой приходится сталкиваться при организации работы автомобильного транспорта, является замена старого оборудования (станков, агрегатов, машин) и автомобилей на новые.

Старое оборудование (автомобиль) имеет физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, а вместе с тем снижаются его производительность и ликвидная стоимость.

Наступает момент, когда старое оборудование (автомобиль) более выгодно продать (заменить новым), чем эксплуатировать ценой больших затрат.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критериями оптимальности при определении сроков замены могут служить либо прибыль от эксплуатации, которую следует максимизировать, либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, которые подлежат минимизации.

Условимся считать, что решение о замене оборудования принимается периодически в начале каждого промежутка (года), на который разбит плановый период.

Основные функциональные характеристики оборудования:

$t$  – возраст оборудования ( $t = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ), где  $t = 0$  – использование нового оборудования,  $t = 1$  – использование оборудования возраста одного года и т.д.;

$f(t)$  – стоимость продукции (для автомобиля – выручка за транспортные услуги), произведенной за год на оборудовании возраста  $t$ ;

$r(t)$  – эксплуатационные затраты за год на оборудование возраста  $t$ ;

$\varphi(t)$  – остаточная стоимость оборудования возраста  $t$ ;

$P$  – цена нового оборудования;

$t_0$  – начальный возраст оборудования;

$n$  – продолжительность планового периода (количество лет в плановом периоде).

Схема возможных состояний оборудования представлена на рис. 7.9.

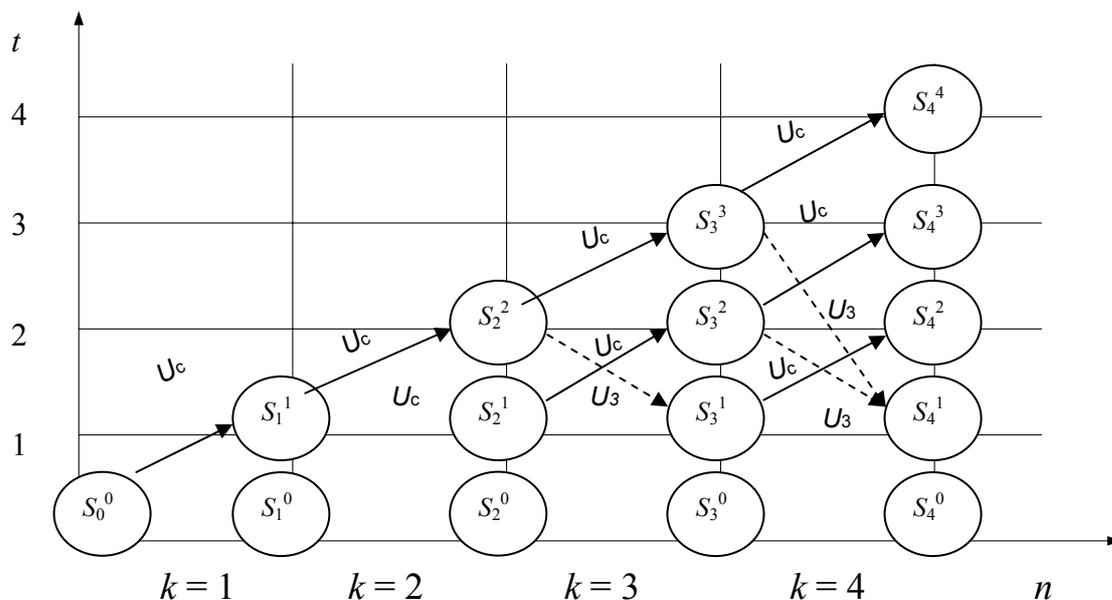


Рис. 7.9. Схема состояний оборудования

На рис. 7.9  $U^c$  – сохранность и продолжительность использования оборудования;  $U^3$  – заменяемость оборудования новым;  $S_k^t$  – состояние оборудования, соответствующее возрасту  $t$ .

Для определения условных оптимальных решений необходимо составить функциональное уравнение Беллмана.

### 7.5.2. Построение математической модели

Поставленную задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы  $S$  выступает оборудование. Состояние этой системы определяется фактическим временем использования оборудования (его возраста)  $t$ , т.е. описывается единым параметром  $t$ .

Алгоритм решения задачи методом ДП реализуется в два этапа.

*Первый этап.* При движении от начала  $n$ -го года к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования находится условное оптимальное управление (решение)  $u(t)$ .

*Второй этап.* При движении от начала 1-го года к началу  $n$ -го года из условных оптимальных решений составляется оптимальный план замены оборудования  $u^*(t)$ .

Рассмотрим  $n$ -шаговый процесс (см. рис. 7.9), считая  $k$ -м шагом номер  $k$ -го года от начала эксплуатации ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Уравнение на  $k$ -м шаге выбирается из двух возможных решений:  $u^c$  – сохранить и продолжить использование старого оборудования или  $u^3$  – заменить оборудование новым.

Состояние  $S_{k-1}$  системы в начале  $k$ -го шага характеризуется параметром  $t$  – возраст оборудования, который может принимать значения  $0, 1, 2, \dots, k-1$ , т.е.  $t \leq k-1$ .

Если к началу  $k$ -го шага система находится в состоянии  $S_{k-1}$  и возраст ее равен  $t$  годам ( $S_{k-1} = t$ ), то под влиянием уравнения  $U^c$  в конце  $k$ -го шага она перейдет в состояние  $S_k$  с возрастом оборудования  $t+1$  ( $S_k = t+1$ ) (см. рис. 7.9), т.е. возраст оборудования увеличится на один год. Под влиянием уравнения  $U^3$ , принятого на  $k$ -м шаге, система перейдет в состояние с возрастом оборудования, равным одному году. Замену произвели в начале  $k$ -го шага ( $S_k = 1$ ).

Определим прибыль на  $k$ -м шаге (показатель эффективности  $k$ -го шага), соответствующую каждому из альтернативных управлений  $U^c$  и  $U^3$ .

Выбирая на  $k$ -м шаге управление  $U^c$ , мы сможем произвести продукцию стоимостью  $f(t)$  на старом оборудовании, что потребует затрат  $r(t)$ , поэтому прибыль равна  $f(t) - r(t)$ . Обозначим ее через

$$W_k^c = f(t) - r(t).$$

При управлении  $U^3$  получим доход  $\varphi(t)$  от продажи старого оборудования (ликвидную стоимость) и  $f(0)$  от произведенной на новом оборудовании продукции, затратив  $P$  рублей на приобретение нового оборудования, и  $r(0)$  – на содержание нового оборудования. В этом случае прибыль составит

$$W_k^3 = \varphi(t) + f(0) - P - r(0).$$

Так как на последнем этапе процесса планирования мы можем действовать без учета предыдущих этапов и считать, что оптимальное управление на последнем этапе должно обеспечить максимальный доход за последний год, то функциональное уравнение, отражающее возможные решения, будет следующим:

$$W_n^*(t) = \max \begin{cases} f(t) - r(t) & \text{при } U_n = U^c, \\ \varphi(t) + f(0) - P - r(0) & \text{при } U_n = U^3. \end{cases} \quad (7.4)$$

Сравнив эти две величины для всех возможных  $i < n$ , получим значение  $W_n^*(t)$  и соответствующее значение оптимального управления  $U_n^*(t)$ .

Предположим, что для всех значений  $t$  и  $S_k$  – состояний системы известна максимальная прибыль, полученная за  $n - k$  шагов с  $k + 1$  по  $n$ -й включительно. Поэтому основные рекуррентные соотношения можно записать в виде

$$W_k^*(t) = \max \begin{cases} f(t) - r(t) + W_{k+1}^*(t+1) & \text{при } U_k = U^c, \\ \varphi(t) + f(0) - P - r(0) + W_{k+1}^*(1) & \text{при } U_k = U^3. \end{cases} \quad (7.5)$$

В уравнении (7.5) величина  $W_{k+1}^*(1)$  – условная максимальная прибыль, полученная за  $n - k$  шагов, если к началу шага  $(k + 1)$  системы находились в состоянии  $S_k$  и  $t = 1$  (возраст оборудования составлял 1 год).

### 7.5.3. Последовательность решения задачи

Решение задачи замены оборудования методом динамического программирования рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Составить план замены оборудования в течение пяти лет, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна, если

затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования составляют 40 тыс. руб. Зависимость производительности оборудования от времени его использования, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Время, в течение которого используется оборудование, год	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $f(t)$ в стоимостном выражении, тыс. руб.	80	75	65	60	60	55
Эксплуатационные затраты $r(t)$ , тыс. руб.	20	25	30	35	45	55

1. Нахождение решения исходной задачи начинаем с определения условного оптимального управления (решения) для последнего 5-го года и находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как в начальный момент имеется новое оборудование ( $t^{(1)} = 0$ ), то возраст оборудования к началу пятого года может составлять 1, 2, 3, 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы:  $t_1^{(5)} = 1$ ;  $t_2^{(5)} = 2$ ,  $t_3^{(5)} = 3$ ,  $t_4^{(5)} = 4$ . Для каждого из этих состояний найдем условное оптимальное решение и соответствующее значение функции  $W_5(t^{(5)})$ .

Используя уравнение (7.4) и соотношение  $W_6(t^{(k+1)}) = 0$  (так как рассматривается последний год расчетного периода), получаем:

$$W_5(t^{(5)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(5)}) - r(t^{(5)}), \\ f(t^{(5)} = 0) - r(t^{(5)} = 0) - p. \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

Подставляя теперь в формулу (7.6) вместо  $t^{(5)}$  его значение, равное 1, и учитывая данные таблицы 7.1, находим:

$$W_5(t_1^{(5)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(5)} = 1) - r(t^{(5)} = 1), \\ f(t^{(5)} = 0) - r(t^{(5)} = 0) - P. \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25, \\ 80 - 20 - 40. \end{array} \right\} = 50, \quad U = U^c.$$

Значит, условное оптимальное решение в данном случае – сохранить оборудование.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу пятого года.

$$W_5(t_2^{(5)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30, \\ 80 - 20 - 40. \end{array} \right\} = 35, \quad U = U^c,$$

$$W_5(t_3^{(5)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 35, \\ 80 - 20 - 40. \end{array} \right\} = 25, \quad U = U^c,$$

$$W_5(t_4^{(5)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 45, \\ 80 - 20 - 40. \end{array} \right\} = 20, \quad U = U^3.$$

Полученные результаты заносим в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Возраст оборудования $t^{(5)}$ , год	Значение функции $W_5(t^{(5)})$ , тыс. руб.	Условное оптимальное решение $U$
1	50	$U^c$
2	5	$U^c$
3	25	$U^c$
4	20	$U^3$

2. Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу четвертого года. Очевидно, что допустимыми состояниями являются  $t_1^{(4)} = 1$ ,  $t_2^{(4)} = 2$ ,  $t_3^{(4)} = 3$ . Для каждого из них определяется условное оптимальное решение и соответствующее значение функции  $W_4(t^{(4)})$ . Для этого используем уравнение (7.5) и данные табл. 7.1, 7.2. Так, в частности, для  $t_1^{(4)}$

$$W_4(t_1^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(4)} = 1) - r(t^{(4)} = 1) + W_5(t^{(5)} = 2), \\ f(t^{(4)} = 0) - r(t^{(4)} = 0) - P + W_5(t^{(5)} = 1). \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 35, \\ 80 - 20 - 40 + 50. \end{array} \right\} = 85, \quad U = U^c.$$

Значит, условное оптимальное решение в данном случае – сохранить оборудование.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу четвертого года:

$$W_4(t_2^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 25, \\ 80 - 20 - 40 + 50. \end{array} \right\} = 70, \quad U = U^3,$$

$$W_4(t_3^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 35 + 20, \\ 80 - 20 - 40 + 50. \end{array} \right\} = 70, \quad U = U^3.$$

Полученные результаты вычислений занесем в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Возраст оборудования $t^{(4)}$ , год	Значение функции $W_4(t^{(4)})$ , тыс. руб.	Условное оптимальное решение $U$
1	85	$U^c$
2	70	$U^c$
3	70	$U^3$

3. Определяем теперь условное оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу третьего года. Очевидно, такими состояниями являются  $t_1^{(3)} = 1$ ,  $t_2^{(3)} = 2$ . В соответствии с уравнением (7.5) и табл. 7.1, 7.3

$$\begin{aligned}
 W_3(t_1^{(3)}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(3)} = 1) - r(t^{(3)} = 1) + W_4(t^{(4)} = 2), \\ f(t^{(3)} = 0) - r(t^{(4)} = 0) - P + W_4(t^{(4)} = 1). \end{array} \right\} = \\
 &= \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 70, \\ 80 - 20 - 40 + 85. \end{array} \right\} = 120, \quad U = U^c; \\
 W_3(t_2^{(3)}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(3)} = 2) - r(t^{(3)} = 2) + W_4(t^{(4)} = 3), \\ f(t^{(3)} = 0) - r(t^{(4)} = 0) - P + W_4(t^{(4)} = 1). \end{array} \right\} = \\
 &= \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 70, \\ 80 - 20 - 40 + 85. \end{array} \right\} = 105, \quad U = U^c (U^3).
 \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что если к началу третьего года возраст оборудования составляет два года, то независимо от того, будет ли принято решение  $U^c$  или  $U^3$ , величина прибыли окажется одной и той же. Это означает, что в качестве условного оптимального решения можно взять любое, например  $U^c$ . Полученные значения для  $W_3(t_1^{(3)})$  и соответствующие условные оптимальные записываем в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Возраст оборудования $t^{(3)}$ , год	Значение функции $W_3(t^{(3)})$ , тыс. руб.	Условное оптимальное решение $U$
1	120	$U^c$
2	105	$U^c$

4. Наконец, рассмотрим допустимые состояния оборудования к началу второго года. Очевидно, что на данный момент времени возраст оборудования может быть равен только одному году. В соответствии с уравнением (7.5)

$$W_2(t_1^{(2)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} f(t^{(2)} = 1) - r(t^{(2)} = 1) + W_3(t^{(3)} = 2), \\ f(t^{(2)} = 0) - r(t^{(2)} = 0) - P + W_3(t^{(3)} = 1). \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 105, \\ 80 - 20 - 40 + 120. \end{array} \right\} = 155, \quad U = U^c.$$

Результат занесем в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Возраст оборудования $t^{(2)}$ , год	Значение функции $W_2(t^{(2)})$ , тыс. руб.	Условное оптимальное решение $U$
1	155	$U^c$

5. Согласно условию, в начальный момент установлено новое оборудование ( $t_1^{(1)} = 0$ ). Поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует, оборудование следует сохранить. Значит, условным оптимальным решением является  $U^c$ , и значение функции

$$W_1(t_1^{(1)}) = f(t_1^{(1)} = 0) - r(t_1^{(1)} = 0) + W_2(r^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215.$$

6. В результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала первого до начала пятого года, максимальная прибыль предприятия может быть равна 215 тыс. руб., что соответствует оптимальному плану замены оборудования.

7. Для первого года решение единственное – надо сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу второго года равен одному году, и оборудование (согласно табл. 7.5) надо сохранить. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу третьего года становится равным двум годам и оборудование (согласно табл. 7.4) надо сохранить, т.е. его возраст к началу четвертого года становится равным трем годам и оборудование (согласно табл. 7.3) надо заменить. После замены оборудования его возраст к началу пятого года составит один год. Как видно из табл. 7.2, при таком возрасте оборудования его

менять не следует. Итак, получается следующий оптимальный план замены оборудования, представленный на рис. 7.10.

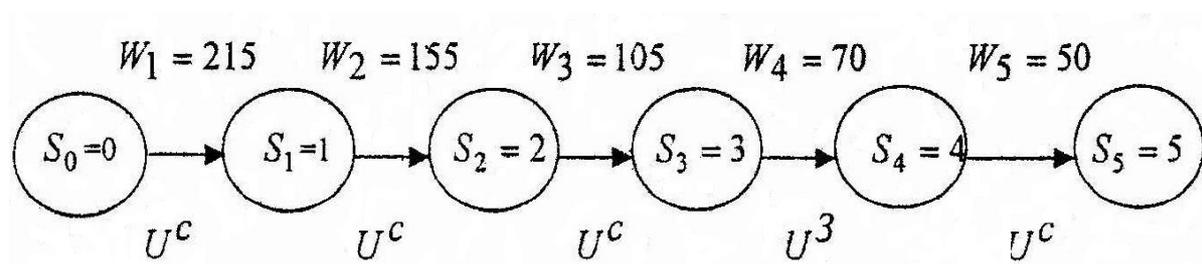


Рис. 7.10. Схема оптимальных состояний оборудования

### Контрольные вопросы

1. Какие задачи автомобильного транспорта решаются методами динамического программирования?
2. Сформулируйте общую задачу динамического программирования.
3. Перечислите принципы оптимизации задач динамического программирования.
4. Запишите основные уравнения динамического программирования (уравнение Беллмана) и перепишите его составляющие.
5. Особенности предварительной (условной) оптимизации.
6. Особенности окончательной (безусловной) оптимизации.
7. Сформулируйте задачу о маршрутизации.
8. Запишите математическую модель решения задачи о маршрутизации методом динамического программирования.
9. Последовательность решения задачи о маршрутизации методом динамического программирования.
10. Сформулируйте задачу о замене оборудования.
11. Запишите математическую модель решения задачи замены оборудования методом динамического программирования.
12. Последовательность решения задачи замены оборудования методом динамического программирования.



$$\bar{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\};$$

$$\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

где  $\bar{C}\bar{x}$  – скалярное произведение.

$$\text{Векторы } \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \bar{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

2. Матричная форма записи  $W = CX$ .

При ограничениях  $AX \leq B$ , где  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  – матрица-строка;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец;}$$

$$A = (a_{ij}) \text{ – матрица системы} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$CX \text{ и } AX \text{ – произведение матриц; } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец.}$$

3. Запись с помощью знаков суммирования

$$W = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow (\max (\min)).$$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Система уравнений (8.2) определяет область решения ЗЛП.

Изобразим область решений ЗЛП для двумерного случая, т.е. ( $x_1$  и  $x_2$ ) на плоскости (рис. 8.1.), тогда:

- 1)  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_1$  – область решения ЗЛП;
- 2)  $A_1, B_2, B_3, A_2, 0, \Phi_1$  – область допустимых решений, так как  $X_j \geq 0$ ;
- 3) вершины многоугольника, для которых  $X_{1,2} \geq 0$ .  $0, A_1, B_2, B_3, A_2$  называются опорными точками;
- 4) значения целевой функции в опорных точках называют опорными решениями;
- 5) в одной из вершин  $0, A_2, B_2, B_3, A_2$   $W \rightarrow \max$  ( $\min$ ), которые называют оптимальным решением, т.е. только в одной точке можем иметь оптимальное решение.

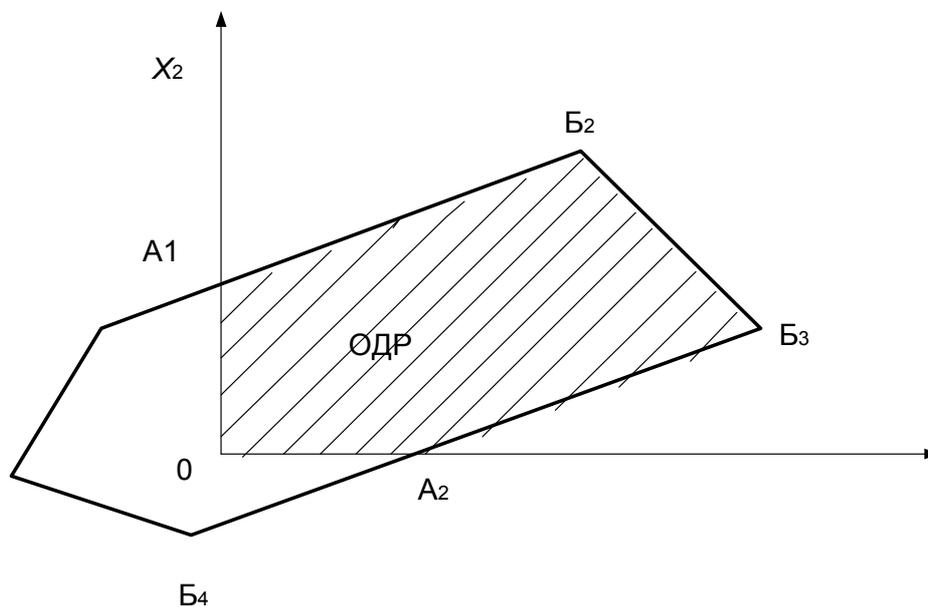


Рис. 8.1. Графическое изображение области решения ЗЛП, где ОДР – область допустимых решений

## 8.2. Двойственная задача линейного программирования

Каждая задача линейного программирования, задаваемая системой линейных неравенств с неотрицательными переменными, может иметь форму прямой задачи и задачи, двойственной к ней.

Пусть имеем прямую задачу (исходную).

Найти значения  $x_j \geq 0$  и минимум целевой функции  $W(x)$  при ограничениях



Требуется записать двойственную задачу.

Решение.

$Z = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \rightarrow \max$  при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2; \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1; \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5; \end{array} \right\} y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3).$$

### 8.3. Формулировка задачи линейного программирования

В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом.

Предприятие может изготовить изделия двух видов  $A_1$  и  $A_2$ . Для изготовления этих изделий необходимо иметь три вида сырья  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ , ресурсы которых ограничены. На производство одного изделия требуется определенное количество сырья, для конкретного случая они представлены в табл. 8.1. В этой таблице также приведены доходы от реализации от одного изделия в условных единицах.

Требуется определить, сколько и каких видов изделий надо производить, чтобы доход предприятия был максимальным.

Таблица 8.1

Вид сырья	Вид продукции		Запас сырья ( $B_i$ )
	$A_1$	$A_2$	
$B_1$	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 4$	28
$B_2$	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 1$	10
$B_3$	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 1$	24
Доход от одного вида продукции	$C_1 = 3$	$C_2 = 2$	
Количество единиц продукции	$X_1$	$X_2$	

Используя данные табл. 8.1, запишем целевую функцию нашей задачи:

$$\max W = C_1x_1 + C_2x_2 = 3x_1 + 2x_2, \quad (8.4)$$

где  $C_1, C_2$  – стоимость изделий;  $x_1, x_2$  – количество изделий.

Система ограничений запишется так:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} + a_{12}x_2 \leq B_1; \\ a_{21} + a_{22}x_2 \leq B_2; \\ a_{31} + a_{32}x_2 \leq B_3 \end{array} \right\}$$

или

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 28; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + x_2 \leq 21 \end{array} \right\} \quad \text{при } x_{1,2,3} \geq 0. \quad (8.5)$$

Итак, задача линейного программирования (ЗЛП) сформулирована в словесной и математической форме.

ЗЛП имеет несколько методов решения. Мы рассмотрим графический метод и метод симплексных таблиц.

#### 8.4. Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Поскольку в задаче только две переменные, а условия для них записаны в виде неравенств первой степени, можно рассмотреть геометрическую интерпретацию задачи в плоскости координат  $x_1, x_2$ .

Условия (8.5), накладываемые на переменные  $x_1, x_2$ , означают, что область допустимых значений  $x_1, x_2$  для каждого условия лежит в заштрихованной полуплоскости (рис. 8.2).

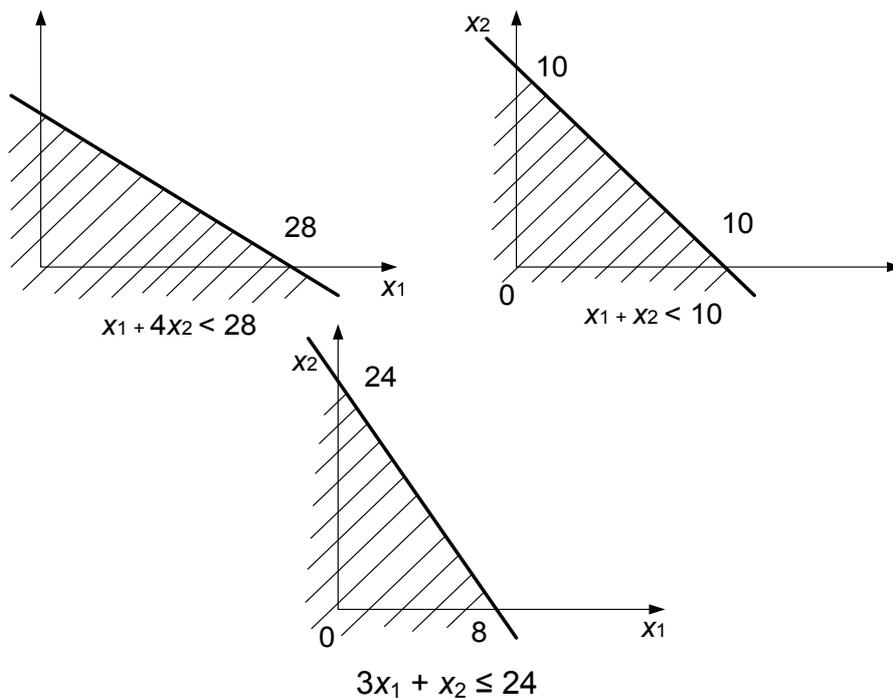


Рис. 8.2. Графическое изображение уравнений системы ограничений

Область изменения  $x_1, x_2$ , удовлетворяющая всем трем условиям, лежит в выпуклом многоугольнике  $0A_1 A_2 A_3 A_4$  с вершинами  $0(0; 0)$ ,  $A_1(0; 7)$ ,  $A_2(6; 4)$ ,  $A_3(7; 3)$ ,  $A_4(8; 0)$  (рис. 8.3).

Рассмотрим теперь линии уровня функции  $W(x_1, x_2)$ , семейство параллельных прямых  $3x_1 + 2x_2 = C$ .

Для  $W(x_1, x_2) = 0$  линия пройдет через начало координат. Для больших  $C$  линии уровня расположены правее. Следовательно, максимум функции  $W(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$  реализуется в точке  $(x_1, x_2)$ , лежащей на линии уровня функции  $W(x_1, x_2) = C$ , которая расположена на наибольшем расстоянии от нуля вправо. С другой стороны, мы ищем наибольшее значение  $W(x_1, x_2)$  в области изменения переменных  $0 \leq x_1 \leq A_1$ ,  $0 \leq x_2 \leq A_2$ ,  $A_3 \leq x_1 \leq A_4$ . Следовательно, оптимальное решение лежит на линии уровня  $3x_1 + 2x_2 = C$ , пересекающей область  $0 \leq x_1 \leq A_1$ ,  $0 \leq x_2 \leq A_2$ ,  $A_3 \leq x_1 \leq A_4$  в точке  $A_3$ . Таким образом, точка  $A_3 (7;3)$  является точкой оптимального решения, и  $\max W(x_1, x_2) = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27$ .

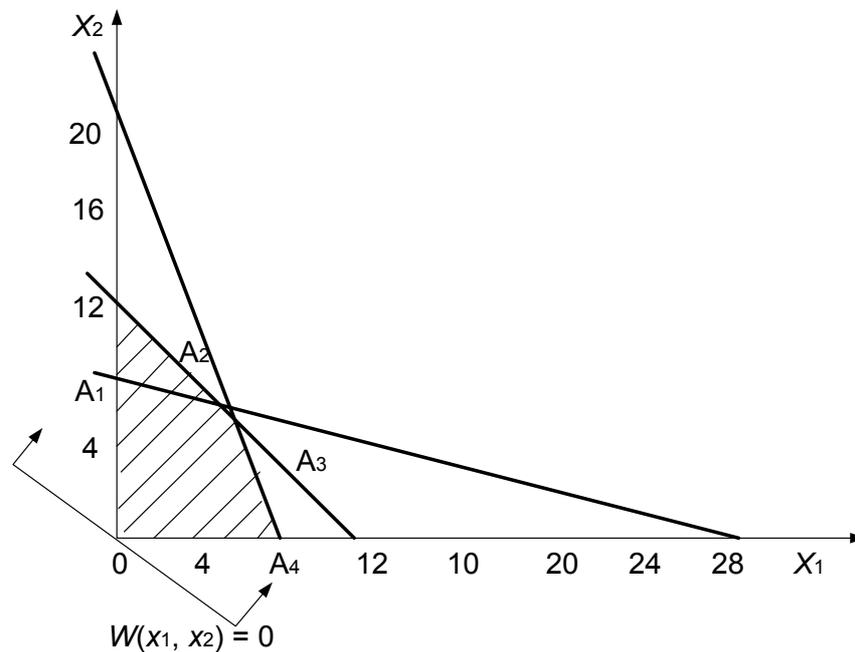


Рис. 8.3. Графический метод решения ЗЛП

## 8.5. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Пусть требуется найти  $\max$  ( $\min$ ) целевой функции

$$W = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

при ограничениях  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ,



где  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ ;  $x_3 \geq 0$ ;  $x_4 \geq 0$ ;  $x_5 \geq 0$ .

$$W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5. \quad (8.9)$$

Следует найти  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , которые удовлетворяют условиям (8.8), обеспечивают максимум целевой функции  $W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

Поиск оптимального решения начнем с выбора значений, удовлетворяющих условиям (8.8). Легче всего это сделать для  $x_1 = x_2 = 0$ , тогда  $x_3 = 28$ ,  $x_4 = 10$ ,  $x_5 = 24$ . Такое начальное приближение оптимального решения назовем опорным решением:  $x_1^{(1)} = 0$ ,  $x_2^{(1)} = 0$ ,  $x_3^{(1)} = 28$ ,  $x_4^{(1)} = 10$ ,  $x_5^{(1)} = 24$ . Ему соответствует значение целевой функции  $W^{(1)} = 0$ .

Выразим из условия (8.8) ненулевые переменные  $x_3, x_4, x_5$  (назовем их базисными переменными) через  $x_1, x_2$  (назовем их свободными):

$$\begin{aligned} x_3 &= 28 - x_1 - 4x_2, \\ x_4 &= 10x_1 - x_2, \\ x_5 &= 24 - 3x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Целевая функция в переменных  $x_1, x_2$  такова:  $W(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ . Видно, что, увеличивая  $x_1, x_2$ , можно увеличить значения целевой функции. Пусть, например,  $x_2 = 0$ . Тогда максимально допустимое значение  $x_1 = 8$  (см. рис. 8.3). Получим новое опорное решение  $x_1^{(2)} = 8$ ,  $x_2^{(2)} = 0$ ,  $x_3^{(2)} = 20$ ,  $x_4^{(2)} = 2$ ,  $x_5^{(2)} = 0$ . Ему соответствует значение целевой функция  $W^{(2)} = 24 > W^{(1)}$ . Следовательно, второе опорное решение лучше.

Примем теперь нулевые переменные ( $x_2$  и  $x_5$ ) за свободные, а остальные ( $x_1, x_3, x_4$ ) – за базисные. Из системы (8.8) получим

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - (1/3)x_2 - (1/3)x_5, \\ x_3 &= 20 - (10/3)x_2 + (1/3)x_5, \\ x_4 &= 2 - (2/3)x_2 + (1/3)x_5. \end{aligned} \quad (8.10)$$

В новых свободных переменных целевая функция имеет вид:

$$W = 24 + x_2 - x_5.$$

Таким образом, для увеличения целевой функция  $W$  нужно увеличить значение свободной переменной  $x_2$ , оставляя  $x_5 = 0$ . Из формулы (8.10) видно, что наибольшее допустимое значение  $x_2 = 3$ . Тогда новое опорное решение таково:  $x_1^{(3)} = 7$ ,  $x_2^{(3)} = 3$ ,  $x_3^{(3)} = 10$ ,  $x_4^{(3)} = 0$ ,  $x_5^{(3)} = 0$ , а значение целевой функции  $W^{(3)} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27 > W^{(2)}$ .

Как и прежде за свободные переменные выберем  $x_4$  и  $x_5$ , а за базисные –  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Из системы (8.8) получим

$$\begin{aligned}x_1 &= 7 + x_4/2 - x_5/2, \\x_2 &= 3 - 3x_4/2 + x_5/2, \\x_3 &= 9 - 11x_4/2 - 3x_5/2.\end{aligned}$$

Целевая функция имеет вид  $W = 27 - (3/2)x_4 - (1/5)x_5$ . Видно, что нельзя изменить значения  $X_4$  и  $X_5$ , не уменьшив значение целевой функции. Следовательно, последнее опорное решение оптимально. Как и при решении задачи геометрическим способом, получено оптимальное решение  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 3$ , дающее максимальное значение функции

$$\begin{aligned}W(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\x_1 &= 7, x_2 = 3.\end{aligned}$$

Описанный метод решения (симплекс-метод) состоит в построении последовательности опорных решений, увеличивающих целевую функцию.

Изобразим опорные решения в плоскости  $x_1, x_2$ , помечая точки цифрой, соответствующей номеру опорного решения (рис. 8.4).

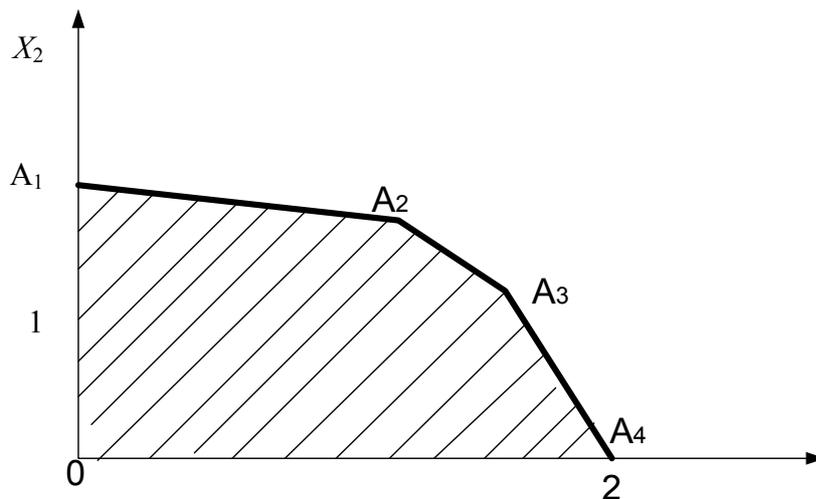


Рис. 8.4. Графическое изображение опорных решений

Таким образом, мы строим опорные решения симплекс-методом, переходя от начала координат к оптимальному решению по периметру многоугольника  $0 A_1 A_2 A_3 A_4$ , который был получен при решении задачи геометрическим способом.

Из описания метода на примере видно, что алгоритм симплекс-метода носит итерационный характер. Один шаг метода состоит в построении очередного опорного решения.

### 8.5.2. Алгоритм симплекс-метода

Опишем алгоритм симплекс-метода для общей канонической задачи линейного программирования (8.6), (8.7). Допустимым решением назовем всякое решение системы (8.6), удовлетворяющее условию  $x_i \geq 0$ . Допустимое решение, на котором целевая функция (8.7) принимает максимальное значение, назовем оптимальным.

В зависимости от матрицы системы (8.6) возможны следующие случаи.

1. Система (8.6) не имеет решений, т.е. несовместима. В этом случае задачи линейного программирования неразрешимы.

2. Система (8.6) не имеет допустимых решений, а значит, задача линейного программирования не имеет решения.

3. Система (8.6) имеет единственное допустимое решение. В этом случае единственное решение системы является оптимальным.

4. Система (8.6) имеет бесконечное множество допустимых решений, но целевая функция не ограничена на этом множестве допустимых решений, а значит, задача линейного программирования неразрешима.

5. Система (8.6) имеет множество допустимых решений, и целевая функция ограничена на множестве допустимых решений. В этом случае задача линейного программирования имеет оптимальное решение. Будем в дальнейшем считать, что задача (8.6), (8.7) имеет оптимальное решение.

Симплекс-метод состоит в последовательном построении таких опорных решений, что каждое следующее увеличивает целевую функцию, и максимум достигается за конечное число шагов.

Обобщенный алгоритм симплексного метода решения ЗЛП приведен на рис. 8.5 и включает следующую последовательность операций.

1. Уравнения системы ограничений запишем в каноническом виде. Для этого:

а) заменим неравенства равенствами путем введения дополнительных (фиктивных) переменных;

б) добиваемся, чтобы все свободные члены системы ограничений были положительными (блок 2).

2. Находим первое опорное решение. Для этого:

а) все переменные  $n$  разбиваем на  $m$ -базисных и  $k = n - m$ -свободных;

б) в качестве базисных переменных выбираем добавочные переменные;

в) полагая, что все свободные переменные равны нулю, получим первое опорное решение (блок 3).



Рис. 8.5. Алгоритм симплекс-метода решения ЗЛП

3. По правилам 1, 2 (см. ниже) определяем оптимальность принятого решения (блоки 5 – 7).

4. При отсутствии оптимальности по определенному правилу (см. ниже) удаляем из базисных переменных одну и вводим другую из числа свободных (блоки 8, 9).

5. Проводим повторную проверку на оптимальность.

*Примечание.* Для упорядочения перехода от одного опорного решения пользуемся итерационными таблицами. Итерационные таблицы, составленные по нижеприведенным правилам, позволяют осуществлять переход от худшего решения только к лучшему, до получения оптимального решения.

Аналитический способ решения задачи линейного программирования рассмотрим на конкретном примере.

### 8.5.3. Решение задач линейного программирования

Задача. Найти максимум целевой функции

$$W = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 28; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \end{array} \right\}$$

где  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Решение.

1. Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + \overbrace{[x_3 + 0 + 0]} = 28, \\ x_1 + x_2 + \overbrace{[0 + x_4 + 0]} = 10, \\ 3x_1 + x_2 + \overbrace{[0 + 0 + x_5]} = 24, \end{array}$$

где  $x_3, x_4, x_5 \geq 0$  – добавочные переменные, которые примем за базис.

Целевую функцию запишем в виде

$$W_{\max} = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5.$$

2. Составляем первую симплексную таблицу (табл. 8.2),

где  $x_3, x_4, x_5$  – базисные переменные;

$C_j$  – коэффициенты целевой функции или неизвестные  $x_j$ ;

$C_i$  – коэффициенты целевой функции при базисных переменных;

$b_i$  – свободные члены системы ограничений;

$a_{ij}$  – коэффициенты при неизвестной системе ограничений;

$\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$  – оценочный параметр по  $j$ -му столбцу;

$Q_i = b_i/a_{ij}$  – оценочный параметр по  $i$ -й строке;

$W = \sum c_i b_i$  – значение целевой функции при принятых базисных переменных  $x_3, x_4, x_5$  (свободные переменные  $x_1, x_2$  равны нулю).

Таблица 8.2

Базисные переменные	$C_j$ $C_i$	$b_i$	Коэффициент целевой функции					$Q_i = b_i/a_{ij}$	
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
			3	2	0	0	0		
1	$x_3$	0	28	1	4	1	0	0	28
2	$x_4$	0	10	1	1	0	1	0	10
3	$x_5$	0	24	3	1	0	0	1	8(min)
$\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$				-3	-2	0	0	0	
$W = \sum c_i b_i = 0$									

### Правила проверки на оптимальность

*Правило 1. Если при отыскании максимума целевой функции для некоторого опорного решения  $\{x_i\}$  выполняется условие  $\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j \geq 0$ , то решение  $\{x_i\}$  является оптимальным.*

Для нашего примера  $\Delta_1 = -3$  и  $\Delta_2 = -2$ , значит, план не оптимален. Используя оценочный параметр  $\Delta_j$ , определим разрешающий столбец, т.е. из какого столбца и какую свободную переменную будем вводить в число базисных переменных.

Для нашего примера самый отрицательный оценочный параметр  $\Delta_1 = -3$  и, следовательно, переменную  $x_1$  введем в число базисных переменных.

*Правило 2. Разрешающую (направляющую) строку определяем с помощью оценочного параметра  $Q_i = b_i / a_{ij}$ , который должен быть положительным и минимальным для всех  $b_i / a_{ij}$  для разрешающего столбца.*

Для нашего примера разрешающей строкой будет третья (см. табл. 8.2), так как  $Q_3 = 24/3 = 8$  – самое минимальное положительное число. Таким образом, из базиса удаляем  $x_5$  и вводим вместо него  $x_1$ . Составляем новую итерационную (табл. 8.3).

Таблица 8.3

Базисные переменные		$C_j$		$b_i$	Коэффициент целевой функции					$Q_i = b_i/a_{ij}$
		$C_i$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
					3	2	0	0	0	
1	$x_3$	0	20	0	11/3	1	0		60/11	
2	$x_4$	0	2	0	2/3	0	1		3(min)	
3	$x_1$	3	8	1	1/3	0	0		24	
$\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$				0	-1	0	0			
$W = \sum c_i b_i = 0 \cdot 20 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 24$										

3. При заполнении этой расчетной таблицы добиваемся, чтобы на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца была единица, а остальные элементы  $a_{1i}$  разрешающего столбца были равны нулю. Для этого:

- а) третью строку делим на 3;
- б) из первой и второй строки вычитаем третью строку (ранее поделенную на 3).

Для нашего примера  $\Delta_2 = -1$  и  $Q_2 = 3$  (min), т.е. план не оптимален. Разрешающим столбцом является второй, и  $x_2$  будем вводить в базис. Разрешающая строка вторая, и, следовательно, из базиса выведем переменную  $x_4$ . Составляем третью расчетную таблицу (табл. 8.4).

Таблица 8.4

Базисные переменные		$C_j$		$b_i$	Коэффициент целевой функции					$Q_i = b_i/a_{ij}$
		$C_i$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
					3	2	0	0	0	
1	$x_3$	0	20	0	0	1				
2	$x_2$	0	2	0	1	0				
3	$x_1$	3	8	1	0	0				
$\Delta_j = \sum c_i a_{ij} - c_j$				0	0	0				
$W = \sum c_i b_i = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27$										

4. При заполнении этой расчетной таблицы добиваемся, чтобы на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца была единица,

а остальные элементы  $a_{2j}$  разрешающего столба были равны нулю. Для этого:

а) третью строку умножаем на  $3/2$ ;

б) из первой и третьей строки вычитаем вторую, добиваясь того, чтобы  $a_{12}$  и  $a_{32}$  были равны нулю.

В третьей итерационной таблице отрицательных оценок  $\Delta_j$  нет, следовательно, мы нашли оптимальное решение  $x_1 = 7$ ;  $x_2 = 3$  и  $\max W = 27$ .

## 8.6. Оптимизация грузопотоков

Задачи оптимизации грузопотоков решаются методами линейного программирования, которые позволяют установить оптимальное закрепление потребителей груза за поставщиками, выбрать маршруты перевозок грузов, решить вопросы распределения парка подвижного состава по АТП и т.д.

В качестве критериев оптимальности принимают пробег подвижного состава, время доставки груза, денежные или трудовые затраты.

### 8.6.1. Формулировка транспортной задачи

Частным случаем задачи линейного программирования является «транспортная задача», которая формулируется следующим образом.

Имеется  $m$  поставщиков ( $A_1, A_2, \dots, A_m$ ), которые располагают запасами однородного груза ( $\Gamma$ ) –  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , а также имеется  $n$  потребителей ( $B_1, B_2, \dots, B_n$ ), которым необходимо завести  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  тонн груза, а также известны расстояния между грузопунктами.

Необходимо так закрепить поставщиков за потребителями, чтобы затраты на перевозку были  $\min$  (т.е.  $\min$  транспортной работы).

Исходные данные «транспортной» задачи представляют обычно в виде табл. 8.5.

Математическая модель транспортной задачи в общем виде записывается в следующей форме.

Дана целевая функция

$$W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} l_{ij} \rightarrow \min \quad (8.11)$$

и ограничения

$$\left. \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \right\} \quad (8.12)$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения переменных  $x_{ij} \geq 0$ , которые удовлетворяют ограничениям, а целевая функция при этом достигает минимума.

При решении задачи оптимального закрепления потребителей груза за поставщиками символике выражений (8.11) и (8.12) можно придать следующий физический смысл:

$m$  – количество поставщиков;

$n$  – количество потребителей;

$a_i$  – количество груза, отправляемого  $i$ -м поставщиком;

$b_j$  – количество груза, доставляемого  $j$ -му потребителю;

$x_{ij}$  – количество груза, доставляемого от  $i$ -го поставщика  $j$ -му потребителю.

$L_{ij}$  – расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м пунктами.

Таблица 8.5

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы $a_{ij}$
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$l_{11}$ $x_{11}$	$l_{12}$ $x_{12}$	...	$l_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$l_{21}$ $x_{21}$	$l_{22}$ $x_{22}$	...	$l_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$l_{m1}$ $x_{m1}$	$l_{m2}$ $x_{m2}$	...	$l_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребности $b_j$	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

### 8.6.2. Последовательность решения транспортной задачи

В решении транспортной задачи выделяют три этапа:

1. Определение первоначального плана перевозок.
2. Проверка полученного плана на оптимальность.
3. Переход к новому плану перевозок с проверкой на оптимальность.

*Первый этап.* Первоначальный план перевозок принято устанавливать методом северо-западного угла или методом наименьшей стоимости.

Метод северо-западного угла заключается в том, что вначале полностью удовлетворяются потребности первого потребителя (если это возможно) за счет первого поставщика, остаток передается второму потребителю и т.д. Одновременно нужно следить за тем, чтобы соблюдался баланс по строкам и столбцам. Этот метод позволяет легко найти первоначальный план перевозок, но он, как правило, далек от оптимального.

Метод наименьшей стоимости предусматривает первоочередное заполнение тех клеток, которые располагают наименьшим расстоянием перевозок (наименьшей стоимостью). При этом план перевозок, как правило, будет ближе к оптимальному.

*Второй этап.* Проверка первоначального плана на оптимальность может осуществляться различными методами. Наиболее распространенным является метод потенциалов. Согласно данному методу, для получения оптимального плана перевозок  $x_{ij}$  необходимо и достаточно введение вспомогательных чисел:  $U_i, i = 1, 2, \dots, m$  и  $V_j, j = 1, 2, \dots, n$ , называемых потенциалами, при которых выполнялись бы условия:

$$V_j + U_i = l_{ij}, x_{ij} > 0; \quad (8.13)$$

$$V_j + U_i \leq l_{ij}, x_{ij} = 0, \quad (8.14)$$

где  $V_j$  – потенциал  $j$ -го столбца,  $U_i$  – потенциал  $i$ -й строки.

Условие (8.13) должно соблюдаться для занятых клеток таблицы, а условие (8.14) – для свободных. Если условие оптимальности (12) не соблюдается хотя бы для одной клетки, это значит, что полученный план перевозок не является оптимальным и нужно искать другой.

*Третий этап* решения транспортной задачи (получение нового плана перевозок) рассмотрим на конкретном примере.

### **8.6.3. Пример решения задачи**

Пример. Найти оптимальный план перевозок грузов. Запасы на складах, потребности пунктов назначения и расстояния перевозок однородного груза по пунктам назначения указаны в табл. 8.6.

#### Решение.

Составляем первоначальный план перевозок методом северо-западного угла (табл. 8.7). Определяем потенциалы по столбцам, строкам

для занятых клеток по условию (8.13). Один из потенциалов  $V_j$  выбираем произвольно. Например  $V_1 = 0$ , тогда для клетки  $A_1 B_1$  согласно условию  $V_j + U_i = l_{ij}$ , имеем  $V_1 + U_1 = 4$ , если ранее принято  $V_1 = 0$ , то  $U_1 = 4$ . Для клеток

$A_2 B_1$	$V_1 + U_2 = 5$	при $V_1 = 0, U_2 = 5$ ;
$A_2 B_2$	$V_2 + U_2 = 10$	при $V_2 = 5, U_2 = 5$ ;
$A_3 B_2$	$V_2 + U_3 = 5$	при $V_2 = 5, U_3 = 0$ ;
$A_3 B_3$	$V_3 + U_3 = 8$	при $V_3 = 8, U_3 = 0$ ;
$A_4 B_3$	$V_4 + U_3 = 6$	при $V_4 = 6, U_3 = 0$ .

Полученные значения потенциалов проставляем во вспомогательные строки и столбцы расчетной табл. 8.7.

Таблица 8.6

Пункты отправления	Пункты назначения и расстояния перевозок				Запасы $a_{ij}$ , т
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	4	8	3	12	100
$A_2$	5	10	4	18	80
$A_3$	7	5	8	6	240
Потребности $b_j$ , т	160	90	120	50	420

Таблица 8.7

Пункты отправления	Вспомогательные	Пункты назначения и расстояния перевозок				Наличие груза $a_j$ , т
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
	$V_j$	0	5	8	6	
	$U_i$					
$A_1$	4	4	8	3	12	100
$A_2$	5	3	10	4	18	80
$A_3$	0	0	5	8	6	240
Потребности $b_j$ , т		160	90	120	50	420

Diagrammatic annotations in Table 8.7:  
 - A box around the cell  $(A_1, B_1)$  with value 9.  
 - A box around the cell  $(A_2, B_3)$  with value 13.  
 - A box around the cell  $(A_3, B_1)$  with value 0.  
 - A box around the cell  $(A_3, B_2)$  with value 5.  
 - A box around the cell  $(A_2, B_1)$  with value 60.  
 - A box around the cell  $(A_2, B_2)$  with value 20.  
 - A box around the cell  $(A_3, B_3)$  with value 70.  
 - A box around the cell  $(A_3, B_4)$  with value 120.  
 - A box around the cell  $(A_2, B_4)$  with value 11.  
 - A box around the cell  $(A_3, B_4)$  with value 50.  
 - Arrows indicate adjustments: a horizontal arrow from  $(A_1, B_1)$  to  $(A_2, B_1)$ , a vertical arrow from  $(A_2, B_3)$  to  $(A_3, B_3)$ , and a horizontal arrow from  $(A_3, B_2)$  to  $(A_2, B_2)$ .  
 - A '+' sign is located near the cell  $(A_2, B_3)$ .

Свободные клетки, для которых  $x_{ij} = 0$ , проверяем на выполнение условия (12), для чего значения суммы потенциалов  $(V_j + U_i)$  для данных клеток проставляем в верхние левые углы свободных клеток табл. 8.7 и проверяем все эти клетки на выполнение условия  $V_j + U_i \leq l_{ij}$ .

Сравнением устанавливаем, что для клеток  $A_1 B_2$ ,  $A_1 B_3$  и  $A_2 B_2$  условие (12) не выполняется, так как соответственно

$$5 + 4 = 9 > 8, \quad 8 + 4 = 12 > 3, \quad 8 + 5 = 13 > 4.$$

Следовательно, план перевозок не оптимален, и его можно улучшить.

Совершенствование плана перевозок осуществляется следующим образом. В клетку, для которой не выполняется условие (8.14), вписываем поставку величиной  $\Delta$ . Поскольку сумма поставок по строкам и столбцам должна остаться неизменной, то необходимо прибавить и вычесть  $\Delta$  из поставок в других клетках, обходя их в той последовательности, при которой значение  $\Delta$  компенсируется вычитанием и сложением со значением числа в клетке. Получаем замкнутую ломаную линию, которую принято называть циклом пересчета.

При получении нового плана перевозок и определении величины поставок  $\Delta$  необходимо пользоваться следующим правилом: начиная со свободной клетки и двигаясь по циклу пересчета, в вершинах цикла расставляем поочередно знаки «+» и «-», затем просматриваем поставки, записанные в отрицательных вершинах, и выбираем наименьшую. Это число прибавляется ко всем поставкам, записанным в положительных вершинах, и вычитается из всех поставок, записанных в отрицательных вершинах. Результаты нового плана перевозок заносим в табл. 8.8.

Вычисление потенциалов табл. 8.8 проведено по условию (11) для занятых клеток. Предварительно принято  $U_1 = 0$ .

$$\begin{array}{ll} V_3 + U_1 = 3 & \text{при } V_3 = 3, U_1 = 0; \\ V_3 + U_2 = 4 & \text{при } V_3 = 3, U_2 = 1; \\ V_1 + U_2 = 5 & \text{при } V_1 = 4, U_2 = 1; \\ V_1 + U_3 = 7 & \text{при } V_1 = 4, U_3 = 3; \\ V_4 + U_3 = 6 & \text{при } V_4 = 3, U_3 = 3. \end{array}$$

Для всех свободных клеток табл. 8.8 условие  $V_j + U_i \leq l_{ij}$  выполняется, следовательно, получен оптимальный план перевозок. Значение целевой функции для такого плана перевозок таково:

$$W = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 60 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 90 + 6 \cdot 50 = 2130 \text{ (тыс. км)}.$$

*Примечание.* Выше рассмотрен вариант транспортной задачи, в которой потребности в грузах пунктов назначения равны запасу груза в пунктах отправления,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (8.15)$$

Таблица 8.8

Пункты отправления	Вспомогательные	Пункты назначения и расстояния перевозок				Наличие груза $a_j$ , т
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
	$U_i \backslash V_j$	4	2	3	3	
$A_1$	0	$\boxed{4}$ 4	$\boxed{2}$ 8	100 3	$\boxed{3}$ 12	100
$A_2$	1	3 60	$\boxed{3}$ 10	20 4	$\boxed{4}$ 18	80
$A_3$	3	7 100	5 90	$\boxed{6}$ 8	6 50	240
Потребности $b_j$ , т		160	90	120	50	420

Модель такой транспортной задачи называется закрытой. Если же условие (8.15) выполняется, то модель такой задачи называется открытой.

В случае превышения запаса над потребностью, т.е.  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , при решении задачи вводится фиктивный  $(n + 1)$ -й пункт назначения с потребностью  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  и соответствующее расстояние (тариф), равное нулю:  $l_{i,n+1} = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

Аналогично при  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$  вводится фиктивный  $(m + 1)$ -й пункт

отправления с запасом груза  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ , и расстояния (тарифы)

полагаются равными нулю:  $l_{m+1,j} = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Этим задача сводится к обычной (закрытой) транспортной задаче.

## 8.7. Разработка рациональных маршрутов перевозок массовых грузов на основании заявок договорной клиентуры

Составление рациональных маршрутов перевозок массовых грузов имеет целью достижение максимального коэффициента использования пробега автомобилей путем определения порядка следования автомобилей от места разгрузки к месту погрузки с тем условием, чтобы общий пробег без груза был наименьшим.

### 8.7.1. Постановка задачи

При решении таких задач отбираются те заявки на перевозку грузов, которые совпадают по времени выполнения перевозок и которые можно осуществить одним и тем же подвижным составом.

Предположим, что такие заявки отобраны, установлены кратчайшие расстояния между всеми пунктами, выбран тип подвижного состава, определено количество поездок по доставке груза от каждого поставщика соответствующему потребителю. Исходные данные одного из вариантов подобной задачи представлены в табл. 8.9, 8.10, где соответственно отражены суточный объем перевозок по заявкам грузоотправителей и показатели работы автомобилей.

Таблица 8.9

№ п/п	Грузоотправитель		Грузополучатель		Род груза	Количество	
						т	ездки
1	Речной порт	A <sub>1</sub>	АБЗ	Б <sub>3</sub>	Песок	140	20
2	Речной порт	A <sub>1</sub>	ЗЖБК	Б <sub>4</sub>	Щебень	105	15
3	Котлован	A <sub>2</sub>	Строительство 11	Б <sub>2</sub>	Грунт	245	35
4	Песчаный карьер	A <sub>3</sub>	Строительство 1	Б <sub>1</sub>	Песок	336	48

Таблица 8.10

№ п/п	Параметр	Количество
1	Грузоподъемность МАЗ – 503Б, т	7,0
2	Средняя техническая скорость, км/ч	22,0
3	Время в наряде, ч	14,0
4	Норма времени на погрузку за езду, мин	7,0
5	Норма времени на разгрузку за езду, мин	6,0
6	Начало работы пунктов погрузки, ч	7,0

Каждому отправителю присвоено условное обозначение А, потребителю – Б с соответствующими порядковыми цифровыми индексами.

В табл. 8.9 кроме количества перевозимого груза показано количество ездов, которое определено по показателям работы выбранного подвижного состава (см. табл. 8.10).

Матрица расстояний между грузопунктами, соответствующая схеме перевозок (рис. 8.6), представлена в табл. 8.11.

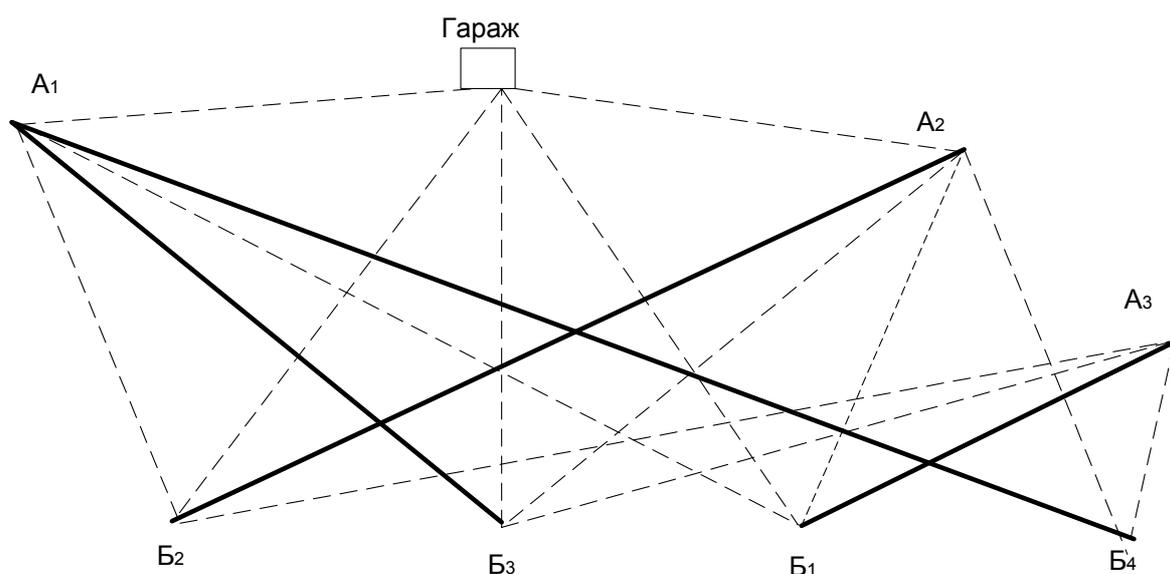


Рис. 8.6. Схема перевозок

Таблица 8.11

Грузопункты	А <sub>1</sub>	А <sub>2</sub>	А <sub>3</sub>	АТП
Б <sub>1</sub>	12	13	11	10
Б <sub>2</sub>	9	12	13	9
Б <sub>3</sub>	11	15	12	11
Б <sub>4</sub>	14	8	5	9
АТП	6	4	7	0

### 8.7.2. Разработка рациональных маршрутов

На основании заявок договорной клиентуры заполняют расчетную таблицу (например методом северо-западного угла), в клетках которой указывают количество порожних ездов из пунктов  $B_j$  в пункты  $A_i$  и расстояние между пунктами (последние проставляются в верхних правых углах соответствующих клеток). Получим первоначальный план холостых ездов. Проверим этот план на оптимальность, например методом потенциалов, и добьемся такого распределения порожних ездов автомобилей, при которых их пробег без груза будет минимальным (см. метод решения транспортной задачи).

Результаты расчета оптимального распределения ездов автомобилей без груза, обеспечивающих минимальный порожний пробег всех автомобилей, участвующих в планируемых перевозках, приведены в табл. 8.12. В данной таблице указано, что из пункта  $B_2$  в пункт  $A$  необходимо сделать 35 ездов без груза, из пункта  $B_3$  в пункт  $A_3$  – 20 ездов и т.д.

Таблица 8.12

Потребитель	Вспомогательные	Пункты назначения и расстояния перевозок			Количество ездов
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	
	$U_j$	0	3	0	
	$V_i$				
$B_3$	12	12 (11) (20)	10 (15)	20 (12)	20
$B_4$	5	5 (14) (15)	7 (8) (0)	15 (5)	15
$B_2$	9	35 (9)	12 (35) (0)	9 (13)	35
$B_1$	10	10 (17)	35 (13)	10 (48) (11)	48
Количество ездов		35	35	48	118

После получения оптимального плана распределения порожних ездов в эту же таблицу вносим план груженых ездов (цифры в скобках).

В тех клетках, где имеются две цифры, назначаются маятниковые маршруты, количество ездов по которым равно наименьшей цифре. Так, в клетке  $A_3 B_1$  имеем маятниковый маршрут № 1:  $A_3 B_1 B_1 A_3$  с 13 оборотами. Это количество ездов исключается из дальнейшего рассмотрения.

Когда все маятниковые маршруты найдены, в матрице строим четырехугольные (шестиугольные и т.д.) контуры, все вершины которых лежат в загруженных клетках, причем вершины с грузеными езтками должны чередоваться с вершинами порожних ездов. В данном примере получено два таких контура, которые показаны пунктирными линиями. Каждый из них составляет кольцевой маршрут.

Маршрут № 2:

$A_3 B_1 B_1 A_2 A_2 B_2 B_2 A_1 A_1 B_3 B_3 A_3$  – 20 оборотов;

Маршрут № 3:

$A_3 B_1 B_1 A_2 A_2 B_2 B_2 A_1 A_1 B_4 B_4 A_3$  – 15 оборотов.

Количество оборотов на маршруте определяется наименьшим числом в вершинах контура. Выбранное количество ездов из клеток таблицы исключается. Решение ведется до полного исключения всего количества ездов из матрицы.

После назначения маршрутов необходимо выбрать первоначальные пункты погрузки на кольцевых маршрутах и определить, какое количество автомобилей следует направить на каждый маршрут, чтобы обеспечить выполнение плана перевозок.

Первоначальный пункт погрузки выбирается из условия минимума нулевого пробега  $l_{0A_i}$ . Для нашего примера минимальный нулевой пробег  $l_{0A_2} = l_{\Gamma A_2} + l_{B_{11}} = 4 + 10 = 14$  км для первоначального пункта погрузки  $A_2$ . Схема кольцевого маршрута № 3 приведена на рис. 8.7.

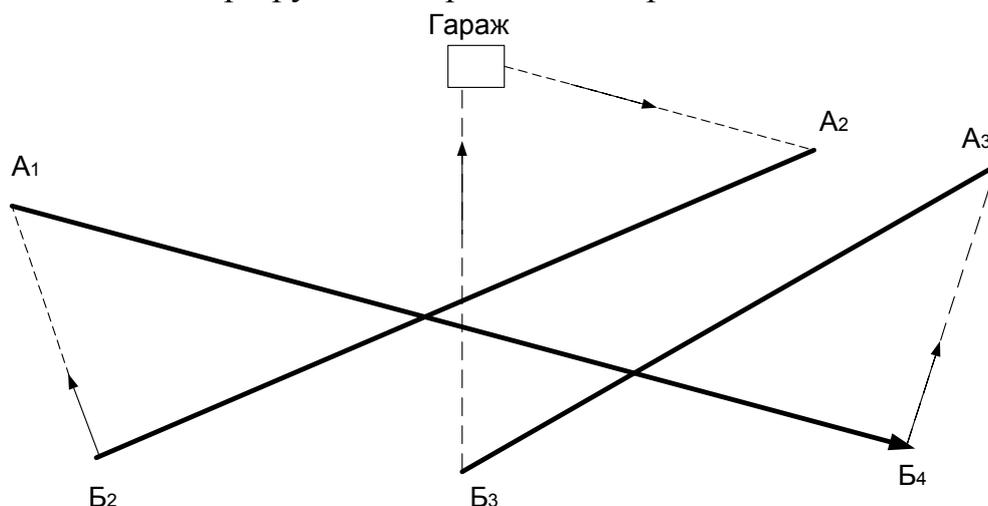


Рис. 8.7. Схема кольцевого маршрута

Перевозку по маршруту можно начинать из пункта  $A_1$  или  $A_3$ , тогда автомобиль будет возвращаться в гараж из пункта  $B_2$  или  $B_4$  соответственно. Это приходится часто делать с целью исключения одновременной подачи на один и тот же пункт погрузки большого количества автомобилей и создания очередей, хотя при этом нулевые пробеги автомобилей могут несколько увеличиваться.

### 8.7.3. Расчет необходимого числа подвижного состава на маршруте

Расчет необходимого числа автомобилей на маршруте и коэффициента использования парка проводится по ниже приведенным соотношениям.

Число оборотов автомобилей по маршруту за время в наряде

$$Z_{\text{об}} = \frac{T_{\text{н}} - (l_{01} + l_{02} - l'_x)/V_{\text{т}}}{t_{\text{об}}},$$

где  $T$  – время в наряде, ч;  $l_{01}$  – первый нулевой пробег, км;  $l_{02}$  – второй нулевой пробег, км;  $l'_x$  – последняя холостая ездка на маршруте, км;  $V_{\text{т}}$  – средняя техническая скорость, км/ч;  $t_{\text{об}}$  – время оборота автомобиля на маршруте, ч.

$$t_{\text{об}} = \frac{2l_{\text{е.г}}}{V_{\text{т}}} + t_{\text{пр}} \text{ – маятниковый маршрут,}$$

$$t = \frac{l_{\text{м}}}{V_{\text{т}}} + \sum_{i=1}^n t_{\text{пр.}i} \text{ – кольцевой маршрут,}$$

где  $l_{\text{е.г}}$  – расстояние ездки с грузом, км ;  $t_{\text{пр}}$  – время погрузочно-разгрузочных работ за ездку, ч;  $l_{\text{м}}$  – длина маршрута, км;  $n$  – число ездок за оборот.

Потребное число автомобилей на маршруте

$$A_{\text{сут}} = \frac{U_{\text{сут}}}{Q_{\text{сут}}} = \frac{U_{\text{сут}}}{q_{\text{н}} \gamma Z_{\text{об}} n},$$

где  $U_{\text{сут}}$  – плановый объем перевозок на маршруте за сутки, т;  $q_{\text{н}}$  – номинальная грузоподъемность, т;  $\gamma$  – коэффициент использования грузоподъемности.

Коэффициент использования пробега за день

$$\beta_{\text{р.д}} = \frac{L_{\text{гр}}}{L_{\text{об}}},$$

где  $L_{\text{гр}}$  – пробег с грузом автомобиля за день, км

$$L_{\text{гр}} = Z_{\text{об}} \sum l_{\text{ег}i}; \quad L_{\text{общ}} = Z_{\text{об}} \cdot l_{\text{м}} + \sum_{i=1}^n l_{0i} - l_{\text{x}},$$

где  $\sum l_{\text{ег}i}$  – суммарный пробег с грузом за один оборот автомобиля на маршруте;  $\sum l_{0i}$  – суммарный нулевой пробег, км;  $l_{\text{м}}$  – длина маршрута.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу линейного программирования.
2. Запишите задачу линейного программирования в матричной форме и в виде знаков суммирования.
3. Что такое область допустимых решений, опорные точки и опорные решения?
4. Перечислите правила перехода от исходной задачи линейного программирования к двойственной задаче.
5. Последовательность решения задачи линейного программирования геометрическим способом.
6. Особенности решения задач линейного программирования симплексным методом.
7. Что такое каноническая форма записи задачи линейного программирования?
8. Последовательность решения задачи линейного программирования симплекс-методом.
9. Сформулируйте транспортную задачу.
10. Последовательность решения транспортной задачи.
11. Особенности записи и решения открытой транспортной задачи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее учебное пособие рассчитано на студентов технических вузов специальностей университета, обучающихся по направлению «Эксплуатация транспорта и технологического оборудования». Рассмотрены вопросы оптимизационного моделирования и его использования на практике, изложены основы метода, подробно рассмотрены вопросы разработки математических моделей и статистической обработки данных. Акцент сделан на использовании методов оптимизации производственных процессов автомобильного транспорта теорией массового обслуживания, статистического имитационного моделирования, сетевого планирования, динамического и линейного программирования.

Материал настоящего издания может служить основой для самостоятельного изучения предмета и дальнейшей более глубокой проработке проблемы использования методов моделирования производственных процессов на автомобильном транспорте.

В то же время ряд вопросов, изложенных в пособии, является основой для внедрения в реальное производство при нахождении оптимального решения, моделирования производственных процессов и обработки производственных данных.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Таблица П1.1*

Критические значения вероятностей критерия Колмогорова  
 $P(\lambda) = P\{\max|F(x)_{\text{опытн}} - F(x)_{\text{теор}}| \sqrt{n}\}$ , где  $n$  – число испытаний

$\lambda$	$P(\lambda)$	$\lambda$	$P(\lambda)$	$\lambda$	$P(\lambda)$
0,0	1,0	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,0	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,0	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,0	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,176	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

*Таблица П1.2*

Значения  $P_{\text{опытн}}(\chi^2, r)$ , вычисленные в зависимости  
от числа степеней свободы  $r$  и опытного значения  $\chi^2$

$\chi^2$	Степени свободы $r = K - S$								
	2	3	4	5	6	7	8	10	12
1	606	801	909	962	985	994	998	999	999
2	367	572	735	849	919	959	981	996	999
3	223	391	557	700	808	885	934	981	995
4	135	260	406	549	676	779	857	947	983
5	082	171	287	415	543	660	757	891	958
6	049	111	199	306	423	539	647	815	916
7	030	071	135	220	320	428	536	725	857
8	018	046	091	156	238	332	433	629	758
9	011	029	061	109	173	252	342	537	702
10	006	018	040	075	124	188	265	440	616
11	004	011	026	051	088	138	201	357	528
12	002	007	017	034	062	100	151	285	445
13	001	004	011	023	043	072	111	223	369
14		002	007	014	029	051	081	173	300
15		001	004	010	020	036	059	132	241
16		001	003	006	013	025	042	099	191
17			001	004	009	017	030	074	149
18			001	002	006	012	021	055	115
19				001	004	008	014	040	088
20				001	002	005	010	029	067
21					001	003	007	021	050
22					001	002	004	015	037
23						001	002	009	025
24						001	002	007	020
25							001	005	015
26							001	003	010

Таблица П1.3

Значения гамма-функции Эйлера в зависимости от параметра  $\alpha$ 

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} X^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$\alpha$	$\Gamma(\alpha)$	$\alpha$	$\Gamma(\alpha)$	$\alpha$	$\Gamma(\alpha)$	$\alpha$	$\Gamma(\alpha)$
1,00	1000	1,25	906	1,50	886	1,75	919
01	994	26	904	51	886	76	921
02	988	27	902	52	887	77	923
03	983	28	900	53	887	78	926
04	978	29	899	54	888	79	928
1,05	973	1,30	897	1,55	888	1,80	931
06	968	31	896	56	889	81	934
07	964	32	894	57	890	82	936
08	959	33	893	58	891	83	939
09	955	34	892	59	892	84	942
1,10	951	1,35	891	1,60	893	1,85	945
11	947	36	890	61	894	86	948
12	943	37	889	62	895	87	951
13	939	38	888	63	897	88	955
14	936	39	887	64	898	89	958
1,15	933	1,40	887	1,65	900	1,90	961
16	929	41	886	66	901	91	965
17	926	42	886	67	903	92	968
18	923	43	886	68	905	93	972
19	920	44	885	69	906	94	976
1,20	918	1,45	885	1,70	908	1,95	979
21	915	46	885	71	910	96	983
22	913	47	885	72	912	97	987
23	910	48	885	73	914	98	991
24	908	49	885	74	916	99	995
1,25	906	1,50	886	1,75	919	2,00	1000

Примечание. Значения  $\Gamma(\alpha)$  умножены на  $10^3$ .

Таблица П1.4

Зависимость между коэффициентом вариации и параметром формы  
закона Вейбулла  $n = \psi(v) = \psi[\sigma(t)/M(t)]$

$V = \sigma(t)/M(t)$	$n$	$V = \sigma(t)/M(t)$	$n$	$V = \sigma(t)/M(t)$	$n$
15,83	0,2	0,910	1,1	0,523	2,0
5,29	0,3	0,837	1,2	0,498	2,1
3,14	0,4	0,775	1,3	0,480	2,2
2,24	0,5	0,723	1,4	0,461	2,3
1,24	0,6	0,678	1,5	0,444	2,4
1,46	0,7	0,640	1,6	0,428	2,5
1,26	0,8	0,605	1,7	0,365	3,0
1,11	0,9	0,575	1,8	0,315	3,5
1,00	1,0	0,547	1,9	0,281	4,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П2.1

**Равномерно распределенные случайные числа**

04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 36
08 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 02 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 03	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 26	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 08 30	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 8753 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 6072 46	43 66 79 45 43	59 04 79 09 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 38 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 1282 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
43 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15
09 18 82 05 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	20 68 22 73 98	20 71 45 32 95

**Равномерно распределенные случайные числа**

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 06	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 83 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 06 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 08	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	43 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 72 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 03 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82

**Программа определения коэффициентов регрессии**

```

DECLARE SUB k1 (k!)
DECLARE SUB k2 (k!, x!, y!, v!(), z!())
DECLARE SUB k3 (k!, x!, y!, v!(), a!(), b!(), z!())
DECLARE SUB p0 (j!, h!, x!(), y!(), v(), a(), b(), z(), xe(), ye())
DECLARE SUB sort (n!, u!(), s!())
DECLARE SUB ppy (y!, z!(), v!())
DECLARE SUB ppX (x!, z!(), v!())
DECLARE SUB minmax (j!, c!, ye!(), xe!(), v!())
DECLARE SUB klawa ()
'Программа regres
CLS : m = 255!: n = 11!
DIM xe(m), ye(m), v(6), f(3), z(20), px(10), py(10)
DIM h(n), u(n), s(n), w(n), a(n), b(n), r(n)
'-----ВВОД ДАННЫХ-----
PRINT "Введите x, y, c (c = 1 при вводе, ";
PRINT "c = 0 по окончании ввода; x > 0, y > 0)"
CALL minmax(j, c, ye(), xe(), v())
240 : '----параметры видов регрессии-----
FOR k = 1! TO n: q = 0!: s = 0!: t = 0!: g = 0!:
p = 0!
FOR i = 1! TO j: x = xe(i): y = ye(i)
CALL k2(k, x, y, v(), z())
q = q + x: t = t + y: s = s + x * x: g = g + y * y: p = p + x * y
NEXT i
f(1) = (p - q * t / j): f(2) = (s - q * q / j)
f(3) = (g - t * t / j): b = f(1) / f(2)
IF f(3) = 0 THEN r = 1! ELSE r = b * SQR(ABS(f(2) / f(3)))
a = (t - b * q) / j: w = f(3) * (1! - r * r) / j
a(k) = a: b(k) = b: r(k) = r: w(k) = w:
u(k) = ABS(r(k))
NEXT k
CALL sort(n, u(), s())
CALL klawa

```

```

570 : CLS : '-----
PRINT "Задайте код К нужного вида регрессии";
PRINT "(К = 0 для вывода табл. КПК)"
PRINT TAB(30); "[К >"; n; CHR$(26); "END] К="; :
INPUT h
IF h = 0! THEN 240
CALL k1(h): PRINT STRING$(80, 46)
PRINT "Коэффициенты аппроксимации"; STRING$(15, 46);
PRINT "A="; a(h); ";B="; b(h)
PRINT "Коэффициент парной корреляции";
PRINT STRING$(12, 46); "r="; r(h)
PRINT "Среднеквадратичная погрешность";
PRINT STRING$(11, 46); "W="; w(h)
PRINT STRING$(80, 46); "XМН="; v(2); TAB(10);
PRINT ";YМН="; v(4); TAB(20); ";XМК=";
PRINT v(1); TAB(30); ";YМК="; v(3); TAB(40);
PRINT ";XуМН="; v(6); TAB(50); ";XуМК="; v(5)
PRINT STRING$(80, 45); " N"; TAB(16); "X";
PRINT TAB(30); "Y"; TAB(44); "Ymod";
PRINT TAB(58); "Y – Ymod"; STRING$(80, 45)
FOR i = 1! TO j: x = xe(i)
CALL k3(h, x, y, v(), a(), b(), z())
y(i) = y: del = ye(i) – y(i)
PRINT i, xe(i), ye(i), y(i), del: NEXT:
PRINT STRING$(80, 46)
DO: INPUT "Ввести значение X (Y/N)"; c$
IF c$ = "Y" OR c$ = "y" THEN
INPUT "X ="; x
CALL k3(h, x, y, v(), a(), b(), z())
PRINT "Значение Y("; x; ")="; y
END IF
LOOP UNTIL c$ = "n" OR c$ = "N"
INPUT "Ввести новый вид аппроксимирующей функции (Y/N)"; b$
IF b$ = "Y" OR b$ = "y" THEN 570
CALL p0(j, h, xe(), ye(), v(), a(), b(), z(), xe(), ye())
END

```

```

SUB k1 (k)
PRINT "y = ";
SELECT CASE k
CASE 1: PRINT "YМК * (A + B * X / XуМК)"
CASE 2: PRINT "YМН / (A - B * X / XМК)"
CASE 3: PRINT "YМК * (A - B * XМН / X)"
CASE 4:
PRINT "Yмакс * (A + B * X * X / Xмакс / Xмакс)"
CASE 5: PRINT "Yмакс * SQR(A + B * X / Xмакс)"
CASE 6:
PRINT "Yмакс * (A - B * Xмин * Xмин / X / X)"
CASE 7: PRINT "Yмин / SQR(A - B * X / Xмакс)"
CASE 8: PRINT "Yмакс * EXP(A + B * (X - Xумакс))"
CASE 9:
PRINT "Yмакс * (A + B * LOG(X) / LOG(Xмакс))"
CASE 10: PRINT "Yмакс * (A - B * ((Xмин / X) ^ 3))"
CASE 11:
PRINT "(Yмин / (A - B * X / Xмакс)) ^ (1 / 3)"
CASE IS > 11: CLS : END
END SELECT
END SUB

```

```

SUB k2 (k, x, y, v(), z())

```

```

'-----
CALL ppy(y, z(), v()): CALL ppX(x, z(), v())
SELECT CASE k
CASE 1: y = z(8): x = z(1): CASE 2: y = z(12): x = -z(1)
CASE 3: y = z(8): x = -z(5): CASE 4: y = z(8): x = z(2)
CASE 5: y = z(9): x = z(1): CASE 6: y = z(8): x = -z(6)
CASE 7: y = z(13): x = -z(1): CASE 8: y = z(11): x = x - v(5)
CASE 9: y = z(8): x = z(15): CASE 10: y = z(8): x = -z(7)
CASE 11: y = z(14): x = -z(1): CASE IS > 11: CLS : END
END SELECT
END SUB

```

```

SUB k3 (k, x, y, v(), a(), b(), z())
CALL ppX(x, z(), v())

```

```

SELECT CASE k
CASE 1: y = v(3) * (a(1) + b(1) * z(1)): CASE 2: y = v(4) / (a(2) - b(2) * z(1))
CASE 3: y = v(3) * (a(3) - b(3) * z(5)): CASE 4: y = v(3) * (a(4) + b(4) * z(2))
CASE 5: y = v(3) * SQR(a(5) + b(5) * z(1))
CASE 6: y = v(3) * (a(6) - b(6) * z(6))
CASE 7: y = v(4) / SQR(ABS(a(7) - b(7) * z(1)))
CASE 8: y = v(3) * EXP(a(8) + b(8) * (x - v(5)))
CASE 9: y = v(3) * (a(9) + b(9) * z(8))
CASE 10: y = v(3) * (a(10) - b(10) * z(7))
CASE 11: y = v(4) / (ABS(a(11) - b(11) * z(1)) ^ (1! / 3!))
CASE IS > 11: CLS : END
END SELECT
END SUB

```

```

SUB klawa
PRINT STRING$(80, 46); "Нажмите любую клавишу"
DO WHILE INKEY$ = "": LOOP: CLS
END SUB

```

```

SUB minmax (j, c, ye(), xe(), v())
j = 0!: v(1) = -1E+08: v(2) = 1E+08: v(3) = v(1): v(4) = v(2)
DO: j = j + 1!: PRINT "j ="; j; CHR$(26);
INPUT " x, y, c ="; xe(j), ye(j), c
IF xe(j) > v(1) THEN v(1) = xe(j) ELSE
IF xe(j) < v(2) THEN v(2) = xe(j)
IF ye(j) > v(3) THEN v(3) = ye(j): v(5) = xe(j) ELSE
IF ye(j) < v(4) THEN v(4) = ye(j): v(6) = xe(j)
LOOP UNTIL c = 0!
END SUB

```

```

SUB p0 (j, h, x(), y(), v(), a(), b(), z(), xe(), ye())
'-----
DIM px(10), py(10)
CALL klawa
INPUT "Графику ввести? (Y/N)"; b$
IF b$ = "n" OR b$ = "N" THEN END
INPUT "Введите число делений оси X:-"; px(4)
INPUT "Введите число делений оси Y:-"; py(4)

```

```

PRINT "Введите миним. и макс. значения аргумента ";
INPUT "XMIN, XMAX"; px(6), px(7)
PRINT "Введите миним. и максим. значен. функции ";
INPUT "YMIN, YMAX"; py(6), py(7)
px(5) = px(4) + 1!: px(1) = 84!: px(2) = 564!:
px(3) = px(2) - px(1): px(8) = px(7) - px(6): px(9) = px(8) / px(4):
px(10) = px(3) / px(8): py(5) = py(4) + 1!: py(1) = 20!: py(2) = 180!:
py(3) = py(2) - py(1): py(8) = py(7) - py(6): py(9) = py(8) / py(4):
py(10) = py(3) / py(8)
10 : INPUT "Введите код вида графики (или 1 или 2 или 3)"; k
SELECT CASE k
CASE 1: CLS : SCREEN 2: KEY OFF: marker = 2
FOR i = 1! TO py(5):
y = py(1) + py(3) / py(4) * (i - 1)
LINE (px(1) - 10!, y)-(px(2) + 10!, y): NEXT i
FOR i = 1! TO px(5): x = px(1) + px(3) / px(4) * (i - 1)
LINE (x, py(1) - 8!)-(x, py(2) + 8!): NEXT i
CASE 2: CLS : SCREEN 2: KEY OFF: marker = 3
LINE (px(1), py(1))-(px(2), py(2)), , B: PRINT
FOR y = py(1) TO py(2) STEP py(3) / py(4)
LINE (px(1), y)-(px(1) + 3!, y)
LINE (px(2), y)-(px(2) - 3!, y): NEXT y
FOR x = px(1) TO px(2) STEP px(3) / px(4)
LINE (x, py(2))-(x, py(2) - 3!)
LINE (x + 1!, py(2))-(x + 1!, py(2) - 3!)
LINE (x, py(1))-(x, py(1) + 3!)
LINE (x + 1!, py(1))-(x + 1!, py(1) + 3!): NEXT x
CASE 3: CLS : SCREEN 2: KEY OFF: marker = 4
FOR i = 1 TO py(5): y = py(1) + py(3) / py(4) * (i - 1)
LINE (px(1) - 8!, y)-(px(1) + 6!, y): NEXT i
FOR i = 1! TO px(5): x = px(1) + px(3) / px(4) * (i - 1)
LINE (x, py(2) - 4!)-(x, py(2) + 4!): NEXT i
LINE (px(1), py(1) - 8!)-(px(1), py(2) + 8!)
LINE (px(1), py(2))-(px(2) + 4!, py(2))
CASE IS > 3: CLS : END
END SELECT

```

```

PRINT TAB(20); "Масштаб dX="; px(9); ";dY="; py(9)
r = 23!: FOR k = 0! TO py(4): LOCATE r, 3
PRINT USING "#.##"; py(6) + py(9) * k:
r = r - 20! / py(4): NEXT k
c = 7!: FOR k = 0 TO px(4): LOCATE 24, c
PRINT USING "#####.##"; px(6) + px(9) * k;
c = c + 60! / (px(4) + 0!): NEXT k
FOR ix = px(1) TO px(2): xu = px(6) + (ix - px(1)) / px(10)
CALL k3(h, xu, yu, v(), a(), b(), z())
iy = py(2) - (yu - py(6)) * py(10)
IF iy >= py(1) AND iy <= py(2) THEN
IF ix = px(1) THEN PSET (ix, iy) ELSE LINE -(ix, iy)
END IF
NEXT ix
FOR ie = 1! TO j: ye = py(2) - (ye(ie) - py(6)) * py(10)
IF ye >= py(1) AND ye <= py(2) THEN
xe = px(10) * (xe(ie) - px(6)) + px(1):
PSET (xe, ye)
SELECT CASE marker
CASE 1: DRAW "U2 D4 U2 L4 R8 L4"
CASE 2: DRAW "E2 L4 F4 L4 E3"
CASE 3: DRAW "E2 D4 H4 D4 E2 L4 R8 L4"
CASE 4: DRAW "E2 G4 E2 H2 F4 H2 L4 R8 L4"
CASE 5: DRAW "U2 G3 R6 H3 D2"
END SELECT
END IF
NEXT: a$ = INPUT$(1)

CLS : INPUT "Сменить вид графика (y/n)"; f$
IF f$ = "y" OR f$ = "Y" THEN 10 ELSE CLS : END
END SUB

SUB ppx (x, z(), v())
z(1) = x / v(1): z(2) = z(1) * z(1): z(3) = EXP(z(1))
z(4) = LOG(ABS(z(1))): z(5) = v(2) / x: z(6) = z(5) * z(5)
z(7) = z(5) * z(6): z(15) = LOG(x) / LOG(v(1)): z(16) = x - v(3)
END SUB

```

```

SUB ppy (y, z(), v())
z(8) = y / v(3): z(9) = z(8) * z(8): z(10) = EXP(z(8))
z(11) = LOG(ABS(z(8))): z(12) = v(4) / y: z(13) = z(12) * z(12)
z(14) = z(12) * z(13)
END SUB
SUB sort (n, u(), s())
'- Ранжировка по величине Коэффициента Парной Корреляции -
PRINT STRING$(80, 46); "Код"; TAB(20); "КПК"; STRING$(80, 46)
FOR k = 1! TO n: q = u(k): s = s(k)
FOR m = 1! TO n
IF u(m) <= q THEN q = u(m): s = m
NEXT m
PRINT s, u(s): u(s) = 2!
NEXT k
END SUB

```

**Программа обработки опытных данных показательным законом**

```

DECLARE FUNCTION Up! (P!)
DECLARE SUB sort (n!, x!())
OPEN "ОБРАБОТ.DAT" FOR OUTPUT AS #1
CLS : PRINT #1, "ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ ЭКСПОНЕНЦИ-
АЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ"
PRINT #1, STRING$(80, 46)
INPUT "Тестировать"; a$
IF a$ = "n" OR a$ = "n" THEN
INPUT "Введите число замеров N="; n: DIM a(n)
FOR i = 1 TO n: PRINT "Введите значения A("; i; ")="; : INPUT a(i): NEXT
INPUT "Введите значение вероятности"; pp
ELSE
READ n: DIM a(n)
FOR i = 1 TO n: READ a(i): NEXT
READ pp
END IF
'
'.....
PRINT #1, TAB(20); "ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ"
PRINT #1, "Количество чисел массива N="; n
PRINT #1, : PRINT #1, "Массив чисел"
FOR j = 0 TO n STEP 10: k = 0: WHILE k <= 9 AND w < n: k = k + 1!
w = j + k: PRINT #1, a(w); : WEND: PRINT #1,
NEXT j
PRINT #1, "Вероятность p="; pp: PRINT #1, STRING$(80, 46)
PRINT #1, TAB(40); "РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА": PRINT #1,
u = Up(pp): PRINT #1, "Квантиль вероятности U("; pp; ")="; u
'ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАССИВА ЧИСЕЛ
'Вычисление среднего арифм. и среднеквадр. значений
t = 0: FOR i = 1 TO n: t = t + a(i): NEXT: c = t / n
s = 0: FOR i = 1 TO n: s = s + (a(i) - c) * (a(i) - c): NEXT
s1 = SQR(s / (n - 1)): 'Среднеквадратическое значение
v = s1 / c: 'Коэффициент вариации
'Вычисление доверительных границ
sq = SQR(4 * n - 1)
t1 = 4 * n / ((sq + u) ^ 2): t2 = 4 * n / ((sq - u) ^ 2)

```

$m2 = c * t1$ ;  $m3 = c * t2$ : 'Довер. границы среднего значения  
CALL sort(n, a()): 'Ранжирование массива чисел по возрастанию

'ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$l = 1 / c$ : 'Параметр экспоненциального закона распределения LAMBDA

$t3 = 4 * (n - 1) / ((sq - u) ^ 2)$ ;  $t4 = 4 * (n - 1) / ((sq + u) ^ 2)$

$l1 = 1 / t3$ ;  $l2 = 1 / t4$ : 'Довер. границы параметра закона

'Вычисление количества частичных интервалов

$f = \text{INT}(3.322 * \text{LOG}(n) / \text{LOG}(10) + 1)$ : 'Количество интервалов

DIM m(f + 2), m1(f + 2), z(f + 1), f1(f + 1), f2(f + 1), f3(f + 1), p1(f + 1)

DIM p2(f + 1), k(f + 1), k1(f), f4(f + 1), f5(f + 1), f6(f + 1), p4(f + 1)

$d = (a(n) - a(1)) / f$ : 'Длина интервала

'Вычисление середины интервала  $m1(j)$  и значение левой границы интервала  $m(j)$

$f = f + 1$ ;  $m1(1) = a(1)$ ;  $m(1) = a(1) - d / 2$ ; IF  $m(1) < 0$  THEN  $m(1) = 0$

FOR  $j = 2$  TO  $f$ :  $m1(j) = m1(j - 1) + d$ ;  $m(j) = m1(j) - d / 2$ :

NEXT

'Количество замеров, входящих в интервал

FOR  $j = 1$  TO  $f - 2$ :  $z(j) = 0$

FOR  $i = 1$  TO  $n$

IF  $a(i) < m(j + 1)$  AND  $a(i) \geq m(j)$  THEN  $z(j) = z(j) + 1$

NEXT  $i$

NEXT  $j$

$z(f) = 0$

FOR  $i = 1$  TO  $n$

IF  $a(i) \geq m(f - 1)$  THEN  $z(f) = z(f) + 1$

NEXT

$k(1) = z(1)$

FOR  $j = 1$  TO  $f$

$k(j) = k(j - 1) + z(j)$ : 'Накопленное число отказов

$f1(j) = k(j) / n$ : 'Накопленная частота отказа

$p1(j) = 1 - f1(j)$ : 'Накопленная частота безотказности

$f2(j) = z(j) / n / d$ : 'Частота в интервале

$p2(j) = \text{EXP}(-1 * (m(j) + d(2)))$ : 'Вероятность безотказной работы

$f3(j) = 1 - p2(j)$ : 'Вероятность отказа

$f4(j) = 1 * \text{EXP}((-1) * (m(j) + d(2)))$

$f5(j) = \text{EXP}((-12) * (m(j) + d(2)))$ : 'Нижняя

$f6(j) = \text{EXP}((-11) * (m(j) + d(2)))$ : 'Верхняя

NEXT

```

'90% – ресурс
g = -LOG(.9): g1 = g / l: g2 = g / l1: g3 = g / l2
x1 = 0: FOR j = 1 TO f: x1 = x1 + f4(j): NEXT: c2 = 1 / x1
'Проверка по критерию согласия
x2 = 0: FOR j = 1 TO f
p4(j) = f4(j) * c2 * n: x2 = x2 + (z(j) - p4(j)) ^ 2 / p4(j): NEXT
s5 = f - 2: x3 = (x2 - s5) / SQR(2 * s5)
'
.....
PRINT #1, STRING$(80, 46): PRINT #1, TAB(10); "СТАТИСТИЧЕСКИЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ"
PRINT #1, STRING$(80, 46): PRINT #1, "Число интервалов F="; f
PRINT #1, "Длина интервала"; TAB(34); "d="; d
PRINT #1, "Среднее арифметическое"; TAB(32); "аср="; c
PRINT #1, "Среднеквадратическое отклонение S1="; s1
PRINT #1, "Коэффициент вариации"; TAB(34); "V="; v
PRINT #1, STRING$(80, 46)
PRINT #1, "Сер. инт."; TAB(10); " Число отк."; TAB(26); " Частость";
PRINT #1, TAB(42); " Безотк. "; TAB(58); "Накопл. частость"
PRINT #1, STRING$(80, 46)
FOR j = 1 TO f: PRINT #1, m1(j); TAB(11); z(j); TAB(26); f2(j);
PRINT #1, TAB(42); p1(j); TAB(58); f1(j): NEXT
PRINT #1, STRING$(80, 46)
PRINT #1, TAB(10); "ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ": PRINT
#1, STRING$(80, 46)
PRINT #1, "Математическое ожидание"; TAB(40); "m="; c
PRINT #1, "Нижняя граница математического ожидания "; m2
PRINT #1, "Верхняя граница математического ожидания "; m3
PRINT #1, "Параметр закона"; TAB(42); l
PRINT #1, "Нижняя граница параметра"; TAB(42); l2
PRINT #1, "Верхняя граница параметра"; TAB(42); l1
PRINT #1, "90% ресурс"; TAB(42); g1
PRINT #1, "Нижняя граница 90% ресурса"; TAB(42); g3
PRINT #1, "Верхняя граница 90% ресурса"; TAB(42); g2
PRINT #1, "Число степеней свободы"; TAB(42); s5
PRINT #1, "Критерий Пирсона"; TAB(42); x2
PRINT #1, : PRINT #1, STRING$(80, 46)
PRINT #1, "Сер. инт."; TAB(10); "Плотность распр."; TAB(26); " Вер.
отк.";
PRINT #1, TAB(40); " Вер. безотк."; TAB(54); "Рниж"; TAB(68); "Рверх"

```

```

PRINT #1, STRING$(80, 46)
FOR j = 1 TO f
PRINT #1, m1(j); TAB(11); f4(j); TAB(26); f3(j); TAB(40); p2(j); TAB(54);
PRINT #1, f6(j); TAB(68); f5(j)
NEXT
PRINT #1, STRING$(80, 46)
IF x3 < 3 THEN
PRINT #1, "Теоретический закон удовлетворяет критерию Романовского"
ELSE
PRINT #1, "Теоретический закон не удовлетворяет критерию Романовского"
END IF

CLOSE
END
DATA 42
DATA 15, 24, 28, 37, 49, 54, 60, 75, 87, 92
DATA 93, 111, 114, 121, 127, 130, 134, 138, 140, 144
DATA 147, 149, 155, 168, 170, 173, 189, 192, 197, 198
DATA 201, 204, 225, 231, 243, 248, 249, 256, 265, 274
DATA 281, 297
DATA .99

SUB klawa
PRINT STRING$(80, 46); "Нажмите любую клавишу"
DO WHILE INKEY$ = "": LOOP: CLS
END SUB

SUB sort (n, x())
FOR i = 1 TO n - 1: FOR j = i + 1 TO n: IF x(i) >= x(j) THEN SWAP x(i),
x(j): NEXT j, i
PRINT #1, "Упорядоченный массив N="; n
FOR j = 0 TO n STEP 10: k = 0: WHILE k <= 9 AND w < n: k = k + 1!
w = j + k: PRINT #1, x(w); : WEND: PRINT #1,
NEXT j
END SUB

FUNCTION Up (P)
'Квантиль нормального распределения
q = 1 - P: t = SQR(-2 * LOG(q)): a = (.010328 * t + .802853) * t + 2.515517
b = ((.001308 * t + .189269) * t + 1.432788) * t: x = t - a / (1 + b):
Up = x
END FUNCTION

```

**‘Программа расчета основных показателей СМО**

```

DECLARE SUB po (c!(), z!())
DECLARE SUB cf (e!, l!)
DECLARE SUB klawa ()
DECLARE SUB kodcmo (e!)
DECLARE SUB zaglist ()

```

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ АВТОМОБИЛЬНОГО  
ТРАНСПОРТА

```

CALL zaglist
'-----ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ-----
DIM z(25)
j = 0: PRINT STRING$(80, 46); "И С Х О Д Н Ы Е   Д А Н Н Ы Е "
PRINT STRING$(80, 46); "Код целевой функции"; STRING$(25, 46);
"Кцф=";
INPUT a: CALL kodcmo(e)
PRINT "Интенсивность потока заявок"; STRING$(17, 46); " Инт="; :
INPUT z(8)
INPUT "Трудоёмкость обслуживания заявки ..... ТРо="; z(9)
CALL cf(e, l)
PRINT "Удельные затраты одного аппарата обслуживания"
INPUT "(при СА=0 оптимизация не производится).....СА="; c(2)
IF c(2) = 0! THEN c(3) = 0!: c(4) = 0!: c(5) = 0!: GOTO 592
INPUT "Удельные потери от необслуженной заявки .....СП="; c(3)
INPUT "Удельные затраты одного оператора .....СО="; c(4)
INPUT "Удельные затраты одного места ожидания .....СН="; c(5)
q = 1!: a(1) = 1!: a(2) = 0!: a(3) = 1!: z(10) = 1E+09: c(1) = z(10)
FOR r = 1! TO 8!: q = -q: FOR p = 1! TO 3!
480 : a(p) = a(p) - q: z(11) = a(1): z(12) = a(2)
z(13) = a(3): GOSUB 700
IF z(10) < c(1) THEN c(1) = z(10): GOTO 480
a(p) = a(p) + q

```

```

NEXT p, r
z(5) = a(1): z(6) = a(2): z(7) = a(3)
CALL po(c(), z())

592 : j = j + 1!
PRINT STRING$(80, 45); j; "Ч А С Т Н Ы Й   Р Е Ж И М "
PRINT "Ввести количество аппаратов обслуживания"
INPUT "(S=0 -> END) .....S="; z(11)
IF z(11) = 0! THEN END
INPUT "Ввести количество мест накопителя .....M="; z(12)
  PRINT "Ввести количество операторов каждого"
  PRINT "аппарата обслуживания"; STRING$(30, 46); "N="; : INPUT z(13)
GOSUB 700: PRINT STRING$(80, 45)
z(14) = 1 / s: z(15) = z(2) / s: z(16) = z / s: z(17) = z(3) + z(15)

PRINT "Р Е З У Л Ь Т А Т Ы   Р А С Ч Е Т А "; STRING$(80, 46)
PRINT "1. В е р о я т н о с т н ы е х а р а к т е р и с т и к и"
PRINT "Вероятность того, что аппараты свободны .....PO="; z(14)
PRINT "Вероятность того, что в системе S требований Ps="; z(15)
PRINT "Вероятность полного отказа"; STRING$(16, 46); "Рпотк="; z(16)
PRINT "Вероятность наличия очереди"; STRING$(15, 46); "Роч="; z(3)
PRINT "Вероятность занятости всех аппаратов .....Рза="; z(17)

PRINT "2. К о л и ч е с т в е н н ы е х а р а к т е р и с т и к и"
PRINT "Ср. количество требований, прибывающих в"
PRINT "СМО за время обслуживания одного требования .Mt="; z(1)
  PRINT "Среднее количество свободных АО"; STRING$(20, 46); "Sc=";
z(18)
  PRINT "Ср. количество занятых аппаратов обслуживания Sz="; z(11) –
z(18)
PRINT "Среднее количество заявок в накопителе .....Mнак="; z(19)
PRINT "Среднее количество заявок в СМО"; STRING$(12, 46);
PRINT "Mсмо="; z(11) – z(18) + z(19)

PRINT "3. В р е м е н н ы е х а р а к т е р и с т и к и "
PRINT "Среднее время простоя в очереди";

```

```

PRINT STRING$(20, 46); "Тпр="; z(19) / z(8)
PRINT "Среднее время пребывания заявки в СМО .....Тсмо=";
PRINT z(19) / z(8) + z(9) / z(13)

PRINT "4. Качественные характеристики"
PRINT "Коэффициент загрузки СМО"; STRING$(20, 46);
PRINT "Кзсмо=Мт/S="; z(1) / z(11)
PRINT "Пропускная способность СМО ...ПР=Иинт*(1-Рпотк)=";
PRINT z(8) - z(8) * z / s
IF c <> 0 THEN
PRINT "Коэффициент загрузки накопителя .....Кзн=Мнак/M="; z(19) / z(12)
END IF
PRINT "Коэффициент загрузки АО"; STRING$(15, 46);
PRINT "Кзао=Sз/S="; 1! - z(18) / z(11)
  PRINT "Величина целевой функции"; STRING$(20, 46); "ЦФ="; z(10):
  GOTO 592

```

'Подпрограммы расчета

```

700: IF z(13) < 1! THEN z(13) = 1!
IF z(11) < 1! THEN z(11) = 1!: IF z(12) < 0! THEN z(12) = 0!
z(1) = z(8) * z(9) / z(13): x = z(8) / z(13) / 1
z(18) = z(11): z(19) = 0!: z = 1!: s = 1!: z(2) = 0!: z(3) = 0!: n = 0
DO: n = n + 1: u = ABS(z(11) - n): v = (z(11) - n - u) / 2!
'Рекуррентные выражения
SELECT CASE e
CASE 1: z = z * z(1) * (1 + 1! - n) / (v + n)
CASE 2: z = z * z(1) / (v + n + n * x)
CASE 3: z = z * z(1) / (v + n - v * x)
CASE 4: z = z * z(1) / (v + n)
IF v <> 0 THEN z = z - z * EXP(z(11) / x / v)
CASE IS > 4: END
END SELECT
s = s + z: IF u = 0 THEN z(2) = z
IF n > z(11) THEN
z(19) = z(19) + u * z: z(3) = z(3) + z
ELSE

```

```

z(18) = z(18) + u * z
END IF
LOOP UNTIL z <= 1E-09 OR z >= 1E+20 OR n = z(11) + z(12)
z(3) = z(3) * z(14): z(18) = z(18) * z(14): o = INT(z(11) - z(18) + .5)
IF o = 0! THEN o = 1!
z(19) = z(19) * z(14): u = INT(z(19) + .5): z(12) = z(11) - o
'Подпрограммы целевых функций
SELECT CASE a
CASE 1: z(10) = c(4) * z(13) + c(2) * z(18) + c(5) * z(19) + c(3) * z(8) * z *
z(14)
CASE 2: z(10) = c(3) * z(8) * z * z(14)
CASE IS > 2: END
END SELECT
RETURN
END

```

```

SUB cf (e, l)
SELECT CASE e
CASE 1: PRINT "Объем источника заявок"; STRING$(25, 46); "C=";
CASE 2: PRINT "Среднее время обслуживания заявки.....Tto=";
CASE 3 OR 4: PRINT "Среднее время ожидания выполнения заявки
....Тож=";
END SELECT
INPUT l
END SUB

```

```

SUB klawa
PRINT STRING$(80, 46); "Нажмите любую клавишу"
DO WHILE INKEY$ = "": LOOP: CLS
END SUB

```

```

SUB kodcmo (e)
PRINT STRING$(80, 46); " Код | Основны е п а р а м е т р ы"
PRINT STRING$(80, 46); " 1 | Ограниченный источник заявок"
PRINT " 2 | Неограниченный источник заявок, ср. время пребывания заявки
в системе определено"

```

```

PRINT " 3 |Неограниченный источник заявок, ср. время ожидания обслужи-
живания определено и изменяется по показательному закону"
PRINT " 4 |Неограниченный источник заявок, ср. время ожидания обслужи-
живания определено и изменяется по экспоненциальному закону"
PRINT STRING$(80, 46)
PRINT "Код системы массового обслуживания"; STRING$(10, 46); "Ксмо=";
: INPUT e
IF e > 4 THEN END

END SUB

```

```

SUB ро (с(), z())
PRINT STRING$(80, 45); STRING$(80, 45)
PRINT "О п т и м а л ь н ы е п а р а м е т р ы": PRINT
PRINT "Целевая функция"; STRING$(30, 46); "C0="; с(1); STRING$(80, 46)
PRINT "Количество аппаратов обслуживания .....S0="; z(5)
PRINT "Количество мест накопителя"; STRING$(20, 46); "M0="; z(6)
PRINT "Количество операторов на одном АО .....N0="; z(7)
CALL klawa
END SUB
SUB zaglist
CLS : COLOR 2
FOR i = 2 TO 80: LOCATE 2, i: PRINT "*": LOCATE 23, i: PRINT "*":
NEXT i
FOR i = 2 TO 23: LOCATE i, 2: PRINT "*": LOCATE i, 80: PRINT "*":
NEXT i
LOCATE 5, 14: PRINT "МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙ-
СКОЙ ФЕДЕРАЦИИ"
LOCATE 9, 17: PRINT "Владимирский государственный университет"
LOCATE 11, 20: PRINT " Кафедра автомобильного транспорта ":
COLOR 4
LOCATE 15, 13: PRINT "СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА "
COLOR 2: LOCATE 20, 30: PRINT "ВЛАДИМИР-2005"
COLOR 3: SLEEP 5: CLS
END SUB

```

**Программа оптимизации количества оборотных агрегатов**

```

5 DIM R(30), A1(30), F(50), Z(50), V(50), Z(0) = 99999
10: INPUT "СР. ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОСТУПЛЕНИЯ АВТ. В РЕМОНТ –
L': L
INPUT "СР. ВРЕМЯ ОБОРОТА АГРЕГАТА НА СКЛАД – T1": T1
INPUT "ИЗДЕРЖКИ ОТ ПРОСТОЯ АВТОМОБИЛЯ -Cож»; C1
INPUT "ИЗДЕРЖКИ ОТ НЕИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОТРЕМОНТИРОВАН-
НОГО АГРЕГАТА"; C2
M = 1 / T1: A = L / M
PRINT 'ЗНАЧЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ A=': A
PRINT STRING$(80, "*")
INPUT "ВВЕДИТЕ ЧИСЛО ОБСЛУЖИВАЮЩИХ АГРЕГАТОВ "; N
:Q = A / N
PRINT: PRINT "Cож = "; C1, "CN = "; C2 :PRINT: PRINT 'N', 'z', 'ABT.',
'Azp.', 'V'
FOR I = 1 TO 100
D = 1: S = 1: C = 1: N1 = N - 1
FOR K = 1 TO N1: D = D * K: C = C * A: S = S + C / D: NEXT
B = M / (D * (N * M - L)) * C * A
P1 = 1 / (S + B): P2 = B * P1: S1 = (1 - Q) ^ 2
A1(I) = (P2 * L) / (N * M * S1): F = N * P1: C = 1: D = 1
FOR J = 1 TO N1: C = C * A: D = D * J: F = F + (C * (N - J) * P1) / D: NEXT
Z(I) = C1 * A1(I) + C2 * F: V(I) = Z(I - 1) - Z(I) : F(I) = F: P(I) = N
PRINT P(I), Z(I), A1(I), F(I), V(I)
IF V(I) < 0 THEN WX = I: GO TO 245
N = N + 1
NEXT I
245: OPEN 'LP: ' FOR OUTPUT AS FILE #1
PRINT ' ВКЛЮЧИТЕ принтер и ВВЕДИТЕ ЦИФРУ " 1 " ': INPUT G1 %
PRINT #1, 'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ '
PRINT #1, 'L = 'L: 'T1 = 'T1: 'Cож = 'C1: 'CN = 'C2
PRINT #1, 'ПРИВЕДЕННАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ A ='A

```

```
PRINT #1, 'КОЛ-ВО КАНАЛОВ (АГРЕГАТОВ) ОБСЛУЖИВАНИЯ N = ';  
N  
PRINT #1, 'Z – ЗАТРАТЫ СУММАРНЫЕ, РУБ.'  
PRINT #1, ' Авт. – СРЕДНЕЕ ЧИСЛО НЕИСПРАВНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ  
В НАКОПИТЕЛЕ '  
PRINT # 1, ' Агр. – СРЕДНЕЕ ЧИСЛО НЕИСПОЛЬЗОВАННЫХ  
АГРЕГАТОВ'  
PRINT #1, 'V -ИЗМЕНЕНИЕ СУММАРНЫХ ЗАТРАТ, РУБ. '  
PRINT #1, 'РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ '  
PRINT #1, 'N ', 'Z ', 'Авт. ', 'Агр. ', 'V'  
FOR I = 1 TO W%: PRINT # 1, P(I), Z(I), A1 (I), F(I), V(I): NEXT  
CLOSE #1  
END
```

**Программа моделирования потребности предприятия  
в запасных частях**

```

DECLARE SUB klawa ()
DECLARE SUB srt (n!, t!())
DECLARE SUB mod1 (p!, n1!, n2!, n3!, t!(), u!())
CLS : PRINT : READ p, n1, n2, n3, n4, n5, n6, x0, d, x2, k1, L1
DIM x(p), c(p), t(100), u(n1), g(100), y(n4)
INPUT "Тестировать (Y/N)"; a$
IF a$ = "N" OR a$ = "n" THEN
INPUT " Период моделирования, дни P="; p
PRINT : PRINT TAB(10); "Условия моделирования расхода запчастей"
INPUT "Число заявок на запчасти N1="; n1
INPUT "Мин. число затребованных запчастей N2="; n2
INPUT "Макс. число затребованных частей (N3 > N2) N3 ="; n3

PRINT TAB(10); "Условия моделирования пополнения запаса": PRINT
INPUT "Сколько раз пополняется запас N4="; n4
INPUT "Мин. количество запчастей в партии завоза N5="; n5
INPUT "Макс. количество запчастей в партии завоза (N6 > N5) N6="; n6

PRINT TAB(10); "Результаты моделирования": PRINT
INPUT "Начальный запас при моделировании X0="; x0
INPUT "Шаг изменения начального запаса D="; d
PRINT "Число шагов при моделировании"; TAB(55); "X2="; : INPUT x2
INPUT "Потери АТП от простоя автомобилей K1="; k1
INPUT "Затраты на хранение запчастей L1="; L1
ELSE
CALL mod1(p, n1, n2, n3, t(), u())
CALL mod1(p, n4, n5, n6, g(), y())
PRINT " Период моделирования, дни"; TAB(56); "P="; p
PRINT : PRINT TAB(10); "Условия моделирования расхода запчастей"
PRINT "Число заявок на запчасти"; TAB(55); "N1="; n1
PRINT "Мин. число затребованных запчастей"; TAB(55); "N2="; n2

```

```
PRINT "Макс. число затребованных частей (N3 > N2)"; TAB(55); "N3=";  
n3
```

```
PRINT TAB(10); "Условия моделирования пополнения запаса"  
PRINT "Сколько раз пополняется запас"; TAB(55); "N4="; n4  
PRINT "Мин. количество запчастей в партии завоза"; TAB(55); "N5="; n5  
PRINT "Макс. количество запчастей в партии завоза (N6 > N5) N6="; n6
```

```
PRINT TAB(10); "Результаты моделирования"  
PRINT "Начальный запас при моделировании"; TAB(55); "X0="; x0  
PRINT "Шаг изменения начального запаса"; TAB(55); "D="; d  
PRINT "Число шагов при моделировании"; TAB(55); "X2="; x2  
PRINT "Потери АТП от простоя автомобилей"; TAB(55); "K1="; k1  
PRINT "Затраты на хранение запчастей"; TAB(55); "L1="; L1  
END IF
```

```
'.....
```

```
CALL klawa
```

```
PRINT STRING$(80, 46)
```

```
PRINT "Начальный Потери из-за Затраты Общие Запас на конец"
```

```
PRINT " запас дефицита хранения потери периода"; STRING$(80, 46)
```

```
x1 = x0 + x2 * d
```

```
FOR w = x0 TO x1 STEP d
```

```
x = w: n = 1: L = 1: c2 = 0
```

```
'Расчет изменения уровня запаса и простоев автомобилей при пополнении  
запаса
```

```
FOR i = 1 TO p
```

```
IF g(L) > p THEN END
```

```
IF i = g(L) THEN
```

```
x = x + y(L)
```

```
IF x >= 0 THEN c2 = 0 ELSE c2 = c2 - y(L): IF c2 >= 0 THEN c2 = 0
```

```
L = L + 1
```

```
END IF
```

```
IF t(n) > p THEN END
```

```
'Расчет изменения уровня запаса и простоев автомобиля при выдаче запча-  
стей
```

```
IF i = t(n) THEN
```

```

IF u(n) > x THEN c2 = c2 + u(n) - x ELSE c2 = 0
x = x - u(n): n = n + 1
END IF
x(i) = x: c(i) = c2
NEXT i

```

```

c = 0: a = 0
FOR i = 1 TO p: c = c + ABS(c(i)): IF x(i) >= 0 THEN a = a + x(i): NEXT i
c1 = c * k1: a1 = a * L1 / p
PRINT w; TAB(10); c1; TAB(25); a1; TAB(36); c1 + a1; TAB(50); x(p)
NEXT w
PRINT STRING$(80, 46)
END
' P N1 N2 N3 N4 N5 N6 X0 D X2 K1 L1
DATA 30, 8, 5, 10, 7, 6, 12, 300, 5, 10, 8, .8

```

```

SUB klawa
PRINT STRING$(80, 46); "Нажмите любую клавишу"
DO WHILE INKEY$ = "": LOOP: CLS
END SUB

```

```

SUB mod1 (p, n1, n2, n3, t(), u())
' RANDOMIZE
FOR i = 1 TO n1: t(i) = INT((p - 1) * RND + 1)
u(i) = INT((n3 - n2) * RND + n2): NEXT
CALL srt(n1, t())
END SUB

```

```

SUB srt (n, t())
FOR L = 1! TO n - 1!: FOR k = L + 1! TO n
IF t(L) >= t(k) THEN SWAP t(L), t(k)
NEXT k, L

```

```

END SUB

```

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулин, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулин. – М. : Высш. шк., 1993. – 336 с. – ISBN 5-06-002663-9.
2. Бедняк, М. Н. Моделирование процессов технического обслуживания и ремонта автомобилей / М. Н. Бедняк. – Киев : Выща шк., 1983. – 130 с.
3. Боровиков, В. П. Прогнозирование в системе STATISTIKA в среде WINDOWS : учеб. пособие / В. П. Боровиков [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 384 с. – ISBN 5-279-01980-1.
4. Вентцель, Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
5. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель [и др.]. – М. : Наука, 1991. – 384 с. – ISBN 5-02-014125-9.
6. Геронимус, Б. Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте / Б. Л. Геронимус. – М. : Транспорт, 1977. – 160 с.
7. Гмурман, М. И. Теория вероятностей и математическая статистика / М. И. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1977. – 480 с.
8. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко [и др.]. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
9. Дьяконов, В. Л. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ / В. Л. Дьяконов. – М. : Наука, 1987. – 238 с.
10. Завадский, Ю. В. Статистическая обработка эксперимента / Ю. В. Завадский. – М. : Высш. шк., 1976. – 270 с.
11. Завадский, Ю. В. Моделирование случайных процессов / Ю. В. Завадский. – М. : МАДИ, 1974. – 100 с.
12. Зарубкин, В. А. Оптимизация систем технического обслуживания в АТП / В. А. Зарубкин. – М. : ЦБМТК, 1976. – 126 с.
13. Иванова, В. М. Математическая статистика / В. М. Иванова [и др.]. – М. : Высш. шк., 1981. – 371 с.
14. Кожин, А. Н. Математические методы в планировании и управлении грузовыми автомобильными перевозками / А. Н. Кожин [и др.]. – М. : Транспорт, 1994. – 304 с. – ISBN 5-277-01780-1.

15. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для эконом. специальностей вузов / В. А. Колемаев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1991. – 400 с. – ISBN 5-06-0015445-9.
16. Колихман, И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Колихман [и др.]. – М. : Высш. шк., 1979. – 125 с.
17. Максимов, С. А. Математическое моделирование. Прикладные задачи : учеб. пособие / С. А. Максимов. – Владимир : Владим. гос. ун-т, 1997. – 192 с. – ISBN 5-89368-041-9.
18. Марченко, А. И. Программирование в среде TURBO PASCAL 7.0 / А. И. Марченко [и др.]. – Киев. : БЕК, 1998. – 493 с. – ISBN 5-88547-065-0.
19. Мельникова, О. И. Начала программирования на языке Q Basic: учеб. пособие / О. И. Мельникова [и др.]. – М. : ЭКОМ, 1998. – 304 с. – ISBN 5-7163-0007-3.
20. Новиков, О. А. Прикладные вопросы теории массового обслуживания / О. А. Новиков [и др.]. – М. : Совет. радио, 1969. – 400 с.
21. Носач, В. В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров / В. В. Носач. – М. : МИКАП, 1994. – 382 с. – ISBN 5-85959-067-9
22. Палий, А. И. Автомобильные перевозки / А. И. Палий [и др.]. – М. : Транспорт, 1982. – 135 с.
23. Плис, А. И. Лабораторный практикум по высшей математике / А. И. Плис [и др.]. – М. : Высш. шк., 1994. – 416 с. – ISBN 5-06-002314-1.
24. Положение о техническом обслуживании и ремонте подвижного состава автомобильного транспорта. – М. : Транспорт, 1986. – 72 с.
25. Ракитин, В. И. Практическое руководство по методике вычислений с приложением программ для персональных компьютеров : учеб. пособие / В. И. Ракитин [и др.]. – М. : Высш. шк., 1998. – 383 с. – ISBN 5-06-003342-2.
26. Технология выполнения регламентных работ первого и второго технического обслуживания автомобиля ЗИЛ-130 / Центравтотех; руководитель работы И. Д. Тополянский. – М. : Транспорт, 1978. – 135 с.
27. Федоренко, Ю. Алгоритмы и программы на QBasic : учеб. курс / Ю. Федоренко. – СПб. : Питер, 2002. – 228 с. – ISBN 5-318-00693-0.
28. Филипс, Д. Методы анализа сетей / Д. Филипс, А. Гарсия-Диас. – М. : Мир, 1984. – 496 с.

Учебное издание

КОНОВАЛОВ Станислав Иванович  
МАКСИМОВ Сергей Алексеевич  
САВИН Вячеслав Викторович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ  
ПРОЦЕССОВ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

Учебное пособие

Редактор Л.В. Пукова  
Технический редактор Н.В. Тупицына  
Корректор В.В. Гурова  
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

Подписано в печать 25.04.06.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.  
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 15,21. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство  
Владимирского государственного университета.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.