

ИННОВАЦИОННАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА



Проект 4: развитие инфраструктуры и систем жизнеобеспечения

Цель: обеспечение профессиональных компетенций выпускников университета в области строительства, реставрации и экспертизы памятников архитектуры, жилищно-коммунального хозяйства и ресурсо-энергосберегающих технологий функционирования безопасной и комфортной среды жизнедеятельности.

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

И.И. ШИШОВ

НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ В КОНСТРУКЦИЯХ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Учебное пособие

Владимир 2008

УДК 624.012.45

ББК 38.539

Ш55

Рецензенты:

Академик РААСН, доктор технических наук, профессор
Южно-Уральского государственного университета

В. И. Соломин

Кандидат технических наук, профессор,
зав. кафедрой железобетонных конструкций
Московского государственного строительного университета

Н. Г. Головин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Шишов, И. И.

Ш 55 Неупругие деформации в конструкциях из железобетона :
учеб. пособие / И. И. Шишов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во
Владим. гос. ун-та, 2008. – 88 с.
ISBN 978-5-89368-894-8

Рассмотрено влияние неупругих деформаций бетона и арматуры на деформативность балок и плит и распределение внутренних усилий в их сечениях. Уделяется внимание диаграмме сжатия и растяжения бетона и критериям прочности бетона при сложных напряженных состояниях. Описывается формирование физических уравнений для изгибаемой железобетонной плиты и алгоритм ее расчета.

Предназначено обучающимся по магистерской программе 550101 – теория и проектирование зданий и сооружений в помощь при изучении теории и выполнении научных исследований, а также для студентов специальности 270102 – промышленное и гражданское строительство всех форм обучения.

Ил. 25. Табл. 2. Библиогр.: 32 назв.

УДК 624.012.45

ББК 38.539

ISBN 978-5-89368-894-8

© Владимирский государственный
университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ	6
1.1. Центральное растяжение или сжатие	6
1.2. Деформирование железобетонного элемента при изгибе или внецентренном действии продольной силы	7
1.3. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной нейтрального слоя.....	9
1.4. Перераспределение усилий в балках.....	10
1.5. Перераспределение моментов в ригелях многоэтажных рам	12
1.5.1. Определение моментов в сечениях ригеля в предположении упругой работы	13
1.5.2. Перераспределение моментов в ригеле	16
1.6. Перераспределение в фундаментах.....	19
1.7. Контрольные вопросы	20
Глава 2. ДЕФОРМАТИВНОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ БЕТОНА	20
2.1. Структура бетона	20
2.2. Действительные и сглаженные напряжения в бетоне	21
2.3. Трещины в бетоне.....	22
2.4. Механизмы разрушения бетона	22
2.5. Влияние внутренних трещин на диаграмму деформирования	23
2.6. Дилатация бетона.....	25
2.7. О напряженном состоянии в точке	26
2.8. Октаэдрические напряжения	27
2.9. Критерии прочности бетона	30
2.10. Современные направления развития критериев прочности	32
2.11. Общий критерий прочности бетона и способ его построения	34
2.12. Использование критерия прочности.....	38
2.13. Трещинообразование и разрушение	39
2.14. Диаграммы сжатия и растяжения бетона.....	40
2.15. Поперечные деформации бетона	44
2.16. Исходные физические соотношения	45
2.17. Контрольные вопросы.....	45

Глава 3. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИЗГИБАЕМОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ.....	46
3.1. Деформирование бетона	46
3.2. Деформирование железобетона с трещинами	52
3.2.1. Исходные предпосылки.....	52
3.2.2. Угловые деформации и компоненты поворота.....	54
3.2.3. Относительные деформации элемента	55
3.2.4. Связь напряжений в арматуре с общими деформациями элемента.....	55
3.2.5. Приведенные напряжения арматуры	57
3.2.6. Напряжения в бетоне	58
3.2.7. Общие физические соотношения	59
3.2.8. Ортотропное армирование	60
3.3. Деформирование железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии	64
3.3.1. Деформирование при одной трещине.....	64
3.3.2. Деформирование при двух трещинах	70
3.4. Решение задачи для плиты	75
3.4.1. Определение жесткостей.....	75
3.4.2. Слой чистого бетона без трещин.....	79
3.4.3. Слой чистого бетона с трещинами.....	80
3.4.4. Армированный слой без трещин	81
3.4.5. Армированный слой с трещинами	83
3.5. Контрольные вопросы.....	83
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	 84
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	85

ВВЕДЕНИЕ

В конструкциях из железобетона при их деформировании возникают не только упругие деформации, пропорционально которым возрастают внутренние силы, но и неупругие, которые приращением внутренних сил не сопровождаются. При увеличении нагрузки неупругие деформации быстро возрастают, благодаря чему в статически определимых конструкциях, где внутренние усилия всегда пропорциональны внешней нагрузке, ускоренно растут деформации. В статически неопределимых системах ускоренный рост деформаций в одних (наиболее напряженных) связях вызывает ускорение деформирования других. Получается перераспределение внутренних сил: рост усилий в одних связях (наиболее напряженных) замедляется, в других ускоряется. Если этого не учитывать, то расчетные усилия окажутся в одних местах завышенными, в других заниженными; распределение арматуры будет нерациональным. Кроме того, правильное определение деформаций необходимо для выполнения расчетов по второй группе предельных состояний.

Глава 1. ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ

1.1. Центральное растяжение или сжатие

При центральном растяжении или сжатии стержня все продольные волокна испытывают одни и те же деформации, которые можно разделить на упругие и неупругие (пластические).

Упругие деформации при приложении внешних сил возникают сразу, а при их устранении исчезают также сразу и бесследно. Они сопровождаются возникновением внутренних сил, препятствующих деформированию, интенсивность которых принято называть напряжением. Напряжение пропорционально упругой деформации и связано с ней законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где σ – нормальное напряжение, ε – относительное удлинение, E – модуль упругости материала (модуль Юнга).

На рис. 1.1 представлены диаграммы деформирования стали и бетона.

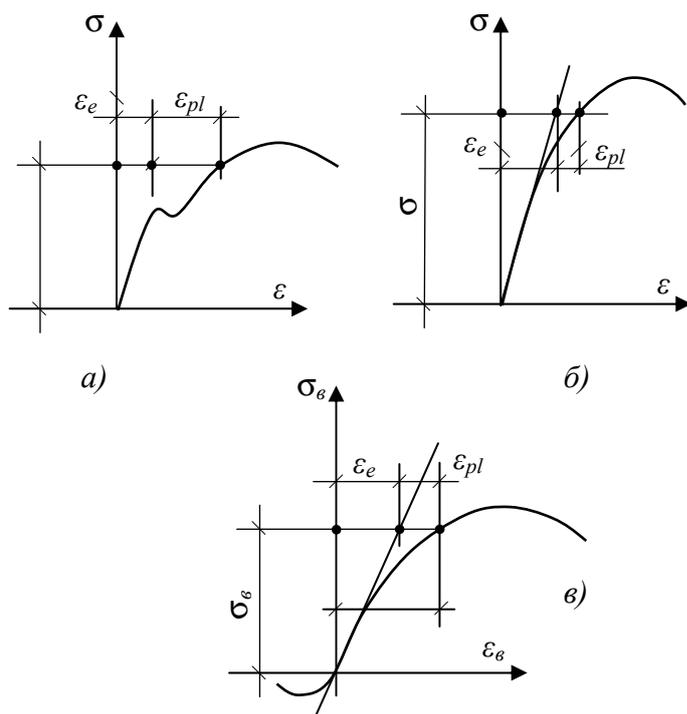


Рис. 1.1. Диаграммы деформирования: а – малоуглеродистой стали; б – высокоуглеродистой стали, в – бетона; ε_e – упругие деформации, ε_{pl} – пластические, ε_b – полные деформации бетона

В металле и бетоне в начале деформирования (при малых нагрузках) возникают только (или почти только) упругие деформации. При увеличении нагрузок к упругим добавляются неупругие деформации, которые развиваются медленно, постепенно и не увеличивают напряжений. С упругими деформациями они связаны нелинейно: чем выше уровень деформаций, тем больше деформации неупругие, соответствующие некоторому приращению упругих деформаций (или напряжений).

1.2. Деформирование железобетонного элемента при изгибе или внецентренном действии продольной силы

Внецентренное действие продольной силы можно рассматривать как сочетание центрального действия (растяжения или сжатия) с изгибом. При больших эксцентриситетах поперечное сечение разделяется на две зоны: растянутую и сжатую, и напряженное состояние оказывается таким же, как при изгибе. Принимается гипотеза плоских сечений, в соответствии с которой деформация продольного волокна пропорциональна его расстоянию от нейтрального слоя (рис. 1.2).

$$\varepsilon_x = -1/\rho \cdot y,$$

где $1/\rho$ – кривизна нейтрального слоя.

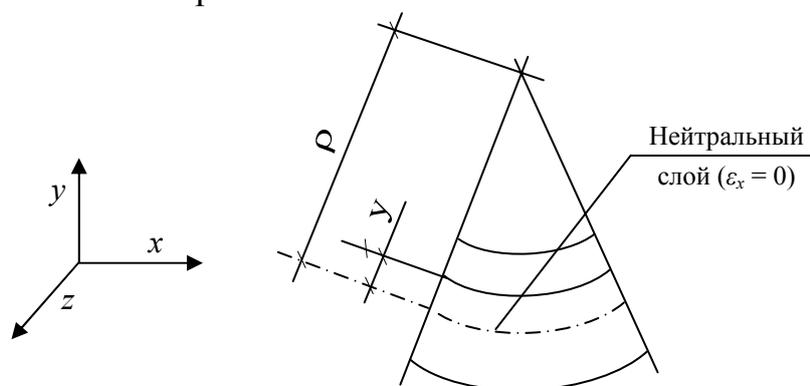


Рис. 1.2. Деформирование стержня при изгибе

При постепенном увеличении нагрузки можно наблюдать три существенно различные стадии деформирования:

Стадия I. При малых нагрузках бетон и арматура работают совместно; возникают только упругие деформации; выполняется закон Гука; напряжения распределяются по высоте поперечного сечения линейно (рис. 1.3, а). Напряжения в арматуре и бетоне соотносятся между собой пропорционально модулям упругости.

При увеличении нагрузки в бетоне растянутой зоны возникают и постепенно увеличиваются неупругие деформации. Закон Гука нарушается. Эпюра напряжений становится криволинейной (рис. 1.3, б).

Стадия I заканчивается, когда наибольшие напряжения в бетоне растянутой зоны достигают предела прочности на растяжение R_{bt} .

В стадии II в бетоне растянутой зоны имеются трещины. В сечении, совпадающем с трещиной, растягивающее усилие воспринимается арматурой и участком бетона, сохранившимся над трещиной. Неупругие деформации быстро возрастают. В бетоне сжатой зоны также развиваются неуп-

ругие деформации. Эпюра напряжений становится криволинейной и меняет форму: максимальная ордината несколько смещается от крайнего волокна вглубь сечения (рис. 1.3, в). Вторая стадия заканчивается стадией III – стадией разрушения.

Стадия III (рис. 1.3, з). Различают разрушение железобетонного элемента по случаю 1 и по случаю 2. В случае 1 сначала исчерпывается несущая способность растянутой зоны, то есть напряжения в растянутой арматуре достигают предельных значений – предела текучести (для пластичной арматуры) или предела прочности (для высокопрочной проволоки). Вследствие этого арматура или быстро деформируется или рвется, и происходит разрушение.

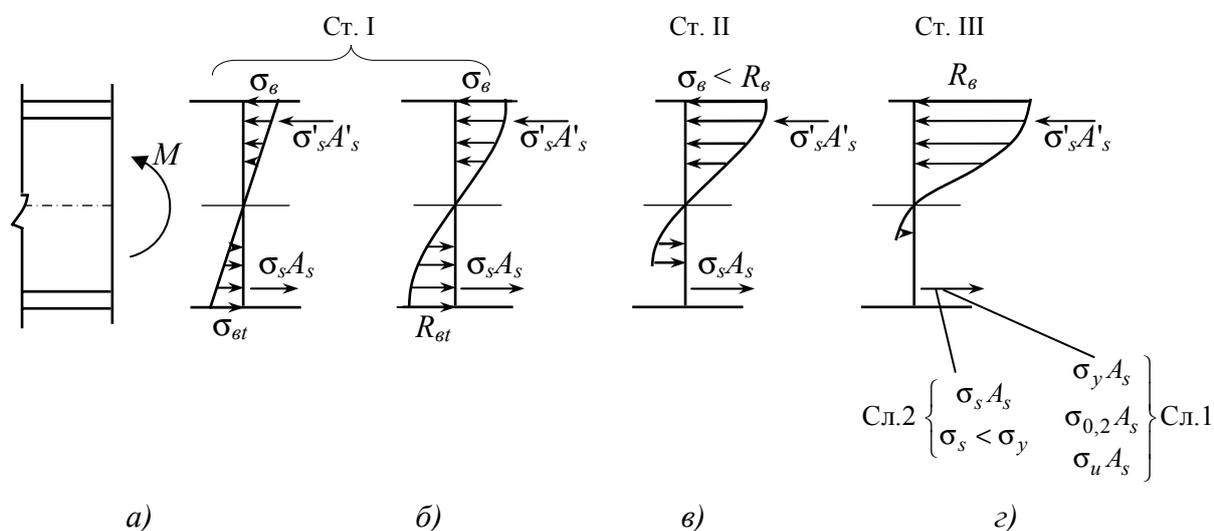


Рис. 1.3. Стадии деформирования элемента

В случае 2 раньше исчерпывается несущая способность сжатой зоны. Напряжения в бетоне достигают предела прочности, и происходит хрупкое разрушение. В арматуре растянутой зоны напряжения не достигают своих предельных значений; арматура используется не полностью. Так разрушаются переармированные элементы.

В практических расчетах для стадии III (для предельного состояния) принимаются следующие предпосылки.

1. В растянутой зоне всё растягивающее усилие воспринимается арматурой;
2. В сжатой зоне напряжения в бетоне во всех точках одинаковы и равны расчетному сопротивлению бетона R_b ;
3. В арматуре растянутой зоны напряжения равны расчетному сопротивлению арматуры R_s , если элемент разрушается по случаю 1, или

равны $\sigma_s < R_s$, если элемент разрушается по случаю 2;

4. В арматуре сжатой зоны напряжения равны расчетному сопротивлению арматуры на сжатие R_{sc} для ненапрягаемой арматуры и $\sigma_{scu} - \sigma'_{sp}$ – для напрягаемой.

Здесь σ_{scu} – предельные напряжения в арматуре, сжимаемой совместно с бетоном, σ'_{sp} – предварительные напряжения растяжения.

На рис. 1.4 показано распределение внутренних сил в поперечном сечении для предельного состояния, соответствующее принятым предположениям.

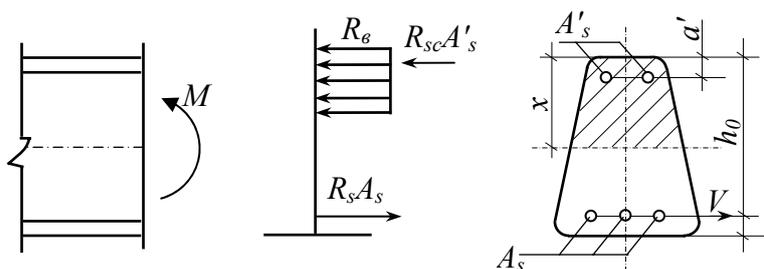


Рис. 1.4. Расчетное предельное состояние

Предельный момент для данного поперечного сечения определяется как сумма моментов внутренних сил относительно оси ν , проходящей через центр тяжести арматуры растянутой зоны

$$M_{\text{пред}} = R_b S_b + \sigma'_s A'_s (h_0 - a'),$$

где S_b – статический момент площади сжатой зоны относительно оси ν , σ'_s ; A'_s – напряжения и площадь сечения арматуры сжатой зоны.

1.3. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной нейтрального слоя

Когда возникают только упругие деформации, напряжения пропорциональны деформациям и кривизна нейтрального слоя $1/\rho$ пропорциональна действующему в сечении изгибающему моменту M

$$1/\rho = M/EJ, \quad (1.1)$$

где EJ – изгибная жесткость элемента.

Когда к упругим деформациям прибавляются неупругие, кривизна начинает расти ускоренно, и при увеличении нагрузки это ускорение быстро возрастает. Рассматриваем только элементы, разрушающиеся по случаю 1, армированные пластической арматурой. На подходе к предельному состоянию, когда напряжение в арматуре растянутой зоны достигает пре-

дела текучести, кривизна начинает расти почти без роста изгибающего момента. Можно сказать, что в сечении открывается пластический шарнир, который отличается от конструктивного только тем, что момент в нем не равен нулю, а равен величине предельного момента. Зависимость между кривизной и моментом показана на рис. 1.5.

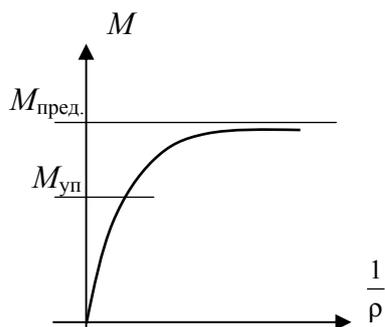


Рис. 1.5. Зависимость между кривизной и моментом: $M_{уп}$ – наибольший момент при упругих деформациях

Можно сказать, что выражение (1.1) справедливо всегда, только при воздействии неупругих деформаций жесткость стержня EJ перестает быть постоянной и при увеличении нагрузки быстро уменьшается. Причиной служит уменьшение модуля деформаций E бетона и арматуры. Для бетона начальный модуль упругости $E_b^0 = \text{tg}\alpha_0$ заменяется секущим модулем $E'_b = \text{tg}\alpha_1$ (рис. 1.6).

При этом $E'_b = \nu E_b^0$, где $\nu = \varepsilon_e / \varepsilon_b$ – коэффициент упругих деформаций, ε_e – упругая деформация, ε_b – полная деформация бетона.

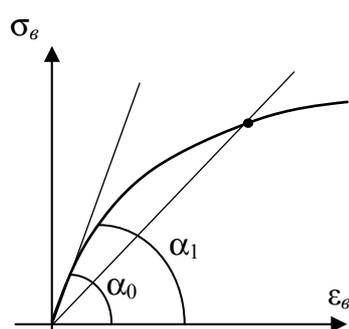


Рис. 1.6. Начальный и секущий модули деформации бетона

Величина коэффициента ν уменьшается при увеличении напряжений и длительности действия нагрузки от 1,0 до предельных значений:

$$\begin{aligned} \nu &= 0,15 \text{ – при сжатии,} \\ \nu_t &= 0,5 \text{ – при растяжении.} \end{aligned}$$

1.4. Перераспределение усилий в балках

Если балка «лишних» связей не имеет, то усилие в любой ее связи определяется вполне внешней нагрузкой: изгибающий момент в каждом сечении принимает единственно возможное значение. В балках с «лишними» связями распределение усилий зависит от соотношения их жесткостей. Изменяя жесткости «лишних» связей, можно вызвать перераспределение усилий.

Рассмотрим балку постоянного сечения, жестко защемленную по концам. (Одно защемление допускает линейное перемещение в направле-

нии продольной оси балки). При равномерно распределенной нагрузке распределение моментов соответствует эпюре, показанной на рис. 1.7, а.

Будем постепенно уменьшать жесткость балки в крайних сечениях (у заделки). Моменты, воспринимаемые этими сечениями, будут уменьшаться. Кривая, ограничивающая эпюру, будет параллельно самой себе перемещаться вниз и, когда жесткость сечений будет равна нулю, расчетная схема балки и эпюра моментов будут соответствовать рисунку 1.7, б. Получилось существенное перераспределение усилий: моменты в крайних сечениях уменьшились до нуля, на величину $ql^2/12$, и ровно на столько увеличился момент в середине пролета.

Вернем крайним сечениям первоначальные жесткости. Будем постепенно уменьшать жесткость сечения в середине пролета. Момент, воспринимаемый этим сечением, будет уменьшаться. Кривая, ограничивающая эпюру, будет параллельно самой себе перемещаться вверх и, когда жесткость сечения уменьшится до нуля, расчетная схема балки и эпюра моментов будут соответствовать рисунку 1.7, в. Опять произошло существенное перераспределение усилий: момент в середине пролета уменьшился до нуля, на $ql^2/24$, и ровно на столько увеличились моменты в крайних сечениях. (Разность ординат эпюры моментов для среднего и крайних сечений всегда равна $ql^2/8$).

Жесткость железобетонной балки при заданных размерах поперечного сечения и классах арматуры и бетона определяется сечением арматуры растянутой зоны. Чем больше сечение арматуры, тем больше предельный момент, а чем больше дистанция между действующим и предельным моментами, тем меньше неупругих деформаций и выше жесткость балки.

Изменяя армирование, инженер может в определенных пределах вызвать распределение моментов по своему усмотрению. Пусть в рас-

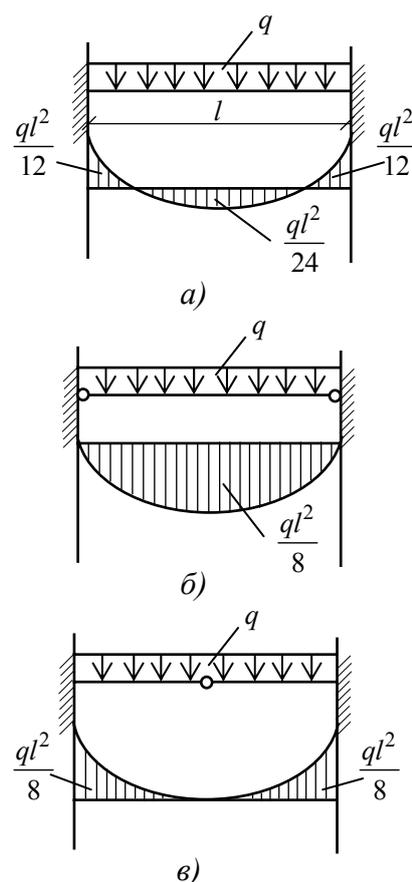


Рис. 1.7. Перераспределение усилий в балке

смотренном примере балка при минимальном коэффициенте армирования воспринимает момент M^* . Изменяя армирование в крайних сечениях (обоих сразу) и среднем, можно получить распределение моментов по любой эпюре между показанными на рис. 1.8.

В практических расчетах необходимо учитывать следующее:

а) коэффициент армирования не должен превышать максимального значения

$$\max \mu = \xi_R R_b / R_s ; \quad (1.2)$$

б) уменьшение жесткости сечения сопровождается увеличением деформаций, возможным образованием и раскрытием трещин.

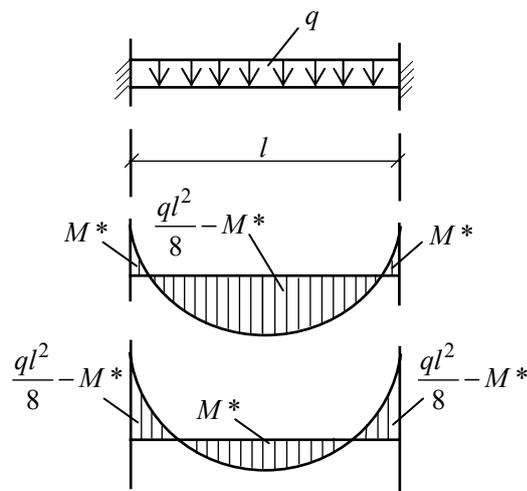


Рис. 1.8. Границы возможного распределения моментов

В формуле (1.2) μ – коэффициент армирования; R_b , R_s – расчетные сопротивления бетона и арматуры; ξ_R – граничная относительная высота сжатой зоны (при превышении которой осуществляется переход от разрушения балки по случаю 1 к разрушению по случаю 2).

Величина ξ_R определяется по эмпирической формуле:

$$\xi_R = \frac{0,8}{1 + \frac{\varepsilon_{s,el}}{\varepsilon_{b,u}}}$$

где $\varepsilon_{s,el} = R_s / E_s$ – относительная деформация арматуры при напряжениях, равных R_s ; $\varepsilon_{b,u}$ – относительная деформация сжатого бетона, когда напряжения достигают величины R_b .

1.5. Перераспределение моментов в ригелях многоэтажных рам

Для многих отраслей промышленности (легкой, приборостроительной, радиотехнической и т. д.) возводятся многоэтажные производственные здания каркасного типа. По внутренним координатным осям вертикальными несущими конструкциями служат колонны, по наружным – или колонны или несущие наружные стены. В последнем случае каркас называют неполным. Типовая сетка колонн 6×6 , 6×9 , 6×12 м; высота этажа 4,8; 6,0; 7,2 м; временная нагрузка достигает 15 МПа и более.

В уровне каждого перекрытия, обычно в поперечном направлении,

колонны соединяются между собой ригелями, по которым монтируются плиты перекрытия, многопустотные или ребристые. Ригели соединяются с колоннами жестко; образуется основная несущая конструкция здания – поперечная рама, – обеспечивающая жесткость здания в поперечном направлении. В продольном направлении жесткость обеспечивается вертикальными железобетонными диафрагмами или стальными связями, размещаемыми по всем рядам колонн (в пределах одного шага в середине каждого температурного блока) и в плоскостях наружных стен, а также перекрытиями, обеспечивающими совместную работу поперечных рам.

При расчете ригеля необходимо учитывать неупругие деформации. Обычно сначала изгибающие моменты определяются в предположении упругой работы, затем производится их перераспределение.

1.5.1. Определение моментов в сечениях ригеля в предположении упругой работы

Рама многоэтажного промышленного здания обычно имеет регулярную структуру: равные (или почти равные) пролеты и высоты этажей при постоянных поперечных сечениях ригелей и колонн. При расчете на вертикальную нагрузку такую раму допускается расчленить на отдельные одноэтажные фрагменты, помещая в точки с нулевыми значениями моментов шарнирно неподвижные опоры. Точки эти располагаются в середине высоты стоек всех этажей, кроме первого и последнего. От перекрытия на ригель передается нагрузка: или равномерно распределенная или в виде сосредоточенных сил в местах опирания ребристых плит. Если сосредоточенных сил больше трех, то их также допускается заменить эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой.

Рассматривают три схемы загрузки (рис. 1.9).

Первая и вторая схемы дают максимальные и минимальные моменты в пролетах; третья – максимальные опорные моменты в сечениях 21 и 23. Моменты в опорных сечениях для упругой стадии деформирования можно определить по формуле [1]

$$M = (\alpha g + \beta v)\ell^2, \quad (1.3)$$

где g , v – постоянная и временная нагрузка на ригель; α , β – коэффициенты, определяемые по приложению 11 [1], в зависимости от схемы загрузки и соотношения начальных погонных жесткостей ригеля и колонны.

$$K = (EJ/\ell) \text{ ригеля} / (EJ/\ell) \text{ колонны},$$

где $\ell_{\text{ригеля}}$ – пролет ригеля, $\ell_{\text{колонны}}$ – высота этажа.

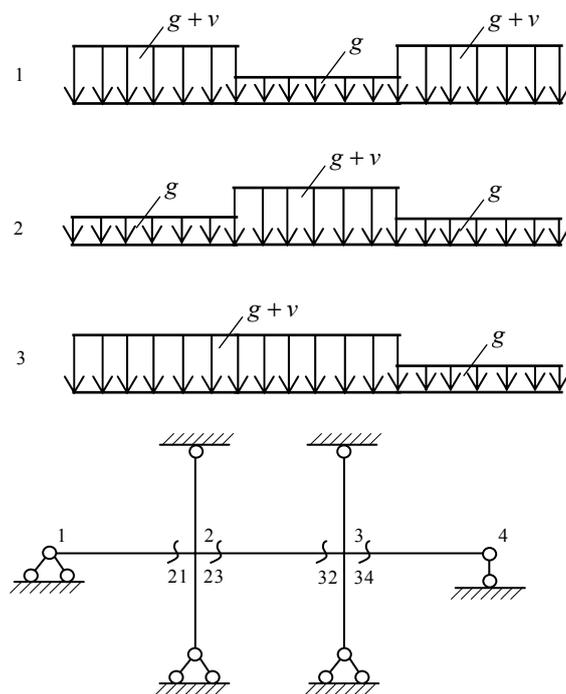


Рис. 1.9. Схемы загрузки рамы

Пролетные моменты и поперечные силы определяются из рассмотрения загрузки пролета опорными моментами и пролетной нагрузкой q (рис. 1.10).

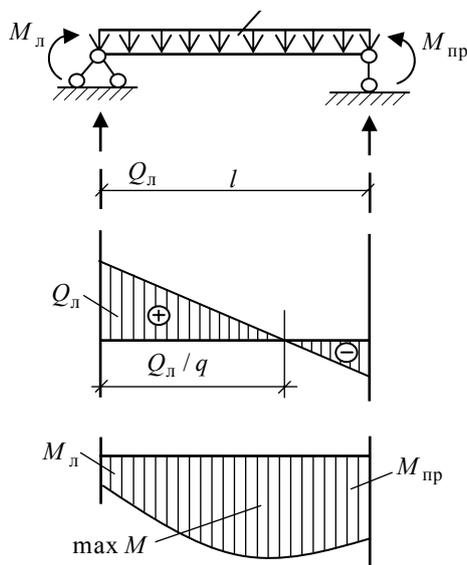


Рис. 1.10. Определение пролетных моментов

$$Q_{\text{л}} = \frac{ql}{2} + \frac{M_{\text{п}} - M_{\text{л}}}{\ell}, \quad (1.4)$$

$$\max M = M_{\text{л}} + \frac{Q_{\text{л}}^2}{2q}. \quad (1.5)$$

Когда $M_{\text{л}} = M_{\text{п}}$,

$$\max M = M_{\text{л}} + \frac{q\ell^2}{8}. \quad (1.6)$$

Пример

Для примера рассмотрим фрагмент рамы, изображенный на рис. 1.9. Рама неполного каркаса имеет три одинаковых пролета $\ell = 7,0$ м; соотношение погонных жесткостей ригеля и колонны $K = 4,5$; на ригель действует равномерно распределенная нагрузка: постоянная $g = 25$ кН/м, временная $v = 38$ кН/м. Требуется определить моменты в сечениях ригеля с учетом перераспределения усилий вследствие неупругих свойств железобетона.

Решение

Прежде всего строятся эпюры изгибающих моментов для трех загружений, показанных на рис. 1.9, в предположении упругой работы материала; моменты определяются по формулам (1.3) – (1.6).

Загружение 1.

Опорные моменты:

$$M_{2-1} = (-0,108 \cdot 25 - 0,076 \cdot 38) \cdot 7^2 = -274 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{2-3} = (-0,094 \cdot 25 - 0,032 \cdot 38) \cdot 7^2 = -175 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{3-2} = M_{2-3} = -175 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальные моменты в пролетах.

$$\text{Пролет 1: } Q_{\text{л}} = \frac{63 \cdot 7}{2} + \frac{-274}{7} = 181 \text{ кН},$$

$$\max M_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{181^2}{63} = 260 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Пролет 2: } \max M_2 = -175 + \frac{25 \cdot 7^2}{8} = -21,9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Загружение 2.

Опорные моменты:

$$M_{2-1} = (-0,108 \cdot 25 - 0,032 \cdot 38) \cdot 7^2 = -192 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{2-3} = (-0,094 \cdot 25 - 0,062 \cdot 38) \cdot 7^2 = -231 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{3-2} = M_{2-3} = -231 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальные моменты в пролетах.

$$\text{Пролет 1: } Q_{\text{л}} = \frac{25 \cdot 7}{2} + \frac{-192}{7} = 60,1 \text{ кН,}$$

$$\max M_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{60,1^2}{25} = 72,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\text{Пролет 2: } \max M_2 = -231 + \frac{63 \cdot 7^2}{8} = 155 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Загрузка 3.

Опорные моменты:

$$M_{2-1} = (-0,108 \cdot 25 - 0,117 \cdot 38) \cdot 7^2 = -350 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$M_{2-3} = (-0,094 \cdot 25 - 0,110 \cdot 38) \cdot 7^2 = -320 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$M_{3-2} = (-0,094 \cdot 25 - 0,046 \cdot 38) \cdot 7^2 = -201 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Максимальные моменты в пролетах.

$$\text{Пролет 1: } Q_{\text{л}} = \frac{63 \cdot 7}{2} + \frac{-350}{7} = 170,5 \text{ кН,}$$

$$\max M_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{170,5^2}{63} = 231 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\text{Пролет 2: } Q_{\text{л}} = \frac{63 \cdot 7}{2} + \frac{-201 + 320}{7} = 237,5 \text{ кН,}$$

$$\max M_2 = -320 + \frac{1}{2} \cdot \frac{237,5^2}{63} = 128 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюры моментов для этих трех загрузок показаны на рис. 1.11.

1.5.2. Перераспределение моментов в ригеле

Ригель изготавливается на заводе отдельными элементами в один пролет рамы. При возведении рамы устраивается консольное или бесконсольное жесткое соединение элементов между собой и с колоннами. Целесообразно использовать способность ригеля к перераспределению усилий для уменьшения моментов, возникающих в соединении (опорных моментов), чтобы уменьшить металлоемкость и трудоемкость выполнения стыка и повысить его надежность. При этом надо иметь в виду, что уменьшение момента сопровождается увеличением кривизны нейтрального слоя, деформаций, возможным образованием и раскрытием трещин. Если эти параметры при расчете не определяются, то уменьшение момента ограничивается. Считается, что максимально допустимое уменьшение – около 30 %. Кроме того, уменьшение опорного момента вызывает увеличение моментов в пролете, что может привести к перерасходу арматуры в целом. Одно

из возможных решений – уменьшить опорный момент настолько, чтобы он уравнился по модулю с максимальным моментом в первом пролете. Такое уменьшение x можно примерно найти из уравнения

$$350 - x = 231 + 0,4x,$$

откуда $x = 85$ кН·м. Уменьшение момента составит

$$(85/350)100 = 24,3 \%,$$

что допустимо.

Момент: $350 - 85 = 265$ кН·м принимается в качестве предельного для сечений 2 – 1 и 2 – 3, поскольку армирование этих сечений одинаково, а также в силу симметрии задачи и для сечений 3 – 2 и 3 – 4.

Определяем моменты, возникающие в сечениях ригеля после перераспределения, для загрузжений 1 и 2.

Загружение 1, опорные моменты.

Момент в сечении 2 – 1 будет равен предельному

$$M_{2-1} = -265 \text{ кН·м.}$$

Он уменьшился (см. рис. 1.11). Можно сказать, что в этом сечении возник разгружающий момент

$$\Delta M_{2-1} = -265 - (-274) = 9 \text{ кН·м.}$$

Действуя на узел рамы, этот момент будет распределяться между сечениями колонны, примыкающими к узлу сверху и снизу, и сечением 2 – 3 ригеля пропорционально погонным жесткостям этих элементов (рис. 1.12).

Учитывая, что $K = 4,5$, находим

$$\Delta M_{2-3} = (\Delta M_{2-1} / (4,5 + 2))4,5 = 6,2 \text{ кН·м.}$$

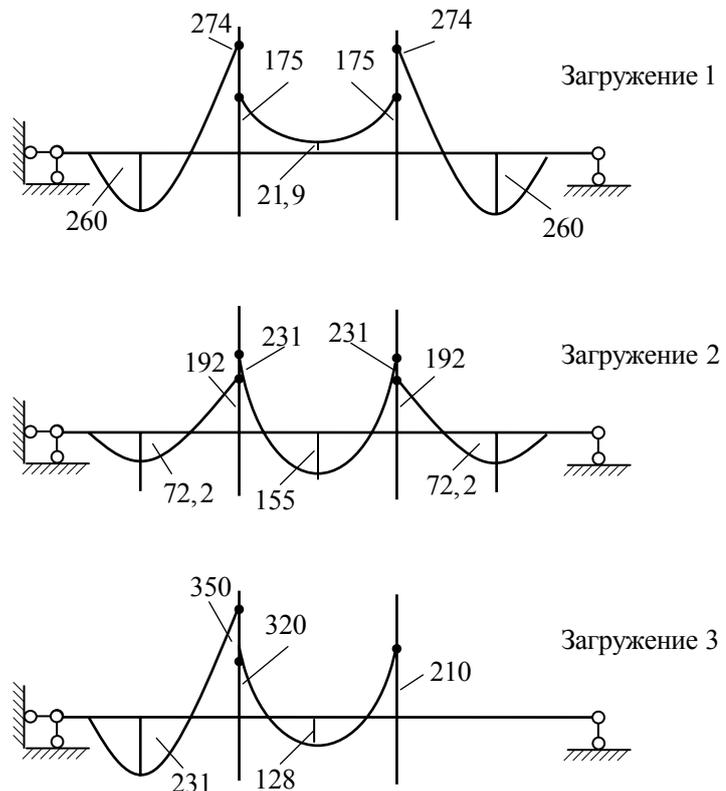


Рис. 1.11. Эпюры моментов, полученные в предположении упругой работы материала

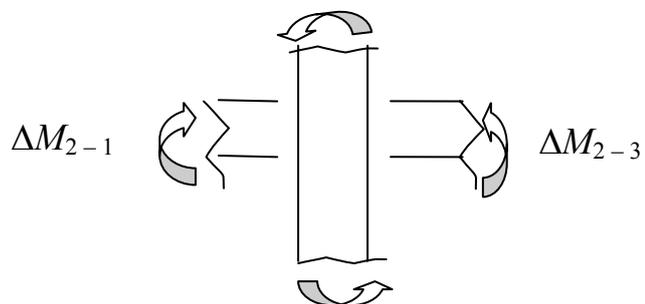


Рис. 1.12. К определению момента ΔM_{2-3}

Тогда

$$M_{2-3} = -175 + 6,2 = -169 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{3-2} = M_{2-3} = -169 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Экстремальные моменты в пролетах определяются по формулам (1.4) – (1.6).

Пролет 1:

$$Q_{\text{л}} = q\ell / 2 + (M_{\text{п}} - M_{\text{л}}) / \ell = 63 \cdot 7 / 2 + (-265 / 7) = 183 \text{ кН},$$

$$\max M_1 = 0 + \frac{1}{2} Q_{\text{л}}^2 / q = 0 + \frac{1}{2} \cdot 183^2 / 63 = 266 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

пролет 2:

$$\max M_2 = M_{2-3} + q\ell^2 / 8 = -169 + 25 \cdot 7^2 / 8 = 15,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра моментов для загрузки 1 показана на рис. 1.13.

Загрузка 2, опорные моменты.

Сечение 2 – 3 заармировано на восприятие момента – 265 кН·м. Поэтому в предельном состоянии будет

$$M_{2-3} = M_{3-2} = -265 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

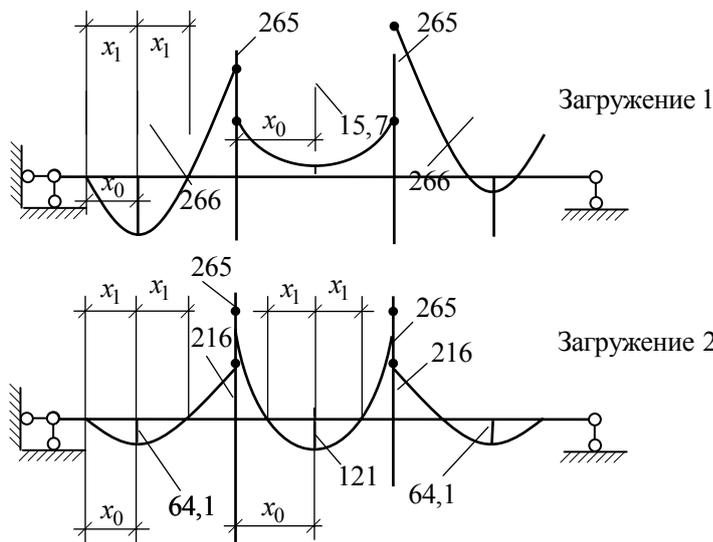


Рис. 1.13. Эпюры моментов после перераспределения усилий

Можно сказать, что в этом сечении возникает догружающий момент

$$\Delta M_{2-3} = -265 - (-231) = -34 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Действуя через узел рамы, он вызовет дополнительный момент в сечении 2 – 1

$$\Delta M_{2-1} = (\Delta M_{2-1} / (4,5 + 2)) \cdot 4,5 = -24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Момент в сечении 2 – 1 будет

$$M_{2-1} = -192 - 24 = -216 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Экстремальные моменты

в пролетах определяются по формулам (1.4) – (1.6).

Пролет 1:

$$Q_{\text{л}} = q\ell / 2 + (M_{\text{п}} - M_{\text{л}}) / \ell = 25 \cdot 7 / 2 + (-216 / 7) = 56,6 \text{ кН},$$

$$\max M_1 = 0 + \frac{1}{2} Q_{\text{л}}^2 / q = 0 + \frac{1}{2} \cdot 56,6^2 / 25 = 64,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

пролет 2:

$$\max M_2 = M_{2-3} + q\ell^2 / 8 = -265 + 63 \cdot 7^2 / 8 = 121 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Уменьшение момента в пролете составит

$$((155 - 121) / 155) \cdot 100 = 21,9 \%,$$

что допустимо.

Для загрузки 3 эпюра моментов будет в первом пролете как при загрузке 1, во втором – как при загрузке 2.

По эпюрам моментов, определенных с учетом перераспределения усилий вследствие неупругих свойств железобетона, можно построить огибающую, по которой и производится армирование ригеля. При этом полезны следующие сведения:

а) сечения с максимальным моментом в пролете отстоят от левой опоры на расстояние

$$x_0 = Q_{\text{л}} / q,$$

причем величины $Q_{\text{л}}$ вычислялись при определении моментов $\max M$;

б) нулевые ординаты на эпюре моментов отстоят от максимальных ординат вправо и влево на расстояние

$$x_1 = \sqrt{2 \max M / q},$$

в чем легко убедиться, взяв сечение с максимальным моментом (рис. 1.14):

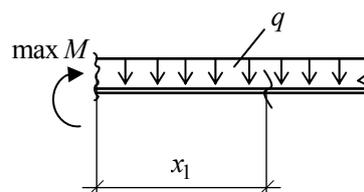


Рис. 1.14. К определению расстояния x_1

$$M_{x_1} = \max M - qx_1^2/2 = 0, x_1 = \sqrt{2 \max M / q}.$$

1.6. Перераспределение в фундаментах

В рассмотренных выше случаях перераспределение усилий заключалось в уменьшении моментов в наиболее напряженных сечениях за счет их увеличения в других местах. В конструкциях, работающих в контакте с грунтом (например, фундаментах в виде сплошных плит), перераспределение касается не только внутренних усилий, но и внешних воздействий – реактивных давлений со стороны основания. Это приводит к абсолютному уменьшению моментов (которое не сопровождается ростом моментов в других местах), в результате чего может быть получена экономия арматуры. В работе [2] исследуется деформирование круглых фундаментных плит под высотные дымовые трубы для тепловых электростанций. Диаметральный разрез такой плиты показан на рис. 1.15. Пока плита обладает высокой жесткостью, реактивные давления со стороны грунта концентрируются под ее краями и вызывают большие радиальные и тангенциальные изгибающие моменты.

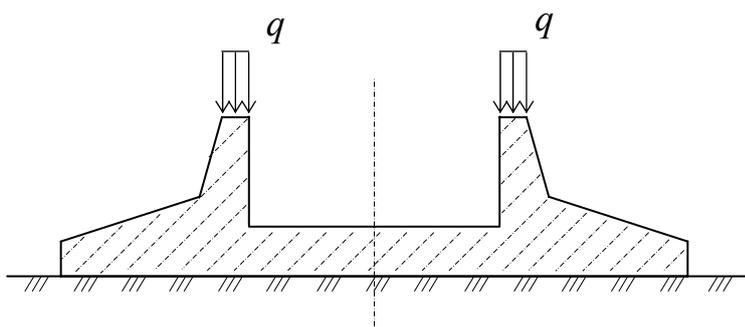


Рис.1.15. Фундаментная плита под дымовую трубу ТЭЦ

Неупругие деформации уменьшают жесткости плиты в области приложения внешней нагрузки в несколько раз. Плита становится гибкой, и распределение реактивных давлений изменяется в сторону уменьшения их под краями и увеличения в зоне

действия внешних сил. В результате моменты значительно уменьшаются, что и обеспечивает экономию арматуры.

Условие прочности удовлетворяется при значительно меньшем армировании (чем при линейном расчете), но это может потерять значение. Решающими становятся предельные состояния второй группы. Чтобы не допустить их наступления, необходимо на любой стадии деформирования достоверно определять не только моменты, но и деформации и ширину раскрытия трещин.

1.7. Контрольные вопросы

1. Упругие и неупругие деформации.
2. Стадии деформирования изгибаемого железобетонного элемента.
3. Предельные состояние элемента и принятые для него предпосылки.
4. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной нейтрального слоя.
5. Перераспределение усилий в балках.
6. Определение и перераспределение моментов в ригелях рам многоэтажных зданий.

Глава 2. ДЕФОРМАТИВНОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ БЕТОНА*

2.1. Структура бетона

Бетон обладает сложной структурой, в которой можно выделить два основных компонента: матрицу в виде окаменевшего цементно-песчаного

* Материал этой главы в основном взят из монографии [3].

раствора и зерна крупного заполнителя. Матрица также неоднородна и содержит в себе трещины и капиллярно-пористую твердую фазу с заземленными в ней газообразной, жидкой и гелевой фазами.

Зерна крупного заполнителя могут быть плотными или пористыми. Различают макроструктуру (в которую входят зерна крупного заполнителя диаметром $d_3 = 10 \dots 40$ мм), мезоструктуру ($d_3 = 3 \dots 5$ мм) и микроструктуру, матрицей которой служат сростки кристаллов, а зернами – непрогидратированные частицы цемента.

В бетоне непрерывно происходят два противоположных процесса: созидательный, связанный с твердением и зарастанием некоторых трещин (старение) и разрушительный, связанный с разрыхлением структуры микротрещинами, особенно при высоких уровнях напряжений.

Бетон – материал не сплошной, и сплошность его нарушается двояко: геометрически – он пронизан трещинами, и физически – он проявляет себя как материал не в бесконечно малых объемах (как сплошные тела), а только, начиная с некоторого ℓ_0 -элемента – элемента с минимальным размером ℓ_0 для макроструктуры, и ℓ_0^1 – для мезоструктуры. В сплошном теле напряжения – гладкие непрерывные функции координат. В бетоне различают напряжения действительные и сглаженные.

2.2. Действительные и сглаженные напряжения в бетоне

Структуру бетона можно представить в виде сплошных частей матрицы и сплошных частей зерен заполнителя, в которые вкраплены отдельные полости в виде трещин, пор, других дефектов. Если взять элементарную площадку на сплошной части, то можно вычислить действующие на ней напряжения. Это и будут действительные напряжения. Эпюры действительных напряжений имеют сложные очертания, так как сплошные части окаймляются трещинами, порами, другими сплошными частями с другими свойствами. На границах сплошных частей напряжения имеют разрывы. Действительные напряжения – негладкие прерывные функции координат.

В расчетах конструкций действительные напряжения заменяются сглаженными, которые наделяются всеми свойствами напряжений сплошной среды. Они являются гладкими непрерывными функциями координат. Процедура сглаживания представляет собой аппроксимацию сложной функции некоторой гладкой непрерывной функцией, которая удовлетворяла бы всем уравнениям механики. Сглаживание выполняется на основе

сравнения деформирования образца из бетона и из сплошного тела. При этом важное значение имеют размеры образцов. Они должны вмещать хотя бы один характерный элемент структуры масштаба ℓ_0 .

2.3. Трещины в бетоне

Пусть S_{cr} – площадь берега трещины, а K_0^1, K_0 – некоторые коэффициенты ($K_0^1, K_0 < 1$). Если $S_{cr} = K_0^1 (\ell_0^1)^2 \dots K_0 \ell_0^2$, то это дефект структуры бетона – дефект макроструктуры. Если $S_{cr} < K_0^1 (\ell_0^1)^2$, то это дефект компонентов бетона – дефект мезоструктуры. Дефекты макроструктуры называются собственными или внутренними. Они не выделяются для отдельного рассмотрения, а учитываются интегрально (модулем деформаций). Кроме структурных выделяют трещины, пересекающие один или несколько структурных элементов, но еще не представляющие опасности для конструкции в целом. $S_{cr} > K_0 \ell_0^2$, но $S_{cr} < K_0 L^2$, где L – характерное сечение конструкции. Это трещины разрушения структурных элементов. В железобетонных элементах такие трещины могут быть отнесены к структурным (внутренним), как трещины разрушения мезоструктурных элементов относятся к внутренним для бетона. Вид трещины (статус) может зависеть от вида напряженного состояния: трещины, структурные для сжатого элемента, могут быть неструктурными для растянутого. Трещины, которые не могут быть отнесены к структурным, должны прослеживаться дискретно (особо). Последний вид трещин – магистральные. Они определяют разрушение всей конструкции в целом или важных ее частей. Это мегатрещины. В методе предельного равновесия они выступают как дискретные в виде линий излома, но для железобетонных элементов могут фигурировать в критериях прочности как структурные. Развитие трещин в бетоне тормозится неоднородностью структуры: зернами заполнителя, трещинами иного направления, ветвлением трещин, порами и пр., а также неоднородностью напряженного состояния, при которой может получаться зажатие кончиков трещин. В результате при сжатии и комбинациях сжатия с растяжением бетон ведет себя как нелинейный материал.

2.4. Механизмы разрушения бетона

Различают два механизма разрушения: отрывной – по трещинам отрыва одной части элемента от другой и сдвиговой – по трещинам сдвига одной части элемента относительно другой. Отрыв и сдвиг могут происходить с разрывом зерен заполнителя – внутризерновой механизм разруше-

ния – и в обход зерен крупного заполнителя – межзерновой механизм. В чистом виде отрывной механизм реализуется при растяжении. Чисто сдвиговой встречается редко. Чаще встречаются отрывно-сдвиговые механизмы в виде заглаз-трещин или часто расположенных трещин отрыва, пересекаемых сдвиговой трещиной. Чем сложнее разрушение, тем большие деформации возникают. Такие механизмы свойственны сжатию.

2.5. Влияние внутренних трещин на диаграмму деформирования

Развитие внутренних трещин приводит к нарушению линейной зависимости между напряжениями и деформациями в случае одноосного растяжения или сжатия. По природе эти неупругие деформации отличаются от пластических деформаций в металлах; поэтому они называются псевдопластическими по А. А. Гвоздеву [4] и О. Я. Бергу [5] или отрывными по М. М. Холмянскому [6]. Трещины, развиваясь, уменьшают площадь сечения растягиваемой призмы с F до F^* . Сглаженные напряжения $\sigma = P/F$, действительные $\sigma^* = P/F^*$ (P – действующая сила). Можно написать равенство

$$P = \sigma F = \sigma^* F^*,$$

из которого следует

$$\sigma^* = \sigma F/F^* = \sigma/\nu, \text{ где } \nu = F^*/F.$$

Величина ν изменяется в пределах от 1 до 0. Это параметр диаграммы деформирования бетона в координатах $\sigma - \varepsilon$, который В. И. Мурашев назвал коэффициентом упругости [7]. Это коэффициент изменения секущего модуля $E'_\varepsilon = E\nu$, определяющего связь между сглаженными напряжениями и полными деформациями бетона ε

$$\varepsilon = \sigma/(E\nu),$$

где E – начальный модуль упругости бетона.

Секущий модуль позволяет принцип независимости действия сил, который неприменим для нелинейно деформируемых тел, заменить принципом суммирования в конечной позиции: если в сложном напряженном состоянии при некотором уровне нагружения секущий модуль равен E'_ε , а напряжения от различных факторов равны $\sigma_i, i = 1, 2, \dots$, то суммарные деформации будут

$$\varepsilon = \sum_i \sigma_i / E'_\varepsilon.$$

Разделим полные деформации на линейные и нелинейные (псевдопластические). Линейные равны σ/E , а полные $\sigma/(E\nu) = \sigma^*/E$. Псевдопластические

тические равны их разности $(\sigma^* - \sigma)/E$. Их можно рассматривать как приращение упругих деформаций, связанное с увеличением разности $\sigma^* - \sigma$. Поэтому они (полностью или частично) восстанавливаемы. Истинные пластические деформации необратимы.

Будем разгружать образец после растяжения его до точки A (рис. 2.1).

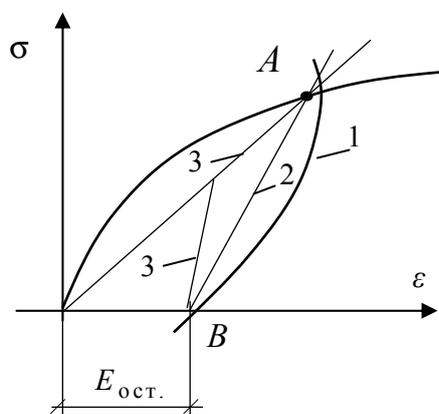


Рис. 2.1. Деформирование бетона при нагружении и разгрузке

Если предположить, что разгрузка пойдет по секущему модулю (по секущей), то при полной разгрузке остаточные деформации (и напряжения) будут равны нулю. На самом деле разгрузка идет с постепенным восстановлением сплошности вследствие зажатия трещин. На берегах трещин, которые смыкаются, возникают напряжения сжатия σ^{**} . Полная разгрузка оказывается условной, после которой $\sigma = 0$, $p = 0$, но $\sigma^{**} \neq 0$ и $\sigma^* \neq 0$ —

возникает самоуравновешенная система остаточных напряжений, а также остаточные деформации.

Разгрузка может пойти по линиям 1, 2 и 3 в зависимости от закономерностей изменения напряжений σ^{**} .

Разгрузка сопровождается нарушением сплошности сечений, особенно в начале перехода с линии нагружения на линию разгрузки. Вместе с тем происходит зажатие трещин с возникновением напряжений σ^{**} . Если это начинается сразу, то разгрузка идет по линии 1, если проявляется в конце, то по линии 3, в промежуточных случаях — ближе к прямой 2.

Можно установить зависимость между сглаженными и действительными напряжениями (σ и σ^*). Утраченная при нагружении до точки A диаграмма площадь сечения $F - F^*$ при разгрузке будет частично восстанавливаться, но на восстановленной части будут возникать сжимающие напряжения σ^{**} , а растягивающие напряжения σ^* будут по-прежнему относиться к площади F^* , соответствующей точке A . Если при определении напряжений σ^{**} относить их ко всей площади $F - F^*$, то для любой точки на линии $A - 1 - B$ можно написать

$$\sigma F = \sigma^* F^* - \sigma^{**} (F - F^*),$$

откуда после деления на площадь F получается

$$\sigma = \sigma^* \nu - \sigma^{**} (1 - \nu), \quad (2.1)$$

где ν — коэффициент упругости, соответствующий точке A , и при разгрузке

остающийся постоянным.

Для точки В (в конце разгрузки), для которой

$$\sigma = 0, \sigma^* = E\varepsilon_\sigma,$$

из уравнения (2.1) находим

$$\sigma_\sigma^{**} = E\varepsilon_\sigma \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Если принять, что напряжения σ^{**} при разгрузке изменяются по линейному закону, то для любой точки на линии $A - 1 - B$ можно написать:

$$\sigma^{**} = \sigma_\sigma^{**} \cdot \frac{\sigma_A - \sigma}{\sigma_A} = E\varepsilon_B \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\sigma_A - \sigma}{\sigma_A},$$

где σ_A, σ – сглаженные напряжения для точки А и текущей точки на линии $A - 1 - B$ соответственно.

После подстановки в уравнение (2.1) получается линейная связь между напряжениями σ^* и σ

$$\sigma^* = \sigma \left(\frac{1}{\nu_A} - \frac{E\varepsilon_B}{\sigma_A} \right) + E\varepsilon_\sigma$$

или

$$\sigma^* = \sigma/\nu^* + E\varepsilon_\sigma, \quad (2.2)$$

где $\nu^* = \frac{1}{\frac{1}{\nu_A} - \frac{E\varepsilon_B}{\sigma_A}}$.

Если учесть, что $\sigma^* = E\varepsilon$, то из уравнения (2.2) можно получить линейную связь между сглаженными напряжениями σ и полными деформациями ε , которая имеет место при разгрузке по линии $A - 2 - B$.

$$\varepsilon = \varepsilon_\sigma + \sigma/(E\nu^*).$$

Величина ν^* при разгрузке постоянна. Из выражения (2.2) видно, что приращения напряжений σ^* и σ связаны соотношением

$$\Delta\sigma^* = \Delta\sigma/\nu^*.$$

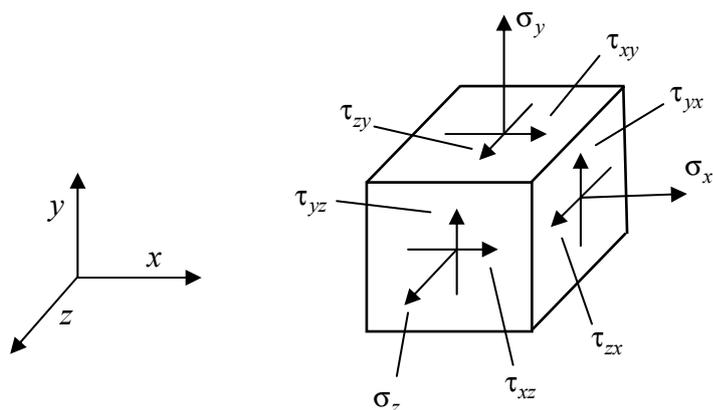
2.6. Дилатация бетона

Применительно к бетону дилатация – это возрастание объема при одноосном или многоосном сжатии в стадиях, близких к разрушению. В начале нагружения объемная деформация $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ отрицательна. Затем уменьшение объема замедляется, наступает состояние $\theta = 0$, а в стадии, близкой к разрушению, $\theta > 0$ и быстро возрастает. Точка $\theta = 0$ по О.Я. Бергу [5] называется верхней параметрической точкой, по которой судят о

безопасном уровне напряжений и долговечности. Рост объемной деформации при центральном сжатии связан со значительным увеличением поперечных деформаций. Коэффициент поперечной деформации в начале нагружения $\mu^0 = 0,15 \dots 0,2$, а затем возрастает до 0,5 и больше. При растяжении величина μ^0 остается постоянной и даже несколько снижается.

2.7. О напряженном состоянии в точке

Напряженное состояние в точке может быть представлено напряже-



ниями, действующими в трех взаимно перпендикулярных площадках [8] – координатных площадках прямоугольной системы осей координат (рис. 2.2):

$\sigma_i, i = x, y, z$ – нормальные напряжения,

$\tau_{ij}, i, j = x, y, z$ – касательные.

Напряжения составляют симметричный тензор второго ранга

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

– тензор напряжений, который всегда может быть представлен суммой двух: шарового тензора

$$T_H^0 = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix},$$

соответствующего состоянию, при котором изменяется только объем, и девиатора

$$D_H = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_{cp}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_{cp}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_{cp}) \end{vmatrix},$$

соответствующего состоянию, при котором изменяется только форма.

Оси координат всегда можно направить так, что все касательные напряжения в координатных площадках будут равны нулю. Такие оси называются главными. Нормальные напряжения в координатных площадках главных осей принимают экстремальные значения и тоже называются главными и обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Индексы расставляются так, что-

бы выполнялось неравенство $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ в алгебраическом смысле.

Величины главных напряжений находятся из равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_y (\sigma_y - \sigma) \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение относительно σ , имеющее три действительных корня – главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Коэффициенты при σ^2, σ и свободный член в этом уравнении представляют собой инварианты тензора напряжений

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned}$$

Шаровой тензор напряжений определяется одним инвариантом J_1 , а девиатор двумя: вторым (D_2) и третьим (D_3) (первый инвариант девиатора равен нулю).

$$\begin{aligned} D_2 &= - \left\{ \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\}; \\ D_3 &= (\sigma_x - \sigma_0) (\sigma_y - \sigma_0) (\sigma_z - \sigma_0) + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - (\sigma_x - \sigma_0) \tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_0) \tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_0) \tau_{xy}^2. \end{aligned}$$

Инварианты – основные характеристики напряженного (и деформированного) состояния в точке, а компоненты напряжений (и деформаций) – вспомогательные, так как они связаны с координатными осями. В тензорной алгебре доказывается, что независимых алгебраических инвариантов три. В качестве таких выбирают J_1, J_2, J_3 или J_1, D_2, D_3 .

2.8. Октаэдрические напряжения

Октаэдрические площадки – это площадки, равнонаклоненные к главным площадкам. Их называют площадками результирующих напряжений. Нормальные октаэдрические напряжения равны среднему нормальному напряжению для данной точки

$$\sigma_{\text{окт}} = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{ср}}$$

Касательное октаэдрическое напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

или через напряжения в координатных площадках

$$\tau_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

По величине оно близко к наибольшему касательному напряжению

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2;$$

$$0,816 < \tau_{\text{окт}} / \tau_{\text{max}} < 0,941.$$

В теории пластичности широко используется понятие интенсивности касательных напряжений τ_i и интенсивности нормальных напряжений σ_i

$$\tau_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{\text{окт}} = \sqrt{-D_2},$$

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \sqrt{-3D_2}.$$

При конструировании критериев прочности бетона важную роль играет параметр Лоде – Надаи по напряжениям

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Он изменяется в пределах от +1 до –1. Через него и $\tau_{\text{окт}}$ выражаются максимальные касательные и главные напряжения

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} = \frac{3\tau_{\text{окт}}}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}},$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \tau_{\text{окт}},$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\sqrt{2}\mu_\sigma}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}},$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 - \frac{3 + \mu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \tau_{\text{окт}}.$$

Значениям σ_0 , $\tau_{\text{окт}}$, μ_σ можно дать геометрическую интерпретацию. Направим оси координат 1, 2, 3 вдоль главных напряжений. Отложим на них главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 для некоторой точки и построим на них вектор OA .

Через точку A проведем октаэдрическую плоскость (девиаторную), из начала координат проведем к ней перпендикуляр, который попадет в точку B (рис. 2.3).

$$OA^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

OB – проекция вектора OA на нормаль к октаэдрической плоскости.

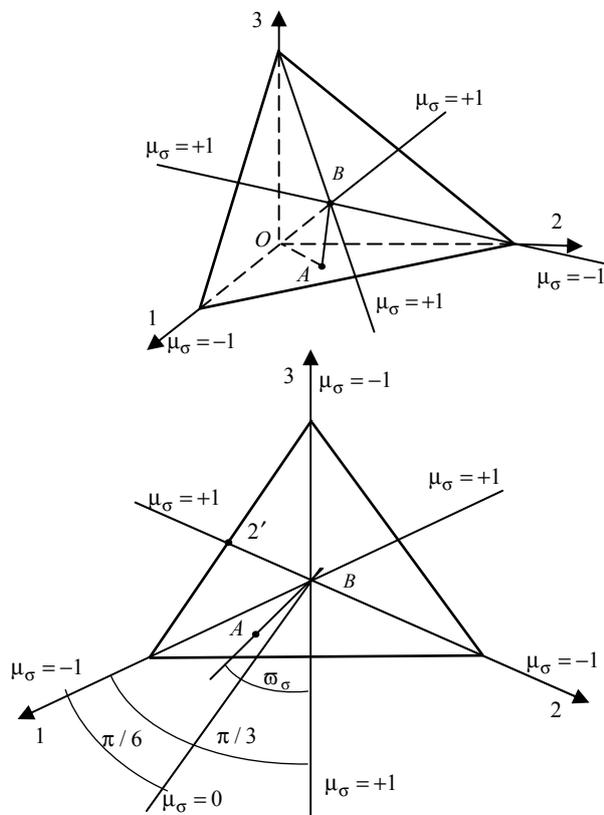


Рис. 2.3. К геометрической интерпретации инвариантов

Она равна сумме проекций составляющих вектора OA , направляющие косинусы которых одинаковы и равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$OB = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_0.$$

Длина вектора BA определяется из равенства

$$BA^2 = OA^2 - OB^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3 \sigma_0^2.$$

Получается

$$BA = \sqrt{3} \tau_{\text{окт}}.$$

Можно сказать, что точка A задается в цилиндрической системе осей координат: $\sqrt{3} \sigma_0$ – осевая координата, $\sqrt{3} \tau_{\text{окт}}$ – радиальная. Необходимо задать еще угол поворота вектора OA относительно оси OB .

Когда вектор OA располагается в плоскости, проходящей через ось 1, $\sigma_2 = \sigma_3$ и $\mu_\sigma = -1$; когда через ось 3, $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\mu_\sigma = +1$. Все остальные положения вектора OA , соответствующие прочим значениям μ_σ , находятся в промежутке между этими крайними

$$-1 \leq \mu_\sigma \leq +1.$$

Положение вектора OA определяется углом ω_σ , отмеряемым от плоскости $OB3$. Можно найти связь между этим углом и величиной μ_σ . Проекция вектора OA на след плоскости $OB2$ в октаэдрической площадке – линию $2 - 2'$ – равна сумме проекций составляющих – $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Косинус угла между осями 1, 2, 3 и октаэдрической площадкой равен $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Приходим к

равенству

$$\sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_2 - \cos \frac{\pi}{3} (\sigma_1 + \sigma_3)) = BA \cos(\frac{\pi}{3} + \omega_\sigma).$$

Учитывается, что

$$BA = \sqrt{3} \tau_{\text{окт}}, \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}}{\sigma} (\sigma_1 - \sigma_3),$$

получаем

$$\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} = \cos(\frac{\pi}{3} + \omega_\sigma), \text{ или}$$

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3} + \omega_\sigma), 0 \leq \omega_\sigma < \frac{\pi}{3}.$$

Главные плоскости $OB1, OB2, OB3$ делят полный угол при точке B в

октаэдрической площадке на шесть частей, равных $\frac{\pi}{3}$, которым в пространстве соответствует 6 равных секторов. Для всех напряженных состояний, имеющих соотношения главных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, векторы OA будут располагаться в одном секторе. При других соотношениях главных напряжений, например $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$, которых всего будет шесть, векторы OA будут располагаться в других секторах (которых тоже шесть).

К зависимости (2.2) можно добавить еще важное соотношение

$$\cos(3\omega_\sigma) = \frac{3\sqrt{3}D_3}{2\sqrt{D_2^3}}$$

и будет видно, что величина μ_σ в простой форме отражает влияние второго и третьего инвариантов девиатора напряжений.

2.9. Критерии прочности бетона

Предельное состояние для бетона – это или хрупкое разрушение с разделением на части, или переход на ниспадающую ветвь диаграммы деформирования и постепенное разрушение после некоторого критического накопления повреждений – псевдопластическое разрушение или псевдопластическое течение. Наступление предельного состояния определяется главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, но их численные предельные значения неизвестны, так как они зависят от соотношения этих напряжений. Возникает вопрос о критерии прочности, который позволял бы определять предельное состояние при любом деформировании.

Критерии обычно конструируют в осях главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и представляют в виде некоторой поверхности, заключающей безопасные (не вызывающие предельного состояния) напряжения внутри себя.

Из классических теорий прочности наибольший интерес вызвала теория О. Мора, согласно которой разрушение происходит вследствие скольжения по некоторым площадкам, на которых касательные напряжения достигают предельного значения $\tau_{\text{пред}}$. Величина $\tau_{\text{пред}}$ зависит от нормальных напряжений, действующих в этой площадке,

$$\tau_{\text{пред}} = f(\sigma).$$

В системе осей координат $\sigma - \tau_{\text{пред}}$ строят круги О. Мора для предельных состояний при различных соотношениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Огибающая этих кругов служит предельной кривой. Если большой круг Мора (постро-

енный на напряжениях $\sigma_1 - \sigma_3$) для исследуемого напряженного состояния касается предельной кривой, то оно предельно.

Эта теория имеет очевидный недостаток – получается, что одно из главных напряжений (σ_2) на наступление предельного состояния не влияет. Применительно к бетону разрабатывались различные модификации теории Мора.

А. А. Гвоздев [4] пришел к выводу, что классические формы разрушения в виде скольжения по некоторым площадкам к бетону неприменимы. Для него преобладающее влияние имеет отрывной механизм разрушения (не только при простом растяжении, но и при кручении и при одноосном и неодносном сжатии). Влияние на прочность оказывает также и напряжение σ_2 , а также дилатация – видимое увеличение объема при разрушении при неравномерном трехосном сжатии.

Дилатация показывает, что если и происходит сдвиговое разрушение бетона, то оно происходит не по классической схеме (согласно которой сдвиг не вызывает изменения объема), а сопровождается увеличением объема. В связи с этим Г. А. Гениев предложил дилатационную теорию деформирования бетона [9]. Не только касательные напряжения вызывают увеличение объема, но и средние напряжения σ_0 могут влиять на деформации сдвига – на изменение формы. Утрачивается классическое представление о том, что шаровой тензор напряжений вызывает только изменение объема, а девiator – только изменение формы. Отчасти поэтому к бетону неприменимы энергетические теории прочности, поскольку в них заложено именно такое классическое разделение.

О. Я. Берг [5] (а также А. А. Гвоздев [11]) считали, что в бетоне сначала образуются трещины отрыва, а затем уже по ним (перпендикулярно им) проходит площадка сдвига. Трещины отрыва – определяющий фактор разрушения, а видимый сдвиг – следствие. Но в этом утверждении есть и некоторая противоречивость: на длине трещины может быть несколько схем разрушения.

О. Я. Берг [5] пришел к выводу, что поверхности разрушения располагаются близко к площадкам средних касательных напряжений $\tau_{\text{ср}}$:

$$\tau_{\text{ср}} = \sqrt{3/15} \tau_{\text{окт}} \approx 0,447 \tau_{\text{окт}}.$$

Эта идея вызвала большой интерес. По мнению О. Я. Берга, законы разрушения бетона при сжатии следует искать в соотношении наибольших нормальных и средних касательных напряжений. Это приводит к отсутствию влияния напряжения σ_2 . Есть мнение, что предельное значение $\tau_{\text{ср}}$ сле-

дует считать функцией нормального напряжения σ , действующего в этой площадке,

$$\tau_{cp} = f(\sigma).$$

Применительно к бетону развитие получила гипотеза А. Надаи [12]: в предельном состоянии октаэдрическое касательное напряжение является функцией октаэдрического нормального напряжения

$$\tau_{окт} = f(\sigma_{окт}).$$

Двухинвариантные критерии прочности

По теории прочности Мора поверхность разрушения в пространстве главных напряжений имеет вид шестигранной пирамиды. Стремление заменить ее поверхностью вращения привело к созданию двухинвариантных критериев прочности, обобщая которые Филоненко-Бородич [13] пришел к выводу, что все они могут быть записаны в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\gamma(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - (R_{bc} - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_{bc}R_{bt},$$

где R_{bc} R_{bt} – пределы прочности при одноосном сжатии и растяжении.

Придавая γ то или иное значение, можно получить те или иные критерии прочности. Геометрической их интерпретацией служат поверхности второго порядка. Уравнения всех этих поверхностей могут быть представлены в виде функциональной связи между первым инвариантом тензора напряжений J_1 и вторым инвариантом девиатора напряжений D_2

$$J_1^2 - AD_2 + B R_{bc} J_1 - C R_{bt} = 0,$$

где A , B , C – коэффициенты, определяемые опытным путем при сложном напряженном состоянии. Однако по мере накопления экспериментальных исследований стали выявляться недостатки этих критериев для тех или иных напряженных состояний.

2.10. Современные направления развития критериев прочности

Одно из направлений – модификация поверхностей вращения – поверхностей разрушения Кулона-Мора. Г. А. Гениев и В. Н. Киссюк предложили ввести третий инвариант девиатора напряжений [14]

$$(AJ_1 + B) \left\{ 1 - (1 - C) \left(1 - \frac{D_3}{2} \left(\frac{D_2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} = 3D_2,$$

где A , B , C – постоянные коэффициенты, зависящие от прочности бетона при одноосном сжатии (R_{bc}), растяжении (R_{bt}), чистом сдвиге (T_c).

Однако применение этого критерия ограничивается тем, что параметры бетона (R_{bc} , R_{bt} , T_c) не всегда обеспечивают выпуклость поверхности прочности (что противоречит постулату Дракера и Хилла для изотропных материалов).

В последнее время чаще всего критерии прочности стремятся записать в виде

$$F(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, \mu_\sigma, R_i) = 0, \quad (2.3)$$

где R_i – прочность материала на осевое растяжение или сжатие.

Нередко μ_σ заменяют углом вида напряженного состояния ω_σ . Один из способов построения такого уравнения предложен М. М. Филоненко-Бородичем [13]. Сначала на основе обработки экспериментальных данных определяют две главные меридиональные кривые: для $\mu_\sigma = 1$ и $\mu_\sigma = -1$. Остальные кривые, для промежуточных значений параметра Лоде-Надаи, находят по интерполяционной зависимости между главными. В интерполяционной зависимости отражают характер изменения девиаторных кривых – следов поверхности прочности на девиаторных сечениях. Этот метод является развитием идеи А. А. Гвоздева [4] о рациональной форме предельной поверхности для бетона. Такой способ использован при конструировании многих критериев прочности, например критериев А. В. Яшина [15] и В. М. Круглова [16], обобщивших большой массив экспериментальных данных по тяжелым бетонам. Когда экспериментальных данных не хватает, формы девиаторной и главных меридиональных кривых принимаются предположительно, а затем уточняются на основе ряда последовательных экспериментальных исследований. Процедура становится трудоемкой. В работе Н. И. Карпенко [17] замечено, что при двусосном сжатии и растяжении графики прочности по сути представляют собой следы девиаторной кривой на плоскости в интервале $-1 < \mu_\sigma < +1$. Это значительно упрощает воспроизведение девиаторных кривых. Кроме того, был замечен довольно простой путь построения меридиональных кривых и предложен способ построения критерия прочности для различных бетонов. Большие экспериментальные исследования по выявлению главных меридиональных кривых выполнены Ю. Н. Малашкиным [18, 19] и А. В. Яшиным [15, 20, 21]. Современные направления в развитии критериев прочности бетона сводятся к нахождению для предельного состояния функциональной зависимости между тремя инвариантами: первым инвариантом тензора напряжений J_1 , вторым D_2 и третьим D_3 инвариантами девиатора напряжений.

$$F(J_1, D_2, D_3) = 0.$$

Вероятно, этими тремя инвариантами могут быть отражены различ-

ные механизмы разрушения бетона: отрывные, сдвиговые и отрывно-сдвиговые. Такие критерии гораздо лучше, чем двухинвариантные, согласуются с результатами экспериментов.

2.11. Общий критерий прочности бетона и способ его построения

В координатах главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ критерий прочности бетона представляется поверхностью $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$. Ее можно изобразить в цилиндрических координатах нормального $\sqrt{3}\sigma_0$ и касательного $\sqrt{3}\tau_0$ октаэдрических напряжений и угла вида напряженного состояния ω_σ или параметра Лоде-Надаи μ_σ . Поверхность состоит из шести одинаковых частей (лепестков), которые располагаются между сечениями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$ (рис. 2.4).

В качестве направляющих поверхности выступают девиаторные кривые, которые являются функциями τ_0 и ω_σ . Формы девиаторных кривых зависят от вида бетона и различаются в различных областях напряженных состояний (неодноосного растяжения, сжатия – растяжения, трехосного сжатия.). Образующими служат меридиональные кривые. Каждому значению μ_σ соответствует своя меридиональная линия. Линии, соответствующие $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$, называют главными. На линии $\mu_\sigma = -1$ находятся точки одноосного растяжения (t_1) и двухосного равномерного сжатия (v_2), а на линии $\mu_\sigma = +1$ – двухосного равномерного растяжения (t_2) и одноосного сжатия (v_1). Точка t_3 соответствует трехосному равномерному растяжению. Поверхность должна удовлетворять некоторым общим требованиям: она должна быть непрерывной, симметричной относительно оси σ_0 , равнонаклонной к координатным осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Согласно постулату Д. Дракера и Р. Хилла она должна быть выпуклой, то есть произведение ее главных кривизн должно быть не меньше нуля. Это условие будет выполняться, если выпуклыми будут девиаторные и меридиональные кривые. Проще строить критерий прочности в координатах $\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma$, то есть в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_3, \mu_\sigma, R_i) = 0,$$

а затем при необходимости переходить к виду (2.3). В основу построения положена характерная функция прочности бетона и функции следов девиаторной кривой на плоских графиках двухосного сжатия и растяжения.

Частный случай характерной функции прочности бетона

За положительные принимаются напряжения растяжения. Главные

напряжения подчиняются неравенству $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ в алгебраическом смысле. Рассматривается сжатие элемента напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. σ_1 и σ_2 – напряжения бокового сжатия. Для определения σ_3 , соответствующего исчерпанию прочности, часто применяют условие вида

$$\sigma_3 = \beta_n \sigma_1 - R_{bc}. \quad (2.4)$$

Ряд авторов принимал $\beta_n = 4,1$; другие предлагали брать $\beta_n = 5$; предлагались и другие значения; некоторые предлагали принимать β_n переменным, зависящим от σ_1 или от класса бетона.

В работе [22] показано, что величина β_n зависит в основном от отношения σ_1 / σ_3 .

Вводятся безразмерные (относительные) напряжения

$$\bar{\sigma}_1 = -\frac{\sigma_1}{R_{bc}}, \bar{\sigma}_2 = -\frac{\sigma_2}{R_{bc}}, \bar{\sigma}_3 = -\frac{\sigma_3}{R_{bc}}.$$

Теперь $\bar{\sigma}_3 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \bar{\sigma}_1$. Условие (2.4) преобразуется к виду

$$\bar{\sigma}_3 = 1 + \beta_n \bar{\sigma}_1. \quad (2.5)$$

Разделим на $\bar{\sigma}_3$ и обозначим $\bar{\sigma}_1 / \bar{\sigma}_3 = m$. Получим

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{1}{1 - \beta_n m}.$$

Если β_n не меняется, то при $m \rightarrow \beta_n^{-1}$ наступает неразрушимость материала, и это при сравнительно невысоком отношении, например $m = 1/4,1$. При более высоком отношении $m = \bar{\sigma}_1 / \bar{\sigma}_3$ условие (2.4) неприменимо. Логично предположить, что неразрушимость наступает только в одном случае (и только для плотных бетонов) – в случае трехосного равномерного сжатия (при $m = \bar{\sigma}_1 / \bar{\sigma}_3 = 1$). Значит параметр β_n должен быть переменным и должен стремиться к 1 при $m \rightarrow 1$. На основе экспериментов для плотных

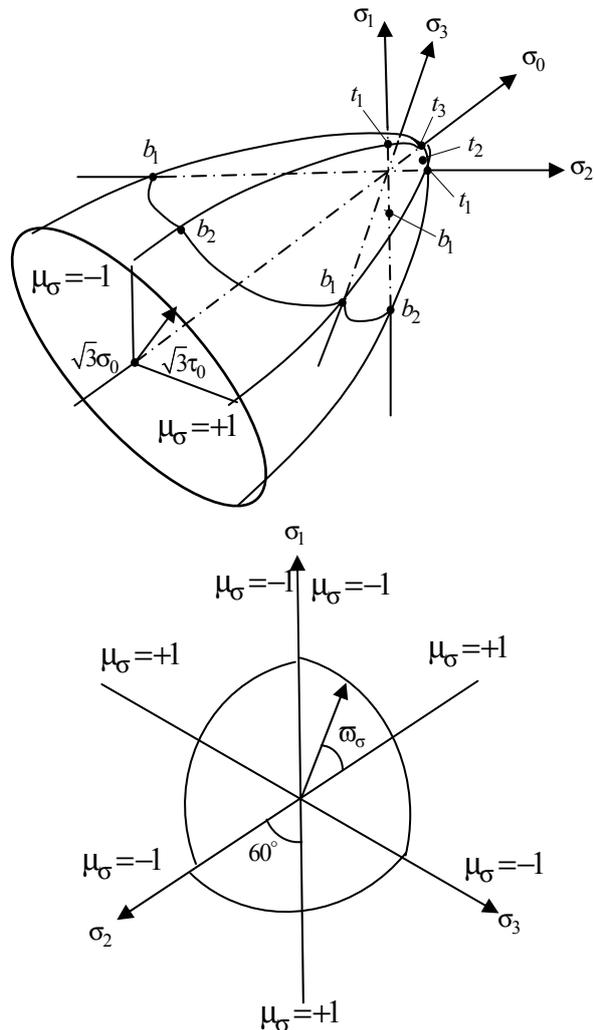


Рис. 2.4. Геометрическая интерпретация критериев прочности

бетон можно взять функцию

$$\beta_n = \frac{1 + a - am}{b + (1 - b)m}, \quad (2.6)$$

где a, b – коэффициенты материала, определяемые из опытов.

Функция (2.6) достаточно универсальна и хорошо согласуется с результатами опытов. Она отражает различные механизмы разрушения бетона: от отрыва (при самых высоких значениях β_n), затем от комбинаций отрыва и сдвига и, наконец, при $\beta_n < 3$ – от сдвига.

Общая зависимость для характерной функции прочности бетона

Функцию (2.5) можно распространить на все случаи трехосного сжатия, если вместо единицы ввести функцию изменения прочности бетона при двухосном сжатии K_c

$$\sigma_3 = K_c + \beta_n \sigma_1. \quad (2.7)$$

Зависимость (2.7) в сочетании с (2.6) не распространяется на смешанные напряженные состояния растяжения – сжатия и на случаи чистого растяжения. Этот недостаток можно устранить, приняв функцию β_n и входящий в нее параметр m в виде

$$\beta_n = \frac{1 + a - am}{b + (f - b)m}, \quad (2.8)$$

$$m = \frac{\sigma_1 + \delta_p}{\sigma_3 + \delta_p}, \quad (2.9)$$

где δ_p – функция изменения прочности бетона при двухосном растяжении.

Параметр f определяет, будет ли поверхность прочности разомкнутой (при $f = 1$) или замкнутой (при $f > 1$) в области всестороннего равномерного сжатия.

Функция (2.7) в сочетании с (2.8) – общая характерная функция прочности бетона при объемном напряженном состоянии.

Распространение функции β_n на область растяжения накладывает на параметры a и b ограничение. Выражение (2.8) хорошо описывает прочность бетона в области растяжения, если в случае плоского растяжения условие (2.9) приводит к $m = 0$. Это будет выполняться, если при $\sigma_3 = 0$ $\sigma_1 + \delta_p = 0$. Учитывая это, выражения (2.7) и (2.8) можно преобразовать к виду

$$0 = K_c - \beta_n \delta_p; \beta_n = \frac{1+a}{b}.$$

Внося β_n в первое уравнение, находим

$$K_c b - (1+a) \delta_p = 0.$$

Обозначая $a/b = n$, получаем

$$b = \frac{\delta_p}{K_c - n\delta_p}. \quad (2.10)$$

Если $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ($\mu_\sigma = +1$), то $K_c = 1$, $\delta_p = \delta_{p(2)} = R_{et(2)} / R_{ec}$, где $R_{et(2)}$ – прочность бетона при двухосном равномерном растяжении.

Если $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ($\mu_\sigma = -1$), то $K_c = K_{c(2)} = R_{ec(2)} / R_{ec}$, $\delta_p = \delta_{p(1)} = R_{et} / R_{ec}$, где $R_{ec(2)}$ – прочность бетона при двухосном равномерном сжатии.

Таким образом, в относительных функциях K_c и δ_p прочность бетона относится к его прочности при одноосном сжатии.

Новые значения β_n также удовлетворительно согласуются с данными экспериментов, но параметры функции β_n изменились. Для тяжелых бетонов $n = 1 \dots (-1)$, для мелкозернистых $n = (-1) \dots (-3)$. Значения b определяются по формуле (2.10).

Параметр β_n показывает эффективность бокового обжатия при неодносном сжатии типа $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. При низких уровнях обжатия (малых значения m) она особенно высока ($\beta_n = 8 \dots 10$), затем постепенно снижается и при очень высоких уровнях $\beta_n \rightarrow 1$. Значения функций прочности бетона при двухосном сжатии (K_c) и двухосном растяжении (δ_p) связываются с параметром Лоде-Надаи

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

В случае двухосного сжатия ($\sigma_1 = 0$)

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{1 - \mu_\sigma}{2}, \quad (2.11)$$

а двухосного растяжения ($\sigma_3 = 0$)

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 + \mu_\sigma}{2}. \quad (2.12)$$

Функции K_c и δ_p устанавливаются на основе экспериментальных данных. K_c выбирается так, что при двухосном сжатии ее значения совпадают с предельными значениями $\bar{\sigma}_3$

$$K_c = \bar{\sigma}_3 = f(\bar{\sigma}_2 / \bar{\sigma}_3). \quad (2.13)$$

Сначала по экспериментальным данным устанавливаются промежу-

точные аппроксимации вида (2.13), затем на основе выражения (2.11) строится функция $K_c = f(\mu_\sigma)$.

Аналогично определяется и функция δ_p . При двухосном растяжении $\sigma_1 + \delta_p = 0$, откуда

$$\delta_p = -\sigma_1 = \sigma_1 / R_{bc}.$$

Сначала на основе экспериментов находятся промежуточные аппроксимации вида

$$\delta_p^* = \delta_p / \delta_{p(1)} = \sigma_1 / R_{bc} = f(\sigma_2 / \sigma_1),$$

затем на основе выражения (2.12) они преобразуются в функцию

$$\delta_p = f(\mu_\sigma).$$

Общее условие прочности

Представляя выражения (2.9) и (2.8) в равенство (2.7), получаем условие прочности в окончательном виде

$$a\sigma_1^2 + e\sigma_3^2 - \sigma_1(K_c(f - e) + \delta_p) - \sigma_3(K_c e - f\delta_p) - \sigma_1\sigma_3(a + e + 1 - f) - K_c f \delta_p = 0; \\ (\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3). \quad (2.14)$$

Для трехосного равномерного растяжения ($\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$) из условия (2.14) следует

$$\sigma^2(f - 1) - \sigma(K_c f - \delta_p(f - 1)) - K_c f \delta_p = 0 \quad (2.15)$$

При $f = 1$ уравнение (2.15) имеет единственное решение $\sigma = -\delta_p$, в области растягивающих напряжений. Всестороннее равномерное сжатие не приводит к разрушению; критерий является разомкнутым. Такими свойствами обычно наделяют условия для тяжелых бетонов. При $f \neq 1$ уравнение (2.15) имеет два решения: $\sigma = -\delta_p$ и $\sigma = K_c f / (f - 1)$. Первое относится к случаю равномерного растяжения, второе – к случаю равномерного сжатия. Это согласуется с экспериментальными данными для бетонов на пористых заполнителях.

2.12. Использование критерия прочности

Критерий прочности удовлетворяется в виде равенства при предельных напряжениях. Коэффициент θ , на который надо умножить текущие напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (или некоторые из них в зависимости от режима нагружения), чтобы они стали предельными, называется коэффициентом за-

паса прочности. Величина, обратная θ , называется уровнем напряжений η

$$\eta = 1/\theta.$$

Прочность обеспечена, если $\theta \geq 1$ или $\eta \leq 1$. Условие (2.14), записанное в относительных напряжениях $\tilde{\sigma}_i$, может быть переписано и в напряжениях обычных (абсолютных) σ_i , $i = 1, 2, 3$.

$$a\sigma_1^2 + \epsilon\sigma_3^2 + \sigma_1(R_{\epsilon c}K_c(f - \epsilon) + \delta_p^* R_{\epsilon t}) + \sigma_3(K_c\epsilon R_{\epsilon c} - f\delta_p^* R_{\epsilon t}) - \sigma_1\sigma_3(a + \epsilon + 1 - f) - K_c f \delta_p^* R_{\epsilon t} R_{\epsilon c} = 0;$$

где $\delta_p^* = \delta_p/\delta_{p(1)} = \delta_p R_{\epsilon c}/R_{\epsilon t}$; $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Обозначая предельные напряжения через $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$, зная текущие напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, для простого нагружения запишем

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1/\eta, \hat{\sigma}_2 = \sigma_2/\eta, \hat{\sigma}_3 = \sigma_3/\eta. \quad (2.16)$$

Внося эти значения в условие прочности, из решения квадратного уравнения находим величину η . В случае одностороннего догружения главными напряжениями σ_1 (обычно напряжениями растяжения) будем иметь

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1/\eta, \hat{\sigma}_2 = \sigma_2, \hat{\sigma}_3 = \sigma_3. \quad (2.17)$$

При одностороннем догружении напряжениями σ_3 (обычно напряжениями сжатия)

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1, \hat{\sigma}_2 = \sigma_2, \hat{\sigma}_3 = \sigma_3/\eta. \quad (2.18)$$

Параметры μ_σ уточняются в процессе последовательных решений, пока они не будут соответствовать напряжениям $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$.

Если режим догружения неизвестен, то в случае $\sigma_1 > 0$ уровень напряжений η можно вычислить дважды: исходя из равенств (2.16) и (2.17). Из двух значений η следует взять большее. В случае $\sigma_1 < 0$ условие (2.18) всегда приводит к более высокому уровню.

2.13. Трещинообразование и разрушение

Нарушение условия прочности может означать или полное разрушение элемента или разделение его трещинами на отдельные части, которые еще могут воспринимать определенным образом ориентированные напряжения (направленные вдоль трещин). Различают следующие схемы разрушения:

Схема 0 – разрушение по всему объему вследствие трехосного, двухосного или одноосного сжатия.

Схема 1 – образование трещины, площадка которой ортогональна

главному растягивающему напряжению σ_1 .

Схема 2 – образование двух взаимно ортогональных трещин, площади которых ортогональны главным напряжениям σ_1 и σ_2 (обычно при $\sigma_1 \approx \sigma_2$).

Схема 3 – образование трех взаимно ортогональных трещин, обычно при $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3$. при такой схеме элемент не может воспринимать растягивающие напряжения.

Для схемы 0 возможны два случая: происходит быстрое разрушение бетона, и элемент полностью выключается из работы или начинается постепенное разрушение с образованием множества внутренних трещин, пока не выделится некоторая магистральная трещина, приводящая к разрушению. Напряжения при этом уменьшаются при росте деформаций.

При схемах 1 – 3 напряжения, нормальные к площадке трещины, скачкообразно уменьшаются до нуля (в сквозных трещинах) или до некоторых небольших значений в оставшихся связях зацепления берегов (в прерывистых трещинах), которые затем уменьшаются как на нисходящей ветви диаграммы $\sigma - \varepsilon$.

Бетону свойственна ползучесть, но в малые промежутки времени после нагружения она проявляется мало. Поэтому кратковременное и длительное действие нагрузки изучают отдельно. В моделях кратковременного действия деформации ползучести (быстронатекающей) относят к неупругим деформациям, и время действия нагрузки в рассмотрение не вводят. Изучают сначала центральное сжатие и растяжение, чтобы зависимость между напряжениями и деформациями для объемного напряженного состояния определять на этой основе.

2.14. Диаграммы сжатия и растяжения бетона

Диаграммы устанавливают связь между деформациями ε_s и напряжениями σ_s в поперечных сечениях образца нагружаемого кратковременной нагрузкой в течении 20 – 60 мин.

За эталон принимаются диаграммы, построенные при постоянных скоростях роста деформаций (а не напряжений). Диаграммы имеют две ветви: восходящую до вершины с напряжениями $\sigma_s = \sigma_{s,c}$ при сжатии и $\sigma_s = \sigma_{s,t}$ при растяжении и нисходящую (рис. 2.5). В расчетах значения $\sigma_{s,c}$ и $\sigma_{s,t}$ принимают равными или нормативным $R_{s,ser}$, $R_{s,t,ser}$, или расчетным $R_{s,c}$, $R_{s,t}$ характеристикам бетона. Характер искривления диаграмм определяется

образованием внутренних трещин – развитием псевдопластических деформаций.

Еще до нагружения бетон имеет внутренние напряжения, микротрещины и другие дефекты. В начале сжатия происходит частичное закрытие трещин и некоторое уплотнение структуры бетона. Затем начинается образование новых микротрещин, в основном трещин отрыва, которое сменяется процессом их неустойчивого развития, ветвления, объединения в неустойчивые макротрещины (вблизи вершины диаграммы, особенно на нисходящей ветви), приводящим в итоге к разрушению образца.

Вблизи вершины диаграммы при уменьшении скорости роста напряжений и при уменьшении напряжений (с определенной скоростью) на нисходящей ветви трещинообразование тормозится. Нисходящие ветви различны в зависимости от скорости уменьшения напряжений и даже могут проявляться лишь частично или вовсе отсутствовать. Учет таких неустойчивых ниспадающих ветвей в расчетах оправдывается двумя обстоятельствами: небольшими различиями в результатах расчетов при изменении ниспадающих ветвей в определенных рамках и улучшением сходимости расчетов с экспериментами при учете этих ветвей (они увеличивают перераспределительную способность напряжений в конструкциях).

По предложению О. Я. Берга [5], на восходящей ветви выделяют две параметрические точки: нижнюю – 1, соответствующую началу образования новых трещин (началу отклонения диаграммы от прямой), и верхнюю – 2, вблизи вершины диаграммы, соответствующую началу неустойчивого развития внутренних трещин. Практически это та точка, в которой объемные деформации при сжатии становятся равными нулю (перед тем, как начать увеличиваться). В работах украинской школы выделяется еще одна точка на ниспадающей ветви – соответствующая образованию магистральной трещины разрушения. Ниже этой точки (уровень нагружения 0,5 – 0,7) использовать нисходящую ветвь в расчетах не рекомендуется. В некоторых нормативных документах применение ниспадающей ветви ограни-

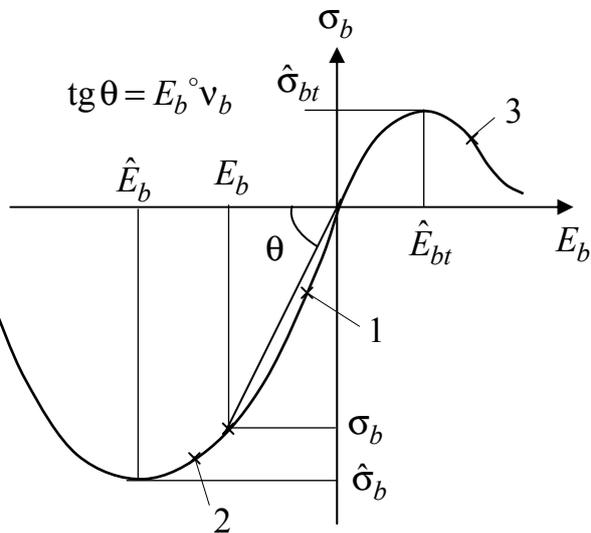


Рис. 2.5. Диаграмма растяжения и сжатия бетона

чивается более высокой точкой – при уровне напряжений 0,8, – но вопрос об этих ограничивающих точках еще требует исследования.

В отличие от сжатия при растяжении начальные дефекты структуры, особенно усадочные трещины в поверхностном слое, не закрываются, а раскрываются, а затем и развиваются. При этом важны всякие преграды на пути развития трещин: крупный заполнитель, армирование. Этот процесс прерывается в некоторой точке на ниспадающей ветви образованием магистральной трещины (при ширине раскрытия примерно 0,025 – 0,035 мм). Ниспадающая ветвь в этой точке не заканчивается, но после нее происходит скачкообразное падение напряжений до низкого уровня. Остаются только некоторые условно распределенные по площади трещины напряжения в остаточных связях зацепления берегов трещин в виде бетонных мостиков. Точка образования магистральных трещин 3 – расчетная точка перехода элемента из стадии деформирования бетона без трещин в качественно новую (особенно для железобетонных элементов) стадию работы с трещинами. За этой точкой – точкой трещинообразования, моментом трещинообразования – арматура железобетонных элементов переходит в иную стадию деформирования, что приводит к изменению физических соотношений. В расчетах железобетонных элементов ниспадающая ветвь после трещинообразования учитывается иным путем – заданием некоторых напряжений зацепления берегов трещин.

Для использования диаграмм в расчетных зависимостях их часто характеризуют секущими модулями – произведениями $\nu_B E_B^0$, где E_B^0 – начальный модуль упругости бетона, ν_B – коэффициент упругости. В начале деформирования $\nu_B = 1$, а с увеличением напряжений (и деформаций) его величина быстро уменьшается.

Построение диаграммы сжатия или растяжения бетона – важнейший вопрос расчета конструкций с учетом неупругих свойств. Большое число предложений на этот счет описывается, например, в работе [23]. Рассмотрим диаграмму сжатия, предложенную Н. И. Карпенко в работе [24] и исследованную в работах Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиева и А. Н. Петрова [10, 23].

Сжимающие напряжения и деформации укорочения принимаются отрицательными. Для центрального сжатия принимается следующая зависимость

$$\varepsilon_\sigma = \sigma_\sigma / (E_\sigma^0 \nu_\sigma) \quad (2.19)$$

где $E_\sigma^0 \nu_\sigma$ – секущий модуль деформации, ν_σ – коэффициент изменения секущего модуля – коэффициент упругости.

Коэффициент v_ϵ зависит от уровня напряжений

$$v_\epsilon = \hat{v}_\epsilon + (v_0 - \hat{v}_\epsilon) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}, \quad 0 \leq v_\epsilon \leq 1. \quad (2.20)$$

Здесь \hat{v}_ϵ – значение v_ϵ в вершине диаграммы; η – уровень напряжений ($0 \leq \eta \leq 1$); ω_1, ω_2 – параметры кривизны диаграммы.

$$\hat{v}_\epsilon = \hat{\sigma}_\epsilon / (E_B^0 \hat{\epsilon}_\epsilon); \quad \hat{\sigma}_\epsilon = -R_{\epsilon, ser}; \quad (2.21)$$

$$\eta = \sigma_\epsilon / \hat{\sigma}_\epsilon; \quad \omega_2 = 1 - \omega_1. \quad (2.22)$$

v_0 – значение v_ϵ в начале диаграммы.

Для восходящей ветви ($/\epsilon_B / \leq / \hat{\epsilon}_\epsilon /$)

$$v_0 = 1; \quad \omega_1 = 2 - 2,5 \hat{v}_\epsilon; \quad (2.23)$$

для нисходящей ($/\epsilon_B / > / \hat{\epsilon}_\epsilon /$)

$$v_0 = 2,05 \hat{v}_\epsilon; \quad \omega_1 = 1,95 \hat{v}_\epsilon - 0,138. \quad (2.24)$$

Деформации в вершине диаграммы $\hat{\epsilon}_\epsilon$ для тяжелого и мелкозернистого батона по предложению Т. А. Мухамедиева принимаются

$$\hat{\epsilon}_\epsilon = -\epsilon_R = - \frac{(18 + R_{\epsilon, ser})(62R_{\epsilon, ser} + 0,675R_{\epsilon, ser}^2 + 22)}{(53000 - 62R_{\epsilon, ser})(7R_{\epsilon, ser} + R_{\epsilon, ser}^2 + 22)},$$

где $R_{\epsilon, ser}$ в МПа.

Параметры \hat{v}_ϵ и ω_1 существенно влияют на кривизну диаграммы, особенно вблизи вершины. Их значения устанавливаются экспериментально: \hat{v}_ϵ – из условия совпадения вершин опытных и расчетных диаграмм, а ω_1 – из условия совпадения величин v_ϵ при уровнях напряжений $\eta \approx 0,85$ отдельно для восходящей и нисходящей ветвей. Подставляя в выражение (2.20) $\eta = 0,85$, получаем

$$\omega_1 = 2,176 - \frac{1}{0,1275} \left(\frac{v_{оп} - \hat{v}_\epsilon}{v_0 - \hat{v}_\epsilon} \right)^2,$$

где $v_{оп} = 0,85 \hat{\sigma}_\epsilon / (E_B^0 \epsilon_{в.оп})$; $\epsilon_{в.оп}$ – опытное значение деформаций.

Формула (2.20) определена на отрезке $\eta = 0 \dots 1$, если подкоренное выражение $0 \leq 1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2 < 1$. Это условие выполняется, если $\omega_1 > 2$ (при $\omega_2 = 1 - \omega_1$).

Диаграмма растяжения

Выражения (2.19) – (2.24), выражения для параметров v_0, ω_1 относятся и к диаграммам растяжения. В них только следует заменить индекс « ϵ » индексом « st » и ввести новые значения параметров:

$$\hat{\sigma}_{st} = R_{st, ser} \gamma_{stg}; \quad \eta = \sigma_{st} / \hat{\sigma}_{st};$$

$$\hat{\nu}_{et} = (0,6 + 0,15 R_{etn} / 25) / \hat{\gamma}_{etg};$$

где $\hat{\gamma}_{etg}$ – коэффициент, учитывающий влияние градиентов деформаций; вводится, если диаграмма используется в расчетах изгибаемых элементов.

2.15. Поперечные деформации бетона

При сжатии или растяжении бетона в некотором направлении деформации возникают не только в этом направлении – продольные, но и в направлениях перпендикулярных – поперечные.

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= -\varepsilon_e \mu_e, \\ \varepsilon_{pt} &= -\varepsilon_{et} \mu_{et}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где ε_p , ε_{pt} – поперечные деформации при продольном сжатии или растяжении; ε_e , ε_{et} – продольные деформации; μ_e , μ_{et} – коэффициенты поперечной деформации при продольном сжатии и растяжении соответственно.

При увеличении уровня напряжений сжатия коэффициент поперечной деформации μ_e возрастает от начального значения $\mu_e^0 = 0,15 \dots 0,2$ до значений, приближающихся к 0,5, а иногда и выше. Это может быть отражено зависимостью

$$\mu_e = \hat{\mu}_e + (\mu_e^0 - \hat{\mu}_e) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad (2.26)$$

где $\hat{\mu}_e$ значение μ_e в вершине диаграммы сжатия

$$\hat{\mu}_e = \mu_e^0 + 1 - \sqrt[3]{\hat{\nu}_e}$$

Формула (2.26) – для восходящей ветви поперечных деформаций. Для нисходящей надо μ_e^0 заменить на $\mu \geq 2\hat{\mu}_e$ и знак «+» заменить на «-». Увеличение уровня напряжений растяжения приводит к уменьшению коэффициента поперечной деформации. Это можно учесть приближенно, приняв

$$\mu_{et} = \mu_e^0 \nu_{et},$$

или использовать формулу (2.26), принимая для нее

$$\hat{\mu}_e = \hat{\mu}_{et} = \mu_e^0 \hat{\nu}_{et}.$$

На основе выражений (2.19) и (2.25) можно написать

$$\varepsilon_p = -\frac{\sigma_e}{E_e^0} \frac{\mu_e}{\nu_e}, \quad \varepsilon_{pt} = -\frac{\sigma_{et}}{E_e^0} \frac{\mu_{et}}{\nu_{et}}.$$

2.16. Исходные физические соотношения

В случае трехосного напряженного состояния обозначения напряжений и деформаций связаны с направлением координатных осей 1, 2, 3. Если с этих позиций описать одноосное сжатие, то будет

$$\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_3, \quad \sigma_{\sigma} = \sigma_3, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0,$$

$$\nu_{\sigma} = \nu_{\sigma 3}, \quad \mu_{\sigma} = \mu_{\sigma 1-3} = \mu_{\sigma 2-3};$$

а для одноосного растяжения будет

$$\varepsilon_{\sigma t} = \varepsilon_1, \quad \sigma_{\sigma t} = \sigma_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_{pt}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\nu_{\sigma t} = \nu_{\sigma 1}, \quad \mu_{\sigma t} = \mu_{\sigma 2-1} = \mu_{\sigma 3-1}.$$

Между векторами деформаций $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}^T$ и напряжений $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^T$

получаются следующие физические зависимости:

для сжатия

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{\sigma}} \begin{bmatrix} \circ \circ & -\mu_{\sigma 13} & / \nu_{\sigma 3} \\ \circ \circ & -\mu_{\sigma 23} & / \nu_{\sigma 3} \\ \circ \circ & -1 & / \nu_{\sigma 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix},$$

для растяжения

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & / \nu_{\sigma 1} & \circ \circ \\ -\mu_{\sigma 21} & / \nu_{\sigma 1} & \circ \circ \\ -\mu_{\sigma 31} & / \nu_{\sigma 1} & \circ \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \sigma_0 \end{Bmatrix},$$

где в матрице податливости точками обозначены элементы, которые в этом исследовании не определены.

2.17. Контрольные вопросы

1. Структура бетона и механизмы его разрушения.
2. Напряженное состояние в точке. Шаровой тензор и девиатор напряжений.
3. Инварианты напряженного состояния в точке.
4. Октаэдрические напряжения.
5. Параметр Лоде – Надаи по напряжениям.

6. Геометрическая интерпретация октаэдрических напряжений и параметры Лоде – Надаи.
7. Критерии прочности бетона.
8. Общий критерий прочности бетона и его построение. Функция прочности бетона.
9. Использование критерия прочности.
10. Трещинообразование и разрушение бетона.
11. Диаграммы сжатия и растяжение бетона.

Глава 3. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИЗГИБАЕМОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ

При расчете изгибаемой железобетонной плиты важно правильно установить зависимость между напряжениями и деформациями, между изгибающим и крутящим моментами и кривизнами и кручением срединной поверхности плиты. Устанавливается она по-разному для чистого бетона, железобетона без трещин и железобетона, в котором под действием внешних сил возникли трещины. За основу могут быть взяты уравнения, приведенные в монографии [3].

3.1. Деформирование бетона

Здесь используются работы [3, 10, 23 – 26].

В случае объемного напряженного состояния бетон принимается ортотропным материалом с осями ортотропии, совпадающими с главными осями напряжений и деформаций 1, 2, 3. В этих осях и устанавливается связь между напряжениями и деформациями

$$\begin{aligned} \{\epsilon_b\}_1 &= [C_b]_1 \{\sigma_b\}_1, \\ \{\epsilon_b\}_1 &= \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, 0, 0, 0\}^T, \\ \{\sigma_b\}_1 &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, 0\}^T, \end{aligned}$$

причем деформации и напряжения при сжатии отрицательные.

Матрица податливости $[C_b]_1$ для простого или активного нагружения представляется в виде

$$[C_b]_1 = \frac{1}{E_b^o} \begin{bmatrix} 1/v_{b1} & -\mu_{b12}/\nabla_b & -\mu_{b13}/\nabla_b & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{b12}/\nabla_b & 1/v_{b2} & -\mu_{b23}/\nabla_b & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{b13}/\nabla_b & -\mu_{b23}/\nabla_b & 1/v_{b3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/v_{G12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/v_{G23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/v_{G31} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

E_b^o – начальный модуль упругости бетона, v_{be} – коэффициент изменения модуля, $E_b^o v_{be}$ – секущий модуль деформации в направлении e , $\mu_{бек}$ – коэффициент поперечной деформации, ∇_b – доля v_{be} , определяемая максимальным по модулю сжимающим напряжением σ_3 , $v_{Gек}$ – коэффициент изменения модуля сдвига в осях e, κ ; $e, \kappa = 1, 2, 3$.

Величина v_{be} зависит от уровня напряжений $\eta_e = \frac{\sigma_{be}}{\hat{\sigma}_{be}}$, причем диаграмма имеет восходящую и нисходящую ветви и представляется уравнением

$$v_{be} = \hat{v}_{be} \pm (v_{oe} - \hat{v}_{be}) \sqrt{1 - \omega_{1e} \eta_e - \omega_{2e} \eta_e^2}, \quad (3.2)$$

знак «минус» для нисходящей ветви;

v_{oe} – начальное значение v_{be} ; $\hat{v}_{be}, \hat{\sigma}_{be}$ – значения v_{be} и σ_{be} в вершине диаграммы.

$$\omega_{1e} = 2 - 2,05 \hat{v}_{be}, \quad \omega_{2e} = 1 - \omega_{1e}.$$

Коэффициент $\mu_{бек}$ зависит от уровня максимального по модулю сжимающего напряжения $\eta_3 = \frac{\sigma_{b3}}{\hat{\sigma}_{b3}}$

$$\mu_{бек} = \mu_{бкк} = \hat{\mu}_{бек} + (\mu_b^o - \hat{\mu}_{бек}) \sqrt{1 - \eta_3^2}, \quad (3.3)$$

где $\mu_b^o = 0,15 \dots 0,20$ – начальное значение $\mu_{бек}$, $\hat{\mu}_{бек}$ – значение $\mu_{бек}$ в вершине диаграммы.

$$\frac{1}{v_{Гек}} = \frac{1}{v_{be}} + \frac{1}{v_{bk}} + \frac{2\mu_{бек}}{\tilde{v}_b}. \quad (3.4)$$

Величины, входящие в уравнения (3.2), (3.3), определяются различно в двух областях напряженного состояния: области I, для которой $\sigma_1 < 0$, и области II, где $\sigma_1 > 0$.

Область I – всестороннее сжатие.

При сжатии увеличение напряжений в одном направлении вызывает примерно одинаковое изменение модулей деформации во всех направлениях, а коэффициент поперечной деформации увеличивается в несколько раз. Ведущим уровнем напряжений принимается $\eta_3 = \frac{\sigma_{b3}}{\hat{\sigma}_{b3}}$. Принимается $v_{b1} = v_{b2} = \tilde{v}_b = v_{b3}$. В формуле (3.2) полагают $\eta_e = \eta_3$ и

$$v_{oe} = v_{o3} = v_{oe}^o \left(1 - C \sqrt[3]{\left| \frac{\sigma_3}{\hat{\sigma}_b} \right|} \right),$$

$v_{oe}^o = 1$ на восходящей ветви, $v_{oe}^o = 2,05 \hat{v}_{b3}$ на нисходящей. На восходящей ветви

$$C = (0,75 |\hat{v}_b - \hat{v}_{b3}|)^s, \quad s = \frac{R_1}{R_2 - \hat{\sigma}_b}, \quad s \leq 5;$$

$R_1 = 60$ МПа, $R_2 = 75$ МПа, \hat{v}_b – для одноосного сжатия; для нисходящей ветви можно взять $C = 0$.

$$\hat{v}_{b1} = \hat{v}_{b2} = \hat{v}_b = \hat{v}_{b3} = \hat{v}_b \varphi_R^n, \quad (3.5)$$

$n \approx 1$; $\varphi_R = \left| \frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\sigma}_{b3}} \right|$, $\varphi_R \leq 0$, $\hat{\sigma}_b$ – для одноосного сжатия.

Для формулы (3.3)

$$\hat{\mu}_{бек} = \mu_b^o + \left(1 - \sqrt[3]{\hat{v}_{b3}} \right) \chi_{ек}, \quad \chi_{ек} = \frac{|\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_k| \varphi_R^s + |\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3| (1 - \varphi_R^s)}{\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3},$$

$s = 1$ для тяжелого бетона.

Область II, $\sigma_1 > 0$ – смешанные напряжения и всестороннее растяжение.

При растяжении увеличение напряжений в одном направлении вызывает уменьшение модуля деформации преимущественно в этом направ-

лении, а коэффициент поперечных деформаций несколько уменьшается. Увеличение поперечных деформаций в этой области также определяется сжатием. Каждое главное напряжение представляется суммой положительного σ_e^+ и отрицательного σ_e^- , одно из которых равно нулю. Принимают

$$\hat{\nu}_{be} = \hat{\nu}_{be}^+ \hat{\nu}_{b3}^-, \quad \nu_{oe}^o = 1, \quad \hat{\nu}_{be}^+ = 1 - (1 - \hat{\nu}_{bt})^4 \sqrt{\frac{\sigma_e^+}{\sigma_{bt}}}, \quad \frac{\sigma_e^+}{\sigma_{bt}} \leq 1,$$

σ_{bt} – для одноосного растяжения.

$$\hat{\nu}_{b3}^- = 1 - (1 - \hat{\nu}_b) \left| \frac{\sigma_3^-}{\sigma_b} \right|, \quad \text{если} \left| \frac{\sigma_3^-}{\sigma_b} \right| \leq 1;$$

если это неравенство нарушается, то $\hat{\nu}_{b3}^-$ вычисляется по формуле (3.5), если $\sigma_3^- = 0$, то $\hat{\nu}_{b3}^- = 1$.

Величина $\tilde{\nu}_b$ определяется по формуле (3.2), полагая $\hat{\nu}_{be} = \hat{\nu}_{b3}^-$.

В формуле (3.3) принимается

$$\mu_{бек} = \mu_b^o + \left(1 - \sqrt[3]{\hat{\nu}_{b3}^-} \right) \cdot \frac{|\sigma_e^{\Pi} - \sigma_k^{\Pi}|}{|\sigma_1^{\Pi} - \sigma_3^{\Pi}|}, \quad \sigma_e^{\Pi} = \sigma_e \alpha_R,$$

где $\alpha_R = \left| \frac{\sigma_b}{\sigma_{bt}} \right|$ для растягивающих напряжений σ_e^+ и $\alpha_R = 1$ для сжимающих напряжений σ_e^- .

Для нахождения предельных напряжений $\hat{\sigma}_e$ используется критерий прочности, основанный на общей функции прочности бетона при объемном напряженном состоянии [3, 17, 22].

$$\tilde{\sigma}_3 = \beta_{\Pi} \tilde{\sigma}_1 + K_c, \quad \tilde{\sigma}_e = -\sigma_e / R_{bc},$$

где R_{bc} – предел прочности бетона на сжатие, K_c – функция изменения прочности бетона при двухосном сжатии.

$$\beta_{\Pi} = \frac{1 + a - am}{b + (f - b)m}, \quad m = \frac{\sigma_1 + \delta_p}{\sigma_3 + \delta_p},$$

где a, b, f – экспериментальные параметры, δ_p – функция изменения проч-

ности при двухосном растяжении.

Общий критерий прочности имеет вид

$$a\sigma_1^2 + b\sigma_3^2 - \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_3(a + b + 1 - f) - \tilde{\sigma}_1[K_c(f - b) + \delta_p] - \\ - \tilde{\sigma}_3(K_c b - f\delta_p) - K_c f \delta_p = 0.$$

Для тяжелого бетона принимается $a = b, f = 1$. Критерий приобретает вид

$$b(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3)^2 + (K_c b - \delta_p)(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3) - K_c(\tilde{\sigma}_1 + \delta_p) = 0, \quad (3.6)$$

$$b = \frac{\delta_p}{K_c + (s - 1)\delta_p}, \quad s = \frac{\tilde{\sigma}_3}{\tilde{\sigma}_1}.$$

Величины K_c и δ_p представляют собой функции параметра Лодэ – Надаи

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

и подробно определяются в работе [3]. Основываясь на экспериментах, для функции K_c можно принять универсальную зависимость

$$K_c = 1 + \varphi_R = 1 + \varphi_{R(e)} \left\{ 1 - \left[\frac{(1 - c)(1 - \mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1 - \mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\}, \quad (3.7)$$

где φ_R – приращение прочности бетона при двухосном сжатии по сравнению с одноосным, $\varphi_{R(e)}$ – максимальное значение φ_R ; e, c – экспериментальные параметры (e определяет положение максимума K_c , $0 < e < 1$).

Можно принять

$$e = 0,3 + \frac{R_{bc}}{R_{c(o)}}, \quad R_{c(o)} = 200 \text{ МПа}, \quad c = \frac{(1 - e - de)}{(1 - e - de + d)}, \quad d = \sqrt{1 - \frac{\varphi_{R(-1)}}{\varphi_{R(e)}}},$$

$\varphi_{R(-1)}$ – значение φ_R для двухосного равномерного сжатия. Для тяжелых бетонов

$$\varphi_{R(e)} = 3\delta_{p(1)}(1 - \delta_{p(1)}), \quad \frac{\varphi_{R(-1)}}{\varphi_{R(e)}} = 0,5,$$

$\delta_{p(1)} = \frac{R_{et}}{R_{bc}}$ – отношение прочности бетона на осевое растяжение к прочности на осевое сжатие.

Функцию δ_p можно также описать зависимостью (3.7), изменив параметры e и c , или можно принять

$$\delta_p = \delta_{p(2)} + (\delta_{p(1)} - \delta_{p(2)}) \left[1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)(\mu_\sigma^* + p)}{(1 - \mu_p^*)(1 + p)} \right],$$

где $\delta_{p(2)} = \frac{R_{bt(2)}}{R_{bc}} \approx \delta_{p(1)}(1 - \delta_{p(1)})$ – отношение прочности бетона при равномерном двухосном растяжении к прочности при одноосном сжатии;

$$\mu_\sigma^* = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta},$$

μ_p^* – значения μ_σ^* для одноосного растяжения, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = R_{bt}$.

Введение $\Delta = \Delta(R_{bt})$ позволяет замкнуть поверхность прочности бетона при трехосном равномерном растяжении на минимальном значении $\delta_p \approx \delta_{p(2)}$. В работе [3] принято $\Delta = 0,25(R_{bt})$. Величину P можно принять равной нулю.

Критерий прочности удовлетворяется в виде равенства, когда напряжения становятся предельными. Главные напряжения располагаются в последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при соблюдении неравенства $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Плиту по высоте предполагается разделять на горизонтальные слои малой толщины, принимая, что они находятся в условиях плоского напряженного состояния. Для слоя, имеющего два главных напряжения: σ_1 и σ_2 , возможны три варианта такой последовательности: $0, \sigma_1, \sigma_2$; $\sigma_1, 0, \sigma_2$; $\sigma_1, \sigma_2, 0$. Подставляя их последовательно в уравнение (3.6), можно найти предельные напряжения $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ для каждого варианта:

1) $0, \sigma_1, \sigma_2$ – область I, двустороннее сжатие. В уравнение подставляется $\hat{\sigma}_1 = 0, \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_2, s = \infty$. (В левой части этих равенств стоят напряжения, подставляемые в уравнение, а в правой – определенные для слоя). Из решения уравнения получается $b = 0, \hat{\sigma}_2 = K_c, \hat{\sigma}_2 = -K_c R_{bc}$. (Функция K_c так и конструировалась, чтобы при двухосном сжатии было $K_c = \tilde{\sigma}_2$);

2) $\sigma_1, 0, \sigma_2$ – область II, смешанные напряжения. В уравнение подставляется $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_2 = s\hat{\sigma}_1, s = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Из решения получается

$$\hat{\sigma}_1 = -\frac{K_c R_{bc}}{b(s-1)^2} \text{ или } \hat{\sigma}_1 = \delta_p R_{bc}.$$

Из двух полученных корней необходимо брать меньший положительный;

3) $\sigma_1, \sigma_2, 0$ – область II, двусторонне растяжение. В уравнение под-

ставляется $\sigma_1 = \sigma_1, \sigma_3 = 0, s = 0$. Получается

$$\hat{\sigma}_1 = -\frac{K_c R_{bc}}{b} \text{ или } \hat{\sigma}_1 = \delta_p R_{bc}.$$

Берется опять меньший положительный корень. Корни уравнения необходимо вычислять последовательными приближениями, т.к. величины K_c и δ_p должны соответствовать предельным напряжениям, которые при первом обращении к уравнению неизвестны.

3.2. Деформирование железобетона с трещинами

Общая модель деформирования железобетона с трещинами при объемном напряженном состоянии рассматривается в работах [3, 27, 28].

Принимается армирование в виде одной или нескольких групп (потоков) стержней, произвольно ориентированных в декартовой системе осей x, y, z . К каждой группе (потoku) прикрепляется своя декартова система осей $i, k(i), e(i)$, в которой ось i направлена вдоль стержня, а оси $k(i), e(i)$ могут относительно оси i поворачиваться.

3.2.1. Исходные предпосылки

Предусматривается образование трещин по одной, двум или трем взаимно ортогональным площадкам. Вводится декартова система осей n, m, l : до образования трещин это главные оси деформаций, а затем n – перпендикулярна первой образовавшейся трещине, m – второй, l – третьей. Связь с осями $i, k(i), e(i)$ осуществляется табл. 1 направляющих косинусов.

Таблица 1

	i	$k(i)$	$e(i)$
n	n_i	$n_{k(i)}$	$n_{e(i)}$
m	m_i	$m_{k(i)}$	$m_{e(i)}$
l	l_i	$l_{k(i)}$	$l_{e(i)}$

Трещины характеризуются раскрытием и взаимными сдвигами берегов ($a_{cr,n}, \Delta_{nm}, \Delta_{nl}$ – для первой трещины). Площадку, проведенную посередине трещины, называют площадкой трещины.

Каждый берег смещается относительно площадки трещины на некоторый вектор, имеющий компонентами $a_{cr,n} / 2, \Delta_{nm} / 2, \Delta_{nl} / 2$. Таким же принимается вектор смещения арматурных стержней. В этом состоит условие совместности перемещений арматуры и блоков бетона. Компонентами вектора смещения стержня в системе осей $i, k(i), e(i)$ будут осевые

смещения u_{si} (выдвижение из берега трещины) и тангенциальные перемещения $v_{sik(i)}, v_{sie(i)}$. Если расстояние между трещинами $l_{cr,n}$, то в направлении стержня оно будет $l_{si} = l_{cr,n} / n_i$. Осевые смещения стержней u_{si} возникают на всей этой длине, кроме ее середины. Точки, расположенные в середине участка между трещинами, называются точками совместности. Вместо условия неразрывности деформаций арматуры и бетона принимается условие совместности перемещений стержней и блоков бетона в этих точках.

В окрестности трещины на длине $\psi_{si} l_{si}$ (рис. 3.1) сцепление арматуры с бетоном нарушено, и напряжение в арматуре имеет максимальное значение σ_{si} , а деформации равны σ_{si} / E_{si} .

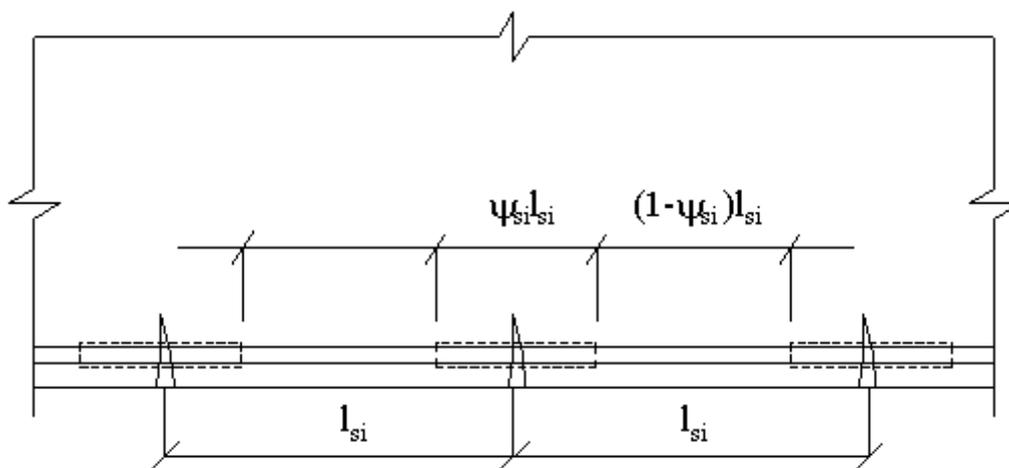


Рис. 3.1. К понятию коэффициента Ψ_{si}

$$\text{Усредняя их на длине } l_{si}, \text{ получаем } \varepsilon_{si} = \sigma_{si} \psi_{si} / E_{si} = \sigma_{si}^m / E_{si}, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_{si}, \sigma_{si}^m$ – усредненные деформации и напряжения без учета деформирования бетона, ψ_{si} – коэффициент, введенный В. И. Мурашевым [7], E_{si} – модуль упругости арматуры.

На оставшейся части расстояния между трещинами $(1 - \psi_{si}) l_{si}$ деформации арматуры и бетона одинаковы и равны ε_{bi} . Усредняя их на длине l_{si} и прибавляя к деформациям ε_{si} , получают

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{si} + \varepsilon_{bi} (1 - \psi_{si}), \quad \varepsilon_{si} = \sigma_{si}^m / E_{si}, \quad (3.9)$$

где $\varepsilon_{si}, \sigma_{si}^m$ – усредненные деформации и напряжения в арматуре с учетом деформирования бетона. Деформации ε_{si} тождественны общим деформациям в направлении i ($\varepsilon_{si} = \varepsilon_{si}$).

В трещинах в арматуре возникают также касательные напряжения, связанные с тангенциальными смещениями стержней. Они имеют существ-

венное значение только в трещине и малой части отрезка l_{si} , примыкающей к трещине, и учитываются лишь при определении приведенных напряжений арматуры в трещинах.

Между берегами трещины при малой ширине раскрытия сохраняются неразрушенные бетонные мостики – связи зацепления берегов. Вводятся сглаженные (усредненные) напряжения зацепления $\sigma_{qn}, \tau_{qnm}, \tau_{qnl}$, отнесенные к единице площади трещины. Они связываются секущими модулями зацепления E_{qn}, E_{qnm}, E_{qnl} с раскрытием трещины и сдвигами ее берегов. Бетон в блоках между трещинами деформируется как ортотропный материал, который выключается из работы вдоль отдельных осей ортотропии n, m, l по мере образования трещин, перпендикулярных этим осям. После образования трещин по всем трем направлениям бетон теряет самостоятельное значение и оказывает лишь влияние на средние напряжения и деформации арматуры через коэффициенты ψ_{si} .

3.2.2. Угловые деформации и компоненты поворота

При деформировании тела элементарный параллелепипед, выделенный в нем координатными площадками в системе осей x, y, z , получает линейные и угловые перемещения и деформации.

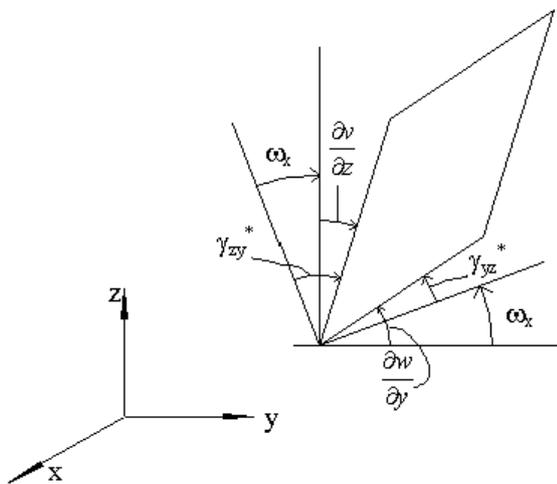


Рис. 3.2. Деформация и поворот элемента

Рассматривая его проекцию на плоскость yz (рис. 3.2), можно написать выражения для угловых деформаций

$$\gamma_{yz}^* = \frac{dw}{dy} - \omega_x, \quad \gamma_{zy}^* = \frac{dv}{dz} + \omega_x,$$

u, v, w – перемещения вдоль осей x, y, z , $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – повороты относительно осей x, y, z .

Аналогично в плоскостях xu, zx

$$\gamma_{xy}^* = \frac{dv}{dx} - \omega_z, \quad \gamma_{yx}^* = \frac{du}{dy} + \omega_z,$$

$$\gamma_{zx}^* = \frac{du}{dz} - \omega_y, \quad \gamma_{xz}^* = \frac{dw}{dx} + \omega_y.$$

Физические соотношения для железобетона с трещинами устанавливаются для углов сдвига γ_{ij}^* , включающих повороты ω_k , т. е. используется

несимметричный тензор деформаций моментной теории упругости ($\gamma_{ij}^* \neq \gamma_{ji}^*$).

3.2.3. Относительные деформации элемента

Пусть возникла одна трещина. Выделим малый элемент в системе осей n, m, l . Принимается, что деформации, связанные с осью n – это деформации арматуры вследствие раскрытия трещин $a_{cr,n}$ и сдвигов ее берегов Δ_{nm}, Δ_{nl} .

$$\varepsilon_{sn} = \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}}, \gamma_{snm}^* = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}}, \gamma_{nl}^* = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}}.$$

Влиянием бетона на эти деформации можно пренебречь.

Деформации, связанные с осями m, l приравниваются к деформациям бетона. Общий вектор-столбец деформаций элемента

$$\left\{ \varepsilon^* \right\}_n = \left\{ \varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l, \gamma_{nm}^*, \gamma_{ml}^*, \gamma_{ln}^*, \gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^* \right\}^T$$

представляется суммой двух:

$$\left\{ \varepsilon_s^* \right\} = \left\{ \varepsilon_{sn}, 0, 0, \gamma_{snm}^*, 0, 0, 0, 0, \gamma_{snl}^* \right\}^T \text{ и} \quad (3.10)$$

$$\left\{ \varepsilon_b^* \right\} = \left\{ 0, \varepsilon_{bm}, \varepsilon_{bl}, 0, \gamma_{bml}^*, \gamma_{bln}^*, \gamma_{bmn}^*, \gamma_{blm}^*, 0 \right\}^T. \quad (3.11)$$

При образовании двух трещин вектор (3.10) пополнится деформациями, связанными с осью m , а в векторе (3.11) места этих деформаций займут нули. При возникновении трех трещин все деформации будут деформациями арматуры, вектор (3.11) станет нулевым.

Используя формулы преобразования компонент несимметричного тензора при повороте осей координат, можно получить выражения для деформаций бетона в направлении арматуры

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{bi} = & (1 - \delta_n) (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + (1 - \delta_m) \times \\ & \times (\varepsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + (1 - \delta_l) (\varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Участвуют только компоненты вектора (3.11); $\delta_r = 1$, когда перпендикулярно оси r возникла трещина, в противном случае $\delta_r = 0$; $r = n, m, l$.

3.2.4. Связь напряжений в арматуре с общими деформациями элемента

При образовании трещины арматура выдвигается из ее берегов на величину

$$u_{si} = (\tilde{\varepsilon}_{si} - \tilde{\varepsilon}_{bi}) \cdot \frac{l_{si}}{2} = (\tilde{\varepsilon}_{si} - \tilde{\varepsilon}_{bi}) \cdot \frac{l_{cr,n}}{(2n_i)}. \quad (3.13)$$

С учетом равенств (3.8), (3.9)

$$u_{si} = \sigma_{si} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2n_i} - \tilde{\varepsilon}_{bi} \Psi_{si} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2n_i}. \quad (3.14)$$

Можно также написать

$$u_{si} = \frac{a_{cr,n}}{2} n_i + \frac{\Delta_{nm}}{2} m_i + \frac{\Delta_{nl}}{2} l_i = \varepsilon_n \frac{l_{cr,n}}{2} n_i + \gamma_{nm}^* \frac{l_{cr,n}}{2} m_i + \gamma_{nl}^* \frac{l_{cr,n}}{2} l_i. \quad (3.15)$$

Из сравнения получается

$$\sigma_{si} \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\varepsilon}_{bi} \Psi_{si} = \varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i.$$

Подстановка сюда равенства (3.12) для $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ при одной трещине приводит к выражению для напряжений в арматуре в сечении с трещиной.

$$\begin{aligned} \sigma_{si} = & \frac{E_{si}}{\Psi_{si}} \cdot (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + E_{si} \times \\ & \times (\varepsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + E_{si} (\varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

По аналогии с выражением (3.15) для тангенциальных смещений можно написать

$$\begin{aligned} v_{sij} = & \frac{a_{cr,n}}{2} n_j + \frac{\Delta_{nm}}{2} m_j + \frac{\Delta_{nl}}{2} l_j = \varepsilon_n \cdot \frac{l_{cr,n}}{2} n_j + \gamma_{nm}^* \cdot \frac{l_{cr,n}}{2} m_j + \gamma_{nl}^* \cdot \frac{l_{cr,n}}{2} l_j; \\ & j = k(i), e(i). \end{aligned} \quad (3.17)$$

По аналогии с равенством (3.14), пренебрегая деформациями бетона $\tilde{\varepsilon}_b$, установим связь с касательными напряжениями

$$v_{sij} = \tau_{sij} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2n_i} \cdot n_{\tau i} \quad (3.18)$$

или с учетом равенства (3.17)

$$\tau_{sij} = \frac{E_{si}}{\Psi_{si} \cdot n_{\tau i}} \cdot (\varepsilon_n n_i n_j + \gamma_{nm}^* n_i m_j + \gamma_{nl}^* n_i l_j), \quad (3.19)$$

где $n_{\tau i}$ – отношение податливостей стержней осевым и тангенциальным смещениям.

Сравнение выражений (3.15) и (3.13) показывает:

$$\tilde{\varepsilon}_{si} = \tilde{\varepsilon}_{bi} + (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i).$$

Подставляя сюда $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ по формуле (3.12) и учитывая равенство $\sigma_{si}^m = E_{si} \tilde{\varepsilon}_{si}$, получаем выражение для усредненных напряжений в арматуре с учетом деформирования бетона.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{si}^m = E_{si} & \left[\varepsilon_n n_i^2 + \varepsilon_m m_i^2 + \varepsilon_l l_i^2 + (\gamma_{nm}^* + \gamma_{mn}^*) n_i m_i + \right. \\ & \left. + (\gamma_{ml}^* + \gamma_{lm}^*) m_i l_i + (\gamma_{ln}^* + \gamma_{nl}^*) l_i n_i \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Это выражение справедливо для любой схемы трещин. Выражения (3.16) и (3.19) также могут быть записаны для любой схемы

$$\begin{aligned} \sigma_{si} = E_{sin} & \cdot (\varepsilon_n n_i^2 + \gamma_{nm}^* n_i m_i + \gamma_{nl}^* n_i l_i) + E_{sim} \times \\ & \times (\varepsilon_m m_i^2 + \gamma_{mn}^* m_i n_i + \gamma_{ml}^* m_i l_i) + E_{sil} (\varepsilon_l l_i^2 + \gamma_{ln}^* l_i n_i + \gamma_{lm}^* l_i m_i), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$E_{sir} = E_{si}$ при отсутствии трещины,

$E_{sir} = \frac{E_{si}}{\Psi_{si}}$ при наличии трещины,

$$\begin{aligned} \tau_{sij} = \frac{E_{si}}{\Psi_{si} \cdot n_{ti}} & \cdot \left[\delta_n (\varepsilon_n n_i n_j + \gamma_{nm}^* n_i m_j + \gamma_{nl}^* n_i l_j) + \delta_m (\varepsilon_m m_i m_j + \gamma_{mn}^* m_i n_j + \gamma_{ml}^* m_i l_j) + \right. \\ & \left. + \delta_l (\varepsilon_l l_i l_j + \gamma_{ln}^* l_i n_j + \gamma_{lm}^* l_i m_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2.5. Приведенные напряжения арматуры

Пусть железобетонный элемент армирован потоком стержней в направлении i с коэффициентом армирования μ_{si} . Выделим кубик единичных размеров с гранями, перпендикулярными осям n , m , l . Грани его будут пересекаться стержнями общей площадью $\mu_{si}n_i$, $\mu_{si}m_i$, $\mu_{si}l_i$. Пусть возникла одна трещина (нормальная оси « n »). В сечении с трещиной учитываются нормальные и касательные усилия в арматуре

$$\sigma_{si} \mu_{si} n_i, \tau_{sik(i)} \mu_{si} n_i, \tau_{sie(i)} \mu_{si} n_i.$$

Проектируя их на оси n , m , l , получим приведенные напряжения арматуры

$$\sigma_{sn} = \sigma_{si} \mu_{si} n_i n_i + \sum_j \tau_{sij} \mu_{si} n_i n_j, \tau_{snk} = \sigma_{si} \mu_{si} n_i k_i + \sum_j \tau_{sij} \mu_{si} n_i k_j, \quad (3.23)$$

$$j = k(i), e(i); k = m, l.$$

В площадках (гранях), нормальных осям m , l , где трещин нет, учитываются только усредненные нормальные усилия в арматуре

$$\sigma_{si}^m \mu_{si} m_i \text{ и } \sigma_{si}^l \mu_{si} l_i.$$

Приведенные напряжения арматуры в этих гранях:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{sm} &= \bar{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i m_i, & \bar{\sigma}_{sl} &= \bar{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i l_i, \\ \bar{\tau}_{smk} &= \bar{\sigma}_{si}^m \mu_{si} m_i k_i, & \bar{\tau}_{slk} &= \bar{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i k_i, \\ & k = l, n & k &= n, m.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Выражения (3.22) и (3.23) можно объединить и написать для любой схемы трещин

$$\bar{\sigma}_{srk} = \delta_r (\bar{\sigma}_{si} \mu_{si} r_i k_i + \sum_j \bar{\tau}_{sij} \mu_{si} r_i k_j) + (1 - \delta_r) \bar{\sigma}_{si}^m \mu_{si} r_i k_j, \quad (3.25)$$

$$r, k = n, m, l; j = k(i), e(i).$$

Приведенные напряжения арматуры

$$\left\{ \bar{\sigma}_s^* \right\}_n = \left\{ \bar{\sigma}_{sn}, \bar{\sigma}_{sm}, \bar{\sigma}_{sl}, \bar{\tau}_{snm}, \bar{\tau}_{sml}, \bar{\tau}_{sln}, \bar{\tau}_{smn}, \bar{\tau}_{slm}, \bar{\tau}_{snl} \right\}^T$$

связаны с общими деформациями элемента

$$\left\{ \bar{\varepsilon} \right\}_n = \left\{ \varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l, \gamma_{nm}^*, \gamma_{ml}^*, \gamma_{ln}^*, \gamma_{mn}^*, \gamma_{lm}^*, \gamma_{nl}^* \right\}^T$$

соотношением

$$\left\{ \bar{\sigma}_s^* \right\}_n = \left[d_s^* \right] \left\{ \bar{\varepsilon} \right\}_n, \quad (3.26)$$

где $\left[d_s^* \right]$ – матрица жесткости элемента по арматуре. Чтобы получить ее элементы, надо в формулу (3.25) подставить выражения (3.20), (3.21), (3.22).

3.2.6. Напряжения в бетоне

Бетон деформируется как ортотропный материал. Оси ортотропии перпендикулярны главным площадкам, а после возникновения трещин – площадкам трещин. В направлении нормалей к трещинам бетон из работы выключается. Компоненты векторов напряжений и деформаций

$$\left\{ \bar{\sigma}_b^* \right\} = \left\{ \bar{\sigma}_{bn}, \bar{\sigma}_{bm}, \bar{\sigma}_{bl}, \bar{\tau}_{bnm}, \bar{\tau}_{bml}, \bar{\tau}_{bln}, \bar{\tau}_{bmn}, \bar{\tau}_{blm}, \bar{\tau}_{bnl} \right\}^T \text{ и}$$

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_b^* \right\} = \left\{ \varepsilon_{bn}, \varepsilon_{bm}, \varepsilon_{bl}, \gamma_{bnm}^*, \gamma_{bml}^*, \gamma_{bln}^*, \gamma_{bmn}^*, \gamma_{blm}^*, \gamma_{bnl}^* \right\}^T$$

снабжаются множителями $(1 - \delta_n)$, $(1 - \delta_m)$, $(1 - \delta_l)$, чтобы они обращались в нуль при образовании соответствующих трещин. Связь напряжений с деформациями в осях n, m, l записывается в виде

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_b^* \right\} = \left[C_b^* \right] \left\{ \bar{\sigma}_b^* \right\},$$

где $\left[C_b^* \right]$ – симметричная матрица податливости бетона. Ее компоненты вычисляются так же, как компоненты матрицы (3.1).

При образовании трещин некоторые столбцы и строки матрицы $[C_b^*]$, а также компоненты векторов $\{\sigma_b^*\}, \{\epsilon_b^*\}$, связанные с осью, нормальной к трещине, вычеркиваются.

Обратив матрицу податливости $[C_b^*]$, получим матрицу жесткости элемента по бетону $[d_b^*]$. Она имеет такое же наполнение коэффициентами, как и матрица $[C_b^*]$. Если вовремя занулять элементы матрицы $[d^*]$ в соответствии с образованием трещин, то можно написать

$$\{\sigma_b^*\} = [d_b^*] \{\epsilon_b^*\} \quad (3.27)$$

Модули деформации бетона определяются с учетом влияния повреждаемости блоков бетона трещинами. Подробно это рассмотрено в работе [32].

Когда возникает трещина, между ее берегами сохраняются некоторые мостики – связи зацепления. Напряжения в них образуют вектор $\{\sigma_q^*\}$, имеющий отличными от нуля только напряжения, связанные с нормалью к трещине ($\sigma_{qn}, \tau_{qnm}, \tau_{qnl}$ при одной трещине). Они связаны с общими деформациями элемента

$$\{\sigma_q^*\} = [d_q^*] \{\epsilon^*\}, \quad (3.28)$$

$[d_q^*]$ – матрица модулей зацепления. В ней отличны от нуля только элементы на главной диагонали, связанные с нормалью к трещине (E_{qn}, E_{qnm}, E_{qnl} при одной трещине).

3.2.7. Общие физические соотношения

Физические соотношения для железобетона с трещинами в осях n, m, l записываются, исходя из совместности деформирования арматуры, бетона и связей зацепления. Суммируя выражения (3.26), (3.27), (3.28), получают

$$\{\sigma^*\}_n = [d^*] \{\epsilon^*\}_n, \quad (3.29)$$

$[d^*] = [d_s^*] + [d_b^*] + [d_q^*]$ – симметричная матрица жесткости железобетона в осях n, m, l .

Систему девяти уравнений (3.29) необходимо свести к системе шести уравнений. Используется закон парности касательных напряжений (в бетоне плюс арматуре)

$$\tau_{nm} = \tau_{mn}, \tau_{ml} = \tau_{lm}, \tau_{ln} = \tau_{nl}$$

и вводятся суммарные углы сдвига

$$\gamma_{nm} = \gamma_{nm}^* + \gamma_{mn}^*, \gamma_{ml} = \gamma_{ml}^* + \gamma_{lm}^*, \gamma_{ln} = \gamma_{ln}^* + \gamma_{nl}^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_n &= \{\sigma_n, \sigma_m, \sigma_l, \tau_{nm}, \tau_{ml}, \tau_{ln}\}^T, \\ \{\varepsilon\}_n &= \{\varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_l, \gamma_{nm}, \gamma_{ml}, \gamma_{ln}\}^T, \quad \{\sigma\}_n = [d]\{\varepsilon\}_n. \end{aligned}$$

Элементы матрицы $[d]$ выражаются через элементы матрицы $[d^*]$

3.2.8. Ортотропное армирование

- а) определение напряжений в арматуре в трещине
через напряжения в осях x, y, z

Предполагается армирование в направлении осей x, y, z . Это армирование в трех направлениях i :

- 1) $i = x, k(i) = y, e(i) = z$;
- 2) $i = y, k(i) = z, e(i) = x$;
- 3) $i = z, k(i) = x, e(i) = y$.

Выделим малый тетраэдр координатными площадками в осях x, y, z и наклонной, совпадающей с трещиной (с нормалью « n »). Площади граней

$$F_n = 1, F_x = n_x, F_y = n_y, F_z = n_z.$$

Наклонную площадку пересекают арматурные стержни площадью $\mu_{sx}n_x, \mu_{sy}n_y, \mu_{sz}n_z$. В координатных площадках действуют напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$; в наклонной – нормальные и касательные напряжения в арматуре и напряжения в связях зацепления $\sigma_{qn}, \tau_{qnm}, \tau_{qnl}$. Уравнения равновесия $\sum x = 0, \sum y = 0$:

$$\sigma_i n_i + \sum_j \tau_{ji} n_j = \sigma_{si} \mu_{si} n_i + \sum_j \tau_{sj} \mu_{sj} n_j + \sigma_{qn} n_i + \sum_k \tau_{qnk} k_i, \quad (3.30)$$

$$i = x, y, z; j = k(i), e(i); k = m, l.$$

В правой части уравнений надо оставить только σ_{si} . Используются условия совместности перемещений стержней в трещине

$$u_{si} = v_{ji}, j = k(i), e(i).$$

Подставляя сюда выражения (3.14) и (3.18), получают

$$\tau_{sji} = \frac{E_{sj}}{\Psi_{sj} \cdot n_{\tau j}} \cdot \frac{n_j}{n_i} \left(\sigma_{si} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\varepsilon}_{bi} \Psi_{si} \right). \quad (3.31)$$

Напряжения зацепления:

$$\begin{aligned} \sigma_{qn} &= E_{qn} \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}} = E_{qn} \frac{2 \sum u_{si} n_i}{l_{cr,n}}, \\ \tau_{qnk} &= E_{qnk} \frac{\Delta_{nk}}{l_{cr,n}} = E_{qnk} \frac{2 \sum u_{si} k_i}{l_{cr,n}}, \\ &k = m, l. \end{aligned}$$

С учетом равенства (3.14)

$$\begin{aligned} \sigma_{qn} &= E_{qn} \sum_i \left(\sigma_{si} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\varepsilon}_{bi} \Psi_{si} \right), \\ \tau_{qnk} &= E_{qnk} \sum_i \left(\sigma_{si} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} - \tilde{\varepsilon}_{bi} \Psi_{si} \right) \frac{k_i}{n_i}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подстановка выражений (3.31) и (3.32) в уравнение равновесия (3.30) приводит к трем уравнениям относительно σ_{sx} , σ_{sy} , σ_{sz} . Если приближенно принять $E_{qn} = E_{qnm} = E_{qnl} = E_q$ – средний модуль зацепления, то уравнения будут независимыми.

$$\sigma_{si} = \frac{\lambda_i}{\mu_{si}} \left(\sigma_i + \sum_j \tau_{ji} \frac{n_j}{n_i} \right) + \tilde{\varepsilon}_{bi} (1 - \lambda_i) E_{si}, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = 1 + \frac{\Psi_{si}}{E_{si} \cdot \mu_{si} \cdot n_i^2} \left(\sum_j \frac{E_{sj} \mu_{sj} n_j^2}{\Psi_{sj} n_{\tau j}} + E_q \right).$$

$\tilde{\varepsilon}_{bi}$ берется по выражению (3.12) с учетом того, что при одной трещине $\delta_n = 1$, $\delta_m = \delta_l = 0$. Деформации бетона можно выразить через напряжения упрощенно, принимая, что побочные элементы матрицы податливости $[C_b^*]$ в выражении (3.1) равны нулю. Тогда с учетом равенства (3.4)

$$\begin{aligned} C_{b22} &\approx C_{b55}^* \approx C_{b77}^* = \frac{1}{E_b^o \nu_{bm}} = \frac{1}{E_{bm}}, \\ C_{b33} &\approx C_{b66}^* \approx C_{b88}^* = \frac{1}{E_b^o \nu_{bl}} = \frac{1}{E_{bl}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Напряжения в бетоне представляются разностью общих напряжений

в сечениях элемента и приведенных напряжений арматуры.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{bi} = & \frac{\sigma_m - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} m_j^2}{E_{bm}} m_i^2 + \frac{\sigma_l - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} l_j^2}{E_{bl}} l_i^2 + \frac{\tau_{mn} - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} m_j n_j}{E_{bm}} m_i n_i + \\ & + \frac{\tau_{ml} - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} m_j l_j}{E_{bm}} m_i l_i + \frac{\tau_{ln} - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} l_j n_j}{E_{bl}} l_i n_i + \frac{\tau_{lm} - \sum_j \sigma_{sj}^m \mu_{sj} l_j m_j}{E_{bl}} l_i m_i, i, j = \\ & = x, y, z. \end{aligned}$$

Преобразование напряжений к осям x, y, z с учетом равенства

$\sigma_{si}^m = E_{si} \varepsilon_{si} = E_{si} \varepsilon_i$ приводит к выражению

$$\begin{aligned} \varepsilon_{bi} = & \frac{1}{E_{bm}} (\sigma_i m_i^2 + \tau_{ji} m_j m_i + \tau_{ei} m_e m_i) + \frac{1}{E_{bl}} (\sigma_i l_i^2 + \tau_{jl} l_j l_i + \tau_{el} l_e l_i) - \\ & - \varepsilon_i \left(\frac{m_i^2}{E_{bm}} + \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) E_{si} \mu_{si}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

На основе выражений (3.8), (3.9) можно написать

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{si} = \sigma_{si} \cdot \frac{\Psi_{si}}{E_{si}} + \varepsilon_{bi} (1 - \Psi_{si}). \quad (3.36)$$

Если подставить это в уравнение (3.35) и, выразив из него ε_{bi} , подставить в выражение (3.33), то получатся окончательные зависимости по определению напряжений в арматуре в трещинах через напряжения в осях x, y, z .

б) определение соотношений $\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$

Если в выражение (3.36) подставить формулы (2.26) для σ_{si} и (2.28) для ε_{bi} , то получится зависимость между линейными деформациями и напряжениями в осях x, y, z .

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i (\sigma_i, \tau_{ji}, \tau_{ei}), i, j, e = x, y, z. \quad (3.37)$$

Необходимо установить такую же связь для угловых деформаций. Углы сдвига в осях n, m, l состоят из двух частей: одна связана с деформированием арматуры в трещинах при сдвигах берегов $(\gamma_{snm}^*, \gamma_{snl}^*)$, другая – с деформированием блоков бетона между трещинами $(\gamma_{bmn}^*, \gamma_{bml}^*, \gamma_{bln}^*, \gamma_{blm}^*)$ соответственно векторам (3.10) и (3.11). Эти деформации и принимаются равными полным деформациям элемента.

Первая часть. Преобразуя компоненты вектора (3.10) к осям x, y, z ,

получим

$$\gamma_{sji}^* = \varepsilon_n n_j n_i + \gamma_{nm}^* n_j m_i + \gamma_{nl}^* n_j l_i,$$

а с учетом выражений (3.13), (3.15)

$$\gamma_{sji}^* = (\varepsilon_i - \varepsilon_{bi}) \frac{n_j}{n_i}.$$

Подстановка равенства (3.15) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \gamma_{sji}^* = & \varepsilon_i \left[1 + E_{si} \mu_{si} \left(\frac{m_i^2}{E_{bm}} + \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) \right] \frac{n_j}{n_i} - \frac{1}{E_{bm}} \left(\sigma_i m_i^2 + \tau_{ji} m_j m_i + \tau_{ei} m_e m_i \right) \frac{n_j}{n_i} - \\ & - \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_j l_i + \tau_{ei} l_e l_i \right) \frac{n_j}{n_i}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Если внести сюда ε_i по формуле (3.37), то получится окончательное выражение для γ_{sji}^*

$$\gamma_{sji}^* = \gamma_{sji}^* (\sigma_i, \tau_{ji}, \tau_{ei}).$$

Вторая часть. Вектор деформаций (3.11) преобразуется к осям x, y, z .

$$\gamma_{bji}^* = \varepsilon_m m_j m_i + \varepsilon_l l_j l_i + \gamma_{mn}^* m_j n_i + \gamma_{ml}^* m_j l_i + \gamma_{ln}^* l_j n_i + \gamma_{lm}^* l_j m_i.$$

Деформации выражаются через напряжения в бетоне, которые берутся как разность общих напряжений в сечениях элемента и приведенных напряжений арматуры. Учитывается упрощение (3.34).

$$\begin{aligned} \gamma_{bji}^* = & \frac{1}{E_{bm}} \left(\sigma_m - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} m_i^2 \right) m_j m_i + \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_l - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} l_i^2 \right) l_j l_i + \\ & + \frac{1}{E_{bm}} \left(\tau_{mn} - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} m_i n_i \right) m_j n_i + \frac{1}{E_{bl}} \left(\tau_{lm} - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} l_i m_i \right) l_j m_i + \\ & + \frac{1}{E_{bm}} \left(\tau_{ml} - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} m_i l_i \right) m_j l_i + \frac{1}{E_{bl}} \left(\tau_{ln} - \sum_i \sigma_{si}^m \mu_{si} l_i n_i \right) l_j n_i. \end{aligned}$$

Входящие сюда напряжения $\sigma_m \dots \tau_{ln}$ преобразуются к осям x, y, z .

Учитывается равенство $\sigma_{si}^m = E_{si} \varepsilon_i$. Получается

$$\begin{aligned} \gamma_{bji}^* = & \frac{1}{E_{bm}} \left(\sigma_i m_j m_i + \tau_{ji} m_j^2 + \tau_{ei} m_e m_j \right) + \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_i l_j l_i + \tau_{ji} l_j^2 + \tau_{ei} l_e l_j \right) - \\ & - \varepsilon_i \left(\frac{E_{si} \mu_{si} m_j m_i}{E_{bm}} + \frac{E_{si} \mu_{si} l_j l_i}{E_{bl}} \right). \end{aligned}$$

Внося сюда равенство (3.37) для ε_i , получим окончательное выражение для γ_{bji}^* .

$$\gamma_{bji}^* = \gamma_{bji}^* (\sigma_i, \tau_{ji}, \tau_{ei}).$$

Полная деформация равна сумме двух частей

$$\gamma_{ji}^* = \gamma_{sji}^* + \gamma_{bji}^*.$$

Определив шесть компонент γ_{ji}^* , находят три суммарные компоненты

$$\gamma_{ji} = \gamma_{ji}^* + \gamma_{ij}^*.$$

3.3. Деформирование железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии

Предполагается армирование в направлении осей x, y .

3.3.1. Деформирование при одной трещине

- а) определение напряжений в арматуре в трещине через напряжения в осях x, y .

Таблица 2

	x	y
n	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
l	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$

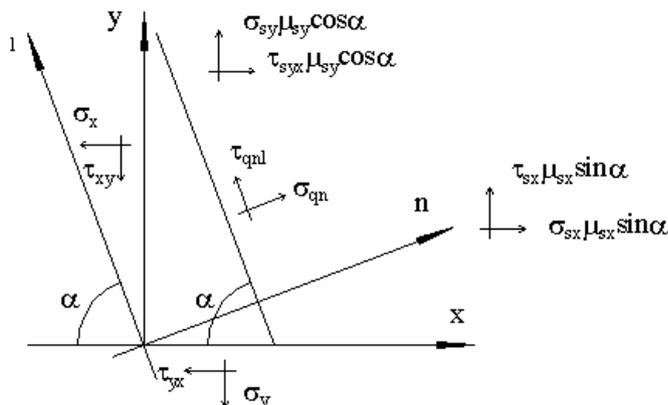


Рис. 3.3. Напряжения и усилия в арматуре

Выделим малый элемент координатными площадками в осях x, y и наклонной, совпадающей с трещиной (с нормалью n) (рис. 3.3). Связь между осями x, y и n, l дается табл. 2 направляющих косинусов.

Площади граней элемента равны:

$$F_n = 1, F_x = n_x = \sin \alpha, F_y = n_y = \cos \alpha.$$

Наклонную площадку пересекают арматурные стержни площадью $\mu_{sx} n_x, \mu_{sy} n_y$. В координатных площадках действуют общие напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$; в наклонной – нормальные и касательные напряжения в ар-

матуре $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}, \tau_{syx}$ и напряжения в связях зацепления σ_{qn}, τ_{qnl} .

Запишем уравнения равновесия $\sum X = 0, \sum Y = 0$.

$$\begin{aligned} & \sigma_x \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha = \\ & = \sigma_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha + \tau_{syx} \mu_{sy} \cos \alpha + \sigma_{qn} \sin \alpha - \tau_{qnl} \cos \alpha, \\ & \sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = \\ & = \sigma_{sy} \mu_{sy} \cos \alpha + \tau_{sxy} \mu_{sx} \sin \alpha + \sigma_{qn} \cos \alpha + \tau_{qnl} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.39)$$

В правых частях надо оставить только σ_{sx}, σ_{sy} . Используются условия совместности перемещений стержней в трещине

$$u_{sx} = v_{syx}, u_{sy} = v_{sxy}. \quad (3.40)$$

Осевые смещения стержней можно взять по выражениям (3.14) без учета деформаций бетона $\tilde{\varepsilon}_{bi}$

$$u_{sx} = \sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2 \sin \alpha}, \quad u_{sy} = \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2 \cos \alpha}, \quad (3.41)$$

тангенциальные смещения аналогично по выражениям (3.18)

$$v_{syy} = \tau_{syy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2 \cos \alpha} n_{ty}, \quad v_{sxy} = \tau_{sxy} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{l_{cr,n}}{2 \sin \alpha} n_{tx}.$$

Из равенств (3.40) следует

$$\tau_{syy} = \sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{E_{sy}}{\Psi_{sy}} \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{n_{ty}}, \quad \tau_{sxy} = \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{E_{sx}}{\Psi_{sx}} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{n_{tx}}. \quad (3.42)$$

Напряжения зацепления определяются раскрытием трещины и сдвигом ее берегов

$$\begin{aligned} \sigma_{qn} &= E_{qn} \frac{a_{cr,n}}{l_{cr,n}} = E_{qn} \frac{2 \sum u_{si} n_i}{l_{cr,n}}, \\ \tau_{qnl} &= E_{qnl} \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}} = E_{qnl} \frac{2 \sum u_{si} l_i}{l_{cr,n}}. \end{aligned}$$

С учетом выражений (3.41) получается

$$\begin{aligned} \sigma_{qn} &= E_{qn} \left(\sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} + \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \right), \\ \tau_{qnl} &= E_{qnl} \left(-\tau_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Подстановка выражений (3.42), (3.43) в уравнения равновесия (3.39) при-

ВОДИТ К СЛЕДУЮЩИМ РАВЕНСТВАМ:

$$\sigma_x \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha = \frac{1}{\lambda_x} \sigma_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha + \lambda_1 \sigma_{sy} \mu_{sy} \sin \alpha, \quad (3.44)$$

$$\sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = \frac{1}{\lambda_y} \sigma_{sy} \mu_{sy} \cos \alpha + \lambda_2 \sigma_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha,$$

$$\frac{1}{\lambda_x} = 1 + \frac{\psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{E_{sy} \mu_{sy} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\psi_{sy} \mu_{sx} n_{\tau y}} + \frac{\psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} \left(E_{qn} + E_{qnl} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right), \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = 1 + \frac{\psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{E_{sx} \mu_{sx} \operatorname{tg}^2 \alpha}{\psi_{sx} \mu_{sy} n_{\tau x}} + \frac{\psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} \left(E_{qn} + E_{qnl} \operatorname{tg}^2 \alpha \right),$$

$$\lambda_1 = \frac{\psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} \left(E_{qn} - E_{qnl} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{\psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} \left(E_{qn} - E_{qnl} \right);$$

б) определение соотношений $\{\varepsilon\} = [c] \{\sigma\}$

Выражения (3.33) и (3.35) для плоского напряженного состояния пере-пишутся в виде

$$\sigma_{si} = \frac{\lambda_i}{\mu_{si}} \left(\sigma_i + \tau_{ji} \frac{n_j}{n_i} \right) + \varepsilon_{bi} (1 - \lambda_i) E_{si},$$

$$\varepsilon_{bi} = \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_j l_i \right) - \varepsilon_i E_{si} \mu_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}}.$$

Подстановка этих выражений в равенство (3.36) приводит к зависи-мости между линейными деформациями и напряжениями в осях x, y .

$$\varepsilon_i = \sigma_i \frac{1}{k_i} \left\{ \frac{\lambda_i \psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \frac{l_i^2}{E_{bi}} \right\} + \tau_{ji} \frac{1}{k_i} \left\{ \frac{\lambda_i \psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} \frac{n_j}{n_i} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \frac{l_j l_i}{E_{bl}} \right\}, \quad (3.46)$$

где $k_i = 1 + (1 - \psi_{si}\lambda_i) \cdot \mu_{si} E_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}}$. (3.47)

Угловая деформация состоит из двух частей: связанной с раскрытием трещины и сдвигом ее берегов γ_{sji}^* и связанной с деформацией блоков бетона между трещинами γ_{bij}^* .

Первая часть. Выражение (3.38) для плоского напряженного состояния запишется в виде

$$\gamma_{sji}^* = \varepsilon_i \left(1 + E_{si} \mu_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) \frac{n_j}{n_i} - \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_i l_i^2 + \tau_{ji} l_j l_i \right) \frac{n_j}{n_i}.$$

Внесем сюда ε_i по формуле (3.46)

$$\begin{aligned} \gamma_{sji}^* &= \sigma_i \frac{1}{k_i} \frac{n_j}{n_i} \times \\ &\times \left\{ \frac{\lambda_i \psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \frac{l_i^2}{E_{bl}} + \lambda_i \psi_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \frac{l_i^2}{E_{bl}} - \frac{k_i}{E_{bl}} l_i^2 \right\} + \\ &+ \tau_{ji} \frac{1}{k_i} \frac{n_j}{n_i} \times \left\{ \frac{\lambda_i \psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} \frac{n_j}{n_i} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \frac{l_j l_i}{E_{bl}} + \lambda_i \psi_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \frac{n_j}{n_i} + \right. \\ &\left. + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_j l_i}{E_{bl}} \frac{l_i^2}{E_{bl}} - \frac{k_i}{E_{bl}} l_j l_i \right\}; \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{k_i}{E_{bl}} l_i^2 = \frac{l_i^2}{E_{bl}} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \frac{l_i^2}{E_{bl}}, \quad (3.49)$$

$$\frac{k_i}{E_{bl}} l_j l_i = \frac{l_j l_i}{E_{bl}} + (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \frac{l_j l_i}{E_{bl}}.$$

Подставим выражения (3.49) в уравнение (3.48), выполним сокращения, учтем, что в соответствии с табл. 2

$$l_i^2 \frac{n_j^2}{n_i^2} - l_j l_i \frac{n_j}{n_i} = \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

$$l_j^2 \frac{n_i^2}{n_j^2} - l_i l_j \frac{n_i}{n_j} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Получается

$$\gamma_{sji}^* = \sigma_i \frac{1}{k_i} \frac{\lambda_i \Psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} \frac{n_j}{n_i} + \tau_{ji} \frac{1}{k_i} \left(\frac{\lambda_i \Psi_{si}}{\mu_{si} E_{si}} \frac{n_j^2}{n_i^2} + \frac{\lambda_i \Psi_{si}}{E_{bl}} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right),$$

$$\gamma_{sij}^* = \sigma_j \frac{1}{k_j} \frac{\lambda_j \Psi_{sj}}{\mu_{sj} E_{sj}} \frac{n_i}{n_j} + \tau_{ij} \frac{1}{k_j} \left(\frac{\lambda_j \Psi_{sj}}{\mu_{sj} E_{sj}} \frac{n_i^2}{n_j^2} + \frac{\lambda_j \Psi_{sj}}{E_{bl}} \operatorname{tg}^2 \alpha \right).$$
(3.50)

Вторая часть. В соответствии с упрощением (3.34), и представляя напряжения в бетоне разностью общих напряжений и приведенных напряжений арматуры, можно написать

$$\varepsilon_l = \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_l - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i^2 \right),$$

$$\gamma_{ln}^* = \frac{1}{E_{bl}} \left(\tau_{ln} - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i n_i \right),$$

а после преобразования этих деформаций к осям x, y

$$\gamma_{bij}^* = \frac{1}{E_{bl}} \left\{ \left(\sigma_l - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i^2 \right) l_i l_j + \left(\tau_{ln} - \sum_i \tilde{\sigma}_{si}^m \mu_{si} l_i n_i \right) l_i n_j \right\}.$$

Напряжения в осях n, l выражаются через напряжения в осях x, y (i, j) и учитывается равенство $\tilde{\sigma}_{si}^m = \varepsilon_i E_{si}$.

$$\sigma_l = \sigma_i l_i l_i + \sigma_j l_j l_j + \tau_{ij} l_i l_j + \tau_{ji} l_j l_i;$$

$$\tau_{ln} = \sigma_i l_i n_i + \sigma_j l_j n_j + \tau_{ij} l_i n_j + \tau_{ji} l_j n_i;$$

$$\sigma_l l_i l_j + \tau_{ln} l_i n_j = \sigma_j l_i l_j + \tau_{ij} l_i^2;$$

$$\left(\sum_i \varepsilon_i E_{si} \mu_{si} l_i l_i \right) l_i l_j + \left(\sum_i \varepsilon_i E_{si} \mu_{si} l_i n_i \right) l_i n_j = \varepsilon_j E_{sj} \mu_{sj} l_i l_j.$$

Получается

$$\gamma_{bij}^* = \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_j l_i l_j + \tau_{ij} l_i^2 - \varepsilon_j \mu_{sj} E_{sj} l_i l_j \right),$$

$$\gamma_{bji}^* = \frac{1}{E_{bl}} \left(\sigma_i l_j l_i + \tau_{ji} l_j^2 - \varepsilon_i \mu_{si} E_{si} l_j l_i \right).$$

Сюда вносятся линейные деформации $\varepsilon_j, \varepsilon_i$ по выражению (3.46)

$$\begin{aligned} \gamma_{bji}^* &= \frac{l_j l_i}{k_i E_{bl}} \times \\ &\times \left\{ \sigma_i \left(k_i - \lambda_i \psi_{si} - (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_i^2}{E_{bl}} \right) + \right. \\ &\left. + \tau_{ji} \left(k_i \frac{l_j}{l_i} - \lambda_i \psi_{si} \frac{n_j}{n_i} - (1 - \psi_{si} \lambda_i) \mu_{si} E_{si} \frac{l_j l_i}{E_{bl}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

выполняются сокращения с учетом равенства (3.47) для k_i

$$\begin{aligned} \gamma_{bji}^* &= \frac{l_j l_i}{k_i E_{bl}} \left\{ \sigma_i (1 - \psi_{si} \lambda_i) + \tau_{ji} \left(\frac{l_j}{l_i} - \lambda_i \psi_{si} \frac{n_j}{n_i} \right) \right\}, \\ \gamma_{bij}^* &= \frac{l_i l_j}{k_i E_{bl}} \left\{ \sigma_j (1 - \psi_{sj} \lambda_j) + \tau_{ij} \left(\frac{l_i}{l_j} - \lambda_j \psi_{sj} \frac{n_i}{n_j} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Теперь можно перейти к суммарным углам сдвига симметричного тензора деформаций

$$\begin{aligned} \gamma_{bij} &= \gamma_{bij}^* + \gamma_{bji}^*, & \gamma_{sij} &= \gamma_{sij}^* + \gamma_{sji}^*, \\ \gamma_{ij} &= \gamma_{bij} + \gamma_{sij} = \gamma_{bij}^* + \gamma_{bji}^* + \gamma_{sij}^* + \gamma_{sji}^*. \end{aligned}$$

В развернутом виде соотношения $\{\varepsilon\} = [c] \{\sigma\}$ имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Формулы (3.46), (3.50), (3.51) позволяют определить все элементы симметричной матрицы податливости $[c]$ для железобетона с одной трещиной. Направляющие косинусы берутся из табл. 2.

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{k_x} \left\{ \frac{\lambda_x \psi_{sx}}{\mu_{sx} E_{sx}} + (1 - \psi_{sx} \lambda_x) \frac{\cos^2 \alpha}{E_{bl}} \right\}, \\ c_{12} &= 0, \\ c_{13} &= \frac{1}{k_x} \left\{ \frac{\lambda_x \psi_{sx}}{\mu_{sx} E_{sx}} \operatorname{ctg} \alpha + (1 - \psi_{sx} \lambda_x) \frac{(-\sin \alpha) \cos \alpha}{E_{bl}} \right\}, \end{aligned}$$

$$c_{22} = \frac{1}{k_y} \left\{ \frac{\lambda_y \psi_{sy}}{\mu_{sy} E_{sy}} + (1 - \psi_{sy} \lambda_y) \frac{\sin^2 \alpha}{E_{bl}} \right\}, \quad (3.52)$$

$$c_{23} = \frac{1}{k_y} \left\{ \frac{\lambda_y \psi_{sy}}{\mu_{sy} E_{sy}} \operatorname{tg} \alpha + (1 - \psi_{sy} \lambda_y) \frac{(-\sin \alpha) \operatorname{coo} \alpha}{E_{bl}} \right\},$$

$$c_{33} = \frac{1}{k_x} \left\{ \frac{\lambda_x \psi_{sx}}{\mu_{sx} E_{sx}} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\lambda_x \psi_{sx} (\operatorname{coo}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \sin^2 \alpha}{E_{bl}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{k_y} \left\{ \frac{\lambda_y \psi_{sy}}{\mu_{sy} E_{sy}} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\lambda_y \psi_{sy} (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{coo}^2 \alpha}{E_{bl}} \right\}.$$

3.3.2. Деформирование при двух трещинах

а) определение напряжений в арматуре в трещинах через напряжения в осях x, y .

Для первой трещины (нормальной оси « n ») остаются в силе выражения (3.44), (3.45). Для второй элемент выделяется по-другому: наклонная площадка перпендикулярна оси « l » (рис. 3.4).

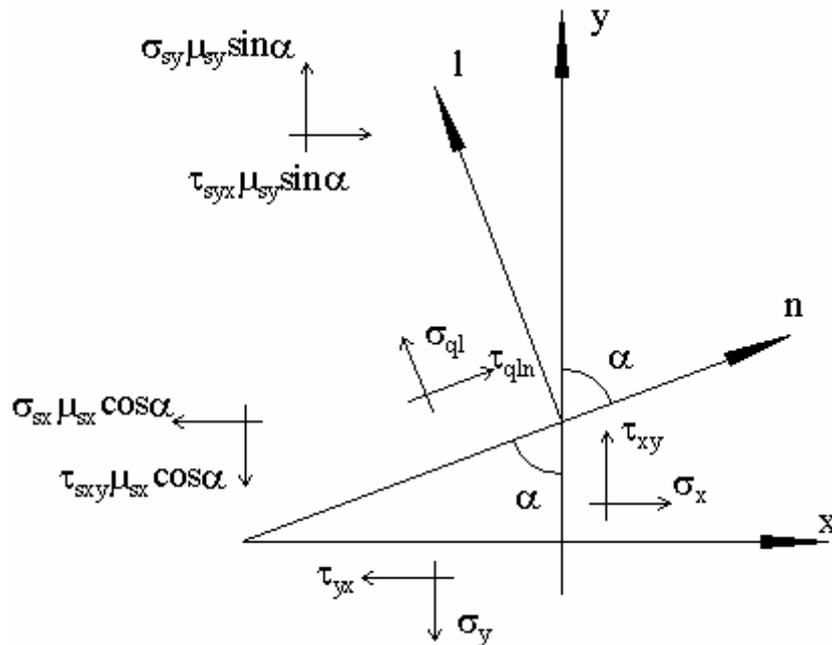


Рис. 3.4. Напряжения и усилия в арматуре

Уравнения равновесия $\sum x = 0, \sum y = 0$:

$$\begin{aligned} & \sigma_x \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha = \\ & = \sigma_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha - \tau_{syx} \mu_{sy} \sin \alpha + \sigma_{ql} \cos \alpha - \tau_{qln} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_y \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha = \\ & = \sigma_{sy} \mu_{sy} \sin \alpha - \tau_{sxy} \mu_{sx} \cos \alpha + \sigma_{ql} \sin \alpha + \tau_{qln} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Условия совместности перемещений стержней в трещине:

$$u_{sx} = v_{syx}, \quad u_{sy} = v_{sxy}. \quad (3.54)$$

Осевые смещения стержней без учета деформаций бетона $\tilde{\varepsilon}_{bi}$ по формуле (3.14) с заменой n на l в соответствии с табл. 2:

$$u_{sx} = -\sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{l_{cr,l}}{2 \cos \alpha}, \quad u_{sy} = \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{l_{cr,l}}{2 \sin \alpha}. \quad (3.55)$$

Тангенциальные смещения по формуле (3.18)

$$v_{syy} = \tau_{syy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{l_{cr,l}}{2 \sin \alpha} l_{ty}, \quad v_{sxy} = -\tau_{sxy} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{l_{cr,l}}{2 \cos \alpha} l_{tx}.$$

По равенствам (3.54) получаем

$$\tau_{syy} = -\sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{E_{sy} \operatorname{tg} \alpha}{\Psi_{sy} l_{ty}}, \quad \tau_{sxy} = -\sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{E_{sx} \operatorname{ctg} \alpha}{\Psi_{sx} l_{tx}}. \quad (3.56)$$

Напряжения зацепления определяются раскрытием трещины и сдвигом ее берегов

$$\begin{aligned} \sigma_{ql} &= E_{ql} \frac{a_{cr,l}}{l_{cr,l}} = E_{ql} \frac{2 \sum u_{si} l_i}{l_{cr,l}}, \\ \tau_{qln} &= E_{qln} \frac{\Delta l_n}{l_{cr,l}} = E_{qln} \frac{2 \sum u_{si} n_i}{l_{cr,l}}. \end{aligned}$$

С учетом выражений (3.55) получается

$$\sigma_{ql} = E_{ql} \left(\sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} + \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \right), \quad (3.57)$$

$$\tau_{qln} = E_{qln} \left(-\sigma_{sx} \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{sy} \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Подстановка выражений (3.56), (3.57) в уравнения равновесия (3.53)

приводит к следующим равенствам:

$$\sigma_x \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha = \frac{1}{\lambda_x} \sigma_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha + \lambda_4 \sigma_{sy} \mu_{sy} \cos \alpha, \quad (3.58)$$

$$\sigma_y \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha = \frac{1}{\lambda_y} \sigma_{sy} \mu_{sy} \sin \alpha + \lambda_3 \sigma_{sx} \mu_{sx} \sin \alpha ;$$

$$\frac{1}{\lambda_x} = 1 + \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx}} \cdot \frac{E_{sy} \mu_{sy} \operatorname{tg}^2 \alpha}{\Psi_{sy} \mu_{sx} l_{ty}} + \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} (E_{ql} + E_{qln} \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = 1 + \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy}} \cdot \frac{E_{sx} \mu_{sx} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\Psi_{sx} \mu_{sy} l_{tx}} + \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} (E_{ql} + E_{qln} \operatorname{ctg}^2 \alpha),$$

$$\lambda_4 = \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} (E_{ql} - E_{qln}),$$

$$\lambda_3 = \frac{\Psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} (E_{ql} - E_{qln});$$

б) физические соотношения $\{\varepsilon\} = [c] \{\sigma\}$

Принимается упрощенно

$$E_{qnl} = E_{qn}, E_{qln} = E_{ql}$$

и вводятся обозначения

$$\frac{\Psi_{sx}}{E_{sx} \mu_{sx}} = \theta_x; \quad \frac{\Psi_{sy}}{E_{sy} \mu_{sy}} = \theta_y.$$

Величины с верхними индексами (n) или (l) относятся к трещинам с нормалью n или l соответственно. Из выражений (3.44), (3.45), (3.58), (3.59) получается

$$\sigma_{sx}^{(n)} = \frac{\lambda_x^{(n)}}{\mu_{sx}} (\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha),$$

$$\sigma_{sy}^{(n)} = \frac{\lambda_y^{(n)}}{\mu_{sy}} (\sigma_y + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha), \quad (3.60)$$

$$\sigma_{sx}^{(l)} = \frac{\lambda_x^{(l)}}{\mu_{sx}} (\sigma_x - \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\sigma_{sy}^{(l)} = \frac{\lambda_y^{(l)}}{\mu_{sy}} (\sigma_y - \tau_{xy} \operatorname{ctg} \alpha) ;$$

$$\frac{1}{\lambda_x^{(n)}} = 1 + \theta_x^{(n)} \left(\frac{1}{\theta_y^{(n)}} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{n_{xy}} + \frac{E_{qn}}{\sin^2 \alpha} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_y^{(n)}} = 1 + \theta_y^{(n)} \left(\frac{1}{\theta_x^{(n)}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{n_{tx}} + \frac{E_{qn}}{\cos^2 \alpha} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_x^{(l)}} = 1 + \theta_x^{(l)} \left(\frac{1}{\theta_y^{(l)}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{l_{ty}} + \frac{E_{ql}}{\cos^2 \alpha} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_y^{(l)}} = 1 + \theta_y^{(l)} \left(\frac{1}{\theta_x^{(l)}} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{l_{tx}} + \frac{E_{ql}}{\sin^2 \alpha} \right).$$

При двух трещинах в соответствии с формулой (3.8)

$$\varepsilon_{sx} = \varepsilon_{sx}^{(n)} + \varepsilon_{sx}^{(l)} = \left(\frac{\sigma_{sx} \Psi_{sx}}{E_{sx}} \right)^{(n)} + \left(\frac{\sigma_{sx} \Psi_{sx}}{E_{sx}} \right)^{(l)},$$

$$\varepsilon_{sy} = \varepsilon_{sy}^{(n)} + \varepsilon_{sy}^{(l)} = \left(\frac{\sigma_{sy} \Psi_{sy}}{E_{sy}} \right)^{(n)} + \left(\frac{\sigma_{sy} \Psi_{sy}}{E_{sy}} \right)^{(l)}.$$

Сюда подставляются равенства (3.61) и вводятся новые обозначения

$$\lambda_x \theta_x = \frac{\lambda_x \Psi_{sx}}{\mu_{sx} E_{sx}} = \beta_x ; \quad \lambda_y \theta_y = \frac{\lambda_y \Psi_{sy}}{\mu_{sy} E_{sy}} = \beta_y.$$

Получается

$$\varepsilon_{sx} = \sigma_x (\beta_x^{(n)} + \beta_x^{(l)}) + \tau_{yx} (\beta_x^{(n)} \operatorname{ctg} \alpha - \beta_x^{(l)} \operatorname{tg} \alpha), \quad (3.61)$$

$$\varepsilon_{sy} = \sigma_y (\beta_y^{(n)} + \beta_y^{(l)}) + \tau_{xy} (\beta_y^{(n)} \operatorname{tg} \alpha - \beta_y^{(l)} \operatorname{ctg} \alpha).$$

Уравнения (3.61) определяют связь между линейными деформациями и напряжениями в осях x , y .

Угловые деформации как и линейные будут состоять из двух частей: от раскрытия и сдвига берегов трещины с нормалью « n » и трещины с нормалью « l ». Выражение (3.22) можно представить в виде

$$\tau_{sij} = \frac{E_{si}}{\Psi_{si} n_{ti}} \gamma_{sij}^*.$$

Тогда можно написать

$$\gamma_{syx}^* = \gamma_{syx}^{*(n)} + \gamma_{syx}^{*(l)} = \left(\frac{\Psi_{sy} n_{\tau y}}{E_{sy}} \tau_{syy} \right)^{(n)} + \left(\frac{\Psi_{sy} n_{\tau y}}{E_{sy}} \tau_{syy} \right)^{(l)},$$

а с учетом равенства (3.31)

$$\gamma_{syx}^* = \frac{n_y}{n_x} \left(\frac{\sigma_{sx} \Psi_{sx}}{E_{sx}} \right)^{(n)} + \frac{l_y}{l_x} \left(\frac{\sigma_{sx} \Psi_{sx}}{E_{sx}} \right)^{(l)}.$$

Сюда подставляется напряжение σ_{sx} из уравнения (3.58).

$$\begin{aligned} \gamma_{syx}^* &= \sigma_x \left(\frac{n_y}{n_x} \beta_x^{(n)} + \frac{l_y}{l_x} \beta_x^{(l)} \right) + \\ &+ \tau_{yx} \left(\frac{n_y}{n_x} \beta_x^{(n)} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{l_y}{l_x} \beta_x^{(l)} \operatorname{tg} \alpha \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \gamma_{sxy}^* &= \sigma_y \left(\frac{n_x}{n_y} \beta_y^{(n)} + \frac{l_x}{l_y} \beta_y^{(l)} \right) + \\ &+ \tau_{xy} \left(\frac{n_x}{n_y} \beta_y^{(n)} \operatorname{tg} \alpha - \frac{l_x}{l_y} \beta_y^{(l)} \operatorname{ctg} \alpha \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Уравнения (3.62) и (3.63) устанавливают связь между угловыми деформациями и напряжениями в осях x, y . Вычисляя суммарные углы сдвига

$$\gamma_{xy} = \gamma_{sxy}^* + \gamma_{syx}^*$$

и учитывая равенства $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\epsilon_{sx} = \epsilon_x$, $\epsilon_{sy} = \epsilon_y$, можно определить все элементы симметричной матрицы податливости $[c]$ в уравнении

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Направляющие косинусы берутся по табл. 2.

$$c_{11} = \beta_x^{(n)} + \beta_x^{(l)}, \quad c_{13} = \beta_x^{(n)} \operatorname{ctg} \alpha - \beta_x^{(l)} \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.64)$$

$$c_{22} = \beta_y^{(n)} + \beta_y^{(l)}, \quad c_{23} = \beta_y^{(n)} \operatorname{tg} \alpha - \beta_y^{(l)} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$c_{31} = \beta_x^{(n)} \operatorname{ctg} \alpha - \beta_x^{(l)} \operatorname{tg} \alpha, \quad c_{32} = \beta_y^{(n)} \operatorname{tg} \alpha - \beta_y^{(l)} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$c_{33} = (\beta_x^{(n)} + \beta_y^{(l)}) \operatorname{ctg}^2 \alpha + (\beta_x^{(l)} + \beta_y^{(n)}) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

При выполнении вычислений можно использовать следующие равенства

$$\frac{1}{\beta_x^{(n)}} = \frac{1}{\theta_x^{(n)}} + \frac{1}{\theta_y^{(n)}} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{n_{\text{ты}}} + \frac{E_{qn}}{\sin^2 \alpha},$$

$$\frac{1}{\beta_y^{(n)}} = \frac{1}{\theta_y^{(n)}} + \frac{1}{\theta_x^{(n)}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{n_{\text{тх}}} + \frac{E_{qn}}{\cos^2 \alpha},$$

$$\frac{1}{\beta_x^{(l)}} = \frac{1}{\theta_x^{(l)}} + \frac{1}{\theta_y^{(l)}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{l_{\text{ты}}} + \frac{E_{ql}}{\sin^2 \alpha},$$

$$\frac{1}{\beta_y^{(l)}} = \frac{1}{\theta_y^{(l)}} + \frac{1}{\theta_x^{(l)}} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{l_{\text{тх}}} + \frac{E_{ql}}{\sin^2 \alpha}.$$

В элементы матриц податливости для слоя с одной трещиной (выражения (3.52)) и для слоя с двумя трещинами (выражения (3.64)) входят переменные величины Ψ_{si} , E_{si} , $n_{\text{ти}}$ ($i = x, y$), E_{bl} , E_{qn} , E_{ql} , E_{qnl} , E_{qln} . Они представляются функциями деформаций или напряжений и определены на основании экспериментов Н. И. Карпенко, А. Ф. Яременко, Л. М. Григорьянц и др. [3, 25, 30, 31].

3.4. Решение задачи для плиты

3.4.1. Определение жесткостей

Рассматривается изгиб тонкой железобетонной плиты с малыми прогибами, армированной сетками сверху и снизу, в системе осей x, y, z (рис. 3.5).

Положительные вертикальные перемещения $W = W(x, y)$ направляются вниз. Изгибающие и крутящий моменты M_x, M_y, M_{xy} выражаются через кривизны и кручение срединной поверхности $\varkappa, \chi, 2\omega$, которые в соответствии с гипотезой прямых нормалей связываются с линейными и уг-

ловыми деформациями в уровне растянутой арматуры и сжатой кромки бетона $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ и $\epsilon'_x, \epsilon'_y, \gamma'_{xy}$.

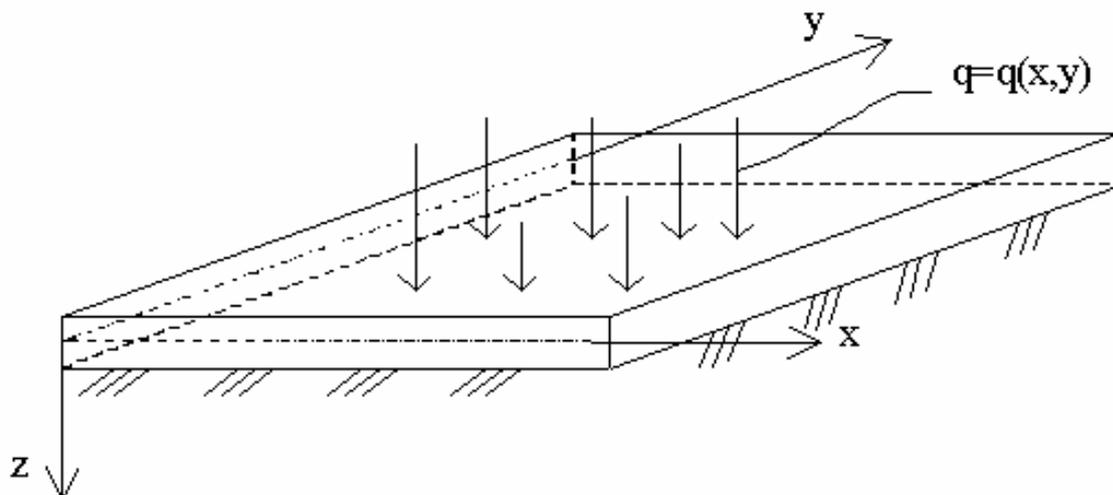


Рис. 3.5. Нагружение плиты

$$\begin{aligned} M_x &= A \alpha + B \chi + E 2\omega, \\ M_y &= B \alpha + C \chi + F 2\omega, \\ M_{xy} &= E \alpha + F \chi + D 2\omega, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (\epsilon_x - \epsilon'_x) / h_0, \\ \chi &= (\epsilon_y - \epsilon'_y) / h_0, \\ 2\omega &= (\gamma_{xy} - \gamma'_{xy}) / h_0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где A, B, C, D, E, F – жесткости анизотропной плиты, h_0 – полезная высота сечения.

Моменты могут быть выражены также через напряжения

$$\begin{aligned} M_x &= \int_z \sigma_x z_x dz, \\ M_y &= \int_z \sigma_y z_y dz, \\ M_{xy} &= \int_z \tau_{xy} z_{xy} dz, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где z_x, z_y, z_{xy} – координаты Z точек с напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Плита разделяется на n горизонтальных слоев малой толщины Δz и в соответствии с известной статической гипотезой принимается, что они находятся в условиях плоского напряженного состояния. Интегралы (3.67)

заменяются суммами

$$\begin{aligned}
 M_x &= \sum_{i=1}^n (\sigma_x z_x \Delta z)_i, \\
 M_y &= \sum_{i=1}^n (\sigma_y z_y \Delta z)_i, \\
 M_{xy} &= \sum_{i=1}^n (\tau_{xy} z_{xy} \Delta z)_i.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Для каждого слоя устанавливается связь

$$\{\sigma\}_x = [d]_x \{\varepsilon\}_x, \tag{3.69}$$

где $[d]_x$ – матрица жесткости в осях x, y .

Равенство (3.69) в развернутом виде подставляется в уравнения (3.68)

$$\begin{aligned}
 M_x &= \sum_i \left((d_{11} \varepsilon_x z_x + d_{12} \varepsilon_y z_y + d_{13} \gamma_{xy} z_{xy}) \cdot \Delta z \right)_i, \\
 M_y &= \sum_i \left((d_{21} \varepsilon_x z_x + d_{22} \varepsilon_y z_y + d_{23} \gamma_{xy} z_{xy}) \cdot \Delta z \right)_i, \\
 M_{xy} &= \sum_i \left((d_{31} \varepsilon_x z_x + d_{32} \varepsilon_y z_y + d_{33} \gamma_{xy} z_{xy}) \cdot \Delta z \right)_i.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Сравнение выражений (3.65), (3.66), (3.70) показывает

$$\begin{aligned}
 \sum_i (d_{11} \varepsilon_x z_x \Delta z)_i &= A \alpha, \\
 \sum_i (d_{12} \varepsilon_y z_y \Delta z)_i &= B \chi, \\
 \sum_i (d_{13} \gamma_{xy} z_{xy} \Delta z)_i &= E \cdot 2\omega, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \sum_i (d_{33} \gamma_{xy} z_{xy} \Delta z)_i &= D \cdot 2\omega.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

По гипотезе прямых нормалей

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha z_x, \quad z_x = \varepsilon_x / \alpha, \\
 \varepsilon_y &= \chi z_y, \quad z_y = \varepsilon_y / \chi, \\
 \gamma_{xy} &= 2\omega z_{xy}, \quad z_{xy} = \gamma_{xy} / (2\omega).
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Подстановка выражений (3.72) в уравнения (3.71) приводит к следующим выражениям для определения жесткостей плиты:

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \left(d_{11} z_x^2 \Delta z \right)_i, & B &= \sum_i \left(d_{12} z_x z_y \Delta z \right)_i, \\ C &= \sum_i \left(d_{22} z_y^2 \Delta z \right)_i, & E &= \sum_i \left(d_{13} z_x z_{xy} \Delta z \right)_i, \\ D &= \sum_i \left(d_{33} z_{xy}^2 \Delta z \right)_i, & F &= \sum_i \left(d_{23} z_y z_{xy} \Delta z \right)_i. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Плита рассчитывается методом последовательных приближений. Под контроль берутся главные кривизны срединной поверхности в точках, нанесенных на плиту в соответствии с методом конечных разностей. В первом приближении жесткости во всех точках соответствуют нулевым кривизнам. Затем в каждом приближении выполняется следующее.

1. Из расчета неоднородной анизотропной линейно деформируемой плиты с жесткостями, известными из предыдущего приближения, определяются главные кривизны для каждой из нанесенных на плиту точек.

2. Для точек, в которых кривизны получили наибольшее приращение, производится перевычисление жесткостей. При этом вычисляются жесткости, соответствующие не тем кривизнам, которые получены в данном приближении, а кривизнам предыдущего приближения, увеличенным на некоторый малый шаг.

Решение заканчивается, когда приращения кривизн во всех точках окажутся достаточно малыми.

Рассматривается только простое нагружение, при котором все внешние нагрузки возрастают пропорционально одному параметру. Но это не относится к кривизнам. Из-за изменения жесткостей плиты в некоторых точках в некоторых интервалах нагружения кривизны могут уменьшаться, то есть будет происходить разгрузка, законы деформирования при которой другие и в данной работе не рассматриваются. Предполагается, что изменение жесткостей будет происходить, прежде всего, в наиболее нагруженных местах – в зонах устойчивого роста кривизн, где разгрузка маловероятна, а разгрузка может происходить в других, менее напряженных, местах – в зонах неустойчивого роста кривизн, где их численные значения относительно невелики. Принятый алгоритм перевычисления жесткостей – изменение их только в наиболее напряженных точках и только при малом шаге по кривой изменения жесткостей в зависимости от кривизн – призван свести

к минимуму влияние возможной разгрузки.

Среди слоев, на которые разделяется плита, могут встретиться следующие:

- слой чистого бетона без трещин,
- слой чистого бетона с трещинами,
- армированный слой без трещин,
- армированный слой с трещинами.

3.4.2. Слой чистого бетона без трещин

Для слоя в главных осях 1,2

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_1 &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0\}^T, \\ \{\sigma\}_1 &= \{\sigma_1, \sigma_2, 0\}^T, \\ [c_b]_1 &= \frac{1}{E_b^0} \begin{bmatrix} 1/\nu_{b1} & -\mu_{b12}/\tilde{\nu}_b & 0 \\ -\mu_{b12}/\tilde{\nu}_b & 1/\nu_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\nu_{G12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Деформации определяются через главные кривизны \varkappa_n, \varkappa_l ($\varkappa_n \geq \varkappa_l$). Поскольку в нижней части плиты знаки деформаций и кривизн совпадают, а в верхней части они противоположны, получается:

$$\text{в нижней части } \varepsilon_1 = \varkappa_n z_n, \varepsilon_2 = \varkappa_l z_l,$$

$$\text{в верхней части } \varepsilon_1 = \varkappa_l z_l, \varepsilon_2 = \varkappa_n z_n$$

Положение нейтральной линии (от которой отмеряются величины z_n, z_l) определяется для сечений, перпендикулярных осям n и l , отдельно из условий

$$\int_z \sigma_n dz = \sum_{i=1}^n (\sigma_n \Delta z)_i = 0,$$

$$\int_z \sigma_l dz = \sum_{i=1}^n (\sigma_l \Delta z)_i = 0.$$

Элементы матрицы $[c_b]_1$ вычисляются по формулам (3.2) – (3.7). Обратив матрицу $[c_b]_1$, напишем

$$\{\sigma\}_1 = [c_b]_1^{-1} \{\varepsilon\}_1$$

и привлечем формулы преобразования компонент векторов при повороте осей координат

$$\{\sigma\}_x = [a] \{\sigma\}_1, \{\varepsilon\}_1 = [a]^T \{\varepsilon\}_x.$$

Получается

$$\{\sigma\}_x = [d_b]_x \{\varepsilon\}_x,$$

где $[d_b]_x = [a] [c_b]^{-1} [a]^T$ – матрица жесткости слоя в осях x, y .

$$[a] = \begin{bmatrix} n_x n_x & l_x l_x & 2n_x l_x \\ n_y n_y & l_y l_y & 2n_y l_y \\ n_x l_x & n_y l_y & (n_x l_y + n_y l_x) \end{bmatrix},$$

направляющие косинусы берутся по табл. 2.

3.4.3. Слой чистого бетона с трещинами

В качестве исходных берутся уравнения, записанные для несимметричного тензора деформаций

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_l \\ \gamma_{nl}^* \\ \gamma_{ln}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_o} \begin{bmatrix} 1/\nu_{bn} & -\mu_{bnn}/\tilde{\nu}_b & 0 & 0 \\ -\mu_{bln}/\tilde{\nu}_b & 1/\nu_{bl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\nu_{Gnn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\nu_{Gln} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_l \\ \tau_{nl} \\ \tau_{ln} \end{Bmatrix}. \quad (3.74)$$

Для сплошного бетона $\tau_{nl} = \tau_{ln} = 0$, но после образования трещин оси n, l могут не быть главными. При образовании первой трещины бетон в направлении оси n из работы исключается и заменяется связями зацепления. Получается четыре независимых уравнения

$$\varepsilon_{qn} = \frac{1}{E_{qn}} \sigma_n, \quad \gamma_{nl}^* = \frac{1}{E_{qnl}} \tau_{nl},$$

$$\varepsilon_{bl} = \frac{1}{E_o \nu_{bl}} \sigma_l, \quad \gamma_{ln}^* = \frac{1}{\nu_{Gln}} \tau_{ln},$$

причем по формуле (3.4)

$$\frac{1}{\nu_{Gln}} = \frac{1}{\nu_{bl}}.$$

Вводя суммарный угол сдвига, объединим третье и четвертое из уравнений (3.74)

$$\gamma_{nl} = \gamma_{nl}^* + \gamma_{ln}^* = \left(\frac{1}{E_{qnl}} + \frac{1}{E_{bl}} \right) \tau_{nl}.$$

Переходя к уравнениям $\{\sigma\} = [d] \{\varepsilon\}$, получим ненулевые элементы

матрицы $[d]$ для определения жесткостей плиты

$$d_{11} = E_{qn}, d_{22} = E_{ob}, d_{33} = \frac{E_{qnl}E_{bl}}{E_{qnl} + E_{bl}}.$$

Аналогично для бетона с двумя трещинами получается

$$d_{11} = E_{qn}, d_{22} = E_{ql}, d_{33} = \frac{E_{qnl}E_{qln}}{E_{qnl} + E_{qln}}.$$

3.4.4. Армированный слой без трещин

Здесь используются работы [3, 28, 29].

Плита армируется сетками снизу и сверху; армированными могут быть первый и « n »-й слои. Если напряжение в бетоне σ_{bi} , а в арматуре σ_{si} , $i = x, y$, то приведенные напряжения будут:

$$\text{в арматуре } \sigma_{si}^m = \sigma_{si} \mu_{si}, \quad (3.75)$$

$$\text{в бетоне } \sigma_{bi}^m = \sigma_{bi} (1 - \mu_{si}), \quad (3.76)$$

это напряжения, относящиеся к единице площади сечения слоя.

Полные напряжения в сечении равны сумме

$$\sigma_i = \sigma_{si}^m + \sigma_{bi}^m. \quad (3.77)$$

Касательные напряжения в арматуре, а также нормальные в направлении, перпендикулярном стержню, принимаются равными напряжениям в бетоне

$$\tau_{sij} = \tau_{bij} = \tau_{ij}, \quad \sigma_{sj}^i = \sigma_{bj} = \sigma_{bj}^m / (1 - \mu_{sj}),$$

где σ_{sj}^i – нормальные напряжения в направлении j в стержнях арматуры, направленных по оси i .

Сначала рассматривается модифицированный бетон: железобетон, в котором осевые деформации и напряжения в арматуре не учитываются. Оперировать приведенными напряжениями в бетоне

$$\left\{ \sigma_b^m \right\}_x = \left\{ \sigma_{bx}^m, \sigma_{by}^m, \tau_{xy} \right\}^T. \quad (3.78)$$

Если полные деформации в направлении x равны ε_x , то приведенные деформации модифицированного бетона будут $\varepsilon_x (1 - \mu_{sx})$. Они состоят из приведенных деформаций бетона и приведенных деформаций арматуры в направлении, перпендикулярном стержню

$$\varepsilon_i (1 - \mu_{si}) = \varepsilon_{bi} (1 - \mu_s) + \varepsilon_{si}^j \mu_{sj},$$

где $i, j = x, y$, $\mu_s = \mu_{sx} + \mu_{sy}$.

Отсюда

$$\varepsilon_i = \frac{1}{1 - \mu_{si}} (\varepsilon_{bi} (1 - \mu_s) + \varepsilon_{si}^j \mu_{sj}) \quad (3.79)$$

Угловая деформация γ_{xy} представляется суммой приведенных деформаций бетона и арматуры

$$\gamma_{xy} = \gamma_{bxy} (1 - \mu_s) + \gamma_{sxy}^x \mu_{sx} + \gamma_{sxy}^y \mu_{sy} \quad (3.80)$$

Входящие в правые части уравнений (3.79) и (3.80) деформации выражаются через напряжения

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_b\}_x &= [c_b]_x \{\sigma_b\}_x, \\ \varepsilon_{si}^j &= \sigma_{si}^j / E_{sj} = \sigma_{bi}^m / ((1 - \mu_{si}) E_{sj}), \\ \gamma_{sxy} &= \tau_{xy} / G_{sxy}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где G_{sxy} – модуль сдвига арматуры.

Равенства (3.81) с учетом выражения (3.76) подставляются в уравнения (3.79), (3.80). Получается связь между полными деформациями и приведенными напряжениями в бетоне (3.78)

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_x &= [c_b^m]_x \{\sigma_b^m\}_x, \\ \{\sigma_b^m\}_x &= \{\sigma_{bx}^m, \sigma_{by}^m, \tau_{xy}\}^T. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Элементы матрицы податливости $[c_b^m]_x$ выражаются через элементы матрицы $[c_b]_x$, которая может быть получена преобразованием матрицы $[c_b]_1$ к осям x, y на основе выражений

$$\{\varepsilon\}_x = ([a]^T)^{-1} \{\varepsilon\}_1, \quad \{\varepsilon\}_1 = [c_b]_1 \{\sigma\}_1, \quad \{\sigma\}_1 = [a]^{-1} \{\sigma\}_x.$$

Получается

$$[c_b]_x = ([a]^T)^{-1} [c_b]_1 [a]^{-1}$$

Матрица $([a]^T)^{-1}$ может быть получена из матрицы $[a]$, если множитель 2 перенести симметрично главной диагонали из третьего столбца в третью строку. Матрицу $[a]^{-1}$ можно получить так: транспонировать матрицу $[a]$ и множитель 2 перенести симметрично из третьей строки в третий столбец.

Обращая матрицу $[c_b^m]_x$ из уравнения (3.82) получаем $\{\sigma_b^m\}_x = [d_b^m]_x \{\varepsilon\}_x$,

где $[d_b^m]_x = [c_b^m]_x^{-1}$.

Приведенные осевые напряжения в арматуре составляют вектор-

столбец

$$\{\sigma_s^m\} = \{\sigma_{sx}\mu_{sx}, \sigma_{sy}\mu_{sy}, 0\}^T,$$

связанный с полными деформациями $\{\sigma_s^m\} = [d_s^m] \{\varepsilon\}_x$,

$$[d_s^m] = \begin{bmatrix} E_{sx}\mu_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & E_{sy}\mu_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для полных напряжений в сечениях слоя по выражению (3.77) можно записать

$$\{\sigma\}_x = [d] \{\varepsilon\}_x,$$

где $[d] = [d_b^m]_x + [d_s^m]_x$ – матрица жесткости армированного слоя без трещин.

3.4.5. Армированный слой с трещинами

Связь деформаций с напряжениями в виде $\{\varepsilon\} = [c] \{\sigma\}$ для такого слоя установлена. Симметричная матрица податливости $[c]$ имеет нулевые элементы c_{12} и c_{21} . Остальные даются формулами (3.52) при одной трещине и (3.64) при двух. Обращая матрицу $[c]$, получим матрицу жесткости $[d]$, элементы которой и подставляются в выражения (3.73) для вычисления жесткостей плиты.

3.5. Контрольные вопросы

1. Деформирование бетона. Связь между деформациями и напряжениями в главных осях. Две области напряженного состояния.
2. Общий критерий прочности бетона.
3. Деформирование железобетона с трещинами.
4. Связь напряжений в арматуре с общими деформациями элемента.
5. Определение напряжений в бетоне.
6. Общие физические соотношения.
7. Плоское напряженное состояние при одной трещине.
8. Плоское напряженное состояние при двух трещинах.
9. Определение жесткостей изгибаемой железобетонной плиты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неупругие деформации, возникающие в бетоне и арматуре под действием внешних сил, оказывают существенное влияние на деформирование железобетонной конструкции в целом. Чем выше уровень напряжений в той или иной связи, тем больше возникает неупругих деформаций и тем в большей мере снижается ее жесткость в сравнении с начальной. Это увеличивает деформативность конструкции и должно учитываться при выполнении расчетов по предельным состояниям второй группы. В статически неопределимых системах при этом происходит перераспределение внутренних усилий с наиболее напряженных связей на другие, менее напряженные. В результате наибольшее напряжение может оказаться не там, где оно ожидалось по расчету в линейной постановке, и будет иметь другое значение. Поэтому расчеты по предельным состояниям первой группы должны производиться также с учетом неупругих деформаций. Совершенствование таких расчетов и внедрение их в практику проектирования представляет широкое поле деятельности для научных работников и инженеров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Байков, В. Н. Железобетонные конструкции. Общий курс / В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов. – М. : Стройиздат, 1991. – 768 с.
2. Шишов, И. И. Метод расчета и исследование работы круглых плит на упругом основании с учетом особенностей деформирования железобетона : автореф. ... дис. канд. техн. наук / И. И. Шишов. – Челябинск : ЧПИ, 1973. – 19 с.
3. Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 415 с.
4. Гвоздев, А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А. А. Гвоздев. – М. : Госстройиздат, 1949. – 280 с.
5. Берг, О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона / О. Я. Берг. – М. : Стройиздат, 1962. – 96 с.
6. Холмянский, М. М. Контакт арматуры с бетоном / М. М. Холмянский. – М. : Стройиздат, 1978. – 184 с.
7. Мурашов, В. И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона / В. И. Мурашов. – М. : Машстройиздат, 1950.
8. Безухов, Н. И. Теория упругости и пластичности / Н. И. Безухов. – М. : Гостехтеориздат, 1953. – 420 с.
9. Гениев, Г. А. Вариант деформационной теории пластичности бетона / Г. А. Гениев // Бетон и железобетон. – 1969. – № 2.
10. Карпенко, Н. И. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, А. Н. Петров // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций : сб. тр. – М. : НИИЖБ, 1986. – С. 7 – 25.
11. Гвоздев, А. А. Ползучесть бетона и пути ее исследования / А. А. Гвоздев // Исследования прочности, пластичности и ползучести строительных материалов. – М. : Госстройиздат, 1955. – С. 126 – 137.
12. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел : пер. с англ. / А. Надаи. – М. : Госстройиздат, 1954. – 648 с.
13. Филоненко-Бородич, М. М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / М. М. Филоненко-Бородич // Инженерный сборник. – 1954. – Вып. 19. – С. 15 – 47.
14. Гениев, Г. А. К вопросу обобщения теории прочности бетона / Г. А. Гениев // Бетон и железобетон. – 1965. – № 2. – С. 15 – 17.
15. Яшин, А. В. Влияние неодносных (сложных) напряженных со-

стояний на прочность и деформации бетона, включая область, близкую к разрушению / А. В. Яшин // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций / под ред. А. А. Гвоздева. – М., 1979. – С. 187 – 202.

16. Круглов, В. М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии / В. М. Круглов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 1. – С. 40 – 48.

17. Карпенко, Н. И. К построению условия прочности бетонов при неодноосных напряженных состояниях / Н. И. Карпенко // Бетон и железобетон. – 1985. – № 10. – С. 35 – 37.

18. Малашкин, Ю. Н. О прочности бетона при трехосном сжатии / Ю. Н. Малашкин, Б. В. Тябликов // Свойства бетона, определяющие его трещиностойкость : тр. XV координацион. совещ. по гидротехнике. – Л., 1976. – Вып. 112.

19. Малашкин, Ю. Н. Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряженных состояний : автореф. ... дис. д-ра техн. наук / Ю. Н. Малашкин. – М. : 1984. – 38 с.

20. Яшин, А. В. Критерии прочности и деформирование бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния / А. В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / под ред. А. А. Гвоздева. – М. : Стройиздат, 1977. – С. 48 – 57.

21. *Он же*. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях / А. В. Яшин. – М. : Стройиздат, 1985. – 73 с.

22. Карпенко, Н. И. Об одной характерной функции прочности бетонов при трехосном сжатии / Н. И. Карпенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – С. 33 – 36.

23. Карпенко, Н. И. Диаграммы деформирования бетона, их трансформации в зависимости от различных факторов и использование в расчетах конструкций / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, А. Н. Петров // Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений : материалы конф. и совещ. по гидротехнике / ВНИИГ. – Л. : Энергоатомиздат, 1987. – С. 170 – 185.

24. Карпенко, Н. И. К построению обобщенной зависимости для диаграмм деформирования бетона / Н. И. Карпенко // Строительные конструкции. – Минск, 1983. – С. 164 – 173.

25. *Он же*. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1976. – 208 с.

26. *Он же.* К построению общей ортотропной модели деформирования бетона / Н. И. Карпенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 2. – С. 31 – 36.

27. *Он же.* К выводу физических соотношений для элементов с трещинами, работающих в условиях объемного напряженного состояния / Н. И. Карпенко // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций. – М., 1979. – С. 5 – 44.

28. *Он же.* К построению теории расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования / Н. И. Карпенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – № 2. – С. 28 – 35.

29. *Он же.* Теоретическое исследование перемещений, условий трещинообразования, ширины раскрытия трещин и условий прочности элементов с трещинами железобетонных плит и оболочек / Н. И. Карпенко // Исследования конструкций зданий и сооружений для сельского строительства. – 1968. – Вып. 1, 2. – С. 32 – 91.

30. Яременко, А. Ф. Кратковременная и длительная прочность растянуто-сжатых дисков с трещинами / А. Ф. Яременко // Бетон и железобетон. – 1986. – № 12. – С. 23 – 24.

31. Григорьянц, Л. М. Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния арматуры и бетона при наличии наклонных трещин / Л. М. Григорьянц // Труды ЦНИИЭПсельстроя. – М., 1977.

32. Карпенко, Н. И. Современное состояние исследований по критериям прочности и связям между напряжениями и деформациями бетонных элементов при объемном напряженном состоянии / Н. И. Карпенко, В. М. Круглов // Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений : материалы конф. и совещ. по гидротехнике / ВНИИГ. – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – С. 170 – 185.

Учебное издание

ШИШОВ Иван Иванович

НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ
В КОНСТРУКЦИЯХ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Учебное пособие

Подписано в печать 20.11.08.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,11. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.