

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра радиотехники и радиосистем

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Математическое моделирование»

Составители
В.А. ЕГОРОВ
В.А. ЕФИМОВ

Владимир 2006

УДК 518.5:621.372.061.001.57

ББК 22.181:32.84

М34

Рецензент

доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой радиотехники и радиосистем
Владимирского государственного университета
О. Р. Никитин

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Математическое моделирование: метод. указания к лаб. рабо-
М34 там по дисциплине «Математическое моделирование» / Владим. гос.
ун-т ; сост. : В. А. Егоров, В. А. Ефимов. – Владимир : Изд-во Вла-
дим. гос. ун-та, 2006. – 64 с.

Составлены для четырех лабораторных работ по дисциплине «Математическое моделирование». Посвящены изучению методов моделирования на ЭВМ процессов, протекающих в радиосистемах, применяемых для решения задач в области статистической радиотехники.

Предназначены для магистрантов по направлению 210300 – радиотехника и студентов специальностей 210302 – радиотехника, 210301 – радиофизика и электроника, 210405 – радиосвязь, радиовещание и телевидение.

Табл. 20. Ил. 12. Библиогр.: 13 назв.

УДК 518.5:621.372.061.001.57

ББК 22.181:32.84

В предлагаемом издании исследуются экономичные алгоритмы для цифрового моделирования широкого класса случайных процессов, стационарных нормальных процессов и процессов преобразования сигналов и помех при прохождении их через линейные и нелинейные системы. В ходе выполнения лабораторных работ решаются следующие вопросы: постановка задачи, составление модели, реализация на ЭВМ, оценка адекватности, экспериментальные исследования.

Лабораторная работа № 1

МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ НА ЭВМ

Цель работы: изучение и программная реализация методов формирования псевдослучайных чисел с различными законами распределения.

1. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

Для формирования на ЭВМ случайных величин с различными законами распределения служат равномерно распределенные в интервале (0,1) случайные числа, которые вырабатываются на ЭВМ программным или физическим датчиком случайных чисел.

1.1. Генератор М-последовательности

Наибольшее применение в качестве сигналов, призванных заменить близкий им по характеристикам “бинарный шум”, нашли так называемые

линейные последовательности максимальной длины (M-последовательности). Их получают с помощью генераторов, использующих в качестве основных элементов N -каскадные регистры сдвига и сумматоры по модулю 2. Предпочтение, которое отдается этим типам псевдослучайных сигналов, обусловлено хорошей разработанностью их теории и относительной простотой конструирования генераторов. Генератор состоит из стандартных импульсных элементов и при минимальном их числе обеспечивает получение последовательности с максимальным периодом.

Упрощенно процесс генерации псевдослучайных чисел представлен на рис. 1. Допустим, что в регистре сдвига зафиксирована в момент включения некоторая комбинация нулей и единиц. Первый импульс тактового генератора (тактовый импульс) произведет перемещение содержимого триггеров на один такт влево. После его прохождения в первом триггере будет зафиксирован нуль, а в i -м +1 или 0 в зависимости от того, что было зафиксировано в $(i-1)$ -м триггере.

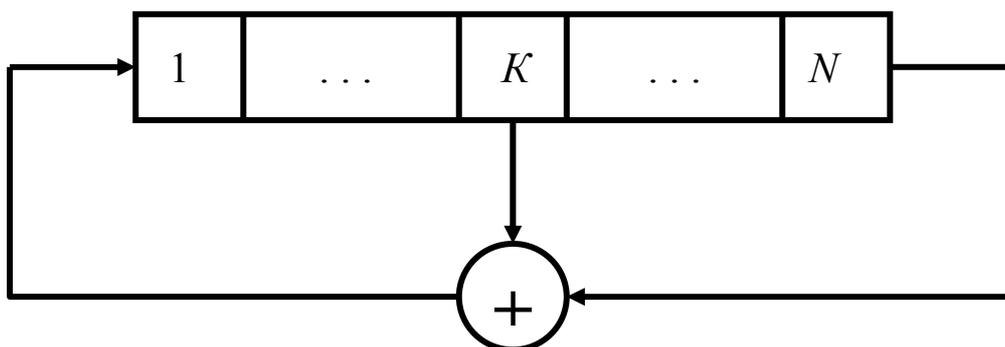


Рис. 1

Сигналы с единичных выходов K -го и N -го триггеров суммируются в сумматоре по модулю 2 и подаются на вход первого триггера. Схема из N триггеров может иметь $n = 2^N$ различных состояний. Но одно состояние (когда во всех триггерах зафиксированы нули) использовать нельзя, так как в случае его наступления генерация прекратится. Генератор после этого может генерировать только нули. Поэтому период повторения T_T , именуемый максимальным, будет определяться как

$$T_T = T(2^N - 1), \quad (1)$$

где T – длительность двоичных сигналов.

Выбор числа сумматоров и точек подключения их входов определяется тем, какой сигнал требуется получить от генератора. Для получения последовательностей с максимальным периодом достаточно иметь один сумматор.

Максимальная длина периода получается только при суммировании сигналов с выходов определенных каскадов регистра. От того, как соединены каскады и каковы их начальные состояния, зависит форма сигнала, то есть порядок чередования в нем нулей и единиц.

К настоящему времени определены возможные схемы подключения входов сумматора. Один вход всегда подключают к N -му каскаду. Второй же может быть подключен к K -му или $(N-K)$ -му каскадам. Во втором случае выходная последовательность будет также максимальной длины и будет представлять собой сдвинутую по времени точную копию последовательности, обратную по отношению к исходной, то есть в совпадающие периоды нули в ней будут стоять на тех позициях, на которых в исходной стоят единицы. От этого, конечно, период генерируемых последовательностей не изменится. Значения K , позволяющие получать последовательности максимальной длины, приведены в табл. 1.

Таблица 1

N	K	2^N-1	N	K	2^N-1
3	1	7	18	7	262143
4	1	15	20	3	1048573
5	2	31	21	2	2097151
6	1	63	22	1	4194303
7	1 или 3	127	23	5 или 9	8388607
9	4	511	25	3 или 7	33557431
10	3	1023	28	3,9 или 13	268435455
11	3	2047	31	3,6,7 или 13	2147483647
15	1,4 или 7	32767	33	13	8589934591

Из табл. 1 видно, что при некоторых значениях чисел каскадов регистра N значение K оказывается неоднозначным. Более того, можно найти

еще большее число возможных схем, имеющих два и более сумматоров, для получения последовательностей максимального периода. Поэтому генераторы, у которых входы сумматора соединены с выходами триггеров сдвигающего регистра, номера которых указаны в табл. 1, следует считать простейшими.

В качестве выходной может быть использована последовательность состояний любого из N триггеров. Двоичный сигнал максимального периода может быть определен полностью заранее. Чередование в последовательности нулей и единиц однозначно определяется начальным состоянием триггеров и точками подключения сумматора по модулю 2. Если еще определить и начало первого периода, то сигнал будет строго детерминированным. Тем не менее последовательности максимальной длины могут при определенных условиях с успехом заменять во всех известных примерах последовательности одноразрядных двоичных случайных чисел («бинарный шум»).

Рассмотрим общие приемы получения случайных чисел с заданным законом распределения из равномерно распределенных случайных чисел.

1.2. Метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения

Пусть $\omega(y)$ – функция плотности, $W(y) = \int_{-\infty}^y w(z) dz$ – функция распределения вероятностей случайной величины $y = W^{-1}(x)$, а $W^{-1}(x)$ – функция, обратная функции $W(y)$.

Тогда случайная величина y имеет заданный закон распределения $\omega(y)$, если случайная величина x равномерно распределена в интервале $(0,1)$.

В табл. 2 приведены примеры моделирования случайных величин с заданными законами распределения, для которых существуют элементарные преобразования с использованием метода нелинейных преобразований.

Таблица 2

№ п/п	Закон распределения	Функция плотности $\omega(y)$	Функция распределения $W(y)$	Среднее значение m_y	Дисперсия σ_y^2	Формула преобразования y
1	Релеевский	$\frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$ $y \geq 0$	$1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$ $y \geq 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$	$(2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$	$\sigma\sqrt{-2\ln(1-x)}$ или $\sigma\sqrt{-2\ln x}$
2	Показательный	$\lambda e^{-\lambda y},$ $y \geq 0$	$1 - e^{-\lambda y},$ $y \geq 0$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$-\frac{1}{\lambda} \ln x$
3	Арсинуса	$\frac{1}{\pi b \cdot \sqrt{1 - \frac{(y-a)^2}{b^2}}}$	$\frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y-a}{b} + \frac{1}{2}$	a	$\frac{b^2}{2}$	$b \sin \pi(x - \frac{1}{2}) + a$ или $b \sin 2\pi x + a$
4	Коши	$\frac{1}{\pi b \left[1 + \frac{(y-a)^2}{b^2} \right]}$	$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-a}{b} + \frac{1}{2}$	a	∞	$b \cdot \operatorname{tg} \pi(x - \frac{1}{2}) + a$ или $b \cdot \operatorname{tg} 2\pi x + a$

1.3. Метод Неймана

Для моделирования случайных величин, возможные значения которых не выходят за пределы некоторого ограниченного интервала (a, b) (случайные величины с усеченными законами распределения), а также случайных величин, законы распределения которых можно аппроксимировать усеченными, достаточно универсальным является метод Неймана, состоящий в следующем.

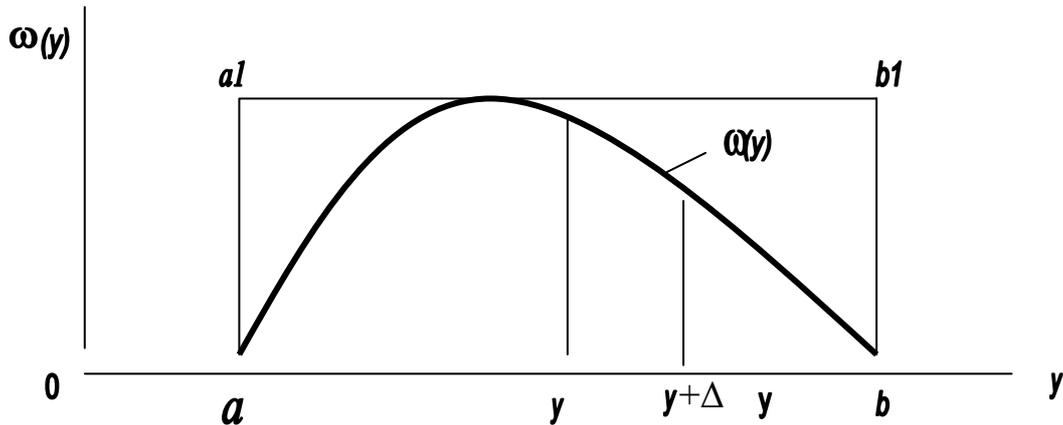


Рис. 2

Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел независимо выбираются пары чисел ${}^k x_1, {}^k x_2$, из которых формируются преобразованные пары ${}^k x_1^* = a + (b - a) {}^k x_1$, ${}^k x_2^* = \omega_M \cdot {}^k x_2$, где ω_M – максимальное значение функции $\omega(y)$.

В качестве реализации случайной величины берется число ${}^k x_2^*$ из тех пар ${}^k x_1^*, {}^k x_2^*$, для которых выполняется неравенство

$${}^k x_2^* \leq \omega({}^k x_1^*). \quad (2)$$

Пары, не удовлетворяющие неравенству (2), выбрасываются.

Нетрудно убедиться в справедливости такого метода моделирования случайных величин. Действительно, пары случайных чисел ${}^k x_1^*, {}^k x_2^*$ можно рассматривать как координаты случайных точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $\omega(y)$ внутри прямоугольника $a a1 b b2$ (рис. 2).

Пары ${}^k x_1^*, {}^k x_2^*$, удовлетворяющие условию (2), – это координаты случайных

точек плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $\omega(y)$ внутри той части прямоугольника $a \times b$, которая расположена под кривой $\omega(y)$. Вероятность того, что случайная точка плоскости, находящаяся под кривой $\omega(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $(y, y + \Delta y)$, очевидно, пропорциональна $\omega(y)$, а вероятность попадания точки под кривую $\omega(y)$ по условию равна единице, что и требуется.

1.4. Метод кусочной аппроксимации

Среди различных приближенных приемов моделирования случайных величин универсальным и наиболее простым является метод кусочной аппроксимации, предложенный Н.П. Бусленко.

Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть требуется получить случайную величину y с функцией плотности $\omega(y)$. Предположим, что область возможных значений величин ограничена интервалом (a, b) (неограниченное распределение можно приближенно заменить ограниченным). Разобьем интервал (a, b) на n достаточно малых интервалов (a_m, a_{m+1}) , $m = 0, n - 1$, $a_0 = a$, $a_n = b$, так, чтобы распределение заданной случайной величины в пределах этих интервалов можно было довольно точно аппроксимировать каким-нибудь простым распределением, например равномерным, трапецеидальным и т.д. В дальнейшем рассмотрим кусочную аппроксимацию равномерным распределением (рис. 3).

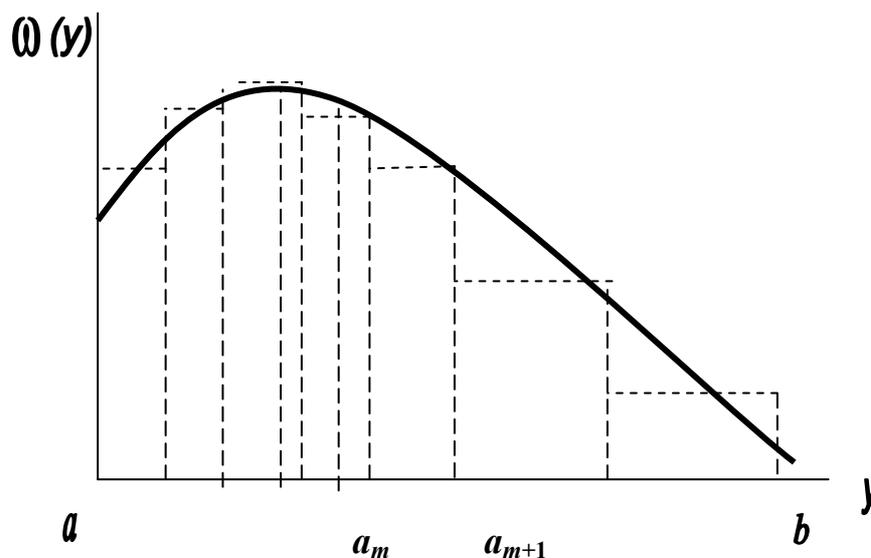


Рис. 3

Пусть P_m – вероятность попадания случайной величины y в каждый интервал (a_m, a_{m+1}) . Получать реализации величины y с кусочно-равномерным распределением можно, очевидно, в соответствии со следующей схемой преобразования случайных чисел:

- 1) случайным образом с вероятностью P_m выбирается интервал (a_m, a_{m+1}) ;
- 2) формируется реализация ${}^k\Delta y_m$ случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0, a_{m+1} - a_m)$;
- 3) искомая реализация ${}^k y$ получается по формуле

$${}^k y = a_m + {}^k\Delta y_m . \quad (3)$$

Случайный выбор интервала (a_m, a_{m+1}) с вероятностью P_m означает, по существу, моделирование дискретной случайной величины, принимающей n значений $a_m, m = \overline{0, n-1}$, с вероятностью P_m каждое, что можно сделать достаточно просто. Интервал $(0,1)$ разбивается на n интервалов $(x_m, x_{m+1}), m = \overline{0, n-1}, x_0 = 0, x_n = 1$ длиной $x_{m+1} - x_m = P_m$ каждый. Из датчика случайных равномерно распределенных в интервале $(0,1)$ чисел выбирается некоторая реализация ${}^k x$. Путем последовательного сравнения ${}^k x$ с x_m определяется тот интервал (x_m, x_{m+1}) , в котором оказывается ${}^k x$.

Для моделирования случайных величин методом кусочной аппроксимации наиболее удобно при машинной реализации выбирать вероятности попадания во все интервалы (a_m, a_{m+1}) одинаковыми ($P_m = 1/n$), а число n таким, что $n = 2^N$, где N – целое число, меньше или равное количеству двоичных разрядов чисел, вырабатываемых датчиком случайных чисел. В этом случае величины a_m должны быть выбраны такими, чтобы

$$\int_{a_m}^{a_{m+1}} \omega(y) dy = \frac{1}{n} = 2^{-N} . \quad (4)$$

При равенстве вероятностей P_m для случайного выбора индекса m можно использовать первые N разрядов числа, извлекаемого из датчика равномерно распределенных случайных чисел.

Используя рассмотренный прием, приходим к следующему способу преобразования равномерно распределенных случайных чисел в случайные числа с заданным законом распределения.

Из датчика равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел извлекается пара реализаций ${}^k x_1, {}^k x_2$. Первые $N = \log_2 n$ разрядов числа ${}^k x_1$ используются для нахождения адресов ячеек, в которых хранятся величины a_m и a_{m+1} , а затем по формуле

$${}^k y = a_m + {}^k x_2 (a_{m+1} - a_m) \quad (5)$$

получается реализация ${}^k y$ случайной величины y с заданным законом распределения. Такой алгоритм является довольно экономичным по количеству требуемых операций, которое не зависит от числа n , то есть не зависит от точности кусочной аппроксимации. Однако с увеличением точности аппроксимации возрастает количество ячеек памяти, требуемое для хранения величин $a_m, m = \overline{0, n-1}$, что является недостатком рассмотренного метода в особенности при больших n .

1.5. Некоторые специальные методы моделирования случайных величин

Для моделирования случайных величин с заданным законом распределения можно использовать и другие свойства преобразований случайных величин. Известно, например, что распределение произведения двух независимых случайных величин, одна из которых имеет релеевское распределение, а другая распределена по закону арксинуса с параметрами $(0, \frac{1}{2})$, то есть с нулевым средним значением и дисперсией, равной $\frac{1}{2}$, является нормальным. Это позволяет формировать нормальную случайную величину путем следующего преобразования системы двух независимых равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$ случайных чисел x_1 и x_2 :

$$y = \sigma \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2 \quad (6)$$

Параметры получаемой этим способом нормальной случайной величины будут $(0, \sigma^2)$.

Рассмотрим нормированную (нулевое математическое ожидание и единичная дисперсия) сумму n независимых x_i равномерно распределенных величин

$$y^{(n)} = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \quad (7)$$

Согласно центральной предельной теореме при $n \rightarrow \infty$ функция распределения

$$W(y) \rightarrow (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (8)$$

Следовательно, по формуле (7) при достаточно больших n можно вычислять приближенные значения нормальной случайной величины y с параметрами $(0,1)$.

Асимптотика в формуле (8) устанавливается весьма быстро уже при $n = 3$, и поэтому на практике можно ограничиться значением $n = 12$:

$$y \approx y^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6. \quad (9)$$

Иногда ограничиваются в (7) лишь пятью слагаемыми, но зато добавляют поправку, которая ускоряет сходимость распределения к нормальному

$$y \approx 0,01y^{(5)} \left[97 + (y^{(5)})^2 \right]. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) нередко оказываются удобнее, чем (6), так как расчет по ним возможен без обращения к подпрограммам \ln и \sin .

Для моделирования случайных величин с некоторыми законами иногда удобно использовать преобразования нормально распределенных случайных чисел. Так, например, случайные величины с релеевским и показательными законами распределения можно получить путем преобразования системы двух независимых нормальных случайных чисел x_1 и x_2 с параметрами $(0, \sigma^2)$ в виде

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (11)$$

$$y = x_1^2 + x_2^2 \quad (12)$$

соответственно. При этом для релеевского распределения параметр σ будет совпадать с параметром σ исходного нормального распределения, а для показательного распределения параметр λ связан с параметром σ исходного нормального распределения соотношением $\lambda = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Алгоритмы (11) и (12) основаны на известных свойствах преобразований нормальных случайных величин. Немного изменив эти алгоритмы,

можно моделировать случайные величины с другими распространенными законами распределения, а именно, обобщая формулы (11) и (12) в виде

$$y = \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2}, \quad y = \sum_{k=1}^m x_k^2, \quad (13)$$

где x_k – нормальные случайные числа с параметрами $(0, \sigma^2)$. Получим алгоритмы для моделирования случайных величин с законом распределения Райса и законом распределения χ^2 с m степенями свободы соответственно:

$$\omega(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2+a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ay}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0; \quad (14)$$

$$\omega(y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2) \sigma^2} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0, \quad (15)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

1.6. Сравнительная характеристика методов

Если в задаче требуется высокая точность воспроизведения законов распределения случайных величин, то целесообразно использовать алгоритмы, не обладающие методической погрешностью. К ним относятся алгоритмы, приведенные в табл. 2, (6) и (11) – (13), погрешностью которых обычно можно пренебречь, так как она определяется лишь погрешностью выполнения на ЦВМ необходимых нелинейных преобразований и отклонением закона распределения исходных случайных чисел от равномерного (нормального). Примером систем, при моделировании которых может потребоваться высокая точность воспроизведения законов распределения случайных величин, являются системы обнаружения радиосигнала с низкой вероятностью ложной тревоги (порядка $10^{-5} - 10^{-6}$).

Другим достоинством указанных алгоритмов является простота подготовительной работы, так как преобразования равномерного закона в требуемый закон распределения даются в виде готовых аналитических зависимостей. Такого вида алгоритмы, кроме того, позволяют легко изменять форму закона распределения в процессе моделирования случайных величин, закон распределения которых зависит от переменных параметров.

Основной недостаток этих алгоритмов – сравнительно низкое быстроедействие, так как осуществление на ЦВМ нелинейных преобразований часто требует довольно большого количества элементарных операций.

В задачах, не предъявляющих высоких требований к качеству случайных величин, для сокращения количества элементарных операций рекомендуется использовать более экономичные приближенные методы. Из них хорошие результаты дает метод кусочной аппроксимации.

2. Задания для домашней подготовки

1. Изучить методы формирования псевдослучайных чисел с различными законами распределения.
2. Изучить критерии согласия и тесты по статистической проверке случайных чисел.
3. Составить схему алгоритма и программу генератора псевдослучайных чисел по индивидуальному заданию (табл. 3).

3. Порядок выполнения работы

1. Записать в ПЭВМ составленную программу и отладить ее.
2. Построить гистограмму функции распределения программного датчика псевдослучайных чисел.
3. Провести проверку гипотезы о законе распределения датчика псевдослучайных чисел.

4. Содержание отчета

1. Математическое описание функции плотности и распределения, среднего значения, дисперсии и формул преобразования псевдослучайных чисел по варианту задания.
2. Схема алгоритма и программы датчика псевдослучайных чисел.
3. Гистограмма функции распределения датчика и результаты статистической проверки псевдослучайных чисел.

5. Контрольные вопросы

1. Основные свойства M-последовательности.

2. Датчики псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения.

3. Моделирование случайных величин с законами распределения: релеевским, показательным, арксинуса, Коши, на основе метода нелинейного преобразования, обратной функции распределения.

4. Сущность метода Неймана.

5. Определение границ интервалов в методе кусочной аппроксимации.

6. Этапы преобразования метода кусочной аппроксимации.

7. Специальные методы моделирования случайных величин с нормальным, релеевским, показательным, Райса и χ^2 законами распределения.

8. Достоинства и недостатки методов моделирования псевдослучайных чисел.

9. Статистическая проверка датчиков псевдослучайных чисел.

Таблица 3

Вариант	Метод преобразования	Закон распределения
1	Нелинейного преобразования, обратного функции распределения	Релеевский
2	То же	Показательный
3	»	Арксинуса
4	»	Коши
5	Неймана	Релеевский
6	То же	Показательный
7	»	Райса
8	»	χ^2
9	Кусочной аппроксимации	Релеевский
10	То же	Показательный
11	»	Райса
12	»	χ^2
13	Специальные	Нормальный
14	То же	Релеевский
15	»	Показательный
16	»	Райса
17	»	χ^2

Примечание. Методы Неймана и кусочной аппроксимации предполагают, что область возможных значений случайной величины ограничена определенным интервалом, поэтому неограниченное распределение можно приближенно заменить ограниченным. Границы интервала можно определить, задавшись уровнем относительно максимального значения функции плотности вероятности случайной величины.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Цель работы: изучение методов моделирования стационарных нормальных случайных процессов и получения весовых коэффициентов для алгоритмов скользящего суммирования и параметров рекуррентных алгоритмов.

1. Моделирование стационарных нормальных случайных процессов

Основное внимание уделяется методам моделирования стационарных нормальных случайных процессов, так как они, с одной стороны, имеют наибольшее распространение в качестве математических моделей различного рода флуктуаций в радиотехнике, а с другой стороны, имея эффективные алгоритмы для моделирования стационарных нормальных случайных процессов, можно сравнительно просто получить алгоритмы для моделирования других классов случайных процессов при различных линейных и нелинейных преобразованиях.

Для стационарных нормальных случайных процессов в последнее время найдены весьма экономичные моделирующие алгоритмы. В основу этих алгоритмов положено линейное преобразование стационарной последовательности $x[n]$ независимых нормальных случайных чисел (дискретный белый шум) в последовательность $\xi[n]$, коррелированную по заданному закону. При этом оператор линейного преобразования записывается либо в виде скользящего суммирования с некоторым весом $c_k = c[k]$

$$\xi[n] = \sum_{k=1}^n c_k x[n-k], \quad (16)$$

либо как рекуррентное соотношение вида

$$\begin{aligned} \xi[n] &= a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_l x[n-l] - b_1 \xi[n-1] - b_2 \xi[n-2] - \dots - b_m \xi[n-m] = \\ &= \sum_{k=0}^l a_k x[n-k] - \sum_{k=0}^m b_k \xi[n-k]. \end{aligned} \quad (17)$$

Вид корреляционной функции случайного процесса, моделируемого с помощью алгоритмов (16) и (17), определяется набором значений параметров a_k , b_k и c_k и их количеством, которое обычно невелико. Алгоритмы (16) и (17) отличаются простотой и позволяют формировать дискретные реализации случайных процессов сколь угодно большой длины.

Начальные условия в рекуррентном уравнении (17), то есть предыдущие значения последовательности $\xi[n]$ при вычислении первого значения этой последовательности можно выбирать нулевыми. При этом будет иметь место некоторый переходный процесс, в результате которого начальный участок моделируемого процесса будет искаженным. Однако после окончания переходного процесса последовательность $\xi[n]$ становится стационарной.

Параметры a_k , b_k рекуррентных алгоритмов и дискретная весовая функция c_k в формуле скользящего суммирования определяются на этапе предварительной подготовки к моделированию. Различие между предложенными методами моделирования состоит в путях перехода от заданных корреляционно-спектральных характеристик к параметрам алгоритмов, то есть в подготовительной работе.

Задачу цифрового моделирования случайных процессов с помощью скользящего суммирования и рекуррентных разностных уравнений можно рассматривать как задачу синтеза линейного дискретного формирующего фильтра, который преобразует дискретный белый шум в коррелированный дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристиками.

Каждый метод имеет свои области наиболее эффективного применения. Поэтому в табл. 4 дается сравнительная характеристика методов моделирования стационарных нормальных случайных процессов с точки зрения достоинств, недостатков и погрешности методов и в табл. 5 – с точки зрения требований к характеристикам моделируемых процессов. В табл. 5 цифрами указана последовательность перехода от корреляционной функции к энергетическому спектру, передаточной функции и импульсной характеристике в различных методах определения весовых коэффициентов и параметров алгоритмов. На основе анализа табл. 4 и 5 можно выбрать наиболее эффективный и простой метод моделирования.

Таблица 4

Метод			Код метода	Методическая погрешность	Достоинства и недостатки метода	
Моделирование процессов	Получение весовых коэффициентов	Переменный шаг				
Скользящее суммирование	Решение нелинейной алгебраической системы уравнений	-	1	+	Значительная трудоемкость при получении весовых множителей	Универсальный метод, пригодный для моделирования случайных процессов с рациональным и нерациональным спектром
	Разложение в ряд Фурье	-	2	+	Более простой по сравнению с методом 1. Могут быть использованы как аналитические, так и численные методы, реализуемые на ЭВМ. Для сокращения объема вычислений можно применять алгоритм быстрого преобразования Фурье	
	Факторизация	-	3	+	При факторизации спектральных функций высокого порядка требуется находить корни полиномов степени выше второй, что в общем случае затруднительно и ограничивает применение метода	
	Специальные способы	-	4	+	Наиболее просто весовые коэффициенты находятся в тех случаях, когда моделируемый процесс является результатом воздействия белого шума на линейный фильтр с заданной импульсной характеристикой	

Рекур- рентные разност- ные урав- нения	Факторизация	-	5	-	Менее экономи- чен	Подготовительная работа для по- лучения параметров рекуррентно- го алгоритма довольно громозд- кая	Более эффек- тивны по от- ношению к 3. Наиболее эконо- мичны по количеству элементарных операций и ячеек памяти. Моделирую- щие алгоритмы очень просты и их параметры удается выра- зить в явном виде через па- раметры корр- еляционной функции
		+	6	-	Более экономи- чен		
	Дискретизация непрерывных формирующих фильтров	-	7	-	Менее экономи- чен	Подготовительная работа доволь- но простая. При наличии кратных полюсов передаточной функции получаются громоздкие выраже- ния и неэффективные алгоритмы	
		+	8	-	Предпочтитель- ней метода 6. Более эконо- мичный		

Примечание. «+» – наличие, «-» – отсутствие.

Таблица 5

Код ме- тода	Корреляци- онная функ- ция	Энергетический спектр							Переда- точная функция	Импульсная характери- стика
		Рациональный с по- рядком		Нера- цио- наль- ный	Аналитиче- ское выраже- ние	Экспери- ментальная кривая	Рассчитывается по заданной кор- реляционной функции			
		высоким	невысоким				легко	трудно		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	+	+	+	-	-	-	+	-	-
2	-	+	+	+	1	1	+	-	-	-
3	1	+	+	-	2	-	+	-	3	4
4	1	+	+	+	2	-	-	-	3	4
5	1	-	+	-	2	-	-	-	3	-
6	1	-	+	-	2	-	-	-	3	-
7	1	-	+	-	2	-	-	-	3	4
8	1	-	+	-	2	-	-	-	3	4

Вышерассмотренные методы использованы для моделирования стационарных нормальных процессов с распространенными типами корреляционных функций и соответствующих им энергетических спектров, приведенных в табл. 6. В ней применяются следующие условные обозначения: σ^2 – дисперсия моделируемого случайного процесса; τ – время; ω – частота; ω^* – частота, обратная интервалу корреляции на определенном уровне; ω_0 – частота гармонической составляющей функции $R(\tau)$.

Проделана вся необходимая подготовительная работа и получены простые моделирующие алгоритмы, пригодные для непосредственного использования, которые приведены в табл. 7.

Заданный стационарный нормальный непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ с корреляционной функцией $R(\tau)$ изображается на ЭВМ в виде дискретной последовательности его значений, относящихся ко времени $t_n = n\Delta t$, где Δt – шаг дискретизации; n – целочисленный аргумент. Все представленные здесь алгоритмы предназначены для получения на ЭВМ дискретных, неограниченных во времени реализаций $\xi[n] = \xi(n\Delta t)$ моделируемого случайного процесса $\xi(t)$. Во все эти алгоритмы заложен принцип преобразования последовательности $x[n]$ независимых нормально распределенных случайных чисел с параметрами $(0, 1)$ (дискретный белый шум) в последовательность $\xi[n]$, коррелированную по закону

$$R[n] = M \{ \xi[k] \xi[k + n] \} = R(n\Delta t), \quad (18)$$

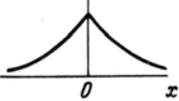
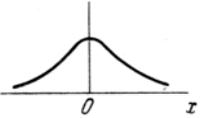
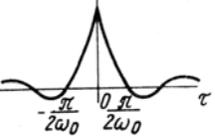
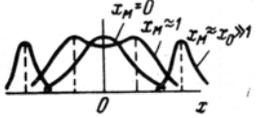
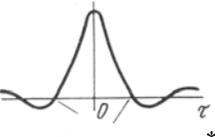
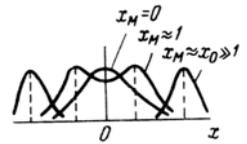
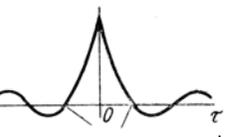
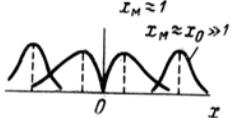
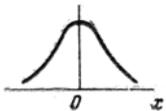
где M – символ математического ожидания.

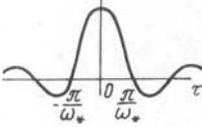
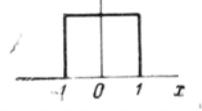
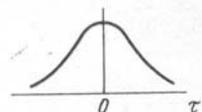
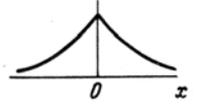
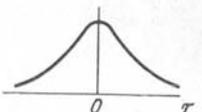
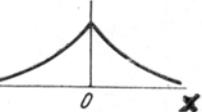
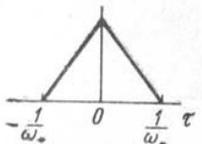
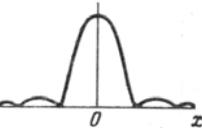
Случайные процессы с корреляционными функциями, помещенными в табл. 7 под № 1 – 5, относятся к классу случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. Для моделирования таких процессов наиболее удобным является применение разностных уравнений, что приводит к алгоритмам, не имеющим методической погрешности и сводящимся к простым рекуррентным соотношениям. Алгоритмы № 1 – 5 получены этим способом.

Алгоритмы № 2 – 5 одинаковы и отличаются лишь значениями параметров a_0, a_1, b_1, b_2 , нахождение которых в каждом конкретном случае сводится к вычислениям по формулам, приведенным в табл. 7.

Для моделирования случайных процессов № 6 – 8, которые не относятся к классу процессов с рациональной спектральной плотностью, был применен метод скользящего суммирования как наиболее эффективный в данном случае.

Таблица 6

№ п/п	Корреляционная функция $R(\tau)$		Энергетический спектр $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$	
	Аналитическое выражение	График	Аналитическое выражение	График
1	$\sigma^2 e^{-\omega^* \tau }$		$\frac{2\sigma^2}{\omega^*} \frac{1}{1+x^2}$ $x = \omega/\omega^*$	
2	$\sigma^2 e^{-\omega^* \tau } \cos \omega_0 \tau$		$\frac{2\sigma^2}{\omega^*} \frac{1+x^2+x_0^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]}$ $x = \omega/\omega^*, x_0 = \omega_0/\omega^*$ $x_M = \sqrt{2x_0\sqrt{1+x_0^2} - (1+x_0^2)}$	
3	$\sigma^2 e^{-\omega^* \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\omega^*}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	 $\tau \approx \pm \frac{\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{\omega^*}{\omega_0}}{\omega_0}$	$\frac{4\sigma^2}{\omega^*} \frac{1+x_0^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]}$ $x = \omega/\omega^*, x_0 = \omega_0/\omega^*$ $x_M = \sqrt{x_0^2 - 1}$	
4	$\sigma^2 e^{-\omega^* \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\omega^*}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	 $\tau \approx \pm \frac{\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\omega^*}{\omega_0}}{\omega_0}$	$\frac{4\sigma^2}{\omega^*} \frac{x^2}{[1+(x+x_0)^2][1+(x-x_0)^2]}$ $x = \omega/\omega^*, x_0 = \omega_0/\omega^*$ $x_M = \sqrt{x_0^2 + 1}$	
5	$\sigma^2 e^{-\omega^* \tau } (1 + \omega^* \tau)$		$\frac{4\sigma^2}{\omega^*} \frac{1}{(1+x^2)^2}$ $x = \omega/\omega^*$	

6	$\frac{\sigma^2 \sin \omega^* \tau}{\omega^* \tau}$		$\begin{cases} \frac{\pi \sigma^2}{\omega^*}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad x = \frac{\omega}{\omega^*}$	
7	$\sigma^2 e^{-\omega^{*2} \tau^2}$		$\frac{\sqrt{\pi} \sigma^2}{\omega^*} e^{-x^2/4}, \quad x = \omega / \omega^*$	
8	$\frac{\sigma^2}{1 + \omega^{*2} \tau^2}$		$\frac{\pi \sigma^2}{\omega^*} e^{- x }, \quad x = \omega / \omega^*$	
9	$\begin{cases} \sigma^2 (1 - \omega^* \tau), & \tau \leq 1/\omega^* \\ 0, & \tau > 1/\omega^* \end{cases}$		$\frac{4\sigma^2}{\omega^*} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad x = \omega / \omega^*$	

Примечание. x_M – это те значения x , при которых $\frac{dG(\omega)}{d\omega} = 0$.

Таблица 7

№ п/п	Моделирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	$\xi[n] = a_0 x[n] + b_1 \xi[n-1]$	$a_0 = \sigma \sqrt{1 - \rho^2}; b_1 = \rho; \rho = e^{-\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t$
2	$\xi[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + b_1 \xi[n-1] + b_2 \xi[n-2]$	$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha; b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2;$ $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1) \cos \gamma_0; \alpha_1 = 1 - \rho^4; \rho = e^{-\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t$
3		$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha; b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2;$ $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\omega^*}{\omega_0} (1 + \rho^2) \rho \sin \gamma_0; \alpha_1 = 1 - \rho^4 - 4\rho^2 \frac{\omega^*}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $\rho = e^{-\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t$
4		$a_0 = \sigma \alpha = \sigma \sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma \alpha_0 / \alpha; b_1 = 2\rho \cos \gamma_0; b_2 = -\rho^2;$ $\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\omega^*}{\omega_0} (1 + \rho^2) \rho \sin \gamma_0; \alpha_1 = 1 - \rho^4 + 4\rho^2 \frac{\omega^*}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $\rho = e^{-\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t; \gamma_0 = \omega_0 \Delta t$

5		$a_0 = \sigma\alpha = \sigma\sqrt{(\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2})/2}; a_1 = \sigma\alpha_0/\alpha; b_1 = 2\rho; b_2 = -\rho^2;$ $\alpha_0 = \rho^2(1 + \gamma^*) - \rho(1 + \gamma^*); \alpha_1 = 1 - 4\rho^2\gamma^* - \rho^4; \rho = e^{-\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t$
6	$\xi[n] = \sum_{-p}^p c_k x[n-k]$	$c_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\gamma^*}} \frac{\sin \gamma^* k}{k}; \gamma^* \leq \pi; \gamma^* = \omega^* \Delta t$
7		$c_k = \frac{\sigma\sqrt{2\gamma^*}}{4\sqrt{\pi}} e^{-2\gamma^{*2} k^2}; \gamma^* \leq 1/2; \gamma^* = \omega^* \Delta t$
8		$c_k = 2\sigma\sqrt{\frac{\gamma^*}{\pi}} \frac{1}{1 + 4\gamma^{*2} k^2}; \gamma^* \leq 1/2; \gamma^* = \omega^* \Delta t$
9	$\xi[n] = c_0 \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$	$c_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{N}}; N = \left[\frac{1}{\gamma^*} \right] + 1; \left[\frac{1}{\gamma^*} \right] - \text{целая часть числа } \frac{1}{\gamma^*}; \gamma^* = \omega^* \Delta t$

Согласно алгоритмам № 6 – 8 последовательность $\xi[n]$ получается методом скользящего суммирования последовательности $x[n]$ с весом c_k . При этом полагалось, что частота дискретизации для случайного процесса № 6 [процесс с равномерным в полосе $(-\omega^*, \omega^*)$ спектром] больше или равна ω^* . Относительно процессов № 6, 7 предполагалось, что частота дискретизации достаточно велика, так что верхний предел можно принять равным бесконечности. Поэтому выражения для коэффициентов c_k в алгоритмах № 7, 8 следует применять при $\gamma^* = \omega^* \Delta t \leq 0,5$.

Алгоритмы № 6 – 8 являются приближенными, однако при увеличении параметра p методическая погрешность может быть сделана пренебрежимо малой. При выбранных значениях γ^* и p погрешность метода легко оценивается путем свертки весовых коэффициентов.

Для моделирования случайного процесса (см. табл. 6) необходимо задать интервал τ^* корреляции на определенном уровне $R(\tau^*)$, по которому вычисляется величина ω^* , а также величину дискрета по времени Δt и, где требуется, величину частоты ω_0 .

Укажем на некоторые приемы, позволяющие расширить класс моделируемых стационарных нормальных случайных процессов путем несложных преобразований рассмотренных выше алгоритмов.

Известно, например, при суммировании нескольких независимых стационарных нормальных случайных процессов образуется стационарный нормальный случайный процесс, корреляционная функция которого равна сумме корреляционных функций слагаемых. Отсюда, если корреляционная функция процесса является суммой двух или более корреляционных функций из табл. 6, то дискретные реализации этого процесса можно формировать путем суммирования двух или более независимых реализаций, получаемых по приведенным в табл. 7 алгоритмам. Если, например, корреляционная функция моделируемого процесса имеет вид

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) = \sigma_1^2 e^{-\omega_1^* |\tau|} \cos \omega_{01} \tau + \sigma_2^2 e^{-\omega_2^* |\tau|} \cos \omega_{02} \tau, \quad (19)$$

то алгоритм для формирования его дискретных реализаций запишется в виде

$$\xi[n] = \xi_1[n] + \xi_2[n], \quad (20)$$

$$\text{где } \xi_1[n] = \sigma_1 a_{01} x_1[n] + \sigma_1 a_{11} x_1[n-1] - b_{11} \xi_1[n-1] - b_{21} \xi_1[n-2]; \quad (21)$$

$$\xi_2[n] = \sigma_2 a_{02} x_2[n] + \sigma_2 a_{12} x_2[n-1] - b_{12} \xi_2[n-1] - b_{22} \xi_2[n-2]; \quad (22)$$

$x_1[n], x_2[n]$ – независимые между собой последовательности независимых нормальных случайных чисел с параметрами (0, 1).

Параметры алгоритмов (20) – (22) находятся по формулам, приведенным в табл. 7 для алгоритма № 2, при $\gamma^*_1 = \omega^*_1 \Delta t$, $\gamma^*_2 = \omega^*_2 \Delta t$, $\gamma_{01} = \omega_{01} \Delta t$, $\gamma_{02} = \omega_{02} \Delta t$.

Рассмотрим еще один пример преобразования. Из теории случайных процессов известна следующая теорема. Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – два одинаковых стационарных нормальных центрированных и независимых случайных процесса с корреляционными функциями $R'(\tau)$, то случайный процесс

$$\xi(t) = \xi_1(t) \sin \omega t + \xi_2(t) \cos \omega t \quad (23)$$

будет также стационарным нормальным центрированным случайным процессом, но с корреляционной функцией

$$R(\tau) = R'(\tau) \cos \omega \tau. \quad (24)$$

Этот факт позволяет легко моделировать нормальные случайные процессы с корреляционной функцией вида (24), если известен алгоритм для моделирования нормального случайного процесса с корреляционной функцией $R'(\tau)$. Для этого в соответствии с формулой (23) нужно выработать дискретные реализации $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ независимых случайных процессов с корреляционной функцией $R'(\tau)$ (например с помощью алгоритмов, приведенных в табл. 7), затем по правилу

$$\xi[n] = \xi_1[n] \sin \gamma n + \xi_2[n] \cos \gamma n, \quad (25)$$

где $\gamma = \omega \Delta t$, преобразовать реализации $\xi_1[n]$ и $\xi_2[n]$ в реализацию $\xi[n]$ случайного процесса с корреляционной функцией (24).

Для вычисления дискретных тригонометрических функций

$$s[n] = \sin \gamma n \text{ и } c[n] = \cos \gamma n$$

целесообразно воспользоваться рекуррентным алгоритмом (26)

$$\begin{aligned} s[n] &= c_1 s[n-1] + s_1 c[n-1], & s[0] &= 0, \\ c[n] &= c_1 c[n-1] - s_1 s[n-1], & c[0] &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $c_1 = \cos(\gamma)$; $s_1 = \sin(\gamma)$.

Применение алгоритма (26), так же как и использование выборки из таблиц, примерно на порядок сокращает время вычисления дискретных тригонометрических функций по сравнению со временем вычисления их по стандартным подпрограммам. Кроме того, приведенный алгоритм экономичен по количеству требуемых ячеек памяти.

Тогда алгоритм (25) запишется в виде

$$\xi[n] = \xi_1[n](c[1]s[n-1] + s[1]c[n-1]) + \xi_2[n](c[1]c[n-1] - s[1]s[n-1]).$$

2. Задания для домашней подготовки

1. Изучить методы моделирования стационарных нормальных случайных процессов.
2. Изучить способы получения весовых коэффициентов для метода скользящего суммирования и способы получения параметров рекуррентных алгоритмов.
3. Ознакомиться с приемами, позволяющими расширить класс моделируемых стационарных нормальных случайных процессов.
4. Составить схемы алгоритмов и программы генераторов стационарных нормальных случайных процессов с заданными корреляционными функциями.

3. Порядок выполнения работы

1. Записать в ПЭВМ составленные программы и отладить их.
2. Построить гистограмму функции распределения и корреляционную функцию программного датчика стационарного нормального случайного процесса.
3. Провести статистическую проверку гипотезы о законе распределения и статистическую оценку корреляционной функции моделируемого случайного процесса.

4. Содержание отчета

1. Математическое описание моделирующего алгоритма, параметров алгоритма, корреляционной функции и энергетического спектра по варианту задания (табл. 8).
2. Схемы алгоритмов и программ генераторов стационарных нормальных случайных процессов.
3. Гистограмма закона распределения, корреляционная функция и результаты статистической оценки моделируемого случайного процесса.

Таблица 8

№ п/п	Номера N и K корреляционных функций моделируемого процесса			τ^* мс	$R(\tau^*)$	$\Delta t / \tau^*$	ω_0 / ω^*	ω_1 / ω^*
	$R_M(\tau)$	$R_N(\tau)\cos\omega_1\tau$	$R_N(\tau)+R_K(\tau)$					
1	1	1	1 и 6	1	0,1	0,2	5	5
2	2	2	2 и 7	2	0,2	0,4	6	10
3	3	3	3 и 8	3	0,3	0,6	7	15
4	4	4	4 и 9	4	0,4	0,8	8	5
5	5	5	5 и 2	5	0,5	1,0	9	10
6	6	6	6 и 9	1	0,6	0,1	10	15
7	7	7	7 и 3	2	0,7	0,2	11	5
8	8	8	8 и 4	3	0,8	0,3	12	10
9	9	9	9 и 6	4	0,9	0,4	13	15

5. Контрольные вопросы

1. Передаточные функции, структурные схемы дискретных фильтров, формирующих на выходах дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристиками.
2. Определение характера корреляционных связей процесса, сформированного методом скользящего суммирования.
3. Сущность метода на основе рекуррентных разностных уравнений.
4. Достоинства и недостатки методов моделирования стационарных нормальных случайных процессов.
5. Приемы, расширяющие класс моделируемых стационарных нормальных случайных процессов.
6. Экономичные алгоритмы, позволяющие сократить время вычисления дискретных значений тригонометрических и экспоненциальных функций.
7. Точность моделирования стационарных нормальных случайных процессов.
8. Определение весовых коэффициентов метода скользящего суммирования и параметров рекуррентных алгоритмов.
9. Этапы моделирования стационарных нормальных случайных процессов.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы: изучение методов моделирования непрерывных линейных динамических систем, основанных на дискретной свертке и на рекуррентных разностных уравнениях.

1. Моделирование процессов преобразования сигналов и помех линейными системами

1.1. Моделирование радиосистем

При решении радиотехнических задач методами моделирования на ЭВМ наряду с моделированием радиосигналов и радиопомех возникает необходимость в построении цифровых моделей процессов преобразования сигналов и помех различными линейными и нелинейными радиосистемами. Задача при этом заключается в нахождении алгоритмов, позволяющих получить на ЭВМ дискретные значения $\vartheta[n] = \vartheta(n\Delta t)$ процесса $\vartheta(t)$ на выходе данной системы по известным дискретным значениям $u[n] = u(n\Delta t)$ входного процесса и известным характеристикам системы, например передаточным функциям и характеристикам нелинейности его отдельных звеньев. Основными требованиями к таким алгоритмам являются минимальный объем вычислений при реализации их на ЭВМ и простота подготовительной работы к моделированию.

В целом ряде практических задач блок-схемы исследуемых радиосистем можно представить в виде соединения двух основных типов звеньев: линейных инерционных (динамических) звеньев (усилители, фильтры, следящие системы и т.д.) и нелинейных безынерционных звеньев (детекторы, ограничители, логические устройства и т.д.). Причем во многих случаях можно полагать, что между звеньями системы имеется развязка, так что свойства каждого звена практически не изменяются при присоедине-

30

нии к нему других звеньев, если это специально не предусмотрено. Из двух названных типов функциональных единиц можно строить линейные и нелинейные радиосистемы любой сложности путем наращивания блок-схемы. Разбиение функциональной системы на отдельные звенья не является предметом самостоятельного исследования, так как обычно оно задано. Это облегчает задачу моделирования.

Процесс прохождения сигналов и помех со входа на выход функциональных радиосистем состоит из ряда отдельных преобразований сигналов и помех звеньями систем. В соответствии с этим моделирующий алгоритм для всей системы можно найти, зная моделирующие алгоритмы для отдельных звеньев.

Последнее наиболее просто осуществляется при моделировании разомкнутых систем, содержащих только последовательно включенные звенья. Моделирующие алгоритмы для таких систем получаются путем суперпозиции (типа “функция от функции”) алгоритмов, моделирующих отдельные звенья систем. Выходной сигнал в этих случаях выражается в явном виде через входной сигнал.

Более сложной является задача моделирования замкнутых нелинейных функциональных систем, содержащих один или несколько контуров обратной связи. Алгоритмы, описывающие функционирование замкнутых систем в целом, также получаются путем соответствующей комбинации алгоритмов, описывающих отдельные звенья систем, но при этом выходной сигнал, вообще говоря, не выражается в явном виде через входное воздействие. Значения выходного сигнала при моделировании замкнутых нелинейных систем могут быть найдены путем решения на каждом шаге нелинейных алгебраических уравнений. Однако это затруднение во многих случаях можно обойти путем введения в цепи обратной связи элемента запаздывания на величину шага дискретизации. При этом моделирование замкнутых нелинейных функциональных систем принципиально не отличается от моделирования разомкнутых систем.

Импульсные системы можно рассматривать как разновидность непрерывных систем, у которых воздействия прерываются во времени (чаще всего периодически). Поэтому для моделирования импульсных систем в особенности тех, у которых интервалы между воздействиями (импульсами) соизмеримы с длительностями импульсов (системы с малой скважностью или квазинепрерывные системы), можно применять те же методы, что и для моделирования непрерывных систем.

1.2. Цифровые модели непрерывных линейных динамических систем, основанные на дискретной свертке

В качестве основных характеристик непрерывной линейной динамической системы обычно используются передаточная функция $K(p)$ и импульсная характеристика $h(t)$, которые в общем случае, как известно, являются парой функций, сопряженных по Лапласу:

$$\left. \begin{aligned} K(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt} dt, \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} K(p)e^{pt} dp. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Сигнал $\vartheta(t)$ на выходе непрерывной линейной динамической системы с постоянными параметрами через входной сигнал $u(t)$ и импульсную характеристику $h(t)$ можно выразить по формуле

$$\vartheta(t) = u(t) \cdot h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (28)$$

Согласно формуле (28) сигнал на выходе линейной системы является результатом скользящего интегрирования входного сигнала с весовой функцией $h(t)$. Формула (28) называется, как известно, интегралом Дюамеля, а также формулой свертки.

Метод дискретизации с использованием формул численного интегрирования является наиболее простым по своей идее способом получения цифровых моделей непрерывных систем. Он основан на замене интегралов вида (28) соответствующими суммами. Дискретные значения сигнала на выходе системы в точках $t_n = n \cdot \Delta t$ равны

$$\vartheta[n] \approx \vartheta_*[n] = \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} c[k]h[k]u[n-k], \quad (29)$$

где $u[n] = u(n\Delta t)$ – дискретный входной сигнал; Δt – шаг дискретизации по времени t ; $h[k] = h(k\Delta t)$ – дискретная импульсная характеристика; K_{\min} и K_{\max} – нижний и верхний пределы суммирования; $c[k]$ – коэффициенты, определяемые методами численного интегрирования.

При различных односторонних и двусторонних ограничениях по n дискретных функций $u[n]$ и $h[k]$ пределы суммирования в формуле (29) выбираются согласно табл. 9.

Таблица 9

$h[n]$		$h[n] = 0$					
		$n < 0$		Пределы изменения n для $\mathcal{G}[n]$	$n < 0, n > N_h$		
$u[n]$		K			Пределы изменения n для $\mathcal{G}[n]$	K	
		min	max	min		max	
$-\infty < n < +\infty$		0	∞	$-\infty < n < +\infty$	0	N_h	$-\infty < n < +\infty$
$u[n] = 0$	$n < 0$	0	n	$0 \leq n \leq N_u$	0 $n - N_u$	n n	$0 \leq n \leq N_u$ $n > N_u$
	$n < 0, n > N_u$	0 $(n - N_u)$	n n	$0 \leq n \leq N_u$ $n > N_u$	0 0 $n - N_u$	n N_u N_h	При $N_u > N_h$ $0 \leq n \leq N_h$ $N_h < n \leq N_u$ $N_u < n \leq N_h + N_u$
					0 $n - N_u$ $n - N_u$	n n N_h	При $N_u < N_h$ $0 \leq n \leq N_u$ $N_u < n \leq N_h$ $N_h < n \leq N_h + N_u$
					0 $n - N$	n n	При $N_u = N_h = N$ $0 \leq n \leq N$ $n > N$

В таблице используются условные обозначения $N_u = T_u/\Delta t$ и $N_h = T_h/\Delta t$, где T_u и T_h – длительности входного сигнала и импульсной характеристики соответственно.

Для замены интегралов (28) суммами существует большое количество методов численного интегрирования. Из них часто применяются методы прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол). Метод прямоугольников менее точный по сравнению с другими. В общем случае

применение методов численного интегрирования сводится к различному выбору коэффициентов $c[k]$. Выражения для расчета коэффициентов $c[k]$ приведены в табл. 10.

При использовании метода Симпсона нужно выбрать параметр K_{\max} четным.

В формуле (29) предполагается, что дискретные значения $h[k]$ и $u[n]$ заданы на всей оси $n[-\infty, +\infty]$. При этом они могут быть неограниченными и ограниченными по n . В последнем случае значения функции вне области задания получаются тождественно равными нулю.

Таблица 10

№ п/п	Метод	$c[k]$	$C_0[k]$
1	Прямоугольников	$\Delta t C_0[k]$	1,1, ..., 1,1,0
2	Трапеций	$\frac{\Delta t}{2} C_0[k]$	1,2,2, ..., 2,2,1
3	Симпсона	$\frac{\Delta t}{3} C_0[k]$	1,4,2,4, ..., 2,4,1

В задачах, не требующих большой точности решения, удобно использовать формулу прямоугольников как наиболее простую. Аппроксимация по способу прямоугольников не сопровождается погрешностью, если функции $u(t)$ и $h(t)$ имеют спектры, ограниченные частотой $\omega_c = \pi/\Delta t$, что соответствует случаю, когда спектр входного сигнала и полоса пропускания системы строго ограничены частотой ω_c , а шаг дискретизации Δt выбран в соответствии с теоремой Котельникова.

Следует заметить, что если подынтегральная функция на концах интервала интегрирования обращается в нуль, например при $h[0]$ и $h[N] = 0$, формула прямоугольников и формула трапеций дают совершенно одинаковый результат.

Формула (29) описывает поведение некоторых дискретных линейных фильтров. Передаточные функции этих фильтров, определяемые как отношение Z -преобразования дискретного выходного сигнала $\mathcal{G}_*[n]$ к Z -преобразованию дискретного входного сигнала $u[n]$ имеют вид

$$K_*(z) = \frac{D\{\mathcal{G}_*[n]\}}{D\{u[n]\}} = \sum_{k=0}^{K_{\max}} c[k]h[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{K_{\max}} a[k]z^{-k}, \quad (30)$$

в которой $K_{\max} = \infty$ при одностороннем ограничении и $K_{\max} = N_h$ при двустороннем ограничении по времени импульсной характеристики системы. z^{-k} рассматривается как оператор задержки последовательности $u[n]$ на k периодов. Отсюда следует, что передаточные функции $K_*(z)$ являются Z -преобразованием от весовой функции $a[k]$, представляющей собой последовательность значений импульсной характеристики системы с весом $c[k]$.

Структурная схема дискретного фильтра с передаточной функцией (30) изображена на рис. 4. Согласно этой схеме последовательность дискретных значений входного сигнала поступает на линию задержки с N_h отводами, задержка между которыми равна Δt . К отводам подключены весовые усилители с коэффициентом усиления $a[k] = c[k] \cdot h[k]$. Для образования дискретного сигнала на выходе системы выходы весовых усилителей суммируются.

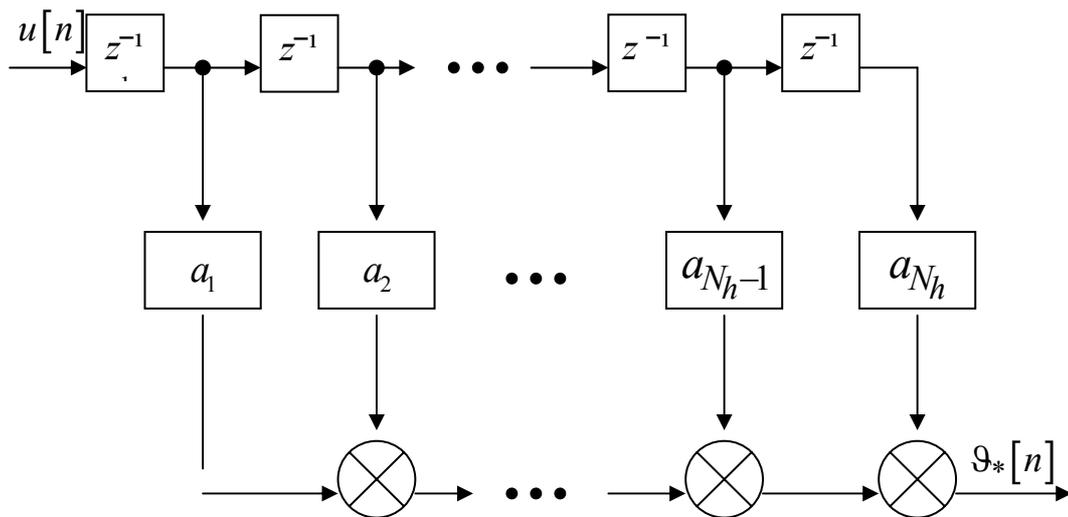


Рис. 4

Процесс дискретной фильтрации по схеме рис. 4 можно легко реализовать на ЭВМ в виде стандартной программы, входными параметрами которой являются N_h и $a[k]$, $k = \overline{1, N_h}$. Коэффициенты $a[k]$ должны быть вычислены заранее. Линию задержки можно имитировать на ЭВМ, используя операцию пересылки содержимого ячеек оперативной памяти, хранящих текущие значения входного сигнала от $u[n]$ до $u[n - N_h]$.

Вычисления по схеме рис. 4 можно производить также с помощью готовой стандартной операции перемножения матриц. Действительно,

пусть входной дискретный сигнал $u[n]$, $n = \overline{0, N_u}$ и дискретная импульсная характеристика системы $h[u]$, $n = \overline{0, N_h}$, причем они ограничены во времени. Тогда, очевидно, выходной дискретный сигнал будет последовательностью из $N = N_u + N_h + 1$ чисел, полученных путем перемножения матрицы $u[n]$ размерностью $(N_h + 1)(N_h + N_u + 1)$ и матрицы – столбца $a[n]$ размерами $(N_h + 1)$. Матрица $u[n]$, составленная из элементов $u[n]$, $n = \overline{0, N_u}$, формируется следующим образом: каждая строка получается из предыдущей строки сдвигом на один элемент вправо. При этом в первой строке все элементы матрицы обнулены, кроме первого, равного $u[0]$.

Дискретизация по методу замены непрерывных систем эквивалентными импульсными системами также позволяет получить дискретный фильтр, приближенно заменяющий непрерывный. На рис. 5 показан пример линейной системы (а), ее импульсного эквивалента (ИЭ) (б) и простейшего импульсного элемента и интерполирующего фильтра (ИФ) с импульсной характеристикой $k_0(t)$ (в).

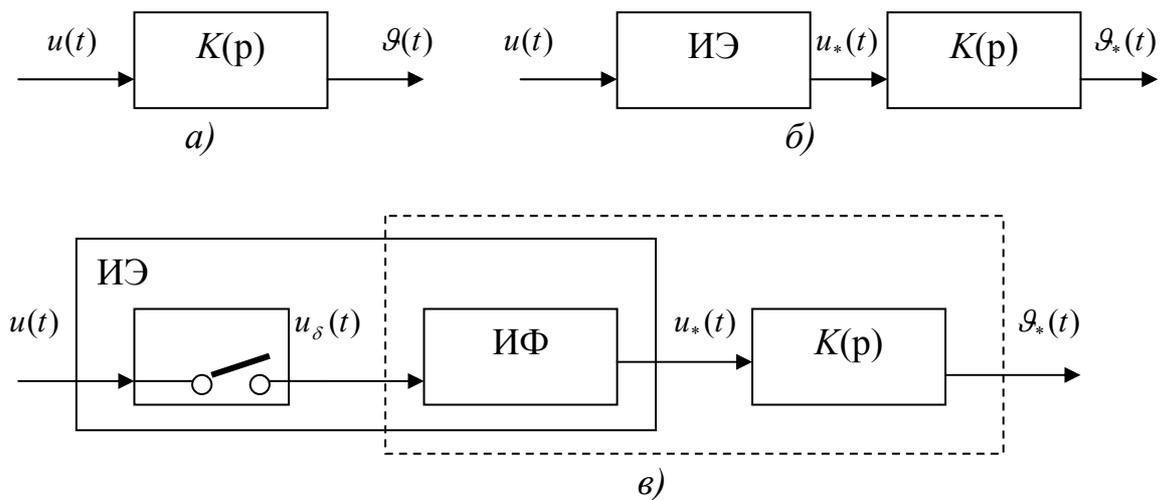


Рис. 5

Поскольку приведенная непрерывная часть находится под воздействием δ -импульсов, сигнал на выходе импульсной системы в дискретных точках $t_n = n\Delta t$ можно представить в виде

$$\vartheta_*[n] = \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} h_*[k] u[n-k]. \quad (31)$$

Импульсная характеристика $h_*[k]$ приведенной непрерывной части линейной системы, как нетрудно видеть, равна свертке функций $k_0(t)$ и $h(t)$:

$$h_*(t) = k_0(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (32)$$

Аналитические выражения и графики импульсных характеристик и относительная среднеквадратическая ошибка восстановления различных интерполирующих фильтров приведены в табл. 11, где $r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$ – коэффициент корреляции исходного случайного процесса.

Суммирование в формуле (31) распространяется на всю область существования дискретных значений, стоящих под знаком суммы. Пределы K_{\min} и K_{\max} для различных случаев могут быть определены по табл. 9.

Передаточные функции дискретных фильтров, описываемых формулой (31), имеют вид

$$K_*(z) = \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} h_*[k] z^{-k}. \quad (33)$$

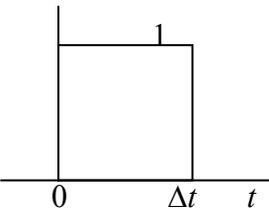
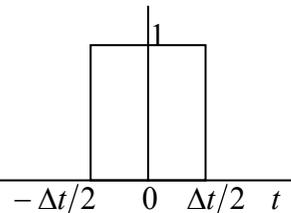
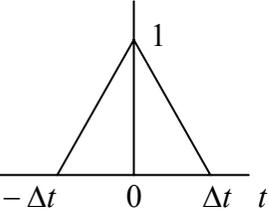
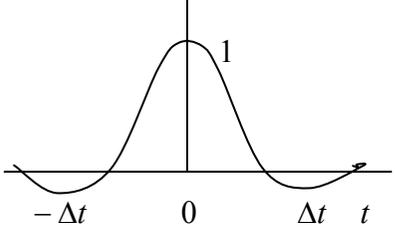
Структурная схема фильтра с передаточной функцией (33) будет такая же, как и схема фильтра, представленного на рис.4, если в ней заменить коэффициенты $a[k]$ на $h_*[k]$.

Подготовительная работа к моделированию при использовании алгоритмов дискретной свертки рассмотренного типа сложнее подготовительной работы при использовании алгоритмов дискретной свертки, основанных на методах численного интегрирования, так как по заданной импульсной характеристике системы требуется еще находить импульсную характеристику $h_*[k]$ приведенной непрерывной части, задавшись формой импульсной характеристики $k_0(t)$ интерполирующего фильтра.

Одним из преимуществ метода цифрового моделирования линейных динамических систем, основанного на дискретизации непрерывной свертки, является возможность простого обобщения его на случай моделирования линейных систем с переменными параметрами (нестационарных во времени систем).

Связь вход-выход в системах с переменными параметрами, как известно, можно задать с помощью импульсной характеристики $h(t, \tau)$, зависящей от двух переменных.

Таблица 11

Характеристика интерполирующего фильтра		Тип интерполирующего фильтра			
		Элемент нулевого порядка (несимметричный)	Элемент нулевого порядка (симметричный)	Элемент первого порядка	Идеальный фильтр нижних частот
Импульсная характеристика $k_0(t)$	Аналитическое выражение	$1, 0 \leq t \leq \Delta t,$ $0, t < 0, t > \Delta t$	$1, t \leq \frac{\Delta t}{2},$ $0, t > \frac{\Delta t}{2}$	$1 - \frac{ t }{\Delta t}, t \leq \Delta t,$ $0, t > \Delta t$	$\frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t}$
	График				
Относительная среднеквадратическая ошибка восстановления Δ_0^2		$2 \left(1 - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} r(\tau) d\tau \right)$	$2 \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t/2} r(\tau) d\tau \right)$	$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} r(\Delta t) -$ $-\frac{4}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} r(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) d\tau$	$2 \left(1 - \frac{2}{\Delta t} \int_0^{\infty} r(\tau) \frac{\sin \omega_C t}{\omega_C t} d\tau \right) =$ $\frac{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega} = 2 \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2}$

При таком определении импульсной характеристики нестационарной системы реакция ее на сигнал в дискретной форме запишется в виде

$$\vartheta_*[n] = \sum_k u[k] h[k, n-k] c[n-k] \quad (34)$$

или

$$\vartheta_*[n] = \sum_k u[k] h_*[k, n-k], \quad (35)$$

где $c[k]$ – коэффициенты, зависящие от метода численного интегрирования; $h_*(t - \tau)$ – импульсная характеристика приведенной непрерывной части нестационарной системы.

Таким образом, цифровые модели нестационарных линейных систем, основанные на дискретной свертке, представляют собой фильтры скользящего суммирования с переменным весом, зависящим от значения дискретного времени.

1.3. Цифровые модели непрерывных линейных динамических систем, основанные на рекуррентных разностных уравнениях

Для линейных систем с постоянными параметрами дискретные передаточные функции эквивалентных импульсных систем обычно удается найти в замкнутой форме в виде дробно-рациональной функции

$$K_*(z) = \frac{\sum_{k=0}^l a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^m b_k z^{-k}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_l z^{-l}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}. \quad (36)$$

Структурная схема дискретного фильтра с передаточной функцией (36) показана на рис. 6.

Производя идентификацию передаточной функции (36), приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирования дискретных значений выходного сигнала:

$$\vartheta_*[n] = a_0 u[n] + \dots + a_l u[n-l] - b_1 \vartheta_*[n-1] - \dots - b_m \vartheta_*[n-m]. \quad (37)$$

Полученное уравнение во многих случаях значительно сокращает вычисления по сравнению с формулами дискретного свертывания.

К настоящему времени предложено большее количество методов аппроксимации передаточной функции $K(p)$ непрерывной динамической

системы дробно-рациональной дискретной передаточной функцией $K_*(z)$. Ряд методов требует отыскания полюсов p_v передаточной функции $K(p)$. К ним относятся методы Z -преобразования, Цыпкина – Гольденберга, Раггазини – Бергена и метод, предложенный автором [1].

Первые три метода предполагают различные способы интерполяции входного сигнала. Метод Z -преобразования основан на замене входного сигнала $u(t)$ модулированной последовательностью δ -функций с огибающей $\Delta tu[n]$ с периодом Δt . Это в схеме рис. 5 соответствует выбору в качестве интерполирующего фильтра безынерционного усилителя с коэффициентом усиления $k = \Delta t$, то есть выбору для аппроксимации входного сигнала $u(t)$ функции

$$u_*(t) = \Delta tu[n] \cdot \delta(t - n\Delta t). \quad (38)$$

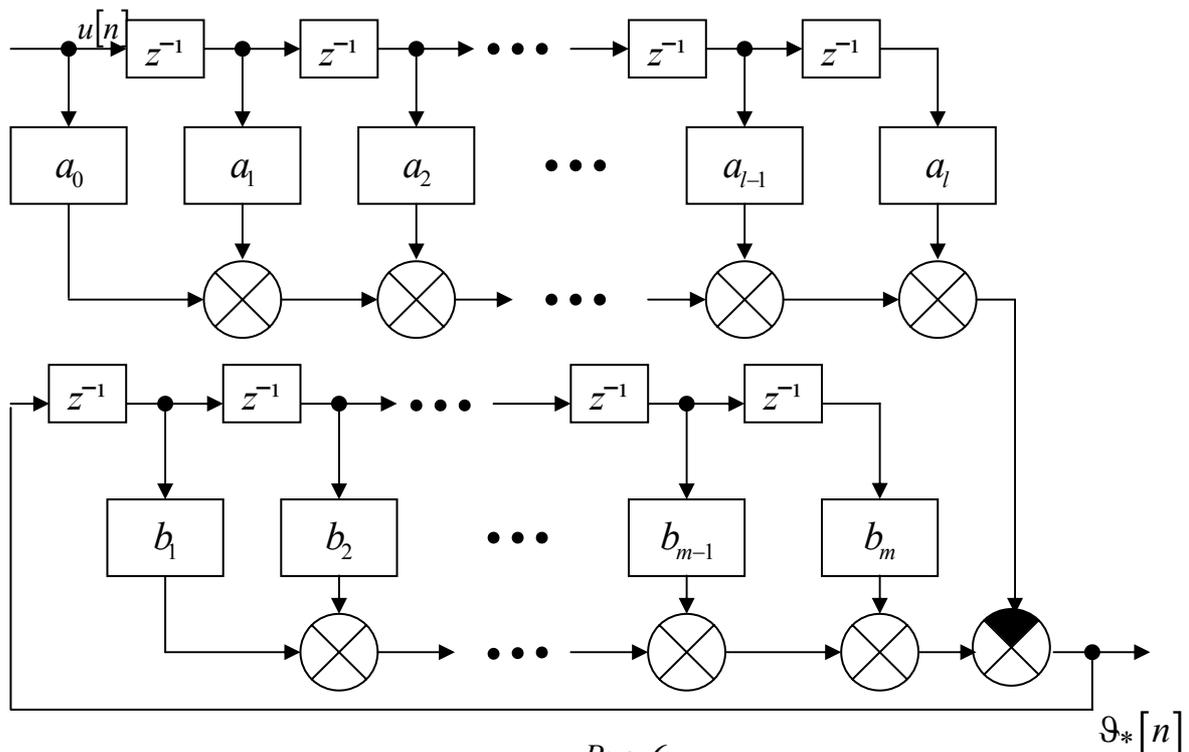


Рис. 6

Метод Цыпкина – Гольденберга основан на ступенчатой интерполяции входного сигнала с помощью интерполирующего фильтра с импульсной характеристикой вида

$$k_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0, & t < 0, t > \Delta t. \end{cases} \quad (39)$$

В основу метода Раггазини – Бергена положена линейная интерполяция входного сигнала с помощью интерполирующего фильтра с импульсной характеристикой вида

$$k_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta t}, & |t| \leq \Delta t, \\ 0, & |t| > \Delta t. \end{cases} \quad (40)$$

Дискретная передаточная функция $K_*(z)$ для трех этих методов находится непосредственно по соответствующим формулам табл. 12. При этом передаточная функция

$$K(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p)} = \frac{A_0 + A_1 p + \dots + A_l p^l}{B_0 + B_1 p + \dots + B_m p^m} \quad (41)$$

имеет в общем случае $(s+1)$ различных полюсов p_v , $v = \overline{0, s}$ (корни уравнения $K_2(p) = 0$) кратности r_v каждый, так что $r_0 + \dots + r_s = m$. Выражения для $K_{v\mu}(z)$ при $\mu = \overline{0, 5}$ приведены в табл. 13.

Метод, предложенный автором [1], основан на замене формулы свертки рекуррентным уравнением. Дискретная передаточная функция $K_*(z)$, аппроксимирующая непрерывную передаточную функцию, имеющую простые полюсы p_v , $v = \overline{0, m-1}$, зависит от k шагов вперед, то есть в точке $(n+k)$, и от алгоритма численного интегрирования. В работе получены выражения дискретной передаточной функции для случая $k=1$ и метода трапеций в виде

$$K_*(z) = \sum_{v=0}^{m-1} K_v(z) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{C_{v0} \Delta t}{2} \frac{1 + \rho_v z^{-1}}{1 - \rho_v z^{-1}}, \quad (42)$$

и для случая $k=2$ и метода 1/3 Симпсона

$$K_*(z) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{C_{v0} \Delta t}{3} \frac{1 + 4\rho_v z^{-1} + \rho_v^2 z^{-2}}{1 - \rho_v^2 z^{-2}}, \quad (43)$$

где $C_{v0} = [K(p)(p - p_v)] \Big|_{p=p_v}$, $\rho_v = e^{q_v}$, $q_v = p_v \Delta t$.

Таблица 12

Код метода	Метод	Дискретная передаточная функция эквивалентной импульсной системы $K_*(z)$	$C_{v\mu}$	r'_v
1	Z-преобразования	$\sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r'_v-1} \frac{C_{v\mu} \Delta t^{\mu+1}}{\mu!} K_{v\mu}(z)$	$\frac{1}{(r'_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r'_v - \mu - 1}}{dp^{r'_v - \mu - 1}} \left[K(p)(p - p_v)^{r'_v} \right] \Big _{p=p_v}$	r'_v $\sum_{v=0}^s r'_v = m$
2	Цыпкина – Гольденберга	$\sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r'_v-1} \frac{C_{v\mu} \Delta t^\mu}{\mu!} (1-z) K_{v\mu}(z)$	$\frac{1}{(r'_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r'_v - \mu - 1}}{dp^{r'_v - \mu - 1}} \left[\frac{1}{p} K(p)(p - p_v)^{r'_v} \right] \Big _{p=p_v}$	$\begin{cases} r'_v + 1, v = 0, \\ r'_v, v = \overline{1, s}. \end{cases}$ $\sum_{v=0}^s r'_v = m + 1$
3	Раггазини – Бергена	$\sum_{\mu=0}^s \sum_{\mu=0}^{r'_v-1} \frac{C_{v\mu} \Delta t^{\mu-1}}{\mu!} \frac{(1-z)^2}{z} K_{v\mu}$	$\frac{1}{(r'_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r'_v - \mu - 1}}{dp^{r'_v - \mu - 1}} \left[\frac{1}{p^2} K(p)(p - p_v)^{r'_v} \right] \Big _{p=p_v}$	$\begin{cases} r'_v + 2, v = 0, \\ r'_v, v = \overline{1, s}. \end{cases}$ $\sum_{v=0}^s r'_v = m + 2$

Указано, что легко можно продолжить отыскание дискретной передаточной функции $K_*(z)$, увеличивая значение k и используя более сложные и более точные алгоритмы численного интегрирования. Данный метод допускает обобщение на случай кратных полюсов. Тогда рассмотренный метод можно применять совместно с методом Z -преобразования, находя $K_v(z)$ по формулам (42) или (43), а $K_{v\mu}(z)$, $\mu = 1, 2, \dots$, – по табл. 13.

Таблица 13

μ	$K_{v\mu}(z)$
0	$1 / (1 - \rho_v z^{-1}), \rho_v = e^{q_v} = e^{p_v \Delta t}$
1	$\rho_v z^{-1} / (1 - \rho_v z^{-1})^2$
2	$\rho_v z^{-1} (1 + \rho_v z^{-1}) / (1 - \rho_v z^{-1})^3$
3	$\rho_v z^{-1} (1 + 4\rho_v z^{-1} + \rho_v^2 z^{-2}) / (1 - \rho_v z^{-1})^4$
4	$\rho_v z^{-1} (1 + 11\rho_v z^{-1} + 11\rho_v^2 z^{-2} + \rho_v^3 z^{-3}) / (1 - \rho_v z^{-1})^5$
5	$\rho_v z^{-1} (1 + 26\rho_v z^{-1} + 66\rho_v^2 z^{-2} + 26\rho_v^3 z^{-3} + \rho_v^4 z^{-4}) / (1 - \rho_v z^{-1})^6$

Таким образом, все описанные методы требуют отыскания полюсов передаточной функции $K(p)$, после чего дискретная передаточная функция $K_*(z)$ находится непосредственно по соответствующим формулам.

Преобразование ее к дробно-рациональному виду (36) осуществляется с помощью простых алгебраических операций: приведение суммы рациональных функций $K_{v\mu}(z)$ к общему знаменателю и приведение подобных членов.

Полюса передаточных функций систем невысокого порядка отыскиваются легко. При нахождении полюсов систем высокого порядка встречаются большие трудности. В этих случаях дискретную передаточную функцию $K_*(z)$ всей системы можно найти по дискретным передаточным функциям ее отдельных звеньев, полюсы которых легко определяются, пользуясь при этом обычными правилами получения передаточной функции системы для различного соединения ее звеньев.

В качестве элементарных звеньев системы удобно использовать интегрирующие звенья k -го порядка. Для этого передаточную функцию (41) путем деления числителя и знаменателя на $B_m p^m$ нужно привести к виду

$$K(p) = \frac{\frac{A_0}{B_m} \frac{1}{p^m} + \frac{A_1}{B_m} \frac{1}{p^{m-1}} + \dots + \frac{A_l}{B_m} \frac{1}{p^{m-l}}}{\frac{B_0}{B_m} \frac{1}{p^m} + \frac{B_1}{B_m} \frac{1}{p^{m-1}} + \dots + \frac{B_{m-1}}{B_m} \frac{1}{p} + 1}. \quad (44)$$

Это преобразование эквивалентно замене системы с передаточной функцией $K(p)$ системой с такой же передаточной функцией, но с другой структурой, включающей лишь интегрирующие звенья различного порядка с различными коэффициентами передачи, соединенные по схеме, которая показана на рис. 7. Звенья с передаточными функциями вида $1/p^k$ имеют только нулевые полюсы кратности $r_0 = k$. Дискретные передаточные функции этих звеньев можно легко найти методами Z -преобразования, Цыпкина – Гольденберга и Раггазини – Бергена по формулам табл. 10, положив $s = 0$, $r_0 = k$, $K(p) = 1/p^k$.

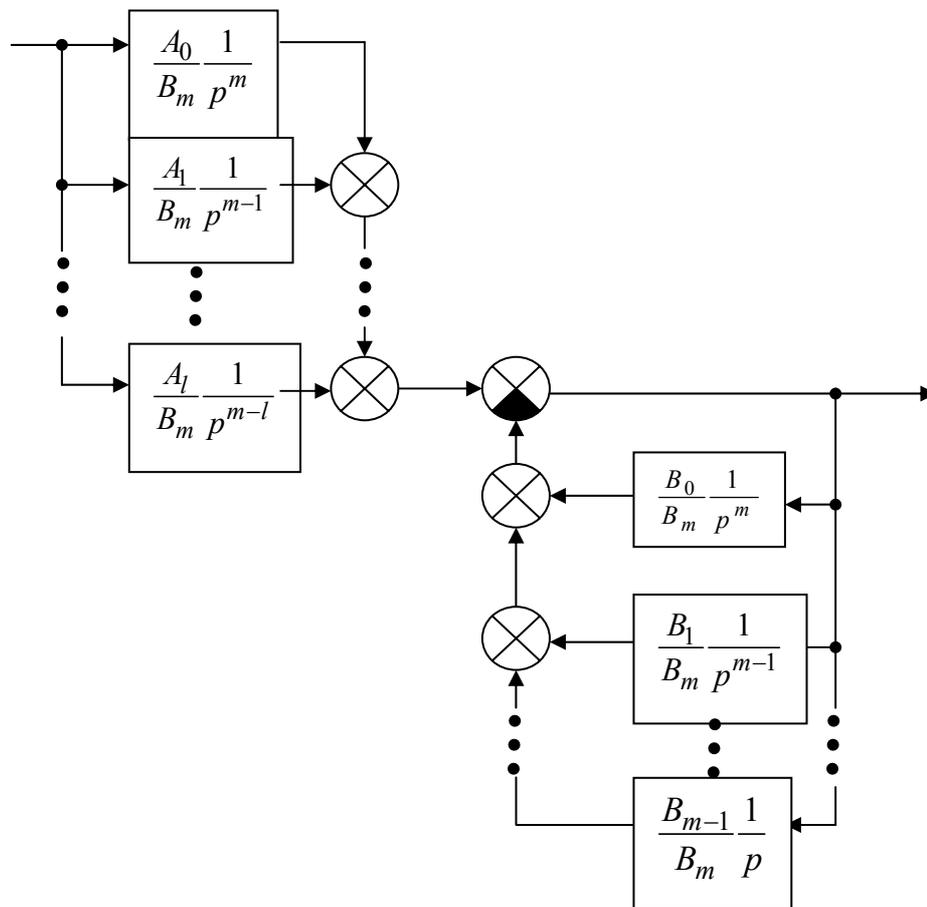


Рис. 7

Этим самым операторы непрерывного интегрирования заменяются операторами дискретного интегрирования. Операторы дискретного интегрирования, полученные различными методами для звеньев с передаточными функциями $1/(p \cdot \Delta t)^k = 1/q^k$, даны в табл. 14.

При таком расчленении системы на отдельные звенья не требуется знать полюсы передаточной функции.

Дискретные передаточные функции схемы (см. рис. 7) можно также найти методами дискретной аппроксимации Тастена, Мадведа – Траксела и Боксера – Талера. В своей основе они используют принцип замены операторов непрерывного интегрирования операторами дискретного интегрирования.

Метод Тастена – это один из методов дискретного представления операторов интегрирования. В конечном счете он соответствует повторному применению формулы трапеций для вычисления интеграла. Полагая, что интегрирующее звено k -го порядка можно представить как последовательное соединение из k интегрирующих звеньев первого порядка, получим следующую дискретную аппроксимацию интегрирующего звена k -го порядка:

$$K_*^{(k)}(z) = \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right]^k. \quad (45)$$

Метод Мадведа – Траксела сводится к замене непрерывной системы с передаточной функцией $1/p^k$ импульсной системой с интерполирующим фильтром, имеющим треугольную импульсную характеристику (линейная интерполяция входного сигнала). Поэтому дискретная аппроксимация операторов интегрирования в методе Мадведа – Траксела в точности совпадает с дискретной аппроксимацией этих операторов по методу Раггазини – Бергена.

Аппроксимация в методе Боксера – Талера производится, по существу, в частотной области, а не во временной, как это было в описанных выше методах дискретной аппроксимации. Приближенные выражения операторов $R_k(z)$ дискретного интегрирования для $1/q^k$ получаются путем возведения ряда

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3 - \frac{44}{945}x^5 - \dots \right) \quad (46)$$

в k -ю степень и отбрасывания в результирующем ряде членов с положи-

тельными степенями x , где $x = \frac{1 - e^{-q}}{1 + e^{-q}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.

Операторы дискретного интегрирования методов Тастена, Мадведа-Траксела и Боксера – Талера помещены в табл. 14.

Таблица 14

$K(p)$	$K_*(z)$ по методу				
	Z-преобразования	Цыпкина – Гольденберга	Рагазини – Бергена	Тастена	Боксера – Талера
$\frac{1}{p\Delta t}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$	$\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$	$\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$
$\frac{1}{p^2\Delta t^2}$	$\frac{z}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{1}{2}(1+z^{-1})z^{-1}/(1-z^{-1})^2$	$\frac{1}{6}(1+4z^{-1}+z^{-2})/(1-z^{-1})^2$	$\left[\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})\right]^2$	$\frac{1}{12}(1+10z^{-1}+z^{-2})1/(1-z^{-1})^2$
$\frac{1}{p^3\Delta t^3}$	$\frac{1}{2} \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{1}{6}(1+4z^{-1}+z^{-2})z^{-1}/(1-z^{-1})^3$	$\frac{1}{24}(1+11z^{-1}+11z^{-2}+z^{-3})/(1-z^{-1})^3$	$\left[\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})\right]^3$	$\frac{1}{2}(1-z^{-2})z^{-1}/(1-z^{-1})^3$
$\frac{1}{p^4\Delta t^4}$	$\frac{1}{6} \frac{z^{-1}(2+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$\frac{1}{24}(1+11z^{-1}+11z^{-2}+z^{-3})z^{-1}/(1-z^{-1})^4$	$\frac{1}{120}(1+26z^{-1}+66z^{-2}+26z^{-3}+z^{-4})/(1-z^{-1})^4$	$\left[\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})\right]^4$	$\frac{1}{6} \frac{z^{-1}(2+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4} - \frac{1}{720}$
$\frac{1}{p^5\Delta t^5}$	$\frac{1}{24} \frac{z^{-1}(1+11z^{-1}+11z^{-2}+z^{-3})}{(1-z^{-1})^5}$	$\frac{1}{120}(1+26z^{-1}+66z^{-2}+26z^{-3}+z^{-4}) \cdot z^{-1}/(1-z^{-1})^5$	$\frac{1}{720}(1+57z^{-1}+302z^{-2}+302z^{-3}+57z^{-4}+z^{-5})/(1-z^{-1})^5$	$\left[\frac{1}{2}(1+z^{-1})/(1-z^{-1})\right]^5$	$\frac{1}{24}(1+11z^{-1}+11z^{-2}+z^{-3})z^{-1}/(1-z^{-1})^5$

1.4. Сравнительная характеристика методов

Выбор метода моделирования преобразования сигналов и помех в непрерывных линейных динамических системах можно произвести на основе табл. 15. Как известно, критерием может служить объем вычислительных затрат, который определяет эффективность алгоритмов преобразования.

Методы дискретной аппроксимации являются универсальными в том смысле, что они могут быть применимы при произвольных входных сигналах и к любым системам с постоянными сосредоточенными параметрами. Рекуррентные алгоритмы при моделировании одной и той же системы получаются одинаковыми по сложности: порядок рекуррентного уравнения вида (37) совпадает с порядком моделируемой системы. Методы дискретизации дают лишь различные значения коэффициентов a_k и b_k в формуле (37), что влияет на точность аппроксимации при выбранном шаге дискретизации.

Таблица 15

№ п/п	Метод	Вычислительные затраты	Моделируемая система		
			Характеристика	Параметры	
1	Дискретной свертки	Значительные	Импульсная	Постоянные и переменные	
2	Частотный	Фурье	Значительные	Комплексный коэффициент передачи	Постоянные
		Кули и Таки	Более экономичный, чем метод дискретной свертки		
3	Разностные рекуррентные	Малые и весьма малые для систем высокого и невысокого порядков соответственно	Передаточная функция	Постоянные	

Изложенные методы различаются еще и по объему подготовительной работы. Выбор того или иного метода дискретной аппроксимации в конкретной задаче должен производиться с учетом табл. 16. Прочерк указывает на невозможность использования методов. В пределах каждой строки точность метода уменьшается при перемещении по столбцам слева направо. В пределах отдельного столбца точность увеличивается с увеличением количества знака “+”.

Для увеличения точности следует применять методы дискретной аппроксимации, позволяющие использовать информацию о полюсах передаточной функции. Если передаточная функция имеет высокий порядок и

нахождение ее полюсов связано с большими трудностями, то методы повышенной точности следует применять к отдельным звеньям системы, полюсы которых известны или легко находятся. Подготовительная работа при этом усложняется незначительно, ибо она, как уже отмечалось, сводится к расчету по готовым формулам.

Таблица 16

Код метода	Метод дискретной аппроксимации	Информация о полюсах передаточной функции	
		системы	элементарных звеньев (интегрирующих)
1	Z-преобразования	++	++
2	Цыпкина – Гельденберга	++	++
3	Автора [1]	++++	–
4	Раггазини – Бергена	+++	+++
5	Мадведа – Траксела	–	+++
6	Тастина	–	+
7	Боксера – Талера	–	++

В тех случаях, когда полюсы найти не удастся и в качестве элементарных звеньев системы приходится использовать интегрирующие звенья, методы дискретной аппроксимации повышенной точности теряют свои преимущества в точности, однако возможность применения их не исключается. В этом смысле они являются универсальными и более перспективными.

Для увеличения точности дискретной аппроксимации непрерывных передаточных функций в принципе возможно применение таких интерполирующих функций более высокого порядка, как линейная и квадратичная. Однако при этом заметно усложняются алгоритмы. Поэтому приемы дальнейшего увеличения точности дискретной аппроксимации часто не оправдывают себя. Практически бывает выгоднее несколько уменьшить шаг дискретизации, чем применять алгоритмы, основанные на высших интерполяционных формулах.

Заметим, что приведенная здесь сравнительная характеристика методов дискретной аппроксимации основана на качественной оценке их точности. Задача количественной оценки погрешности различных методов дискретной аппроксимации является довольно сложной.

2. Задания для домашней подготовки

1. Изучить цифровые модели непрерывных линейных динамических систем, основанные на дискретной свертке и использующие формулы чис-

ленного интегрирования и замену непрерывных систем эквивалентными импульсными системами.

2. Изучить методы моделирования непрерывных динамических систем, основанные на рекуррентных разностных уравнениях.

3. Ознакомиться с методикой выбора цифровых моделей непрерывных линейных динамических систем.

4. Составить схему алгоритма и программу цифровой модели линейной динамической системы с заданной передаточной функцией на основе указанного метода моделирования.

3. Порядок выполнения работы

1. Записать в ПЭВМ составленную программу и отладить ее.

2. Исследовать реакцию непрерывной линейной динамической системы на входное воздействие в виде единичного скачка. Получить результаты расчета по программе.

3. Оценить адекватность цифровой модели непрерывной динамической системы путем сравнения результатов, полученных на цифровой модели, с результатами, известными в литературе.

4. Содержание отчета

1. Математическое описание моделирующего алгоритма, значение коэффициентов a_k , b_k и h_k , структурная схема дискретного фильтра по варианту задания (табл. 17).

2. Схема алгоритма и программа цифровой модели непрерывной линейной динамической системы.

3. Результаты расчета реакции дискретного фильтра на входное воздействие в виде единичного скачка.

4. Графики реакций дискретного и непрерывного фильтров, сравнительная оценка реакций.

5. Контрольные вопросы

1. Формулы численного интегрирования в цифровых моделях непрерывных линейных динамических систем, основанных на дискретной свертке.

2. Дискретизация по методу замены непрерывных систем эквивалентными импульсными системами.

3. Подготовительная работа к моделированию при использовании алгоритмов дискретной свертки.
4. Структурные схемы цифровых моделей непрерывных линейных динамических систем на основе дискретной свертки и рекуррентных разностных уравнений.
5. Вычислительные затраты метода дискретной свертки.
6. Процесс моделирования линейных непрерывных динамических систем с помощью рекуррентных разностных уравнений.
7. Сущность методов Z-преобразования, Цыпкина – Гольденберга, Раггазини – Бергена и Быкова.
8. Синтез непрерывной линейной динамической системы в случае появления больших трудностей при нахождении полюсов передаточных функций.
9. Суть методов Тастена, Мадведа – Траксела и Боксера – Талера.
10. Сравнительная характеристика методов дискретной свертки, частотного и рекуррентных разностных методов.
11. Качественная оценка метода дискретной аппроксимации по точности моделирования.

Таблица 17

Метод	Передаточные функции $K(p)$	$\frac{A_0}{B_0 + B_1 p}$	$\frac{A_0}{B_0 + B_1 p + B_2 p^2}$		$\frac{A_0 + A_1 p}{B_0 + B_1 p + B_2 p^2}$	
			Вещественные различные полюсы	Комплексно-сопряженные полюсы	Вещественные различные полюсы	Комплексно-сопряженные полюсы
Дискретная свертка с численным интегрированием		1	10	19	28	37
Дискретная свертка с импульсной системой		2	11	20	29	38
Z-преобразования		3	12	21	30	39
Цыпкина – Гольденберга		4	13	22	31	40
Быкова		5	14	23	32	41
Раггазини – Бергана		6	15	24	33	42
Мадведа – Траксела		7	16	25	34	43
Тастена		8	17	26	35	44
Боксера – Талера		9	18	27	36	45

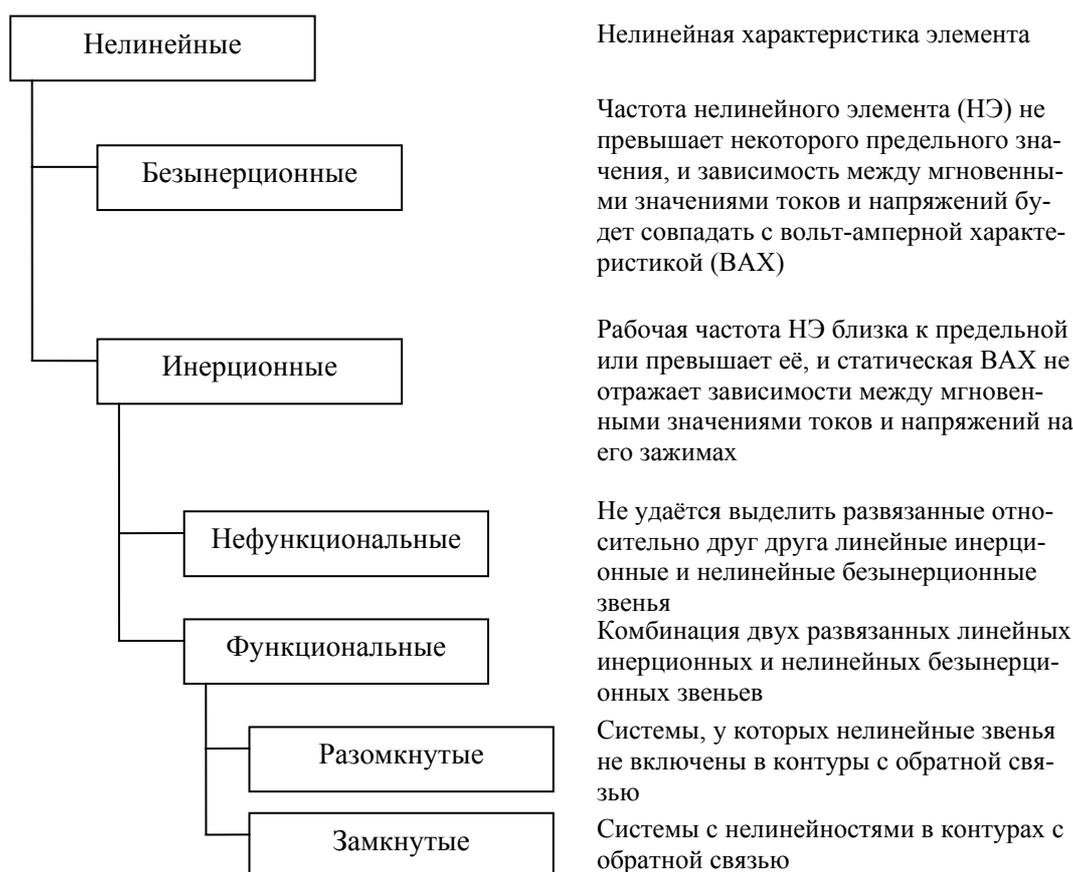
МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УЗЛОВ РАДИОУСТРОЙСТВ

Цель работы: изучение методов моделирования безынерционных нелинейных узлов, инерционных нелинейных функциональных узлов и инерционных нелинейных нефункциональных узлов.

1. Моделирование нелинейных систем

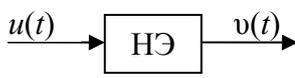
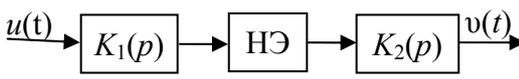
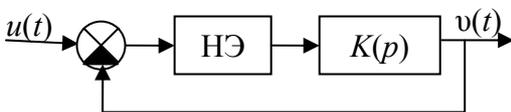
1.1. Классификация

При рассмотрении способов цифрового моделирования целесообразна следующая классификация нелинейных систем:



В табл. 18 приведены примеры функциональных нелинейных систем 1, 2 и 3-го классов, где НЭ – нелинейный безынерционный элемент; $K_1(p)$, $K_2(p)$, $K(p)$ – передаточные функции линейных динамических звеньев.

Таблица 18

Класс	Тип нелинейной системы	Пример	Структурная схема
1	Безынерционные	Детектор огибающей	
2	Разомкнутые	Типовое радиотехническое звено «радиоусилитель – детектор – видеофильтр»	
3	Замкнутые	Следящая система радиоустройств. Характеристика НЭ описывает дискриминационную кривую	

Нелинейные нефункциональные системы (класс 4) могут быть заданы различными способами в виде:

- принципиальной схемы (например схемы амплитудного и частотного детекторов, у которых существенно влияние реактивной нагрузки на нелинейные элементы – диоды);

- нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе (например аэродинамические дифференциальные уравнения движения летательного аппарата).

Приведенная классификация нелинейных узлов условна. Один и тот же узел можно отнести к тому или другому классу в зависимости от сущности решаемой задачи: характера её постановки, целей решения, точности воспроизведения процессов в системе, наличия априорных сведений о характеристиках системы и т.п. Так, например, амплитудный детектор является:

- нелинейной нефункциональной системой, когда емкостной фильтр не имеет развязки с нелинейным элементом;

- нелинейной функциональной разомкнутой системой при определенном выборе параметров;

- нелинейным безынерционным элементом по характеру преобразования огибающей входного колебания.

С учётом требований задачи желательно применять преобразования нелинейных систем в более простые цифровые модели.

1.2. Моделирование безынерционных нелинейных узлов

Моделирование нелинейных безынерционных узлов производится преобразованием входного сигнала $u(t)$ в выходной $v(t)$

$$v[n] = f[u[n]] \quad (47)$$

в соответствии с характеристикой нелинейности $y = f(x)$.

Преобразование осуществляется путём вычисления по формуле, если характеристика задана аналитическим выражением (полиномом). Преобразование производится путём выборки из таблиц с использованием интерполяции, если характеристика задана таблицей или графически.

1.3. Моделирование инерционных нелинейных разомкнутых функциональных систем

Цифровое моделирование инерционных нелинейных функциональных разомкнутых узлов осуществляется путём построения цифровой модели узла в результате замены аналоговых фильтров с передаточными функциями $K_1(p)$ и $K_2(p)$ цифровыми фильтрами с передаточными функциями $K_{*1}(z)$ и $K_{*2}(z)$. Дискретные функции, соответствующие непрерывным сигналам в различных точках системы, вычисляются последовательно путём применения алгоритмов моделирования к отдельным линейным динамическим звеньям и нелинейным безынерционным звеньям.

Рассмотрим пример моделирования системы класса 2. Положим, что динамические звенья $K_1(p)$ и $K_2(p)$ являются линейными звеньями с постоянными сосредоточенными параметрами первого и второго порядка соответственно. Характеристика нелинейного элемента является экспоненциального вида $y = e^{ax}$.

Для построения цифровой модели (рис. 8) системы заменим непрерывные фильтры $K_1(p)$ и $K_2(p)$ соответствующими дискретными фильтрами, используя методы дискретной аппроксимации. Передаточные функции $K_{*1}(z)$ и $K_{*2}(z)$ имеют вид

$$K_{*1}(z) = \frac{a_0' + a_1' z^{-1}}{1 + b_1' z^{-1}}, \quad K_{*2}(z) = \frac{a_0'' + a_1'' z^{-1} + a_2'' z^{-2}}{1 + b_1'' z^{-1} + b_2'' z^{-2}}, \quad (48)$$

где постоянные коэффициенты перед z^{-k} определяются параметрами непрерывных фильтров, шагом дискретизации и методом дискретной аппроксимации.

Переходя от передаточных функций $K_{*1}(z)$ и $K_{*2}(z)$ к рекуррентным уравнениям, получим следующую последовательность операций преобразования сигнала $u[n]$ в сигнал $v[n]$ по тракту эквивалентной дискретной нелинейной системы

$$\begin{aligned} u_1[n] &= a_0 'u[n] + a_1 'u[n-1] - b_1 'u_1[n-1], \\ u_2[n] &= e^{\alpha u_1[n]}, \\ v_*[n] &= a_0 ''u_2[n] + a_1 ''u_2[n-1] + a_2 ''u_2[n-2] - b_1 ''v_*[n-1] - b_2 ''v_*[n-2]. \end{aligned} \quad (49)$$

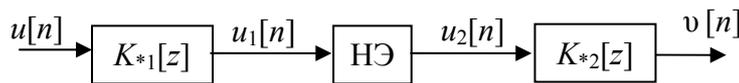
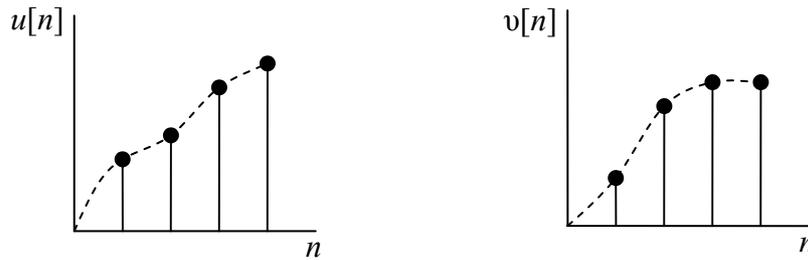


Рис. 8

1.4. Моделирование инерционных нелинейных замкнутых функциональных узлов

Цифровое моделирование замкнутых функциональных нелинейных узлов осуществляется несколько сложнее. Рассмотрим пример моделирования системы класса 3, у которой НЭ стоит в прямой цепи петли обратной связи. Пусть линейный фильтр с передаточной функцией $K(p)$ является системой второго порядка с постоянными коэффициентами. Ему соответствует рекурсивный фильтр с передаточной функцией

$$K_*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}. \quad (50)$$

Тогда преобразование сигнала $u[n]$ в эквивалентной дискретной нелинейной системе (рис. 9)

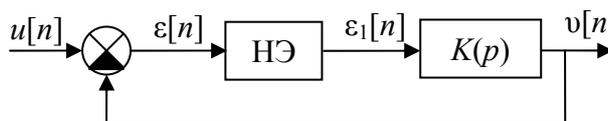


Рис. 9

будут описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon[n] &= u[n] - v_*[n], \\ \varepsilon_1[n] &= f(\varepsilon[n]) = f(u[n] - v_*[n]), \\ v_*[n] &= a_0\varepsilon_1[n] + a_1\varepsilon_1[n-1] + a_2\varepsilon_1[n-2] - b_1v_*[n-1] - b_2v_*[n-2] = \\ &= a_0f(u[n] - v_*[n]) + a_1\varepsilon_1[n-1] + a_2\varepsilon_1[n-2] - b_1v_*[n-1] - b_2v_*[n-2].\end{aligned}\quad (51)$$

Все величины в последнем уравнении, кроме $v_*[n]$, известны. Для нахождения значения $v_*[n]$ требуется решить относительно $v_*[n]$ нелинейное уравнение

$$v_*[n] = a_0f(u[n] - v_*[n]) + C_n, \quad (52)$$

где $C_n = a_1\varepsilon_1[n-1] + a_2\varepsilon_1[n-2] - b_1v_*[n-1] - b_2v_*[n-2]$.

Наиболее общим методом решения является метод итераций. Для простых нелинейностей, например $f(x) = x^2$, решение этого уравнения иногда удаётся записать в виде формулы

$$v_*[n] = a_0(u^2[n] - 2u[n]v_*[n] + v_*^2[n]) + C_n \quad (53)$$

или $A v_*^2[n] - B_n v_*[n] + C_n = 0$,

где $A = a_0$, $B_n = 1 + 2u[n]$, $C_n = a_0u^2[n] + C_n$.

Отсюда

$$v_*[n] = \frac{B_n \pm \sqrt{B_n^2 - 4AC_n}}{2A}. \quad (54)$$

Необходимость решения нелинейных уравнений на каждом шаге моделирования усложняет цифровые модели замкнутых нелинейных систем по сравнению с цифровыми моделями разомкнутых нелинейных систем. Возникшее затруднение устраняется введением в цепь обратной связи элемента задержки на один шаг дискретизации (рис. 10), что соответствует введению в модель блока z^{-1} .

В этом случае уравнение (52) принимает вид

$$v_*[n] = a_0f(u[n] - v_*[n-1]) + C_n. \quad (55)$$

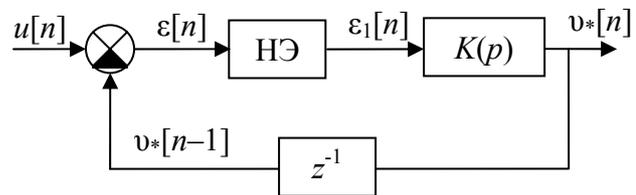


Рис. 10

Вычисление текущего значения сигнала на выходе устройства сводится к нелинейному преобразованию известных ($u[n]$, $u[n-1]$, $u[n-2]$) и ранее вычисленных ($v_*[n-1]$, $v_*[n-2]$) величин.

Следует отметить, что введение в цифровую модель элемента задержки приводит к появлению дополнительной погрешности. При уменьшении шага Δt дискретизации дополнительная погрешность уменьшается, но увеличиваются временные затраты при моделировании.

В связи с большим разнообразием нелинейных систем в настоящее время не определены единые рекомендации для выбора шага дискретизации, при котором можно пренебречь влиянием элемента задержки на величину погрешности. Опыт показал, что при моделировании замкнутых нелинейных систем ориентировочно шаг дискретизации выбирается исходя из условия $\Delta t \leq T_3 / 10$, где T_3 – постоянная времени замкнутой следящей системы.

1.5. Моделирование инерционных нелинейных нефункциональных систем

Моделирование на ЭВМ инерционных нелинейных нефункциональных систем осуществляется с помощью стандартных алгоритмов численного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, таких как методы Рунге – Кутты, Адамса и др. Метод Рунге – Кутта является одним из наиболее известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Рассмотрим метод Рунге – Кутта четвертого порядка.

Пусть задана система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (56)$$

где $x(t)$ – N -мерный вектор (вектор-функция).

Значения неизвестной вектор-функции $x(t)$ в дискретных точках $t_n = n\Delta t$ по методу Рунге – Кутта вычисляются рекуррентно:

$$x[n] = x[n-1] + \frac{1}{6}(\alpha_1[n-1] + 2\alpha_2[n-2] + 2\alpha_3[n-1] + \alpha_4[n-1]), \quad (57)$$

где $x[n] = x(n\Delta t)$, $\alpha_1[n] = \Delta t f(n\Delta t, x[n])$,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2[n] &= \Delta t f\left(n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}, x[n] + \alpha_1[n]/2\right), \\ \alpha_3[n] &= \Delta t f\left(n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}, x[n] + \alpha_2[n]/2\right), \\ \alpha_4[n] &= \Delta t f(n\Delta t + \Delta t, x[n] + \alpha_3[n]). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Если нелинейная динамическая система описывается одним или несколькими дифференциальными уравнениями порядка выше первого, то для использования алгоритма (58) требуется свести уравнения высших порядков к системе (57) уравнений первого порядка. Такое преобразование, как известно, всегда возможно и осуществляется достаточно просто.

Моделирование амплитудного детектора на основании (57) целесообразно в том случае, когда необходимо учесть инерционные свойства нелинейного элемента – диода. В этом случае связь тока и напряжения в диоде описывалась бы нелинейным дифференциальным уравнением. Тогда выделение отдельно безынерционного нелинейного и инерционного линейного узлов оказывается невозможным, и амплитудный детектор моделируется как инерционный нелинейный нефункциональный узел.

Дискретная аппроксимация по методу Рунге – Кутты применима, конечно, и для систем 2-го и 3-го классов, а также для линейных систем. Однако этот метод, как и другие стандартные методы численного интегрирования, при той же точности по объёму вычислений обычно менее эффективен, чем рассмотренные выше методы цифрового моделирования. К тому же стандартные методы не обладают физической наглядностью, свойственной методам дискретной аппроксимации по принципу замены непрерывных систем дискретными системами.

Рассмотрим этап составления дифференциального уравнения при использовании стандартных алгоритмов численного интегрирования на примере амплитудного детектора, принципиальная схема которого приведена на рис. 11. Если при моделировании детектора учитывается реакция нагрузки на нелинейный элемент (диод), то следует моделировать детектор как нелинейный замкнутый узел 3-го класса.

Составим дифференциальное уравнение, связывающее входное $u_{\text{вх}}(t)$ и выходное $u_{\text{вых}}(t)$ напряжения детектора (см. рис. 11).

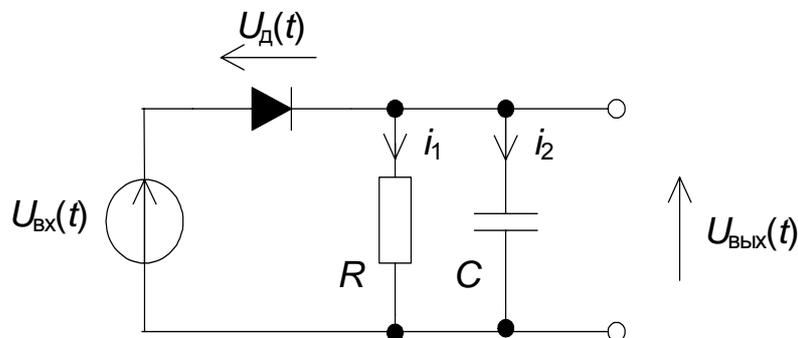


Рис. 11

Положим, что диод является безынерционным устройством. Тогда зависимость тока диода i_d от напряжения u_d описывается статической вольт-амперной характеристикой

$$i_d = f(u_d), \quad (59)$$

являющейся нелинейной функцией.

Напряжение

$$u_d(t) = u_{вх}(t) - u_{ввых}(t). \quad (60)$$

Ток через диод равен сумме токов активной и емкостной ветвей нагрузки

$$i_d(t) = i_1(t) + i_2(t), \quad (61)$$

которые определяются как

$$i_1(t) = \frac{u_{ввых}(t)}{R}; \quad i_2(t) = C \frac{du_{ввых}(t)}{dt}. \quad (62)$$

Подставляя (62) в (61), а затем (61) и (60) в (59), получим:

$$C \frac{du_{ввых}(t)}{dt} + \frac{u_{ввых}(t)}{RC} = \frac{f(u_{вх} - u_{ввых})}{C}. \quad (63)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение при цифровом моделировании может быть решено стандартными методами, но при сделанных допущениях о безынерционности нелинейного элемента – диода – это нецелесообразно, так как детектор в этом случае является замкнутым нелинейным функциональным узлом.

1.6. Физическая модель выпрямляющего диода

Обозначение *p-n* выпрямляющего диода приведено на рис. 12, а; на рис. 12, б приведена широко используемая глобальная модель по переменному току такого диода. В этой модели имеются пять элементов:

– R_B – объёмное сопротивление полупроводника и контакта (обычно $0 < R_B < 100$ Ом);

– R_C – омическое сопротивление утечки перехода (обычно $R_C > 1$ МОм);

– R_d – нелинейное сопротивление, соответствующее *p-n* переходу; характеристика $V_d(I_d)$ описывается следующим выражением:

$$I_d = I_s \left[\exp\left(\frac{qV_d}{MkT}\right) - 1 \right], \quad (64)$$

где I_s – ток насыщения диода (обычно $10^{-12} < I_s < 10^{-6}$ мА для кремниевых диодов и $10^{-8} < I_s < 10^{-2}$ мА для германиевых диодов); q – заряд электрона, равный $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; k – постоянная Больцмана, равна $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – абсолютная температура, К; M – постоянная эмиссии [эмпирический поправочный коэффициент, позволяющий учесть, что реальное динамическое сопротивление и напряжение на переходе больше идеальных значений, получаемых в соответствии с членом qV_d/kT (обычно $1,0 < M < 2,5$)];

– C_t – нелинейная барьерная емкость перехода; C_t определяемая выражением

$$C_t = \frac{D}{(V_z - V_d)^n}; \quad V_d < V_z, \quad (65)$$

где D – коэффициент пропорциональности (обычно $0,5 \cdot 10^{-12} < D < 5 \cdot 10^{-12}$); V_z – контактная разность потенциалов (обычно $0,2 < V_z < 0,9$ В); n – коэффициент качества перехода (обычно $0 < n < 1$);

– C_d – нелинейная диффузионная емкость перехода. Значение C_d зависит от тока перехода I_d в соответствии с выражением

$$C_d = \frac{q}{2\pi M k T f} (I_d + I_s), \quad (66)$$

где I_s , q , k , T и M определены ранее; f означает присущую диоду граничную частоту (в зависимости от процесса производства граничная частота f может изменяться от нескольких мегагерц до нескольких сотен гигагерц).

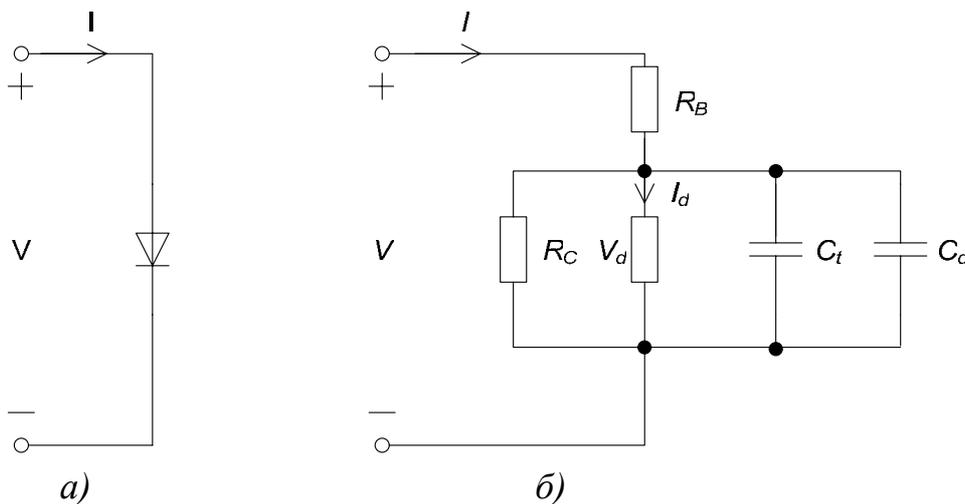


Рис. 12

Заметим, что для модели диода, показанной на рис. 12, б, должны быть заданы десять физических параметров. Эти параметры определяются

путём выполнения серии измерений на данном приборе. Заметим также, что показанная на рис. 12, б модель является глобальной моделью по переменному току. Для того чтобы получить статическую глобальную модель, необходимо лишь исключить два конденсатора, а три резистора могут быть представлены одним нелинейным сопротивлением, характеристика $v(i)$ которого согласована с измеренной характеристикой реального диода на низких частотах.

Модель диода, изображённая на рис. 12, б, не может точно имитировать времена «нарастания» и «спада» при ступенчатом входном сигнале.

2. Задания для домашней подготовки

1. Ознакомиться с классификацией нелинейных систем.
2. Изучить цифровые модели нелинейных систем.
3. Ознакомиться с методикой выбора цифровых моделей в зависимости от характера постановки задачи моделирования, целей решения, точности воспроизведения процессов в системе, априорных сведений о характеристиках системы и т.п.
4. Составить схему алгоритма и программу цифровой модели нелинейной системы.
5. Определить тип воздействия, вид модуляции и параметры входного воздействия, а также параметры линейных фильтров.
6. Определить задачи экспериментальных исследований моделей нелинейных систем.

3. Порядок выполнения работы

1. Записать в ПЭВМ составленную программу и отладить её.
2. Оценить адекватность цифровой модели нелинейной системы путём сравнения с результатами моделирования, известными в литературе.
3. Исследовать реакцию нелинейной системы на выбранное входное воздействие. Оценить влияние параметров нелинейной системы на её качественные показатели. Получить результаты расчёта по программе.
4. Определить параметры нелинейной системы, при которых наблюдаются характерные искажения выходного сигнала.

4. Содержание отчёта

1. Структурная или принципиальная схема нелинейной системы, математическое описание цифровой модели системы по варианту задания.

Варианты заданий приведены в табл. 19, расшифровка кодировки вариантов заданий – в табл. 20.

2. Схема алгоритма и программа цифровой модели нелинейной системы.
3. Оценки адекватности цифровой модели нелинейной системы.
4. Результаты расчёта отклика нелинейной системы на выбранное входное воздействие.
5. Временные диаграммы отклика нелинейной системы при различных параметрах входного воздействия и нелинейной системы (нелинейного элемента линейных фильтров).

Таблица 19

Номер варианта	Код задания по табл. 20	Номер варианта	Код задания по табл. 20
1	1 1	15	2 3 2 2
2	1 2	16	3 1 1
3	1 3	17	3 1 2
4	2 1 1 1	18	3 2 1
5	2 1 1 2	19	3 2 2
6	2 1 2 1	20	3 3 1
7	2 1 2 2	21	3 3 2
8	2 2 1 1	22	4 1 -- 1
9	2 2 1 2	23	4 1 -- 2
10	2 2 2 1	24	4 2 -- 1
11	2 2 2 2	25	4 2 -- 2
12	2 3 1 1	26	4 3 -- 1
13	2 3 1 2	27	4 3 -- 2
14	2 3 2 1		

Таблица 20

Код	Номер символа				
	1	2	3	4	5
	Тип нелинейной системы	Характеристика нелинейного элемента	Линейный фильтр с передаточной функцией		Схема детектора
$K(p)$ или $K_1(p)$			$K_2(p)$		
1	Безынерционные	Линейная	Звено первого порядка	Звено первого порядка	Амплитудный
2	Разомкнутые	Квадратичная	Звено второго порядка	Звено второго порядка	Частотный
3	Замкнутые	Экспоненциальная	–	–	–
4	Нефункциональные	–	–	–	–

5. Контрольные вопросы

1. Краткая характеристика понятий: нелинейная, безынерционная, инерционная, нефункциональная, функциональная, разомкнутая, замкнутая система.
2. Структурные или принципиальные схемы безынерционной, инерционной функциональной разомкнутой и замкнутой, инерционной нефункциональной нелинейных систем.
3. Моделирование безынерционных нелинейных узлов.
4. Преобразование сигнала по тракту дискретной модели инерционной нелинейной разомкнутой функциональной системы.
5. Составление нелинейного уравнения для цифровой модели инерционной нелинейной замкнутой функциональной системы.
6. Методы решения нелинейных уравнений.
7. Цифровая модель замкнутой нелинейной системы с элементом задержки в цепи обратной связи.
8. Метод Рунге – Кутты – один из стандартных алгоритмов численного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений.
9. Пример модели инерционной нелинейной нефункциональной системы.
10. Глобальная модель по переменному току выпрямляющего диода.
11. Определить условия, при которых амплитудный детектор можно отнести к одному из классов нелинейных систем.
12. Упрощение моделей нелинейных систем в зависимости от необходимой точности воспроизведения процессов, характера постановки задачи, целей решения, априорных сведений о системе и т.д.

Библиографический список

1. *Быков, В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Совет. радио, 1971. – 328 с.
2. *Бакалов, В. П.* Цифровое моделирование случайных процессов / В. П. Бакалов. – М. : САЙНС-ПРЕСС, 2002. – 88 с.
3. *Шахтарин, Б. И.* Случайные процессы в радиотехнике / Б. И. Шахтарин. – М. : Радио и связь, 2000. – 584 с.
4. *Евсиков, Ю. А.* Прикладные математические методы анализа в радиотехнике : учеб. пособие для радиотехнич. спец. вузов / Ю. А. Евсиков [и др.] ; под ред. Г. В. Обрезкова. – М. : Высш. шк., 1985. – 343 с.
5. *Полляк, Ю. Г.* Статистическое машинное моделирование средств связи / Ю. Г. Полляк, В. А. Филимонов. – М. : Радио и связь, 1988. – 175 с.
6. *Борисов, Ю. П.* Математическое моделирование радиосистем : учеб. пособие для вузов / Ю. П. Борисов. – М. : Сов. радио, 1976. – 269 с.
7. *Борисов, Ю. П.* Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств / Ю. П. Борисов, В. В. Цветнов. – М. : Радио и связь, 1985. – 176 с.
8. *Гоноровский, И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
9. *Полляк, Ю. Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах / Ю. Г. Полляк. – М. : Совет. радио, 1971. – 400 с.
10. *Леонов, А. И.* Моделирование в радиолокации / А. И. Леонов [и др.] ; под ред. А. И. Леонова. – М. : Совет. радио, 1979. – 264 с.
11. *Бескид, П. П.* Моделирование и испытания радиооборудования / П. П. Бескид [и др.] ; под ред. В. И. Виноградова. – Л. : Судостроение, 1981. – 304 с.
12. *Гридина, Е. Г.* Цифровое моделирование систем стационарных случайных процессов / Е. Г. Гридина [и др.]. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 144 с.
13. *Смирнов, Н. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – М. : Наука, 1965. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа № 1. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ НА ЭВМ.....	3
Лабораторная работа № 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	16
Лабораторная работа № 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	30
Лабораторная работа № 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УЗЛОВ РАДИОУСТРОЙСТВ	51
Библиографический список.....	63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Математическое моделирование»

Составители

ЕГОРОВ Валерий Александрович
ЕФИМОВ Владислав Алексеевич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор О.Р. Никитин

Редактор Р.С. Кузина
Технический редактор Н.В. Тупицына
Корректор В.В. Гурова
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

Подписано в печать 26.09.06.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,84. Тираж 100 экз.

Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.