

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. Д. БУРКОВ А. В. ЕГОРОВА И. А. ПЕТРЕНКО

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие



Владимир 2022

УДК 512.64
ББК 22.143
Б91

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. М. Аракелян

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры высшей математики
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)
И. В. Каржеманов

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Бурков, В. Д. Линейная алгебра : учеб. пособие / В. Д. Бур-
Б91 ков, А. В. Егорова, И. А. Петренко ; Владим. гос. ун-т им. А. Г.
и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 176 с.
ISBN 978-5-9984-1463-3

Содержит теоретический материал и разобранные типовые задачи по таким разделам высшей математики, как матрицы, системы линейных уравнений, векторы, линейные пространства и др. Приведены задачи для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов вузов 1 – 2-го курсов очной формы обучения направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» (бакалавриат), изучающих дисциплины «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ» и другие, а также для преподавателей при проведении практических занятий.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 22. Библиогр.: 7 назв.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN 978-5-9984-1463-3

© ВлГУ, 2022

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено одному из важнейших разделов математики, на который в значительной степени опираются другие разделы высшей и прикладной математики. Курс «Линейная алгебра» – обязательная составная часть общего курса математики для студентов инженерно-технических, экономических и особенно физико-математических направлений подготовки. Пособие состоит из двух глав, в первой из которых рассматриваются системы линейных уравнений, а также основные понятия матричной и векторной алгебры. Во второй главе изучаются такие абстрактные алгебраические понятия, как линейные векторные пространства, линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

Авторы стремились к тому, чтобы все определения были достаточно строгими и в то же время доступными для понимания. Принято считать, что для лучшего усвоения сложного материала недостаточно только знать формулы и теоремы, необходимо уметь их доказывать, поэтому в пособии в большинстве случаев теоремы представлены с доказательствами (хотя бы схематичными).

Каждая новая тема заканчивается разбором типичных задач, причем для наиболее важных из них приводится подробная схема решения. Кроме того, некоторый теоретический материал дополнен иллюстрациями, что помогает студенту глубже понять его содержание.

В конце каждой главы приведены контрольные вопросы, а в конце пособия имеются варианты заданий для типовых расчетов (по 23 варианта).

Четкая структура и ясность изложения, объемный фактический материал и академичный подход делают учебное пособие интересным и полезным для студентов и преподавателей вузов.

3) ЭП 3-го типа – почленное сложение или вычитание любых двух уравнений системы (при этом одно из этих уравнений можно умножить на число $\lambda_1 \neq 0$, а другое – на число $\lambda_2 \neq 0$).

Очевидно, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Любые две системы, одна из которых получена из другой в результате элементарных преобразований, эквивалентные.

Суть метода Гаусса заключается в том, чтобы при помощи подходящей цепочки ЭП привести данную систему к ступенчатому виду. Этот этап решения системы называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Ступенчатая система имеет вид

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ a'_{mm}x_m + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

а из нее можно последовательно найти все неизвестные, начиная с последнего уравнения и подставляя уже найденные неизвестные во все предыдущие уравнения системы. Этот этап называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В простейшем случае, когда имеется система трех уравнений с тремя неизвестными, последовательность ЭП, приводящую систему к ступенчатому виду, можно представить схематично (рис. 1).

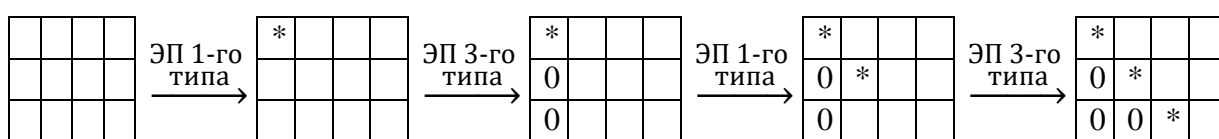


Рис. 1. Схема приведения системы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями

На рисунке система условно представлена в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют уравнениям системы, первые три столбца – коэффициентам левой части системы, четвертый столбец – свободным членам в правой части, причем пустая клетка означает любой коэффициент, клетка, отмеченная символом «*», – ненулевой коэффициент, желательно ± 1 , а клетка, в которой стоит «0», – нулевой коэффициент.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Прямой ход:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{2 \text{ ур.} - 1 \text{ ур.} \times 2 \\ 3 \text{ ур.} + 1 \text{ ур.} \times 3}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ -x_2 + 4x_3 = -9, \\ 10x_2 - 5x_3 = 20 \end{cases} \xrightarrow{3 \text{ ур.} + 2 \text{ ур.} \times 10} \\ &\longrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ -x_2 + 4x_3 = -9, \\ 35x_3 = -70. \end{cases} \end{aligned}$$

Обратный ход: из последнего уравнения находим $x_3 = -2$. Подставляя во второе уравнение, получаем

$$x_2 = 4x_3 + 9 = 4 \cdot (-2) + 9 = 1.$$

Наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = -3x_2 + x_3 + 7 = (-3) \cdot 1 + (-2) + 7 = 2.$$

Ответ. $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -2$.

§ 2. Матрицы

Матрицей с размерами $m \times n$ называется прямоугольная числовая таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A , то есть числа a_{ij} , обычно обозначают одной буквой, которая снабжена двумя индексами, первый из которых i означает номер строки, в которой стоит этот элемент, а второй индекс j – номер столбца.

В линейной алгебре рассматриваются некоторые специальные виды матриц, а именно:

– матрица A , у которой совпадает число строк и число столбцов, то есть $m = n$, называется *квадратной* матрицей порядка n ;

– прямоугольная матрица (с размерами $m \times n$), у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой* матрицей:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

– квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной* матрицей;

– если на главной диагонали стоят числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а все остальные элементы равны нулю, то такая квадратная матрица называется *диагональной*:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

– квадратная матрица T называется *верхнетреугольной*, если на главной диагонали и выше нее стоят произвольные числа, а все элементы ниже диагонали равны нулю:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *нижнетреугольная* матрица:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

– прямоугольная матрица S называется *ступенчатой*, если она имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3j} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mk} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причем $1 < i < j < \dots < k$ и все ступени начинаются с ненулевых элементов, то есть $a_{11} \neq 0$, $a_{2i} \neq 0$, $a_{3j} \neq 0$, ..., $a_{mk} \neq 0$ (следующие за ними справа элементы могут быть любыми);

– в частности, если $i = 2$, $j = 3$, ..., $k = m$, то есть все ступени имеют длину, равную единице, то такая матрица называется *трапецидальной*:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

– квадратная матрица B называется *блочной*, если она образована из двух квадратных матриц A и A' (не обязательно с одинаковыми размерами) следующим способом:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mm} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что блочная матрица может быть образована также из нескольких квадратных.

§ 3. Операции над матрицами

В линейной алгебре рассматриваются следующие алгебраические операции, которые можно производить с матрицами: транспонирование, умножение на число, сложение и вычитание матриц, умножение матриц, обратная матрица.

Транспонирование матрицы. Рассмотрим произвольную матрицу с размерами $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица с размерами $n \times m$, в которой строки и столбцы меняются местами, то есть

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называется *транспонированной* матрицей.

Умножение матрицы на число. Пусть A – матрица с размерами $m \times n$ и λ – произвольное действительное число. Произведение матрицы A на число λ определяется следующим образом:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

то есть все элементы матрицы A умножаются на число λ и в результате получается матрица с теми же размерами $m \times n$.

Сложение и вычитание матриц. Пусть A и B – две матрицы с одинаковыми размерами $m \times n$. Суммой этих матриц называется матрица с теми же размерами $m \times n$, которая обозначается $A + B$ и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть складываются элементы матриц A и B , которые стоят на одних и тех же местах.

Аналогично определяется разность двух матриц A и B .

Умножение матриц. Рассмотрим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

причем матрица A имеет размеры $m \times n$, а матрица B – размеры $n \times k$, то есть число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B . Произведением матриц A и B называется матрица $C = A \cdot B$ с размерами $m \times k$, элементы которой вычисляются по следующей формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj},$$

то есть элементы i -й строки матрицы A умножаются на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B , а затем все эти произведения складываются.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-6) + (-5) \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 4 \\ 3 \cdot (-6) + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -18 \\ -26 & 19 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} (-6) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-6) \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 3 & (-2) \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 34 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}.$$

Как видно из рассмотренного примера, операция умножения матриц в общем случае некоммукативна, то есть $A \cdot B \neq B \cdot A$.

В то же время легко проверить, что введенные выше *операции удовлетворяют следующим свойствам*:

- 1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения);
- 3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения);
- 4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);
- 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
- 6) если A – матрица с размерами $m \times n$, E_m – единичная матрица m -го порядка, а E_n – единичная матрица n -го порядка, то

$$A \cdot E_n = E_m \cdot A = A.$$

Из последнего свойства становится понятно, почему матрица E называется *единичной*.

Обратная матрица. В линейной алгебре не существует такой операции, как деление матриц, однако для некоторых матриц можно ввести понятие обратной матрицы.

Определение. Квадратная матрица A называется обратимой (или невырожденной), если существует квадратная матрица B (с теми же размерами) такая, что

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

В этом случае матрица B называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1} .

Предположим, что матрица A обратимая. Рассмотрим один из методов нахождения обратной матрицы, который основан на элементарных преобразованиях и носит название метода Гаусса (позже будет приведен критерий существования обратной матрицы, а также другие методы ее вычисления).

Сначала введем в рассмотрение еще три специальных вида квадратных матриц.

$$1. \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Эта матрица отличается от единичной матрицы E только тем, что две единицы переставляют с диагонали на другие места: в i -й строке число 1 стоит на j -м месте, а в j -й строке, наоборот, число 1 стоит на i -м месте. Легко понять, что если квадратную матрицу A умножить слева на E_{ij} , то полученная матрица $E_{ij}A$ будет отличаться от матрицы A только тем, что строки с номерами i и j поменяются местами.

$$2. \quad E_i^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица отличается от E только тем, что вместо одной единицы на i -м месте стоит число λ . При этом очевидно, что умножение матрицы A слева на матрицу E_i^λ означает, что i -я строка матрицы A умножается на число λ , а остальные строки остаются без изменения.

$$3. \quad E_{ij}^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица отличается от E только тем, что вместо одного нуля в i -й строке и j -м столбце ($i \neq j$) стоит число $\lambda \neq 0$.

Легко понять, что умножение матрицы A слева на E_{ij}^λ означает, что к i -й строке матрицы A прибавляется j -я строка, умноженная на число λ , а остальные строки остаются без изменения.

Таким образом, любое элементарное преобразование (1, 2 или 3-го типа) над строками матрицы A равносильно умножению этой матрицы A слева на одну из специальных матриц (E_{ij} , E_i^λ или E_{ij}^λ).

Суть метода Гаусса нахождения обратной матрицы заключается в следующем. Для данной квадратной матрицы A с размерами $n \times n$ рассмотрим прямоугольную матрицу с размерами $n \times 2n$, которая получается, если приписать к матрице A справа единичную матрицу E (для удобства матрицы A и E отделяются друг от друга вертикальной

чертой). Далее эта матрица $(A|E)$ с помощью элементарных преобразований над ее строками приводится к ступенчатому виду. Если при этом число ненулевых строк (а значит, и число ступеней) будет меньше, чем n , то это означает, что данная матрица A не является обратимой и для нее не существует обратной матрицы. Если же в полученной ступенчатой матрице (с размерами $n \times 2n$) все строки будут ненулевыми, то есть она окажется трапецеидальной, то сначала следует с помощью ЭП 3-го типа все элементы над этой диагональю сделать равными нулю, а затем с помощью ЭП 2-го типа можно все ненулевые диагональные элементы сделать равными единице. В результате получится матрица с размерами $n \times 2n$ вида $(E|B)$, где B – квадратная матрица.

Как уже было показано,

$$(E|B) = (E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A | E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 E).$$

Отсюда следует, что $E = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A$ и $B = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$, то есть $BA = E$, а значит, $B = A^{-1}$.

Пример 3.

3.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{2 \text{ стр.} \times 3 - 1 \text{ стр.} \times 3} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{1 \text{ стр.} \times 17 + 2 \text{ стр.}} \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 51 & 0 & 15 & 3 \\ 0 & 17 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \text{ стр.} \times 1/51 \\ 2 \text{ стр.} \times 1/17 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/17 & 1/17 \\ 0 & 1 & -2/17 & 3/17 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ответ. $A^{-1} = 1/17 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 4 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & -7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 22 & 16 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & -7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22/24 & 16/24 & 18/24 \\ 0 & 1 & 0 & -7/12 & -4/12 & -9/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 4/12 & 3/12 \end{array} \right).$$

Элементарные преобразования:

- 1) 2 стр. $\times 2 - 1$ стр., 3 стр. $+ 1$ стр.;
- 2) 3 стр. $\times 3 + 2$ стр. $\times 2$;
- 3) 1 стр. $\times 4 + 3$ стр., 2 стр. $\times 4 - 3$ стр. $\times 3$;
- 4) 1 стр. $\times 3 - 2$ стр.;
- 5) 1 стр. $\times 1/24$, 2 стр. $\times 1/12$, 3 стр. $\times 1/12$.

Окончательно получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 22 & 8 & 9 \\ -7 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 22 & 8 & 9 \\ -7 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

§ 4. Матричный метод решения системы

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов системы}$$

(с размерами $m \times n$);

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных (матрица с размерами } n \times 1);$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов (матрица с размерами}$$

$m \times 1$).

Тогда данную систему уравнений можно записать в матричной форме: $AX = B$.

Предположим, что матрица A квадратная, то есть $m = n$, и для нее существует обратная матрица A^{-1} . Тогда

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

Это означает, что столбец $X = A^{-1}B$ – решение матричного уравнения.

Пример 4. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -13, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

и запишем систему в матричной форме: $AX = B$.

В примере 3 было получено, что

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 22 & 8 & 9 \\ -7 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 22 & 8 & 9 \\ -7 & -4 & -9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 176 - 104 - 36 \\ -112 + 52 + 36 \\ 16 - 52 - 12 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ -24 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -4$.

§ 5. Подстановки

Понятие определителя – одно из важнейших в линейной алгебре. Его строгое определение основано на понятии подстановки.

Пусть $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – конечное множество. Подстановкой порядка n называется любое взаимно однозначное отображение этого множества на себя, то есть $\sigma : M \rightarrow M$. Если

$$\sigma(1) = i_1, \quad \sigma(2) = i_2, \quad \dots \quad \sigma(n) = i_n,$$

то такую подстановку обычно записывают в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \sigma = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n).$$

Поскольку в любой подстановке $\sigma = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_n)$ все числа от 1 до n встречаются ровно по одному разу, но в каком-то другом порядке, то подстановки иногда называют *перестановками*. Согласно правилу произведения число различных подстановок порядка n равно $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$. Множество всех подстановок порядка n обозначается S_n и называется *группой подстановок*.

Рассмотрим подстановку $\sigma = (i_1 i_2 i_3 \dots i_n)$. Говорят, что пара чисел $\{i_k, i_\ell\}$, входящих в подстановку, образует инверсию, если $k < \ell$ и при этом $i_k > i_\ell$, то есть большее из этих чисел стоит левее, чем меньшее. Пусть $m(\sigma)$ – число всех инверсий подстановки σ . *Сигнатурой* подстановки σ называется число

$$\text{sign } \sigma = (-1)^{m(\sigma)},$$

то есть $\text{sign } \sigma = +1$, если число инверсий $m(\sigma)$ четное, и в этом случае подстановка называется *четной*; $\text{sign } \sigma = -1$, если число $m(\sigma)$ нечетное, и в этом случае подстановка называется *нечетной*.

Нетрудно понять, что количество четных и нечетных подстановок одинаково и равно $n!/2$.

Пример 5.

5.1. Пусть $\sigma = (3 \ 2 \ 1 \ 5 \ 4)$. Очевидно, что в этой подстановке инверсию образуют следующие пары чисел:

$$\{3,2\}, \quad \{3,1\}, \quad \{2,1\}, \quad \{5,4\}.$$

Значит $m(\sigma) = 4$, $\text{sign} = (-1)^4 = +1$, то есть σ – четная подстановка.

5.2. Рассмотрим группу подстановок S_3 . Она содержит ровно $3! = 6$ различных подстановок:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1 \ 2 \ 3), & \sigma_2 &= (2 \ 3 \ 1), & \sigma_3 &= (3 \ 1 \ 2), \\ \sigma_4 &= (2 \ 1 \ 3), & \sigma_5 &= (1 \ 3 \ 1), & \sigma_6 &= (3 \ 2 \ 1). \end{aligned}$$

Очевидно, что первые три из них – четные ($m(\sigma_1) = 0, m(\sigma_2) = 2, m(\sigma_3) = 2$), а последние три – нечетные ($m(\sigma_4) = 1, m(\sigma_5) = 1, m(\sigma_6) = 3$).

§ 6. Определитель матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица порядка n .

Определение. Определителем этой матрицы называется число, которое обозначается $|A|$ (или $\det A$) и вычисляется по следующей формуле:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

в которой сумма берется по всем подстановкам $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_n) \in S_n$.

Очевидно, что если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка, то $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Если же A – квадратная матрица 3-го порядка, то формула для вычисления ее определителя выглядит немного сложнее:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для лучшего запоминания этой формулы можно воспользоваться следующим правилом:

– первые три слагаемых соответствуют произведению трех сомножителей, стоящих на главной диагонали, а также в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны этой диагонали, как это показано на рис. 2;

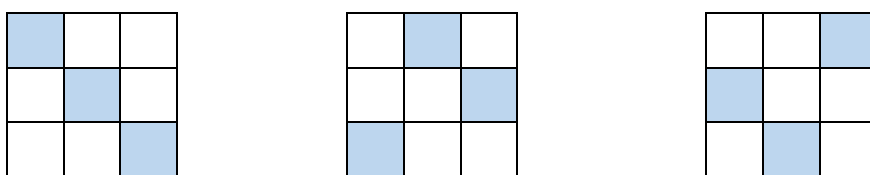


Рис. 2. Схема вычисления определителя (главная диагональ)

– три других слагаемых, которые берутся с противоположными знаками, определяются аналогично, но относительно другой диагонали (рис. 3).

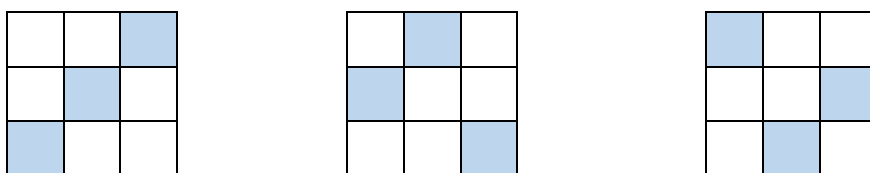


Рис. 3. Схема вычисления определителя (другая диагональ)

Пример 6.

6.1. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 26.$

6.2. $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$
 $= 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-4) \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \cdot (-2) -$
 $- 5 \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot (-4) \cdot 3 = 6 - 30 - 32 - 8 + 20 + 36 = -8.$

Очевидно, что вычисление определителя матрицы 4-го и более высокого порядка непосредственно по определению – чересчур громоздкая задача, поскольку требует вычисления суммы очень большого числа слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение нескольких сомножителей, к тому же взятое с определенным знаком.

Рассмотрим основные свойства определителей, которые понадобятся в дальнейшем. В частности, с их помощью можно без особого труда вычислять определители 4-го порядка и выше. Некоторые из этих свойств либо совершенно очевидны, либо доказываются очень просто. Другие же, наоборот, имеют очень непростые доказательства, основанные на специальных свойствах подстановок. В связи с этим приведем лишь формулировки этих свойств, опуская все доказательства.

Свойства определителей следующие:

1) $\det A^T = \det A$, где A^T – транспонированная матрица, которая получается из матрицы A перемены местами строк и столбцов;

2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, то есть определитель

треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов (в частности, определитель диагональной матрицы также равен произведению диагональных элементов);

3) если $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ – блочная матрица, то

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2;$$

4) если матрица A содержит хотя бы одну нулевую строку, то $\det A = 0$;

5) если в матрице A какие-то две строки пропорциональны, то $\det A = 0$;

6) если матрица A' получается из матрицы A переменой местами двух строк, то $\det A' = -\det A$;

7) если матрица A' получается из матрицы A умножением всех элементов одной строки на некоторое число λ , то $\det A' = \lambda \det A$;

8) если к элементам какой-то одной строки матрицы A прибавить (или вычесть) соответствующие элементы другой строки, умноженные на число λ , то при этом определитель матрицы не изменится;

9) формула разложения определителя по i -й строке следующая:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} – определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, которая получается из данной матрицы A путем удаления i -й строки и j -го столбца (числа M_{ij} называются *минорами* $(n-1)$ -го порядка, а числа A_{ij} – *алгебраическими дополнениями* элементов a_{ij} матрицы A);

10) формула ложного разложения определителя следующая:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0,$$

если $i \neq j$;

11) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Если в свойствах 4 – 10 строки заменить столбцами, то такие свойства также имеют место.

Очевидно, что формула разложения определителя по строке (или столбцу) позволяет свести вычисление определителя n -го порядка к вычислению нескольких определителей меньшего порядка. При этом наиболее рационален следующий порядок применения этой формулы: сначала с помощью элементарных преобразований 3-го типа над строками (или столбцами) матрицы, которые, согласно свойству 8, не меняют значение определителя, нужно обнулить все, кроме одного, элементы какого-либо столбца (или строки), после этого можно применять формулу разложения, и в результате задача сводится к вычислению только одного определителя $(n-1)$ -го порядка. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не получится определитель 2-го или 3-го порядка.

Пример 7.

7.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ столб.} - 3 \text{ столб.} \times 3 \\ 2 \text{ столб.} + 4 \text{ столб.} \\ 4 \text{ столб.} - 3 \text{ столб.} \times 2 \end{pmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 3 & -9 \\ -8 & 5 & 2 & -3 \\ 9 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (\text{разложим по первой строке}) = \\
 = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -7 & -2 & -9 \\ -8 & 5 & -3 \\ 9 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 = \\
 = -245 + 54 + 360 + 405 - 112 - 105 = 357.$$

7.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ стр.} + 4 \text{ стр.} \\ 2 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.} \\ 4 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.} \times 2 \end{pmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (\text{разложим по 2-му столбцу}) = \\
 = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ стр.} - 1 \text{ стр.} \\ 3 \text{ стр.} + 2 \text{ стр.} \times 2 \\ 4 \text{ стр.} - 2 \text{ стр.} \times 3 \end{pmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & 10 & 9 & -7 \\ 0 & -7 & -9 & 7 \end{vmatrix} = (\text{разложим по 1-му столбцу}) = \\
 = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -3 & -7 \\ 10 & 9 & -7 \\ -7 & -9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.} \\ 2 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.} \end{pmatrix} = \\
 = - \begin{vmatrix} -1 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 7 \end{vmatrix} = (\text{разложим по 2-й строке}) = \\
 = -3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = 3(-84 - 0) = -252.$$

Определитель Вандермонда. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – попарно различные числа. В линейной алгебре и во многих ее приложениях большую роль играет следующий определитель n -го порядка, который называется *определителем Вандермонда*:

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Для его вычисления сначала вычтем из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на a_1 . Затем из 3-й строки вычтем 2-ю строку, также умноженную на a_1 , и так далее, то есть из каждой строки вычтем предыдущую строку, умноженную на a_1 . Согласно свойству 8, определитель при этом не изменится, но зато получим определитель матрицы, у которой в 1-м столбце все элементы, кроме одного, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & \dots & a_n^2(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по 1-му столбцу и вынося из каждого столбца полученной матрицы общий множитель (свойство 7), получим определитель $(n - 1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} & (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\ & = \prod_{1 \leq i} (a_i - a_1) W(a_2, a_3, \dots, a_n). \end{aligned}$$

К полученному определителю Вандермонда $(n - 1)$ -го порядка можно применить ту же самую процедуру. В результате окончательно получим, что

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

§ 7. Ранг матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу A с размерами $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть k – некоторое целое число такое, что $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Зафиксируем в матрице A строки с номерами $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и столбцы с номерами $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Очевидно, что элементы матрицы A , стоящие на пересечениях выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k -го порядка матрицы A и обозначается $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ (или просто M_k).

Определение. Рангом матрицы A (обозначается $\text{rang } A$) называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы, то есть $\text{rang } A = k$, если существует хотя бы один минор k -го порядка, который не равен нулю, а все миноры $(k + 1)$ -го порядка равны нулю.

Очевидно, что для матрицы с размерами $m \times n$ количество всех миноров 1-го порядка равно $m \cdot n$, количество миноров 2-го порядка – $C_m^2 C_n^2 = \frac{1}{2} m(m - 1) \cdot \frac{1}{2} n(n - 1)$, количество миноров 3-го порядка – $C_m^3 C_n^3$ и т. д. Таким образом, для матрицы A большого размера число различных ее миноров (любого порядка) очень велико, а значит, вычисление ранга матрицы непосредственно по определению – это очень трудоемкая задача, особенно если этот ранг – не очень маленькое число. В связи с этим на практике для вычисления ранга матрицы, как правило, применяются другие способы.

Один из них – *метод окаймляющих миноров*, суть которого заключается в следующем. Предположим, что в матрице A выбраны какие-то k строк с номерами $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ и какие-то k столбцов с номерами $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Тогда им соответствует минор k -го порядка $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$. Если $k < m$ и $k < n$ и к уже выбранным строкам и столбцам добавить еще одну строку и один столбец, то получим минор $(k + 1)$ -го порядка

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}}^{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}},$$

который называется *окаймляющим минором* по отношению к предыдущему минору M_k .

Очевидно, что для любого ненулевого минора M_k число окаймляющих его миноров существенно меньше числа всех миноров $(k + 1)$ -го порядка. Кроме того, можно доказать, что если для некоторого ненулевого минора M_k все окаймляющие миноры равны нулю, то и вообще все миноры $(k + 1)$ -го порядка тоже равны нулю. Таким образом, при построении максимально длинной цепочки ненулевых миноров $M_1, M_2, \dots, M_k$ достаточно на любом шаге перебирать только те миноры, которые являются окаймляющими по отношению к предыдущему. Следовательно, если $M_k \neq 0$ и все окаймляющие его миноры $(k + 1)$ -го порядка равны нулю, то $\text{rang } A = k$.

Очевидно, что метод окаймляющих миноров позволяет заметно сократить количество вычисляемых определителей, но тем не менее объем вычислений, как правило, остается большим. Более эффективен метод Гаусса, который основан на следующих двух теоремах.

Теорема 1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками или столбцами матрицы.

Доказательство. Как известно из свойств определителей, при перестановке местами двух строк (или столбцов) определитель меняет знак, при умножении строки (или столбца) на число $\lambda \neq 0$ определитель также умножается на это число λ , а при сложении и вычитании строк или столбцов вообще не меняется. Значит, если какой-то из миноров матрицы был равен нулю, то после цепочки элементарных преобразований он снова будет равен нулю, и наоборот, если минор был ненулевым, то он и останется ненулевым. Значит, ранг матрицы не изменится.

Теорема 2. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть S – ступенчатая матрица, имеющая k ненулевых строк. Зафиксируем в этой матрице первые k ненулевых строк, а также k столбцов, с которых начинаются ступени. Очевидно, что на их пересечении получится верхнетреугольная матрица, определитель которой (то есть минор M_k) равен произведению диагональных элементов, а значит, $M_k \neq 0$. Если же в этой ступенчатой матрице выбрать большее число строк, то среди них будет хотя бы одна целиком нулевая строка, а значит, любой такой минор будет равен нулю, то есть $\text{rang } A = k$.

Таким образом, для нахождения ранга матрицы A ее нужно привести к ступенчатому виду. Если в этой ступенчатой матрице S имеется ровно k ненулевых строк, то $\text{rang } S = k$, а значит, $\text{rang } A = k$.

Пример 8. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

двумя способами: а) методом окаймляющих миноров; б) методом Гаусса.

Решение. 1. Взяв в матрице A 1-ю строку и 1-й столбец, найдем соответствующий минор 1-го порядка: $M_1^1 = 2 \neq 0$. Добавив к нему 2-ю строку и 2-й столбец, найдем окаймляющий минор 2-го порядка:

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Теперь к этому минору 2-го порядка добавим 3-ю строку и 5-й столбец (как более простой) и получим окаймляющий минор 3-го порядка:

$$M_{1,2,3}^{1,2,5} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 0 - 4 + 1 = -7 \neq 0.$$

У последнего минора 3-го порядка имеется ровно два окаймляющих минора 4-го порядка:

$$\begin{aligned}
 M_{1,2,3,4}^{1,2,5,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ столб.} + 3 \text{ столб.} \\ 2 \text{ стр.} + 2 \text{ стр.} \times 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (\text{разложим по 1-й строке}) = \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (2 \text{ стр.} - 1 \text{ стр.}) = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{1,2,3,4}^{1,2,5,4} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ столб.} - 2 \text{ столб.} \times 2 \\ 3 \text{ столб.} - 2 \text{ столб.} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (\text{разложим по 1-й строке}) = \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (2 \text{ стр.} - 1 \text{ стр.}) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку оба окаймляющих минора 4-го порядка равны нулю, то $\text{rang } A = 3$.

2. По методу Гаусса нужно привести матрицу к ступенчатому виду с помощью ЭП.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ стр.} + 3 \text{ стр.} \\ 4 \text{ стр.} + 2 \text{ стр.} \\ 3 \text{ стр.} + 2 \text{ стр.} \times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2 \text{ стр.} - 3 \text{ стр.} \\ 3 \text{ стр.} - 4 \text{ стр.} \times 2}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в полученной ступенчатой матрице имеется ровно три ненулевые строки, то $\text{rang } A = 3$.

Ответ. $\text{rang } A = 3$.

§ 8. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель

матрицы этой системы.

Рассмотрим еще n определителей n -го порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix},$$

то есть в матрице A каждый столбец по очереди заменяется на столбец свободных членов системы.

Теорема (правило Крамера). Данная система уравнений определенная, то есть имеет единственное решение, в том и только в том случае, когда $\Delta = |A| \neq 0$, и тогда это единственное решение можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Приведем систему к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, при этом определитель полученной ступенчатой матрицы S будет отличаться от определителя данной матрицы A ненулевым постоянным множителем. Очевидно, что ступенчатая система определенная тогда и только тогда, когда матрица системы треугольная, а значит, определитель этой матрицы равен произведению ее диагональных элементов, то есть не равен нулю.

Доказательство формул Крамера для удобства проведем для системы трех уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим матрицу 4-го порядка

$$H = \begin{pmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы A следующим образом: сначала к матрице A слева приписывается столбец свободных членов системы, а затем первая строка полученной прямоугольной матрицы записывается сверху еще раз. Поскольку матрица H имеет две одинаковые строки, то $\det H = 0$. Разложим этот определитель по первой строке.

$$\begin{aligned} 0 = & b_1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{11} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ & + a_{12} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Если у 3-го из этих определителей поменять местами два столбца, а у 4-го – два раза поменять местами столбцы, то получим

$$0 = b_1 \Delta - a_{11} \Delta_1 - a_{12} \Delta_2 - a_{13} \Delta_3,$$

то есть

$$a_{11} \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \frac{\Delta_2}{\Delta} + a_{13} \frac{\Delta_3}{\Delta} = b_1.$$

Таким образом, числа $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ удовлетворяют уравнению $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$.

Аналогично можно показать, что эти числа удовлетворяют и другим двум уравнениям, что и доказывает теорему.

Пример 9. Найдём методом Крамера решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -60 - 24 + 20 + 30 + 30 - 32 = -36 \neq 0,$$

значит, система имеет единственное решение:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 2 \\ -9 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -120 - 72 + 50 + 90 + 60 - 80 = -72,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 60 - 36 + 36 - 30 - 48 + 54 = 36,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & 5 \\ -3 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 135 - 60 - 60 - 90 + 75 + 72 = 72.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-72}{-36} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{-36} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{72}{-36} = -2.$$

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

§ 9. Присоединенная матрица

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица. Имеет

место следующая теорема.

Теорема (критерий обратимости матрицы). Матрица A обратимая тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что матрица A обратимая, то есть существует обратная матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Согласно одному из свойств определителей,

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1},$$

то есть $\det A \neq 0$.

Предположим теперь, что $\Delta = |A| = \det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу A' , которая называется *присоединенной* к данной матрице A . Она составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A , при этом индексы надо поменять местами, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} & \dots \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $\Delta_{ij} = M_{ij}$ – минор $(n - 1)$ -го порядка матрицы A , то есть определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j .

Из формул разложения определителя и ложного разложения определителя (по всем строкам и столбцам) следует, что

$$A \cdot A' = A' \cdot A = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Delta & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix},$$

а значит, матрица $\frac{1}{\Delta} A'$ обратная к A , тем самым теорема доказана.

Таким образом, формулу для вычисления обратной матрицы можно записать в виде

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots \\ -\Delta_{12} & \Delta_{22} & -\Delta_{32} & \dots \\ \Delta_{13} & -\Delta_{23} & \Delta_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Метод вычисления обратной матрицы, основанный на этой формуле, называется *методом присоединенной матрицы*.

Пример 10. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta = |A| = 45 + 32 - 10 + 60 + 24 + 10 = 161 \neq 0$, значит, обратная матрица существует.

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 35, & \Delta_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 21, & \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \\ \Delta_{21} &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, & \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 35, & \Delta_{23} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -14, \\ \Delta_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -23, & \Delta_{32} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7, & \Delta_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11. \end{aligned}$$

Поменяв местами индексы и изменив знак у четырех определителей с нечетной суммой индексов, найдем присоединенную матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 35 & 0 & -23 \\ -21 & 35 & -7 \\ 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{161} A' = \frac{1}{161} \begin{pmatrix} 35 & 0 & -23 \\ -21 & 35 & -7 \\ 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{161} \begin{pmatrix} 35 & 0 & -23 \\ -21 & 35 & -7 \\ 10 & 14 & 11 \end{pmatrix}.$

§ 10. Векторная алгебра

Вектором (на плоскости или в пространстве) называется направленный отрезок, то есть для задания вектора нужно отметить две точки, провести через них отрезок прямой и указать стрелкой одно из двух направлений. Если точка A – начало этого отрезка, а точка B – его конец, то получаем вектор, который обозначается $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются *равными*, если один из них можно получить из другого в результате параллельного переноса.

Если на плоскости задана декартова (прямоугольная) система координат Oxy , то координатами вектора $\vec{a}$ называются координаты его конца при условии, что начало вектора совпадает с началом координат (точка O). Записывается $\vec{a}(x_0, y_0)$ (рис. 4).

Очевидно, что если заданы координаты двух точек $\vec{A}(x_0, y_0)$ и $\vec{B}(x_1, y_1)$, то для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала (рис. 5), то есть $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

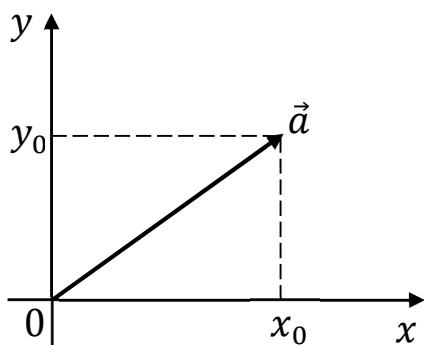


Рис. 4. Вектор $\vec{a}$ на плоскости

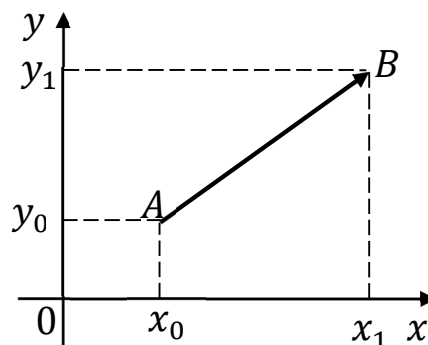


Рис. 5. Вектор $\overrightarrow{AB}$ на плоскости

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина этого отрезка (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$). Очевидно, что если заданы координаты вектора $\vec{a}(x_0, y_0)$, то его модуль вычисляется по теореме Пифагора, то есть

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Замечания. 1. Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Очевидно, что координаты нулевого вектора и его модуль равны нулю.

2. Все сказанное выше справедливо и для пространственных векторов, только должна быть задана декартова система координат в пространстве $Oxyz$. Тогда координаты вектора – это тройка чисел $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$, причем $|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ и $\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, если $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$.

В векторной алгебре рассматриваются пять операций, которые можно производить с векторами.

§ 11. Умножение вектора на число

Пусть $\vec{a}$ – вектор (на плоскости или в пространстве) и λ – действительное число.

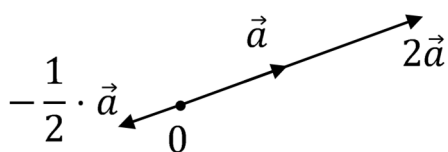


Рис. 6. Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, модуль которого вычисляется по формуле $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление вектора $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если

$\lambda > 0$. Если же $\lambda < 0$, то вектор $\lambda\vec{a}$ направлен в противоположную сторону (рис. 6). Заметим, что $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

§ 12. Сложение и вычитание векторов

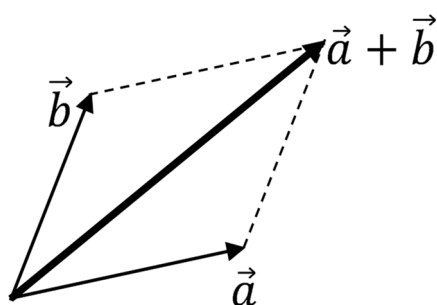


Рис. 7. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора (на плоскости или в пространстве). Сумму этих векторов можно определить двумя способами.

Правило параллелограмма. Если начала обоих векторов поместить в одну точку и достроить их до параллелограмма, то суммой этих векторов будет диагональ параллелограмма (рис. 7).

Правило треугольника. Если начало вектора $\vec{b}$ совместить с концом вектора $\vec{a}$, то началом вектора $\vec{a} + \vec{b}$ будет начало вектора $\vec{a}$, а концом вектора $\vec{a} + \vec{b}$ – конец вектора $\vec{b}$ (рис. 8).

Разность векторов можно определить как $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ или по правилу треугольника: если совместить начала обоих векторов, то началом вектора $\vec{a} - \vec{b}$ будет конец $\vec{b}$, а концом – конец $\vec{a}$ (рис. 9).

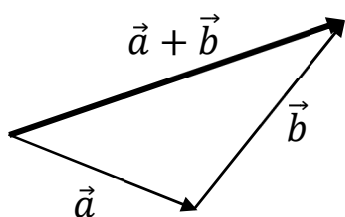


Рис. 8. Сложение векторов по правилу треугольника

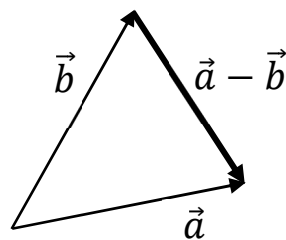


Рис. 9. Разность векторов по правилу треугольника

Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{b}(x_1, y_1, z_1)$, то очевидно, что введенные операции запишутся как

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0), \\ \vec{a} + \vec{b} &= (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1), \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1).\end{aligned}$$

Замечание. На практике иногда применяется еще один способ записи координат вектора. Пусть Oxy – декартова система координат на плоскости, в этом случае пару векторов единичной длины, которые направлены по заданным осям, называют *стандартным базисом* на плоскости и обозначают $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Очевидно, что если (x_0, y_0) – координаты вектора $\vec{a}$ (рис. 10), то $\vec{a} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$.

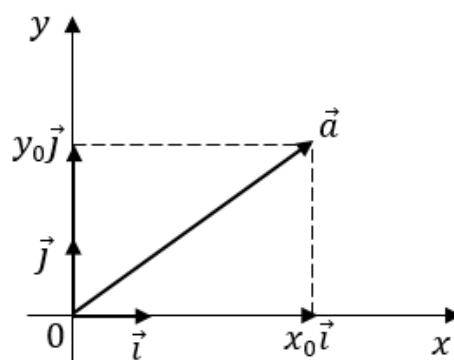


Рис. 10. Стандартный базис на плоскости

Для пространственных векторов аналогичная запись имеет вид

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

где $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – стандартный базис в пространстве, то есть тройка взаимно перпендикулярных векторов единичной длины таких, что $\vec{i}$ направлен по оси Ox , $\vec{j}$ – по оси Oy и $\vec{k}$ – по оси Oz .

§ 13. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора (на плоскости или в пространстве).

Определение. Скалярным произведением этих векторов называется число, которое обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними (рис. 11), то есть

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Заметим, что эту формулу можно записать иначе (рис. 12):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b},$$

где $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ – проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$.

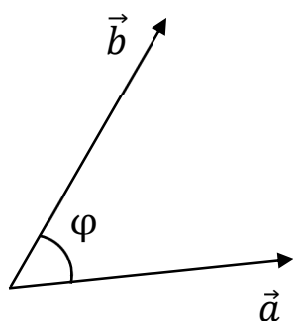


Рис. 11. Скалярное произведение векторов

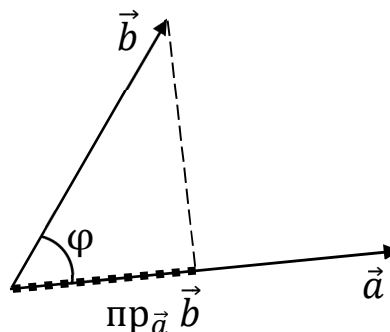


Рис. 12. Скалярное произведение векторов через проекцию

Очевидно, что имеют место следующие *свойства скалярного произведения*:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность);
- 3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- 4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (линейность);
- 5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Если векторы заданы своими координатами, то из свойств скалярного произведения следует, что

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_0\vec{i} + y_0\vec{j})(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = \\ &= x_0x_1 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + x_0y_1 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + y_0x_1 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + y_0y_1 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} = \\ &= x_0x_1 \cdot 1 + x_0y_1 \cdot 0 + y_0x_1 \cdot 0 + y_0y_1 \cdot 1 = x_0x_1 + y_0y_1.\end{aligned}$$

Аналогичная формула имеет место для пространственных векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1.$$

На практике скалярное произведение применяется, как правило, для вычисления углов между векторами. Если $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{b}(x_1, y_1, z_1)$ – два вектора, то косинус угла между ними можно найти по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

§ 14. Векторное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора в пространстве.

Определение. Векторным произведением этих векторов называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 13), который однозначно определяется следующими тремя условиями:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ (площадь параллелограмма, построенного на этих векторах);

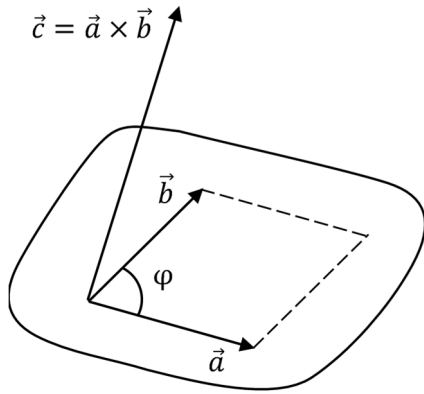


Рис. 13. Векторное произведение векторов

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) одно из двух возможных направлений вектора $\vec{c}$ определяется так, чтобы с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ был виден совершающимся против часовой стрелки (можно пользоваться также правилом буравчика или правилом правой руки).

Свойства векторного произведения следующие:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то есть лежат на одной прямой;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$ (линейность).

Доказательство последнего свойства опустим, а первые три абсолютно очевидны.

Предположим, что в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$ и $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – стандартный базис. Непосредственно по определению легко получить таблицу векторного умножения базисных векторов:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}. \end{array}$$

Если заданы координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то, пользуясь свойствами, легко найти их векторное произведение:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) \times (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\
 &= x_0x_1 \cdot \vec{i} \times \vec{i} + x_0y_1 \cdot \vec{i} \times \vec{j} + x_0z_1 \cdot \vec{i} \times \vec{k} + y_0x_1 \cdot \vec{j} \times \vec{i} + y_0y_1 \cdot \vec{j} \times \vec{j} + \\
 &+ y_0z_1 \cdot \vec{j} \times \vec{k} + z_0x_1 \cdot \vec{k} \times \vec{i} + z_0y_1 \cdot \vec{k} \times \vec{j} + z_0z_1 \cdot \vec{k} \times \vec{k} = \\
 &= x_0x_1\vec{0} + x_0y_1\vec{k} + x_0z_1(-\vec{j}) + y_0x_1(-\vec{k}) + y_0y_1\vec{0} + \\
 &+ y_0z_1\vec{i} + z_0x_1\vec{j} + z_0y_1(-\vec{i}) + z_0z_1\vec{0} = \\
 &= (y_0z_1 - y_1z_0)\vec{i} + (z_0x_1 - z_1x_0)\vec{j} + (x_0y_1 - x_1y_0)\vec{k} = \\
 &= (y_0z_1 - y_1z_0; z_0x_1 - z_1x_0; x_0y_1 - x_1y_0).
 \end{aligned}$$

Полученную формулу для вычисления векторного произведения очень легко запомнить, если записать ее в виде символического определителя

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно решать две основные задачи:

- 1) нахождение координат вектора, перпендикулярного двум заданным векторам;
- 2) вычисление площадей.

§ 15. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим три вектора в пространстве $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Определение. Смешанным произведением векторов называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (то есть первые два вектора умножаются векторно и полученный вектор умножается скалярно на третий вектор).

Теорема (геометрический смысл смешанного произведения).

1. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то есть лежат в одной плоскости, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

2. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$, где V – объем параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 14).

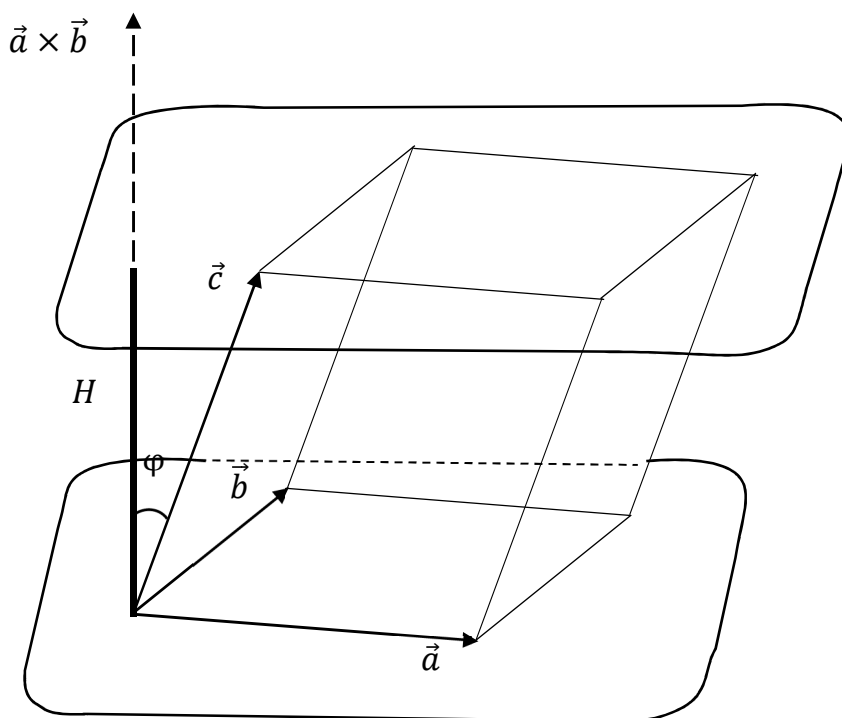


Рис. 14. Параллелепипед, построенный на векторах

Доказательство. 1. Следует из признака перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Если $|\vec{c}| \cdot \sin \varphi = H$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$, то

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \varphi = S \cdot H = V.$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{c} = (x_2, y_2, z_2)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этой формулы нужно разложить определитель по 3-й строке и воспользоваться уже полученными ранее формулами для вычисления в координатах скалярного и векторного произведений векторов.

С помощью смешанного произведения можно проверить компланарность трех векторов. Кроме того, смешанное произведение применяется для вычисления объемов всевозможных многогранников. В частности, объем треугольной пирамиды $ABCD$ можно найти по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

Контрольные вопросы

1. Каким будет максимальное число элементарных преобразований 3-го типа, приводящих к ступенчатому виду систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными?
2. Приведите пример ненулевой матрицы 3-го порядка, для которой $A^2 = 0$.
3. Приведите примеры двух четных и двух нечетных подстановок 5-го порядка.
4. Приведите пример подстановки 6-го порядка, у которой количество инверсий равно пяти.

5. Чему равен определитель трапецеидальной (но не треугольной) матрицы?

6. На какое число нужно умножить все элементы квадратной матрицы 3-го порядка, чтобы ее определитель удвоился?

7. Все элементы главной диагонали матрицы 4-го порядка равны -1 и $+1$, а все остальные элементы – четные числа. Может ли определитель такой матрицы равняться двум?

8. Сколько различных миноров может быть у матрицы с размерами 3×1 ?

9. Чему равен ранг ненулевой матрицы, все строки которой пропорциональны?

10. Как с помощью векторного и смешанного произведений векторов найти радиус сферы, вписанной в треугольную пирамиду, у которой заданы координаты всех вершин?

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Л и н е й н ы м п р о с т р а н с т в о м называется множество элементов $L = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots\}$, на котором заданы две операции:

1) операция умножения на число, то есть любому элементу $\bar{x} \in L$ и любому действительному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ по некоторому правилу однозначно ставится в соответствие элемент $\bar{y} = \lambda\bar{x}$;

2) операция сложения, то есть каждой паре элементов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ по некоторому правилу однозначно ставится в соответствие элемент $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, который называется суммой этих элементов. При этом выполняются следующие свойства (*аксиомы линейного пространства*):

1) коммутативность сложения: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$;

2) ассоциативность сложения: $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$;

3) существует элемент $\bar{0} \in L$, который называется нулевым и такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x}$ для любого $\bar{x} \in L$;

4) для любого элемента $\bar{x} \in L$ существует противоположный элемент $(-\bar{x})$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;

6) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ (ассоциативность умножения);

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$;

8) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ (дистрибутивность).

Рассмотрим основные примеры линейных пространств, многие из которых будут использоваться в дальнейшем.

1. Пусть V_2 – множество векторов на плоскости относительно обычных операций сложения и умножения на число (рис. 15). Легко проверить, что все аксиомы выполняются, поэтому V_2 – линейное пространство.

2. Аналогично множество пространственных векторов V_3 также линейное пространство.

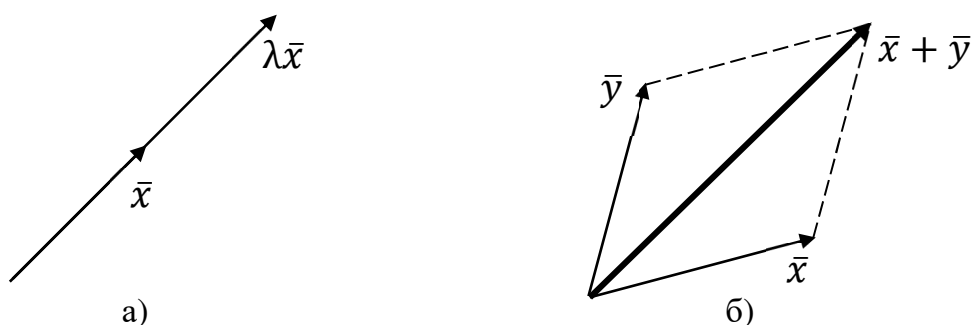


Рис. 15. Операции над векторами: а – умножение на число;
б – сложение векторов по правилу параллелограмма

3. $\mathbb{R}_n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ – множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел $x_i \in \mathbb{R}$, на котором заданы следующие операции:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Очевидно, что все аксиомы выполняются, значит, это множество также линейное пространство.

4. $\mathbb{R}^n$ – множество таких же упорядоченных наборов, которые записываются в виде столбцов, а операции определяются аналогично.

5. $M_{m \times n}$ – множество всех матриц с заданными размерами $m \times n$.

6. $\mathbb{R}[x]$ – множество всех многочленов с действительными коэффициентами: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

7. $\mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов, степень которых не превосходит заданного числа n , то есть $\deg P(x) \leq n$.

8. $C[a, b]$ – множество всех функций, заданных на отрезке $[a, b]$ и непрерывных на этом отрезке.

9. $C'[a, b]$ – множество всех дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

10. $\mathbb{R}[[x]] = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ – множество всех формальных степенных рядов, где $a_i \in \mathbb{R}$.

Как видно, элементами линейного пространства могут быть самые разные объекты (наборы чисел, матрицы, многочлены, функции и т. п.), а благодаря первым двум примерам элементы линейного пространства часто называют *векторами*, а само пространство – *векторным пространством*, или *линейным векторным пространством*.

§ 1. Линейная зависимость и линейная независимость

Пусть L – линейное векторное пространство. Рассмотрим некоторую систему векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ этого пространства.

Определение. 1. Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ называется **линейно зависимой** (ЛЗ), если существуют действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k = \bar{0}.$$

2. Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ называется **линейно независимой** (ЛНЗ), если она не является линейно зависимой. Другими словами, из равенства $\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k = \bar{0}$ обязательно следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Отметим некоторые простые и важные *свойства линейно зависимых систем векторов* в любом линейном пространстве:

1) если система векторов содержит хотя бы один нулевой вектор, то она линейно зависима;

2) если система векторов содержит два одинаковых вектора, то она также линейно зависима;

3) система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда один из этих векторов равен линейной комбинации остальных, то есть, например, $\bar{e}_1 = \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k$.

Последнее свойство иногда называют *критерием линейной зависимости системы векторов*.

Рассмотрим геометрический смысл линейной зависимости и линейной независимости векторов на примере пространств V_2 и V_3 .

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора (на плоскости или в пространстве). Линейная зависимость этих векторов означает, что $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$, где хотя бы один из коэффициентов ненулевой, например $\lambda_1 \neq 0$. Но тогда $\lambda_1 \vec{a} = -\lambda_2 \vec{b}$, то есть $\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{b}$, а значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

2. Рассмотрим три вектора на плоскости: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если какие-то два из них коллинеарны, то система векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ уже будет линейно зависимой. Если же эти векторы попарно неколлинеарны, то проведем через конец вектора $\vec{c}$ две прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 16).

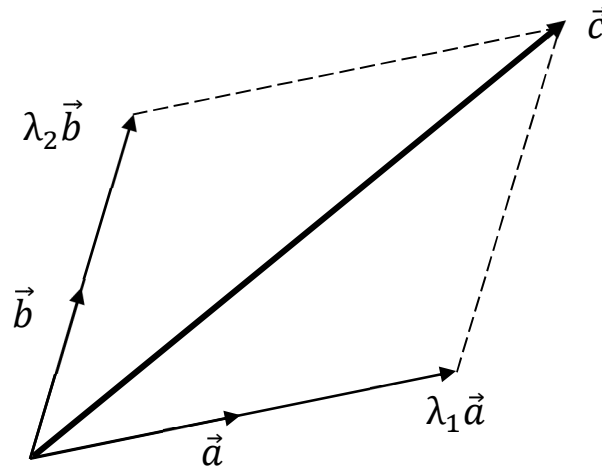


Рис. 16. Линейная зависимость векторов

Тогда по правилу параллелограмма $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, то есть

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}.$$

Таким образом, три вектора на плоскости всегда линейно зависимы.

3. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – три вектора в пространстве. Очевидно, что эта система векторов будет линейно зависимой в том и только в том случае, когда эти векторы компланарны, то есть лежат в одной плоскости (см. предыдущий пример).

4. Рассмотрим теперь четыре ненулевых вектора в пространстве $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Если какие-то два из них коллинеарны или какие-то три компланарны, то эта система векторов уже линейно зависима. Если же никакие два из них неколлинеарны и никакие три из них некомпланарны, то можно построить параллелепипед, диагональ которого равна $\vec{d}$, а ребра направлены по векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$, то есть $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0}$. Таким образом, четыре вектора в пространстве V_3 всегда линейно зависимы.

Важнейший пример линейного векторного пространства – пространство упорядоченных наборов длины n (строк), то есть $\mathbb{R}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$. Рассмотрим в этом пространстве систему из k векторов:

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \bar{e}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \bar{e}_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}).\end{aligned}$$

Составим из этих векторов матрицу A с размерами $k \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Легко доказать, что имеют место следующие свойства:

- 1) система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ линейно независима в том и только в том случае, когда $\text{rang } A = k$;
- 2) если $k > n$, то любая система из k векторов линейно зависима;
- 3) если $k = n$, то система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

§ 2. Размерность и базис линейного пространства

Пусть L – произвольное линейное векторное пространство.

Определение. 1. Число n называется размерностью пространства L (обозначается так: $n = \dim L$), если в пространстве существует хотя бы одна система, состоящая из n ЛНЗ векторов, а любая система из большего числа векторов уже линейно зависима, то есть $\dim L$ – это максимальное число ЛНЗ векторов этого пространства, и в этом случае пространство называется конечным.

2. Если для любого натурального числа n в линейном пространстве существует система из n ЛНЗ векторов, то такое пространство L называется бесконечным ($\dim L = \infty$).

3. Если $\dim L = n < \infty$, то любая система из n ЛНЗ векторов пространства L называется базисом этого пространства и обозначается $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Пример 11.

11.1. Очевидно, что $\dim V_2 = 2$, а базис этого пространства – любая пара неколлинеарных векторов на плоскости: $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

11.2. Также очевидно, что $\dim V_3 = 3$, базис этого пространства – любая тройка некомпланарных векторов в пространстве: $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

11.3. Можно показать, что $\dim \mathbb{R}_n = n$, при этом если A – квадратная матрица порядка n и $\det A \neq 0$, то строки этой матрицы образуют базис пространства $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, причем простейший базис этого пространства – набор из строк единичной матрицы порядка n , то есть

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

...

$$\bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

11.4. Рассмотрим пространство многочленов $\mathbb{R}_n[x]$. Поскольку любой многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, степень которого $\deg f(x) \leq n$, фактически определяется набором из $(n + 1)$ коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, то $\dim \mathbb{R}_n(x) = n + 1$. Простейший базис этого пространства – набор одночленов $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

11.5. Очевидно, что $\dim M_{m \times n} = m \cdot n$, так как любая матрица с размерами $m \times n$ определяется упорядоченным набором $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ из $m \cdot n$ чисел. Простейший базис этого пространства – совокупность матриц E_{ij} , у которых один из элементов равен единице, а остальные равны нулю.

11.6. Поскольку система одночленов $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ линейно независимая для любого натурального n , то пространства $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[[x]]$, $C[a, b]$ и $C'[a, b]$ бесконечномерные.

§ 3. Разложение вектора по базису

Пусть L – линейное пространство размерности n , $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – фиксированный базис этого пространства.

Теорема. Для любого вектора $\bar{x} \in L$ существует единственный набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такой, что $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$. Это равенство называется *разложением вектора $\bar{x}$ по базису $\mathfrak{B}$* , а сами числа $(x_1, \dots, x_n)$ – *координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathfrak{B}$* .

Доказательство. 1. Рассмотрим систему векторов $\{\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$. Поскольку число векторов в этой системе равно $n + 1$, а $\dim L = n$, то эта система линейно зависима, то есть

$$\lambda_0\bar{x} + \lambda_1\bar{e}_1 + \dots + \lambda_n\bar{e}_n = 0.$$

Очевидно, что $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае получается линейная зависимость базисных векторов. Значит,

$$\bar{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\bar{e}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)\bar{e}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)\bar{e}_n = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n,$$

то есть такое разложение существует.

2. Предположим, что имеются два таких разложения:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n = x'_1\bar{e}_1 + \dots + x'_n\bar{e}_n.$$

Переносим все члены из правой части в левую и группируя подобные члены, получим, что $(x_1 - x'_1)\bar{e}_1 + \dots + (x_n - x'_n)\bar{e}_n = \bar{0}$, а поскольку векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ образуют базис и, в частности, линейно независимы, то в последнем равенстве все коэффициенты равны нулю, то есть $x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n$. Таким образом, разложение вектора $\bar{x}$ по базису $\mathfrak{B}$ единственное.

Пример 12. Проверить, что векторы $\bar{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\bar{e}_2 = (1, 3, 1)$ и $\bar{e}_3 = (3, -1, -1)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_3$, и найти координаты вектора $\vec{a} = (17, -14, -18)$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу из координат заданных векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и найдем ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 3 + 27 + 2 + 1 = 30.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то эта система векторов линейно независима, а так как $\dim \mathbb{R}_3 = 3$, то они образуют базис. Запишем разложение вектора $\bar{a}$ по этому базису:

$$\bar{a} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3,$$

где x_1, x_2, x_3 – неизвестные пока координаты. Перепишем это векторное равенство в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -14, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -18. \end{cases}$$

Найдем ее решение методом Гаусса. Для этого из 1-го уравнения вычтем 2-е уравнение, умноженное на два, а к 3-му уравнению прибавим 2-е уравнение, умноженное на три, при этом в новой системе на первое место поставим 2-е уравнение (чтобы первая ступень начиналась с единицы):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -14, \\ -5x_2 + 5x_3 = 45, \\ 10x_2 - 4x_3 = -60. \end{cases}$$

Теперь к 3-му уравнению прибавим удвоенное 2-е уравнение, после чего 2-е уравнение сократим на пять.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -14, \\ -x_2 + x_3 = 9, \\ 6x_3 = 30. \end{cases}$$

Из полученной ступенчатой системы последовательно находим $x_3 = 5$, $x_2 = -4$, $x_1 = 3$. Таким образом, $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

§ 4. Евклидовы пространства

Рассмотрим произвольное линейное векторное пространство L .

Определение. Говорят, что в пространстве L задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in L$ по некоторому правилу однозначно ставится в соответствие некоторое действительное число, которое обозначается $\vec{x} \cdot \vec{y}$ и называется скалярным произведением этих векторов, причем выполняются следующие свойства (*аксиомы скалярного произведения*):

- 1) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ для любого $\vec{x}$ (причем $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, если $\vec{x} \neq 0$);
- 2) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in L$;
- 3) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$;
- 4) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если в линейном векторном пространстве задано скалярное произведение $\vec{x} \cdot \vec{y}$, то такое пространство называется *евклидовым пространством* и обозначается через E .

Пример 13.

13.1. В пространствах V_2 и V_3 скалярное произведение можно задать формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов, φ – угол между ними (рис. 17). Легко проверить, что при этом все четыре аксиомы выполняются.

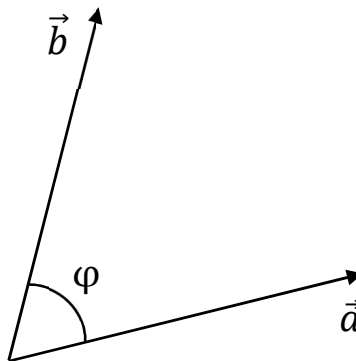


Рис. 17. Векторы на плоскости и угол между ними

13.2. Рассмотрим пространство строк $\mathbb{R}_n$ (или $\mathbb{R}^n$). Если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то можно определить скалярное произведение таких векторов формулой

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Опять же легко проверяется, что все аксиомы выполнены.

13.3. В пространстве $\mathbb{R}_n$ можно определить скалярное произведение и другими способами. Пусть, например, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – фиксированный набор положительных чисел. Тогда легко проверить, что равенство $\bar{x} \cdot \bar{y} = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \dots + \alpha_n x_n y_n$ также задает скалярное произведение в этом пространстве, то есть удовлетворяет всем аксиомам.

13.4. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ (можно взять $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{R}_n[x]$). Тогда скалярное произведение в этом пространстве можно задать формулой

$$f(x) \cdot g(x) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Снова легко проверить (исходя из геометрического смысла и свойств определенного интеграла), что все аксиомы выполняются.

Неравенство Коши – Буняковского. Пусть E – евклидово пространство, $\bar{x}, \bar{y} \in E$ – два фиксированных вектора. Рассмотрим вектор $z = \lambda \bar{x} + \bar{y}$, где λ – некоторое действительное число. Используя аксиомы скалярного произведения, получаем

$$\bar{z} \cdot \bar{z} = (\lambda \bar{x} + \bar{y})(\lambda \bar{x} + \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x} \cdot \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{y} \cdot \bar{y}) \geq 0.$$

Поскольку это неравенство должно выполняться для любого значения $\lambda \in \mathbb{R}$, то график квадратного трехчлена $f(\lambda) = \lambda^2(\bar{x} \cdot \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{y} \cdot \bar{y})$ не может пересекать ось абсцисс, а значит, его дискриминант не может быть положительным, то есть

$$D = (2(\bar{x} \cdot \bar{y}))^2 - 4(\bar{x} \cdot \bar{x})(\bar{y} \cdot \bar{y}) \leq 0.$$

Отсюда, сокращая на четыре, получаем

$$(\bar{x} \cdot \bar{y})^2 \leq (\bar{x} \cdot \bar{x})(\bar{y} \cdot \bar{y}), \quad \text{или} \quad |(\bar{x} \cdot \bar{y})| \leq \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} \sqrt{\bar{y} \cdot \bar{y}}.$$

Полученное неравенство называется *неравенством Коши – Буняковского*. Оно позволяет в любом евклидовом пространстве для его векторов определить такие понятия, как длина (модуль) и угол между векторами.

Определение. 1. Если $\bar{x}$ – вектор евклидова пространства, то модулем этого вектора называется число $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$.

2. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – два вектора евклидова пространства, то углом между этими векторами называется такой угол $\varphi \in [0, \pi]$, который однозначно определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}$$

(из неравенства Коши – Буняковского следует, что выражение в правой части по модулю не превосходит единицы, поэтому такое определение корректно).

3. Вектор $\bar{x} \in E$, для которого $|\bar{x}| = 1$, называется *н о р м и р о в а н н ы м* вектором (любой вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ можно нормировать, если умножить его на число $\lambda = 1/|\bar{x}|$).

4. Два вектора $\bar{x}, \bar{y} \in E$ называются *о р т о г о н а л ь н ы м и*, если $(\bar{x} \cdot \bar{y}) = 0$ (это равносильно тому, что $\cos \varphi = 0$, то есть $\varphi = 90^\circ$).

5. Базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ евклидова пространства E называется *о р т о г о н а л ь н ы м*, если его векторы попарно ортогональны, то есть $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ при $i \neq j$.

6. Если все векторы ортогонального базиса $\mathfrak{B}$ нормированные, то такой базис $\mathfrak{B}$ называется *о р т о н о р м и р о в а н н ы м*.

Отличительная особенность ортогональных (а тем более ортонормированных) базисов в евклидовом пространстве заключается в том, что в таких базисах легко находить координаты любого вектора $\bar{x} \in E$.

Теорема. Пусть $\dim E = n$, $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – ортогональный базис пространства E и вектор $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ разложен по базису $\mathfrak{B}$. Тогда координаты вектора $\bar{x}$ в этом ортогональном базисе $\mathfrak{B}$ можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\bar{x} \cdot \bar{e}_i}{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В частности, если базис $\mathfrak{B}$ ортонормированный, то $x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i$.

Доказательство. Запишем равенство

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

и умножим обе его части скалярно на вектор $\bar{e}_1$. Получим

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = x_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + x_2(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + \dots + x_n(\bar{e}_n \cdot \bar{e}_1) = x_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1).$$

Отсюда $x_1 = \frac{\bar{x} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}$. Умножая скалярно на другие базисные векторы (то есть при $i = 2, 3, \dots, n$), получим все остальные формулы.

Пример 14. В пространстве $\mathbb{R}_3$ заданы четыре вектора:

$$\bar{x} = (2, 1, -2), \bar{e}_1 = (1, 2, -3), \bar{e}_2 = (1, 1, 1), \bar{e}_3 = (5, -4, -1).$$

Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Решение. Перемножим попарно базисные векторы

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 0,$$

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) = 0,$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-1) = 0.$$

Значит, базис $\mathfrak{B}$ ортогональный.

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = 10,$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14,$$

$$x_1 = \frac{10}{14} = \frac{5}{7};$$

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 1,$$

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$

$$x_2 = \frac{1}{3};$$

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_3 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) = 8,$$

$$\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 5^2 + (-4)^2 + (-1)^2 = 42,$$

$$x_3 = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

$$\text{Ответ. } \bar{x} = \frac{5}{7} \bar{e}_1 + \frac{1}{3} \bar{e}_2 + \frac{4}{21} \bar{e}_3.$$

Ортогонализация базиса. Пусть E – евклидово пространство размерности n и $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ – линейно независимая система векторов ($k \leq n$). Рассмотрим линейную оболочку этой системы векторов E' , то есть множество всевозможных линейных комбинаций $\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k$. Очевидно, что E' – линейное подпространство в пространстве E , причем $\dim E' = k$, а $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ – один из базисов этого пространства E . Как уже отмечалось, если базис $\mathfrak{B}$ не ортогональный, то нахождение координат вектора $\bar{x} \in E$ в этом базисе сводится к решению системы линейных уравнений, что само по себе достаточно трудоемкая задача, особенно в случае большой размерности k . Если же базис пространства E' ортогональный, то задача резко упрощается. Таким образом, одна из важнейших задач при изучении евклидовых пространств – ортогонализация базиса, то есть построение такого базиса этого пространства, который был бы уже ортогональным.

Рассмотрим процесс ортогонализации Грама – Шмидта, в котором векторы ортогонального базиса $\mathfrak{B}' = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k\}$ будут появляться по очереди:

1) в качестве первого вектора нового базиса $\mathfrak{B}'$ возьмем один из векторов старого базиса, например $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$;

2) в качестве второго вектора базиса $\mathfrak{B}'$ возьмем $\bar{f}_2 = \lambda_1 \bar{f}_1 + \bar{e}_2$, где коэффициент λ_1 подбирается так, чтобы $\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_1 = 0$. Поскольку $\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_1 = (\lambda_1 \bar{f}_1 + \bar{e}_2) \cdot \bar{f}_1 = \lambda_1 (\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1) + \bar{e}_2 \cdot \bar{f}_1 = 0$, то необходимо взять $\lambda_1 = -\frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{f}_1}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}$, и получаем уже пару ортогональных векторов $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ таких, что $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{f}_2 = \lambda_1 \bar{f}_1 + \bar{e}_2$ (рис. 18);

3) в качестве третьего вектора возьмем $\bar{f}_3 = \lambda_1 \bar{f}_1 + \lambda_2 \bar{f}_2 + \bar{e}_3$, где коэффициенты λ_1 и λ_2 подбираются так, чтобы $\bar{f}_3 \cdot \bar{f}_1 = 0$ и $\bar{f}_3 \cdot \bar{f}_2 = 0$. Имеем следующее:

$$\begin{aligned} \bar{f}_3 \cdot \bar{f}_1 &= (\lambda_1 \bar{f}_1 + \lambda_2 \bar{f}_2 + \bar{e}_3) \cdot \bar{f}_1 = \lambda_1 (\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1) + \lambda_2 (\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_1) + \bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1 = \\ &= \lambda_1 (\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1) + \lambda_2 \cdot 0 + \bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1 = 0. \end{aligned}$$

Откуда $\lambda_1 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}$. Аналогично $\lambda_2 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_2}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}$. Таким образом, имеем уже три попарно ортогональных вектора $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

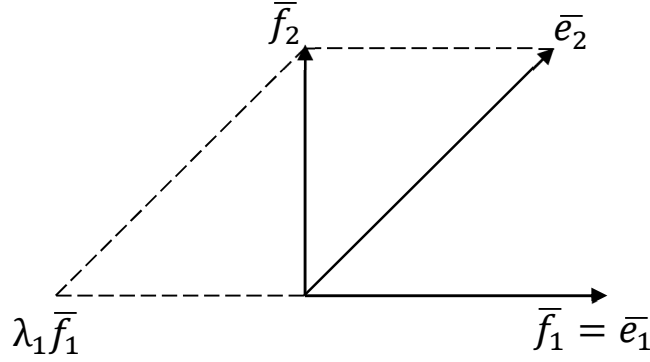


Рис. 18. Ортогонализация базиса

Если уже построено m попарно ортогональных векторов $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$, где $m < k$, то в качестве следующего вектора нужно взять

$$\bar{f}_{m+1} = \lambda_1 \bar{f}_1 + \lambda_2 \bar{f}_2 + \dots + \lambda_m \bar{f}_m + \bar{e}_{m+1},$$

$$\text{где } \lambda_1 = -\frac{\bar{e}_{m+1} \cdot \bar{f}_1}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}, \lambda_2 = -\frac{\bar{e}_{m+1} \cdot \bar{f}_2}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}, \dots, \lambda_m = -\frac{\bar{e}_{m+1} \cdot \bar{f}_m}{\bar{f}_m \cdot \bar{f}_m}.$$

Тогда, как уже было показано, вектор $\bar{f}_{m+1}$ будет ортогонален всем предыдущим векторам. Как только получится система из k векторов $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k\}$, процесс заканчивается.

Пример 15. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}_5$ систему из трех векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где

$$\bar{e}_1 = (1, 2, 1, -1, 1), \bar{e}_2 = (2, 1, 1, 1, -1), \bar{e}_3 = (-1, 1, 1, 2, -1).$$

Проверить, что эти векторы линейно независимы, и ортогонализировать эту систему.

Решение. Запишем координаты данных векторов в матрицу A и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку полученная ступенчатая матрица A имеет три ненулевые строки, то $\text{rang } A = 3$, поэтому векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ линейно независимы, а значит, образуют базис пространства E' , где E' – линейная оболочка этих векторов. Легко проверить, что $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \neq 0$ при $i \neq j$, то есть эти векторы неортогональны. Построим, следуя процедуре ортогонализации, ортогональный базис $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ пространства E' .

1. В качестве первого вектора нового базиса возьмем $\bar{f}_1 = \bar{e}_1 = (1, 2, 1, -1, 1)$;

2. Затем положим $\bar{f}_2 = \lambda_1 \bar{f}_1 + \bar{e}_2$, где $\lambda_1 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}$.

$$\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3,$$

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 8,$$

$$\lambda_1 = -\frac{3}{8},$$

$$\bar{f}_2 = -\frac{3}{8}(1, 2, 1, -1, 1) + (2, 1, 1, 1, -1) = \left(\frac{13}{8}, \frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8}, -\frac{11}{8}\right).$$

Поскольку координаты вектора $\bar{f}_2$ получились дробными, то лучше все их умножить на восемь и в качестве второго базисного вектора взять целочисленный вектор $\bar{f}_2 = (13, 2, 5, 11, -11)$.

3. Наконец, возьмем $\bar{f}_3 = \lambda_1 \bar{f}_1 + \lambda_2 \bar{f}_2 + \bar{e}_3$, где

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_1}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1} = -\frac{-1 + 2 + 1 - 2 - 1}{1 + 4 + 1 + 1 + 1} = -\frac{-1}{8} = \frac{1}{8},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{f}_2}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2} = -\frac{-13 + 2 + 5 + 22 + 11}{169 + 4 + 25 + 121 + 121} = -\frac{27}{440},$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_3 &= \frac{1}{8}(1, 2, 1, -1, 1) - \frac{27}{440}(13, 2, 5, 11, -11) + (-1, 1, 1, 2, -1) = \\ &= \frac{1}{440}(-736, 496, 360, 528, -88). \end{aligned}$$

В качестве третьего базисного вектора $\bar{f}_3$ лучше взять опять же целочисленный вектор $\bar{f}_3 = (-736, 496, 360, 528, -88)$.

Таким образом, нашли ортогональный базис.

Ответ. $\bar{f}_1 = (1, 2, 1, -1, 1),$
 $\bar{f}_2 = (13, 2, 5, 11, -11),$
 $\bar{f}_3 = (-736, 496, 360, 528, -88).$

§ 5. Системы линейных уравнений

Вернемся снова к системе линейных уравнений. Если такая система имеет единственное решение, то его можно найти методом Гаусса (при условии, что полученная в результате ЭП ступенчатая система будет строго треугольной). Если же матрица системы квадратная и невырожденная, то можно воспользоваться правилом Крамера или методом обратной матрицы.

В общем случае число уравнений и число неизвестных системы не обязательно совпадают, а множество решений может быть бесконечным, поэтому встает вопрос о том, как описать это множество решений.

Итак, рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В матричной форме она имеет вид $A \cdot X = B$, где A – матрица системы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ – матрица-столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ – матрица-столбец свободных членов (в целях компактности в дальнейшем будем записывать столбцы в виде транспонированных строк).

Линейная система уравнений называется *неоднородной*, если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0$.

Рассмотрим сначала однородную систему (в матричной форме $A \cdot X = 0$) и обозначим через L_A множество ее решений. Очевидно, что множество L_A – линейное пространство.

Определение. Фундаментальной системой решений (ФСР) данной однородной системы линейных уравнений называется любой базис пространства ее решений L_A .

Если $\dim L_A = k$ и $\mathfrak{B} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ – ФСР, то любое решение X можно разложить по этому базису, то есть записать его в виде

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 + \dots + C_kE_k,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ – некоторые константы.

Таким образом, нахождение общего решения линейной однородной системы сводится к построению какой-либо ФСР. Для того чтобы найти ФСР, следует данную систему с помощью ЭП привести к ступенчатому виду. Если при этом получаются уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, то их можно отбрасывать. Кроме того, при необходимости переменные во всех уравнениях можно менять местами. Таким образом, в результате таких ЭП систему можно привести к трапецеидальному виду

$$\begin{cases} a'_{11} \cdot x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + \dots + a'_{1n} \cdot x_n = 0, \\ a'_{22} \cdot x_2 + \dots + a'_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \dots \\ a'_{rr} \cdot x_r + a'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + a'_{rn} x_n = 0 \end{cases}$$

(порядок неизвестных может быть другим). Очевидно, что $r = \text{rang } A$. Если при этом $r = n$, то полученная ступенчатая однородная система треугольная, и в этом случае она имеет только нулевое решение ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$). Если же $r < n$, то все неизвестные можно разбить на две группы:

- 1) $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ – неизвестные, с которых начинаются ступени (они называются *главными неизвестными*);
- 2) $\{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n\}$ – все остальные неизвестные (они называются *свободными*).

Если свободным неизвестным придать любые фиксированные значения, то относительно главных неизвестных получится строго треугольная система, решение которой определяется уже однозначно. Это означает, что любое решение данной системы $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ определяется некоторым набором свободных неизвестных, то есть $\dim L_A = n - r$.

Самый простой способ нахождения ФСР, то есть базиса пространства решений $\{E_1, E_2, \dots, E_{n-r}\}$, заключается в следующем:

1) сначала положим $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$, тогда из треугольной системы последовательно находим все главные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$ и в результате получаем первый базисный вектор

$$E_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}, 1, 0, \dots, 0)$$

(напомним, что E_1 – это столбец, который записан в виде транспонированной строки);

2) теперь положим $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \dots, x_n = 0$ и аналогично найдем второй базисный вектор

$$E_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)}, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

И Т. Д.;

3) наконец, положим $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n = 1$ и точно так же найдем последний базисный вектор

$$E_{n-r} = (x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \dots, x_r^{(n-r)}, 0, \dots, 0, 1).$$

Таким образом, мы получаем ФСР $\{E_1, E_2, \dots, E_{n-r}\}$, а значит, общее решение однородной системы выражается формулой

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 + \dots + C_{n-r}E_{n-r},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные константы.

В развернутом виде это общее решение имеет вид

[illegible]

Замечания. 1. Если на диагонали ступенчатой матрицы некоторые из коэффициентов $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{rr}$ не равны ± 1 , то значения главных неизвестных, которые получаются в результате обратного хода метода Гаусса, могут оказаться дробными числами, что, естественно, усложняет дальнейшие вычисления. Во избежание этого свободным неизвестным рекомендуется вместо значения «1» придавать какие-то другие подходящие ненулевые целые значения. Еще лучше, если в процессе приведения системы к ступенчатому виду ЭП подбирать таким образом, чтобы на диагонали получались только числа, равные +1 или -1.

2. Очевидно, что вид формул, которые дают общее решение системы, существенно зависит от построенной ФСР. Если выбрать другую последовательность ЭП, приводящую систему к ступенчатому виду, то может получиться совершенно другая ФСР, а значит, и вид общего решения системы может оказаться абсолютно непохожим на тот, который был получен первоначальным способом.

Пример 16. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из 2-го уравнения вычтем 1-е уравнение, умноженное на три, а к 3-му уравнению прибавим 1-е, умноженное на два:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -5x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 0, \\ 0x_2 - 0x_3 + 0x_4 = 0, \end{cases}$$

3-е уравнение можно отбросить, $\{x_1, x_2\}$ – главные неизвестные, $\{x_3, x_4\}$ – свободные неизвестные.

Если взять $x_3 = 1, x_4 = 0$, то получим, что $x_2 = 11/5$, поэтому лучше взять $x_3 = 5, x_4 = 0$. Тогда

$$x_2 = 11, \quad x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -22 + 15 + 0 = -7.$$

Таким образом, $E_1 = (-7, 11, 5, 0)$.

Теперь положим $x_3 = 0, x_4 = 1$. Тогда

$$x_2 = -x_4 = -1, \quad x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Значит, $E_2 = (0, -1, 0, 1)$.

В векторной форме общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Общее решение системы
$$\begin{cases} x_1 = -7C_1, \\ x_2 = 11C_1 - C_2, \\ x_3 = 5C_1, \\ x_n = C_2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных уравнений $A \cdot X = B$. Предположим, что известно какое-то одно частное решение этой системы X_0 , то есть $A \cdot X_0 = B$. Если X – любое другое решение, то есть $A \cdot X = B$, то очевидно, что $A(X - X_0) = 0$, то есть вектор $(X - X_0)$ – решение соответствующей однородной системы. Если известна ФСР $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$, то, как было показано, $X - X_0 = C_1 E_1 + \dots + C_k E_k$. Таким образом, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = X_0 + C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_k E_k,$$

где X_0 – частное решение; $E_1, \dots, E_k$ – ФСР; $C_1, \dots, C_k$ – произвольные константы.

Пример 17. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из 2-го уравнения удвоенное 1-е уравнение, приведем эту систему к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 2, \\ -3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 1, \end{cases}$$

где $\{x_1, x_2\}$ – главные неизвестные, $\{x_3, x_4, x_5\}$ – свободные неизвестные. Для того чтобы найти частное решение, следует свободным неизвестным придать любые значения, но желательно так, чтобы x_2 из 2-го уравнения получилось целым числом. В данном случае проще всего взять $x_3 = -1, x_4 = x_5 = 0$. Тогда

$$3x_2 = -4x_3 + 5x_4 + 5x_5 - 1 = 4 + 0 + 0 - 1 = 3,$$

то есть $x_2 = 1$.

Теперь из 1-го уравнения находим

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 2 = -2 + 3 + 0 + 0 + 2 = 3.$$

Таким образом, $X_0 = (3, 1, -1, 0, 0)$.

Запишем однородную ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем три базисных решения:

1) $x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0, 3x_2 = -4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = -12$, то есть $x_2 = -4, x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 8 - 9 + 0 + 0 = -1$. Значит, $E_1 = (-1, -4, 3, 0, 0)$;

2) $x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 0$, аналогично находим главные неизвестные: $x_2 = 5, x_1 = -1$, то есть $E_2 = (-1, 5, 0, 3, 0)$;

3) $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 3$, аналогично $x_2 = 5, x_1 = -7$, то есть $E_3 = (-7, 5, 0, 0, 3)$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = X = X_0 + C_1 E_1 + C_2 E_2 + C_3 E_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Общее решение системы
$$\begin{cases} x_1 = 3 - C_1 - C_2 - 7C_3, \\ x_2 = 1 - 4C_1 + 5C_2 + 5C_3, \\ x_3 = -1 + 3C_1, \\ x_4 = 3C_2, \\ x_5 = 3C_3. \end{cases}$$

§ 6. Линейные операторы

Рассмотрим линейное пространство L .

Определение. Говорят, что в пространстве L задан линейный оператор $\mathcal{A}$, если каждому вектору $\vec{x} \in L$ по некоторому правилу однозначно ставится в соответствие вектор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) \in L$, причем выполняются следующие свойства (*аксиомы линейного оператора*):

- 1) $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$;
- 2) $\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}(\vec{x}_1) + \mathcal{A}(\vec{x}_2)$.

Понятие линейного оператора $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ (или $\mathcal{A} : L \rightarrow L$) аналогично понятию обычной функции $y = f(x)$, но только в отличие от функции, для которой область определения и область значений – действительные числа, у оператора $\mathcal{A}$ область определения и область значений – это векторы линейного пространства L .

Пример 18.

18.1. Предположим, что каждому вектору $\vec{x} \in V_2$ ставится в соответствие вектор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, который получается из $\vec{x}$ поворотом на угол φ против часовой стрелки (рис. 19).

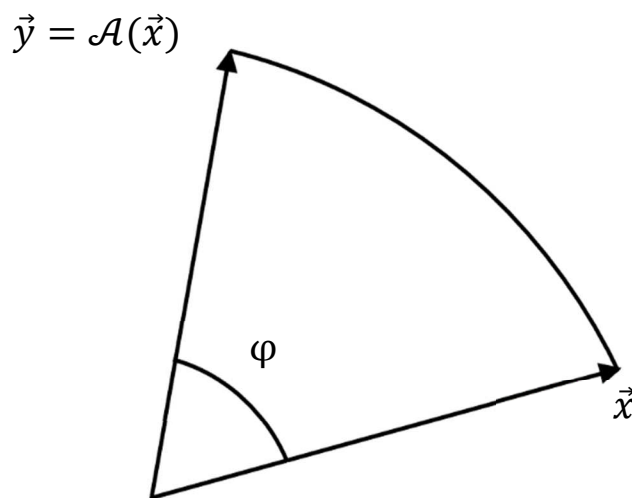


Рис. 19. Получение вектора $\vec{y}$ поворотом вектора $\vec{x}$ на угол φ

Очевидно, что оба свойства линейности выполняются, то есть имеем линейный оператор $\mathcal{A}_\varphi$, который называется *оператором поворота*.

18.2. Пусть снова $L = V_2$ (или V_3), ℓ – фиксированная прямая. Положим $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{y}$, где $\vec{y}$ – проекция вектора $\vec{x}$ на прямую ℓ . Очевидно, что оба свойства выполняются и имеем линейный оператор $\mathcal{A}_\ell$, который называется *оператором проектирования на заданную прямую* (рис. 20).

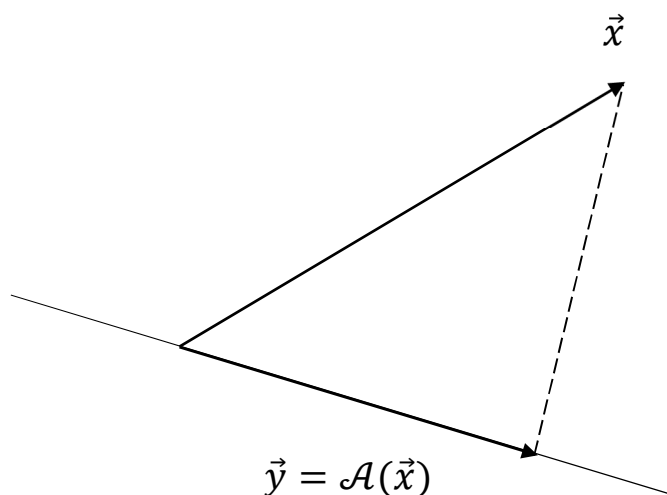


Рис. 20. Проекция вектора на ось

18.3. Если $L = V_3$ и α – фиксированная плоскость, то аналогично можно рассмотреть оператор проектирования на эту плоскость $\mathcal{A}_\alpha$ (рис. 21).

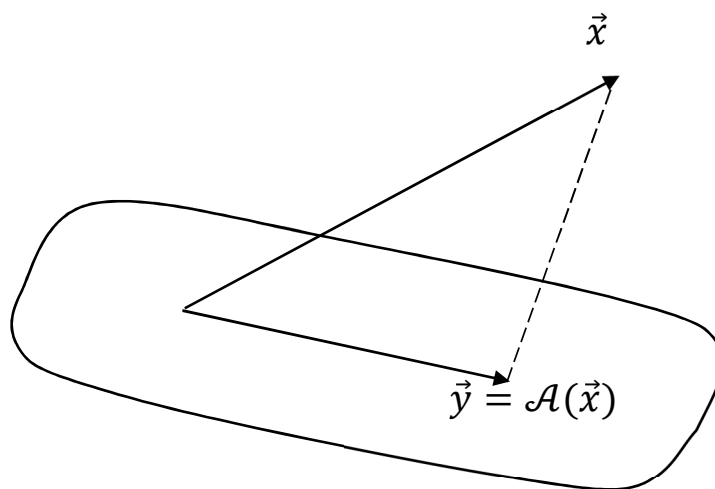


Рис. 21. Проекция вектора на плоскость

18.4. Пусть $L = \mathbb{R}^n$, A – матрица с размерами $n \times n$. Очевидно, что оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, который определяется формулой

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}, \text{ где } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ является линейным.}$$

18.5. Рассмотрим пространство многочленов $\mathbb{R}[x]$ и определим $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$. Очевидно, что $\mathcal{D}$ – линейный оператор, который называется *оператором дифференцирования*.

Матрица перехода. Пусть L – линейное пространство, $\dim L = n$. Предположим, что в пространстве L заданы два базиса: $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$. Разложим векторы 2-го базиса по 1-му базису:

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_{11} \bar{e}_1 + c_{12} \bar{e}_2 + \dots + c_{1n} \bar{e}_n, \\ \bar{e}'_2 &= c_{21} \bar{e}_1 + c_{22} \bar{e}_2 + \dots + c_{2n} \bar{e}_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \bar{e}'_n &= c_{n1} \bar{e}_1 + c_{n2} \bar{e}_2 + \dots + c_{nn} \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Коэффициенты 1-го разложения запишем в 1-й столбец матрицы, коэффициенты 2-го разложения – во 2-й столбец и т. д. В результате получим квадратную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей перехода* от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$.

Рассмотрим произвольный вектор $\bar{x} \in L$ и разложим его по 1-му и 2-му базису:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \\ \bar{x} &= x'_1 \bar{e}'_1 + x'_2 \bar{e}'_2 + \dots + x'_n \bar{e}'_n. \end{aligned}$$

Выражая векторы 2-го базиса через 1-й базис, получим

$$\bar{x} = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + c_{12}\bar{e}_2 + \dots + c_{1n}\bar{e}_n) + x'_2(c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + \dots + c_{2n}\bar{e}_n) + \dots + x'_n(c_{n1}\bar{e}_1 + c_{n2}\bar{e}_2 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n).$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим

$$\bar{x} = (c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + \dots + c_{n1}x'_n)\bar{e}_1 + (c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{n2}x'_n)\bar{e}_2 + \dots + (c_{1n}x'_1 + c_{2n}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n.$$

Таким образом, получили еще одно разложение вектора $\bar{x}$ по 1-му базису. Поскольку разложение любого вектора по базису единственное, то отсюда следует, что

$$\begin{cases} c_{11}x'_1 + c_{21}x'_2 + \dots + c_{n1}x'_n = x_1, \\ c_{12}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{n2}x'_n = x_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_{1n}x'_1 + c_{2n}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n = x_n. \end{cases}$$

Запишем эту систему в виде одного матричного уравнения

$$C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Если столбцы координат обозначить через $\bar{x}$ и $\bar{x}'$, то окончательно получим связь между матрицей перехода и координатами одного и того же вектора в новом ($\mathfrak{B}'$) и старом ($\mathfrak{B}$) базисах:

$$\bar{x} = C \cdot \bar{x}'.$$

Используя полученную формулу, легко доказать следующие свойства матриц перехода:

1) если C – матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$, а T – матрица перехода от $\mathfrak{B}'$ к $\mathfrak{B}$, то $T = C^{-1}$;

2) если C_1 – матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_1$ к базису $\mathfrak{B}_2$, а C_2 – матрица перехода от $\mathfrak{B}_2$ к $\mathfrak{B}_3$, то матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_1$ к базису $\mathfrak{B}_3$ имеет вид $C = C_1 \cdot C_2$.

Предположим, что в евклидовом пространстве E размерности n имеются два ортонормированных базиса: $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ и

$\mathfrak{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$, и $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода

от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}'$.

Тогда для любого i имеем

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \dots + c_{ni}^2 = (c_{1i}\bar{e}_1 + c_{2i}\bar{e}_2 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n) \times \\ \times (c_{1i}\bar{e}_1 + c_{2i}\bar{e}_2 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n) = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i = 1,$$

а для любых $i \neq j$

$$c_{1i} \cdot c_{1j} + c_{2i} \cdot c_{2j} + \dots + c_{ni} \cdot c_{nj} = (c_{1i}\bar{e}_1 + c_{2i}\bar{e}_2 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n) \times \\ \times (c_{1j}\bar{e}_1 + c_{2j}\bar{e}_2 + \dots + c_{nj}\bar{e}_n) = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j = 0,$$

то есть столбцы матрицы C попарно ортогональны.

Значит,

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $C^{-1} = C^T$, то есть транспонированная матрица C^T – обратная к самой матрице C . Матрица C , обладающая таким свойством, называется *ортогональной матрицей*.

Матрица линейного оператора в данном базисе. Пусть L – линейное пространство размерности n , $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – некоторый фиксированный базис этого пространства, $\mathcal{A} : L \rightarrow L$ – линейный оператор.

Рассмотрим векторы $\mathcal{A}(\bar{e}_1), \mathcal{A}(\bar{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\bar{e}_n)$ и разложим каждый из них по базису $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n, \\ \mathcal{A}(\bar{e}_2) &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathcal{A}(\bar{e}_n) &= a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n.\end{aligned}$$

Матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой в i -м столбце стоят коэффициенты разложения вектора $\mathcal{A}(\bar{e}_i)$ по базису $\mathfrak{B}$.

Пример 19.

19.1. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор поворота на угол φ в пространстве V_2 , $\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ – стандартный базис на плоскости (рис. 22).

Очевидно, что

$$\mathcal{A}(\vec{i}) = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}, \quad \mathcal{A}(\vec{j}) = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}.$$

Значит, матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе $\mathfrak{B}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

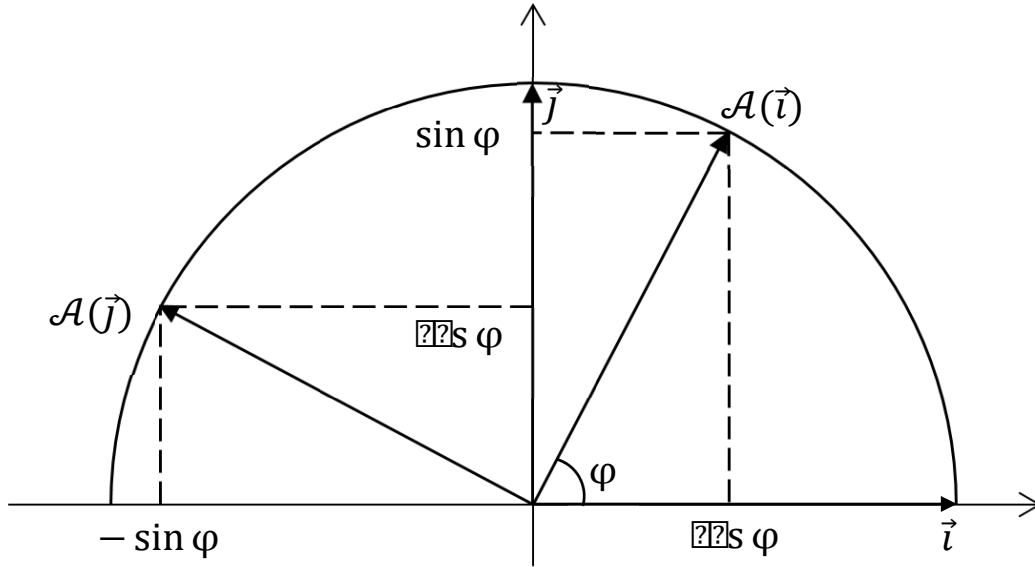


Рис. 22. Действие оператора $\mathcal{A}$ в стандартном базисе на плоскости

19.2. Рассмотрим в пространстве V_3 оператор $\mathcal{A}$, который задается формулой $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$ (векторное произведение), где $\vec{a}$ – фиксированный вектор, например $\vec{a} = (2, 1, -3)$ в стандартном базисе $\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{i}) &= \vec{a} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} - 1 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{j} - 0 \cdot \vec{i} = (0, -3, 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{j}) &= \vec{a} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{i} = (3, 0, 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{k}) &= \vec{a} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} - 0 \cdot \vec{k} - 2 \cdot \vec{j} - 0 \cdot \vec{i} = (1, -2, 0). \end{aligned}$$

Значит, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

19.3. Пусть $L = \mathbb{R}_3[x]$ – пространство многочленов ($\deg P(x) \leq 3$), $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ – базис, $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ \mathcal{D}(x) &= x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ \mathcal{D}(x^2) &= (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ \mathcal{D}(x^3) &= (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3.\end{aligned}$$

Значит, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица этого оператора в базисе $\mathfrak{B}$.

Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$, $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ – разложение вектора $\bar{x}$ по базису $\mathfrak{B}$. Найдем координаты вектора $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$ в этом базисе:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{A}(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) = \\ &= x_1 \mathcal{A}(\bar{e}_1) + x_2 \mathcal{A}(\bar{e}_2) + \dots + x_n \mathcal{A}(\bar{e}_n) = \\ &= x_1 (a_{11} \bar{e}_1 + a_{12} \bar{e}_2 + \dots + a_{1n} \bar{e}_n) + \dots + x_n (a_{n1} \bar{e}_1 + a_{n2} \bar{e}_2 + \dots + a_{nn} \bar{e}_n) = \\ &= (\text{перегруппируем слагаемые}) = \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_n a_{n1}) \bar{e}_1 + \dots + (x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \dots + x_n a_{nn}) \bar{e}_n.\end{aligned}$$

Таким образом, координаты вектора $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$ в базисе $\mathfrak{B}$ вычисляются по формулам

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n, \\ y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Связь между матрицами оператора в разных базисах. Пусть $\mathcal{A} : L \rightarrow L$ – линейный оператор в пространстве L размерности n . Предположим, что в этом пространстве заданы два базиса, A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$, A' – матрица того же оператора в базисе $\mathfrak{B}'$, C – матрица перехода от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}'$. Рассмотрим два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ таких, что $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$. Обозначим через $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ координаты этих векторов в базисе $\mathfrak{B}$, а через $\bar{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ и $\bar{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$ – их координаты в базисе $\mathfrak{B}'$.

Как уже было показано, имеют место следующие матричные равенства:

$$\bar{y} = A\bar{x}, \quad \bar{y}' = A'\bar{x}', \quad \bar{x} = C\bar{x}', \quad \bar{y} = C\bar{y}'.$$

Отсюда следует, что

$$A'\bar{x}' = y' = C^{-1}\bar{y} = C^{-1}(A\bar{x}) = (C^{-1}A)\bar{x} = (C^{-1}A)C\bar{x}'.$$

Таким образом, матрицы A , A' и C связаны следующим равенством:

$$A' = C^{-1}AC.$$

В линейной алгебре две квадратные матрицы A и A' , которые связаны равенством $A' = C^{-1}AC$, где C – некоторая невырожденная матрица, называются *подобными матрицами*. Таким образом, матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A}$ в разных базисах подобные.

Одна из основных задач линейной алгебры – для заданного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве L найти такой базис этого пространства, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имела бы наиболее простой (желательно диагональный) вид. Задача нахождения такого базиса носит название *диагонализации линейного оператора*.

§ 7. Собственные значения и собственные векторы

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве L .

Определение. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$, где λ – некоторое число, которое называется *собственным значением* этого вектора.

Пример 20.

20.1. Пусть $\mathcal{A}_\varphi$ – оператор поворота на угол φ в пространстве V_2 .

Если $\varphi = 0$, то $\mathcal{A}_\varphi(\bar{x}) = \bar{x} = 1 \cdot \bar{x}$, то есть любой вектор $\bar{x}$ – собственный вектор и его собственное значение $\lambda = 1$.

Если $\varphi = \pi$ (то есть 180°), то $\mathcal{A}_\varphi(\bar{x}) = -\bar{x} = -1 \cdot \bar{x}$, то есть любой вектор $\bar{x}$ – собственный вектор с собственным значением $\lambda = -1$.

Если же $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$, то оператор $\mathcal{A}_\varphi(\bar{x})$ вообще не имеет собственных векторов.

20.2. Пусть $\mathcal{A}_\ell$ – оператор проектирования на заданную прямую ℓ (на плоскости V_2 или в пространстве V_3). Очевидно, что если вектор $\bar{x}$ имеет направление данной прямой, то $\mathcal{A}_\ell(\bar{x}) = \bar{x}$, то есть он является собственным вектором и $\lambda = 1$. Если вектор $\bar{x}$ перпендикулярен данной прямой, то $\mathcal{A}_\ell(\bar{x}) = 0 = 0 \cdot \bar{x}$, значит, такой вектор также является собственным, но его собственное значение $\lambda = 0$. Очевидно, что других собственных векторов этот оператор не имеет.

20.3. Пусть $L = C^\infty$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{\lambda x} \in L$.

Тогда $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda \cdot f(x)$. Таким образом, экспонента $e^{\lambda x}$ – собственная функция оператора дифференцирования.

Предположим, что в конечномерном пространстве L размерности n существует базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\},$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – соответствующие собственные значения этих векторов $\bar{e}_i$, то есть

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{e}_1) &= \lambda_1 \bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 + \dots + 0 \cdot \bar{e}_n, \\ \mathcal{A}(\bar{e}_2) &= \lambda_2 \bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 + \dots + 0 \cdot \bar{e}_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathcal{A}(\bar{e}_n) &= \lambda_n \bar{e}_n = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 + \dots + 0 \cdot \bar{e}_{n-1} + \lambda_n \bar{e}_n.\end{aligned}$$

Тогда матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе $\mathfrak{B}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то есть она диагональная, причем на диагонали стоят собственные значения оператора (не обязательно различные). Таким образом, задача диагонализации линейного оператора $\mathcal{A}$ сводится к нахождению базиса пространства L , состоящего из собственных векторов этого линейного оператора.

Как следует из примера 20.1, эта задача не всегда имеет решение, так как собственных векторов может не быть вовсе, и тогда не будет существовать и базиса из собственных векторов.

Рассмотрим более подробно процедуру нахождения собственных векторов. Итак, пусть имеется некоторый линейный оператор в пространстве L , $\dim L = n$ и фиксирован базис $\mathfrak{B}$.

Пусть $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ – собственный вектор, то есть $\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$. Запишем это векторное равенство в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то есть $A \cdot X = \lambda \cdot X$, и перепишем его в виде $(A - \lambda E)X = 0$. Получили однородную систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координатами (в базисе $\mathfrak{B}$) искомого собственного вектора X .

Если раскрыть определитель этой системы, то получится некоторый многочлен $f(\lambda)$ степени n , то есть

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0.$$

Многочлен $f(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A , а уравнение $f(\lambda) = 0$ – *характеристическим уравнением*.

Если $|A - \lambda E| \neq 0$, то по правилу Крамера система $(A - \lambda E)X = 0$ имеет единственное решение, а поскольку $X = \bar{0}$ – решение этой однородной системы, то других (ненулевых) решений она не имеет, а значит, нет и собственных векторов с таким собственным значением λ . Таким образом, фактически доказана следующая теорема.

Теорема. Вектор $\bar{x} \neq 0$ – собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда число λ – корень характеристического уравнения, то есть $f(\lambda) = 0$, и тогда координаты этого собственного вектора представляют собой ненулевое решение системы $(A - \lambda E)\bar{x} = 0$.

Схема нахождения собственных векторов матрицы A следующая.

1. Составить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.
2. Раскрыть определитель и найти все корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

3. Составить однородную систему линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

4. Подставить в эту систему первое собственное значение $\lambda = \lambda_1$ и найти ФСР этой СЛУ $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_l\}$.

5. Подставить в систему второе собственное значение $\lambda = \lambda_2$ и снова найти ФСР $\{\bar{e}_{i+1}, \dots, \bar{e}_j\}$ и т. д.

6. Все полученные векторы объединить в одну систему векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_l, \bar{e}_{i+1}, \dots, \bar{e}_j, \dots, \bar{e}_k\}$.

Можно доказать, что полученная система векторов $\mathfrak{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ линейно независима. Если при этом $k = n$, то есть число всех полученных векторов равно размерности пространства, то система векторов $\mathfrak{B}'$ – базис пространства, а значит, в этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

а это означает, что оператор $\mathcal{A}$ можно диагонализировать. Если же $k < n$, то не существует базиса пространства L , состоящего только из собственных векторов, то есть оператор $\mathcal{A}$ диагонализировать нельзя.

Пример 21.

21.1. Рассмотрим в пространстве V_2 линейный оператор $\mathcal{A}$, матрица которого в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 9 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0,$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 8.$$

Запишем систему для нахождения собственных векторов

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 9x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим в нее $\lambda_1 = -4$:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем самое простое ненулевое решение этой системы:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$$

Значит, $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ – первый собственный вектор.

Аналогично при $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Следовательно, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ – второй собственный вектор.

Таким образом, в базисе $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

21.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $\mathcal{A}$

в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ пространства V_3 .

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 & -1 \\ 4 & 6 - \lambda & -2 \\ -2 & -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda)(1 - \lambda) + \\ &+ 12 + 12 - 2(6 - \lambda) - 6(2 - \lambda) - 12(1 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 = \lambda^2(9 - \lambda) = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 9.$$

В систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + (6 - \lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + (1 - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

подставим $\lambda = 0$. Получим систему, которая равносильна одному уравнению: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

В качестве свободных неизвестных возьмем x_1 и x_2 и найдем два базисных решения:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2 \quad \text{и} \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

Таким образом, получаем два собственных вектора, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$, а именно

$$\vec{e}_1 = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Подставим в систему другое собственное значение $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0, \end{cases}$$

и приведем эту систему к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} 3x_2 - 7x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_3 = 0, \\ -9x_1 - 9x_3 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_2 - 7x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, $x_2 = 2$, то есть $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ – соответствующий собственный вектор. Таким образом, в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ матрица оператора имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

§ 8. Диагонализация самосопряженного оператора

Рассмотрим один важный класс линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве E , для которых задача диагонализации всегда решается положительно.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в евклидовом пространстве E . Оператор $\mathcal{A}$ называется **самосопряженным**, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ выполняется следующее равенство:

$$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}).$$

Пусть $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ – ортонормированный базис пространства E и A – матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда для любой пары базисных векторов имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j &= (a_{1i}\bar{e}_1 + a_{2i}\bar{e}_2 + \dots + a_{ji}\bar{e}_j + \dots + a_{ni}\bar{e}_n) \cdot \bar{e}_j = \\ &= a_{1i}(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_j) + a_{2i}(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_j) + \dots + a_{ji}(\bar{e}_j \cdot \bar{e}_j) + \dots + a_{ni}(\bar{e}_n \cdot \bar{e}_j) = a_{ji}.\end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } \bar{e}_i \cdot \mathcal{A}(\bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot (a_{1j}\bar{e}_1 + \dots + a_{nj}\bar{e}_n) = a_{ij}.$$

Поскольку оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный, то отсюда следует, что $a_{ij} = a_{ji}$, то есть A – симметричная матрица.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A , то есть $f(\lambda) = |A - \lambda E|$. Можно показать, что многочлен $f(\lambda)$ имеет только действительные корни, то есть его можно разложить на линейные множители:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

где λ_i – собственные значения (не обязательно различные) матрицы. Набор собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ называется *спектром* линейного оператора $\mathcal{A}$, причем если все собственные значения различны ($\lambda_i \neq \lambda_j$), то спектр оператора называется *простым*.

Теорема. Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E , то существует ортонормированный базис пространства E , в котором матрица оператора имеет диагональный вид.

Доказательство. В общем случае это доказательство (как, впрочем, и доказательство того, что все корни уравнения $f(\lambda) = 0$ действительны) достаточно сложное, поэтому ограничимся лишь частным случаем, когда оператор $\mathcal{A}$ имеет простой спектр $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – соответствующие собственные векторы, то есть $\mathcal{A}(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1$, $\mathcal{A}(\bar{e}_2) = \lambda_2 \bar{e}_2$, ..., $\mathcal{A}(\bar{e}_n) = \lambda_n \bar{e}_n$. Все векторы $\{\bar{e}_i\}$ можно считать нормированными, то есть $|\bar{e}_i| = 1$, в противном случае каждый из них надо умножить на число $\alpha_i = \frac{1}{|\bar{e}_i|}$. Докажем, что векторы $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ попарно ортогональны. Действительно, для любой пары этих векторов $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$ имеем

$$\mathcal{A}(\bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = (\lambda_i \bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = \lambda_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j),$$

аналогично $\bar{e}_i \cdot \mathcal{A}(\bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot (\lambda_j \bar{e}_j) = \lambda_j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j).$

Так как $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, то отсюда следует, что $\lambda_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = \lambda_j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j)$, то есть $(\lambda_i - \lambda_j)(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = 0$, а поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$.

Докажем, что система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ образует базис пространства E , то есть является линейно независимой.

Пусть $c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_n \bar{e}_n = \bar{0}$. Умножим это равенство скалярно на $\bar{e}_1$. Получим

$$\begin{aligned} (c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_n \bar{e}_n) \bar{e}_1 &= \\ &= c_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + c_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + \dots + c_n (\bar{e}_n \cdot \bar{e}_1) = c_1 = 0. \end{aligned}$$

Точно так же показывается, что и остальные коэффициенты будут нулевыми.

Таким образом, $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – ортонормированный базис, а поскольку все эти векторы собственные, то матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Пример 22. Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 8 & -4 & -8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ пространства V_3 .

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 8 & 1 \\ 8 & -4 - \lambda & -8 \\ 1 & -8 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5 - \lambda)^2(-4 - \lambda) - 64 - 64 + 4 + \lambda - 64(5 - \lambda) - 64(5 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 144\lambda - 864 = -(\lambda - 6)(\lambda - 12)(\lambda + 12) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = -12$ – собственные значения. В систему уравнений

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 + 8x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 + (-4 - \lambda)x_2 - 8x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

подставим сначала $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{cases} -x_1 + 8x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 - 10x_2 - 8x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 8x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда найдем первый собственный вектор $\bar{e}_1 = (1, 0, 1)$. Поскольку $|\bar{e}_1| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$, то, нормируя, можно считать, что $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Аналогично при $\lambda_2 = 12$ найдем собственный вектор $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, а при $\lambda_3 = -12$ – третий собственный вектор $\bar{e}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можно проверить, что базис $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ортонормированный. Матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

§ 9. Билинейные и квадратичные формы

Пусть L – линейное пространство.

Определение. Говорят, что в пространстве L задана б и л и н е й - н а я форма B , если каждой паре векторов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ по некоторому правилу однозначно ставится в соответствие число $B(\bar{x}, \bar{y})$, причем выполняются следующие свойства:

$$B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{z}) + B(\bar{y}, \bar{z}),$$

$$B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{x}, \bar{z}),$$

$$B(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$B(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y}).$$

Если к тому же для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство $B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{y}, \bar{x})$, то такая билинейная форма называется *симметрической*.

Простейший пример билинейной формы – скалярное произведение векторов $\bar{x} \cdot \bar{y}$ в евклидовом пространстве E .

Пусть $\dim L = n$ и $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – некоторый базис этого пространства. Рассмотрим квадратную матрицу B , элементы которой вычисляются по формулам $b_{ij} = B(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Она называется *матрицей билинейной формы* в базисе $\mathfrak{B}$. Если $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ и $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n$ – два произвольных вектора, то

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = B\left(\sum x_i \bar{e}_i, \sum y_j \bar{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j B(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j b_{ij}.$$

Если обозначить через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ столбцы координат данных векторов, то $\bar{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – строка (транспонированная матрица), а значит, предыдущую формулу можно записать в виде

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T B \bar{y}.$$

Пусть $\mathfrak{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ – другой базис пространства и C – матрица перехода от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}'$. Тогда координаты данных векторов в старом и новом базисах связаны формулами

$$\bar{x} = C\bar{x}', \quad \bar{y} = C\bar{y}', \quad \bar{x}^T = (x')^T C^T.$$

Отсюда $B(\bar{x}, \bar{y}) = ((x')^T C^T) B C \bar{y}' = (x')^T (C^T B C) \bar{y}'$. Таким образом, матрица билинейной формы в новом базисе $\mathfrak{B}'$ имеет вид

$$B' = C^T B C.$$

Если $B(x, y)$ – некоторая билинейная форма в пространстве L , то ей соответствует некоторое отображение $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}$, которое называется *квадратичной формой* и определяется равенством

$$\varphi(\bar{x}) = B(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}^T B \bar{x} = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j,$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – координаты вектора $\bar{x}$, а $B = (b_{ij})$ – матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}$. При переходе к новому базису $\mathfrak{B}'$ матрица квадратичной формы преобразуется точно так же, как матрица соответствующей билинейной формы, то есть $B' = C^T B C$.

Одна из основных задач теории квадратичных форм – приведение этой квадратичной формы к каноническому виду, то есть нахождение такого базиса $\mathfrak{B}'$ пространства L , в котором матрица этой квадратичной формы имела бы диагональный вид, то есть $\varphi(\bar{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$.

Приведем два основных способа решения этой задачи.

Метод Лагранжа. Рассмотрим квадратичную форму (в базисе $\mathfrak{B}$), матрица которой симметрическая, то есть $b_{ij} = b_{ji}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = & b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + \\ & + b_{nn}x_n^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + \dots + 2b_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Метод Лагранжа основан на процедуре выделения полных квадратов с помощью формулы

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_{k-1}a_k.$$

Возможны два случая:

1) хотя бы один из коэффициентов $b_{ii} \neq 0$, например $b_{11} \neq 0$. Запишем квадратичную форму в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + \varphi'(x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ &= b_{11} \left(x_1^2 + 2x_1x_2 \frac{b_{12}}{b_{11}} + 2x_1x_3 \frac{b_{13}}{b_{11}} + \dots + 2x_1x_n \frac{b_{1n}}{b_{11}} \right) + \\ &+ \varphi'(x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ &= b_{11} \left(x_1 + x_2 \frac{b_{12}}{b_{11}} + x_3 \frac{b_{13}}{b_{11}} + \dots + x_n \frac{b_{1n}}{b_{11}} \right)^2 - x_2^2 \frac{b_{12}^2}{b_{11}} - \dots - \\ &- x_n^2 \frac{b_{1n}^2}{b_{11}} - 2x_2x_3 \frac{b_{12}b_{13}}{b_{11}} - \dots + \varphi'(x_2, x_3, \dots, x_n) = \\ &= b_{11}x_1'^2 + \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где $x_1' = x_1 + b_{12}b_{11}x_2 + \dots + b_{1n}b_{11}x_n$, а φ_1 – квадратичная форма от меньшего числа переменных;

2) все коэффициенты $b_{ii} = 0$. Тогда хотя бы один из коэффициентов $b_{ij} \neq 0$, например $b_{12} \neq 0$. В этом случае преобразуем квадратичную форму иначе:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + \dots + 2b_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \\ &= \frac{1}{2}b_{12}((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2) + 2b_{13}x_1x_3 + \dots + 2b_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \\ &= \text{(сделаем замену: } x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2, \quad \text{а значит,} \\ x_1 &= \frac{1}{2}(x_1' + x_2'), \quad x_2 = \frac{1}{2}(x_1' - x_2')) = \frac{1}{2}b_{12}x_1'^2 - \frac{1}{2}b_{12}x_2'^2 + \\ &+ 2b_{13} \cdot \frac{1}{2}(x_1' + x_2')x_3 + \dots + 2b_{n-1,n}x_{n-1}x_n = \varphi'(x_1', x_2', x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Следовательно, получили в новых переменных $x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_n$ квадратичную форму φ' , у которой коэффициент при $x_1'^2$ отличен от нуля, то есть свели задачу к 1-му случаю, когда уже можно выделить полный квадрат.

Таким образом, в результате некоторой последовательности таких преобразований, постепенно уменьшая число переменных, можно добиться того, чтобы у квадратичной формы отсутствовали члены, содержащие все попарные произведения разных переменных, и остались только квадраты этих переменных с какими-либо коэффициентами.

Пример 23.

23.1.

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot 3x_2 + (3x_2)^2 - 9x_2^2 + 2x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2 - 7x_2^2.$$

Обозначим $x'_1 = x_1 + 3x_2, x'_2 = x_2$. Тогда $\varphi = x_1'^2 - 7x_2'^2$ – канонический вид квадратичной формы.

23.2.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 = \\ &= (\text{обозначим } x'_1 = x_1 + x_2, x'_2 = x_1 - x_2, \text{ тогда } x_1 = \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(x'_1 - x'_2)) = x_1'^2 - x_2'^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2)x_3 + 8 \cdot \frac{1}{2}(x'_1 - x'_2)x_3 = \\ &= x_1'^2 - x_2'^2 + x'_1x_3 - 7x'_2x_3 = \\ &= \left(x_1'^2 + 2x'_1 \cdot \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) - \frac{1}{4}x_3^2 - x_2'^2 - 7x'_2x_3 = \\ &= \left(x'_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \left(x_2'^2 + 2x'_2 \cdot \frac{7}{2}x_3 + \frac{49}{4}x_3^2\right) + \frac{49}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_3^2 = \\ &= \left(x'_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \left(x'_2 + \frac{7}{2}x_3\right)^2 + 12x_3^2. \end{aligned}$$

Если перейти еще раз к новым переменным ($x_1'' = x'_1 + \frac{1}{2}x_3, x_2'' = x'_2 + \frac{7}{2}x_3, x_3'' = x_3$), то получим канонический вид квадратичной формы: $\varphi = x_1''^2 - x_2''^2 + 12x_3''^2$.

Очевидно, что для данной квадратичной формы φ может существовать несколько различных способов приведения ее к каноническому виду. Например, если $\varphi = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$ (см. пример 23.1), то дополнить до полного квадрата можно иначе:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\left(x_2^2 + 2x_2 \cdot \frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_1^2\right) - \frac{9}{2}x_1^2 + x_1^2 = 2\left(x_2 + \frac{3}{2}x_1\right)^2 - \frac{7}{2}x_1^2 = \\ &= 2x_1''^2 - \frac{7}{2}x_2''^2,\end{aligned}$$

где $x_1'' = \frac{3}{2}x_1 + x_2$, $x_2'' = x_1$.

Предположим, что квадратичная форма $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ приведена к каноническому виду двумя различными способами:

- 1) $\varphi = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$ в базисе $\mathfrak{B}'$;
- 2) $\varphi = \mu_1 x_1''^2 + \mu_2 x_2''^2 + \dots + \mu_n x_n''^2$ в базисе $\mathfrak{B}''$.

Как мы уже убедились, коэффициенты $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ могут не совпадать с коэффициентами $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. В то же время имеет место следующая теорема (без доказательства).

Теорема (закон инерции квадратичных форм). Пусть p_1 – число положительных, q_1 – число отрицательных и r_1 – число нулевых коэффициентов среди $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, а p_2, q_2, r_2 – число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов среди $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$. Тогда $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$.

Рассмотрим другой способ приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма в евклидовом пространстве E размерности n , $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ – ортонормированный базис пространства E , B – матрица квадратичной формы φ в этом базисе (симметрическая). Рассмотрим самосопряженный линейный оператор, для которого B – матрица этого линейного оператора в базисе $\mathfrak{B}$. Как было показано ранее, существует другой ортонормированный базис $\mathfrak{B}' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \dots, \bar{e}_n'\}$, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ будет диагональной (этот базис образуют собственные векторы линейного оператора). Если C – матрица перехода от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}'$, то

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = C^{-1}BC.$$

Поскольку оба базиса ($\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$) ортонормированные, то $C^{-1} = C^T$, то есть $B' = C^{-1}BC$. Таким образом, матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}'$ будет такой же, как матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, то есть

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы B .

Пример 24. Пусть $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; |B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0;$$

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$ – собственные значения;

$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – соответствующие собственные векторы.

Тогда $B' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Значит, $\varphi = 5x_1'^2 - 3x_2'^2$ – канонический вид квадратичной формы.

Критерий Сильвестра. Рассмотрим квадратичную форму $\varphi(\bar{x}) = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$.

Определение. 1. Квадратичная форма φ называется положительно определенной, если $\varphi(\bar{x}) > 0$ для любого $\bar{x} \neq 0$.

2. Квадратичная форма φ называется отрицательно определенной, если $\varphi(\bar{x}) < 0$ для любого $\bar{x} \neq 0$.

Пусть B – матрица квадратичной формы (симметрическая) и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – ее собственные значения. Очевидно, что если все $\lambda_i > 0$, то φ положительно определенная, а если $\lambda_i < 0$ – то отрицательно определенная. Однако существует другой способ, чтобы выяснить, является ли квадратичная форма знакоопределенной, при котором не нужно находить собственные значения. Для этого вычислим несколько определителей разного порядка:

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(эти определители называются *главными минорами* матрицы B).

Приведем без доказательства необходимое и достаточное условие знакоопределенности квадратичной формы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Теорема (критерий Сильвестра). 1. Квадратичная форма φ положительно определенная тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

2. Квадратичная форма φ отрицательно определенная тогда и только тогда, когда $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$, то есть знаки главных миноров чередуются (начиная с минуса).

Пример 25.

25.1. $\varphi = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы,

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Значит, эта квадратичная форма положительно определена.

$$25.2. \varphi = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 6x_1x_3,$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 < 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -69 < 0.$$

Значит, эта квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной.

Классификация кривых 2-го порядка. Рассмотрим уравнение 2-й степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (*)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов квадратичной формы отличен от нуля, то есть $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Кривой 2-го порядка на плоскости называется множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (*).

Пусть λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы квадратичной формы $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j}$, $\vec{e}_2 = \alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}$ – соответствующие собственные векторы. Как мы уже знаем, эти векторы ортогональны, а при необходимости их можно нормировать, то есть $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Значит, $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – ортонормированный базис на плоскости. Рассмотрим на плоскости новую декартову систему координат $Ox'y'$, оси которой направлены по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда старые и новые координаты любой точки M связаны посредством матрицы перехода:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ то есть } \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{cases}$$

Если эти выражения подставить в уравнение (*), то в новой системе координат уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Далее рассмотрим несколько возможных случаев.

1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. В этом случае от линейных членов можно избавиться, дополняя уравнение до полного квадрата:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{D'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{E'}{\lambda_2} \right)^2 = F''.$$

Переходя еще к одной новой системе координат $O'x''y''$ путем параллельного переноса по формулам

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{D'}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{E'}{\lambda_2}, \end{cases}$$

получим в этой системе координат уравнение $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = F''$.

В зависимости от знаков трех коэффициентов этого уравнения возможны следующие случаи:

а) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, F'' < 0$. В этом случае уравнение задает пустое множество;

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, F'' = 0$. Такому уравнению удовлетворяет ровно одна точка ($x'' = 0, y'' = 0$);

в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, F'' > 0$. В таком случае это уравнение обычно записывают в каноническом виде

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

и оно определяет на плоскости кривую, которая называется *эллипсом* (в частном случае, когда $a = b$, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, это будет окружность);

г) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, F'' = 0$. В этом случае, если обозначить $\lambda_1 = a^2$ и $\lambda_2 = -b^2$, уравнение можно записать в виде

$$(ax'' - by'')(ax'' + by'') = 0,$$

и оно определяет на плоскости пару пересекающихся прямых;

д) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, F'' \neq 0$. В таком случае каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = \pm 1,$$

и оно определяет на плоскости гиперболу.

2. $\lambda_1 \neq 0$ (можно считать, что $\lambda_1 > 0$), $\lambda_2 = 0$, то есть уравнение имеет вид $\lambda_1 x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$.

Выделяя один полный квадрат, получим

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{D'}{\lambda} \right)^2 + 2E'y' + F'' = 0.$$

Здесь также возможны несколько случаев:

а) $E' = 0, F'' > 0$ – пустое множество;

б) $E' = 0, F'' < 0$, то есть $x' + \frac{D'}{\lambda'} = \pm \sqrt{-\frac{F''}{\lambda_1}}$ – пара параллельных прямых;

в) $E' = 0, F'' = 0$ – пара совпадающих прямых;

г) $E' \neq 0$. В этом случае, если сделать параллельный перенос системы координат $O'x'y'$ по формулам

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{D'}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{F''}{2E_1}, \end{cases}$$

то в новой системе координат $O''x''y''$ получим каноническое уравнение параболы $y'' = px''^2$.

Пример 26. Дано уравнение $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x - 16y = 0$.

Требуется определить, к какому типу относится эта кривая, и привести это уравнение к каноническому виду.

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы $\varphi(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{нормированный собственный вектор,}$$

$$\lambda_2 = 4, \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, \bar{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{второй собственный вектор,}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \text{матрица перехода от стандартного базиса}$$

$\mathfrak{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ к базису $\mathfrak{B}' = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Формулы перехода следующие: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'). \end{cases}$

Подставим формулы перехода в уравнение кривой:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right)^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\right)^2 + \\ + 8\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - 16\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') = 0,$$

$$2x'^2 + 4y'^2 - 4\sqrt{2}x' + 12\sqrt{2}y' = 0,$$

$$2(x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 2) - 4 + 4\left(y' + 2\frac{3\sqrt{2}}{2}y' + \frac{9}{2}\right) - 18 = 0,$$

$$2(x' - \sqrt{2})^2 + 4\left(y' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 22.$$

Обозначим $x'' = x' - \sqrt{2}$, $y'' = y' + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Тогда в системе координат $O'x''y''$ получим уравнение

$$2x''^2 + 4y''^2 = 22, \text{ или } \frac{(x'')^2}{11} + \frac{(y'')^2}{11/2} = 1.$$

Значит, $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{11})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{11/2})^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса.

Поверхности 2-го порядка. Как известно, любое уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет в пространстве некоторую поверхность. Если функция $F(x, y, z)$ представляет собой многочлен 2-й степени от трех переменных, то множество точек $M(x, y, z)$ удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + 2Kx + 2Ly + 2Mz + N = 0,$$

называется *поверхностью 2-го порядка в пространстве*.

В некоторых особых случаях это уравнение может задавать либо пустое множество, либо ровно одну точку, либо пару плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих). Последнее означает, что данный многочлен раскладывается на два линейных множителя:

$$(ax + by + c)(px + qy + r) = 0.$$

Такие случаи обычно называют *вырожденными*.

Во всех остальных, то есть невырожденных, случаях получается некоторая кривая поверхность в пространстве. Для того чтобы получить каноническое уравнение этой поверхности, нужно сначала повернуть систему координат $Oxyz$ и избавиться от членов, содержащих попарные произведения переменных, а затем с помощью параллельного переноса избавиться от линейных членов. В результате получится одно из следующих канонических уравнений.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид (в частном случае – сфера, когда $a = b = c$).

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ – эллиптический параболоид.

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ – гиперболический параболоид.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр.

8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр.

9. $y = px^2$ – параболический цилиндр.

Пример 27. Поверхность 2-го порядка в пространстве задана уравнением

$$-8x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 20xy - 20xz + 10yz + 6x - 8y + 6z = 0.$$

Требуется определить, к какому типу относится эта поверхность, и привести ее к каноническому виду.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi(x, y, z) = -8x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2 \cdot 10xy - 2 \cdot 10xz + 2 \cdot 5yz$$

и составим ее матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 10 & -10 \\ 10 & 7 & 5 \\ -10 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен этой матрицы:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 10 & -10 \\ 10 & 7 - \lambda & 5 \\ -10 & 5 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-8 - \lambda)(7 - \lambda)(7 - \lambda) - 500 - 500 - 100(7 - \lambda) - \\ &- 100(7 - \lambda) - 25(-8 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 288\lambda - 2592. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение $-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 288\lambda - 2592 = 0$ можно существенно упростить, если заметить, что $288 = 6^2 \cdot 8$ и $2592 = 6^3 \cdot 12$, и сделать замену $\lambda = 6t$. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$216t^3 - 216t^2 - 216 \cdot 8t + 216 \cdot 12 = 0,$$

а значит, сокращая на 216, получим $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$.

Корни этого уравнения $\{t_1, t_2, t_3\}$ можно найти подбором, если воспользоваться теоремой Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 1, \\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -8, \\ t_1 t_2 t_3 = -12. \end{cases}$$

Легко убедиться, что этой системе удовлетворяет следующая тройка чисел: $t_1 = -3, t_2 = 2, t_3 = 2$.

Таким образом, найдены собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = -18, \lambda_2 = \lambda_3 = 12$.

Составим систему для нахождения собственных векторов: $(A - \lambda E)X = 0$, или в развернутом виде

$$\begin{cases} (-8 - \lambda)x_1 + 10x_2 - 10x_3 = 0, \\ 10x_1 + (7 - \lambda)x_2 + 5x_3 = 0, \\ -10x_1 + 5x_2 + (7 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Подставим в эту систему первое собственное значение $\lambda_1 = -18$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - 10x_3 = 0, \\ 10x_1 + 25x_2 + 5x_3 = 0, \\ -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Сокращая на пять и приводя эту систему к ступенчатому виду, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(x_1, x_2 – главные неизвестные, x_3 – свободный член).

Полагая $x_3 = 1$, получим $x_2 = -1$, а из 1-го уравнения $x_1 = 2$. Таким образом, $\bar{e}_1 = (2, -1, 1)$ – первый собственный вектор. Поскольку

$|\bar{e}_1| = \sqrt{6}$, то этот вектор можно нормировать, и поэтому окончательно будем считать, что $\bar{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Теперь вместо λ подставим в систему второе собственное значение $\lambda_2 = 12$:

$$\begin{cases} -20x_1 + 10x_2 - 10x_3 = 0, \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0, \\ -10x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Приводя эту систему к ступенчатому виду, получим одно уравнение:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

(x_1 – главная неизвестная, x_2 и x_3 – свободные члены).

Получили уравнение плоскости в пространстве. Поскольку нормальным вектором к этой плоскости как раз и является собственный вектор $\bar{e}_1 = (2, -1, 1)$, то любой вектор, лежащий в этой плоскости, будет ортогонален вектору $\bar{e}_1$.

Очевидно, что самое простое решение полученного уравнения $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ – следующее: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Чтобы получить ортогональный базис из собственных векторов, в качестве третьего собственного вектора (с собственным значением $\lambda_3 = 12$) нужно взять векторное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{e}_3 &= \bar{e}_2 \times \bar{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = 2(1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}). \end{aligned}$$

Окончательно с учетом нормировки $\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ имеем новый ортонормированный базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, состоящий из собственных векторов матрицы A .

Рассмотрим в пространстве новую систему координат $Ox'y'z'$, оси которой направлены по собственным векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Запишем матрицу перехода от старого базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к новому $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Запишем формулы перехода от старых координат к новым:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{6}}x' + 0y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в заданное уравнение поверхности (в квадратичную форму можно не подставлять, так как в новом базисе матрица квадратичной формы будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

а значит, $\varphi(x', y', z') = -18x'^2 + 12y'^2 + 12z'^2$.

Получим уравнение поверхности в новой системе координат:

$$\begin{aligned} & -18x'^2 + 12y'^2 + 12z'^2 + 6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x' + 0y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) - \\ & - 8\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$-18x'^2 + 12y'^2 + 12z'^2 + \frac{26}{\sqrt{6}}x' - \frac{2}{\sqrt{2}}y' - \frac{8}{\sqrt{3}}z' = 0.$$

Осталось дополнить уравнение до полного квадрата, что геометрически соответствует параллельному переносу системы координат:

$$\begin{aligned} & -18x'^2 + \frac{26}{\sqrt{6}}x' + 12y'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 12z'^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}z' = \\ & = -18\left(x'^2 - 2\frac{13}{18\sqrt{6}}x' + \left(\frac{13}{18\sqrt{6}}\right)^2\right) + \frac{169}{108} + \\ & + 12\left(y'^2 - 2\frac{1}{12\sqrt{2}}y' + \left(\frac{1}{12\sqrt{2}}\right)^2\right) - \frac{1}{24} + \\ & + 12\left(z'^2 - 2\frac{4}{12\sqrt{3}}z' + \left(\frac{4}{12\sqrt{3}}\right)^2\right) - \frac{16}{36} = \\ & = -18\left(x' - \frac{13}{18\sqrt{6}}\right)^2 + 12\left(y' - \frac{1}{12\sqrt{2}}\right)^2 + \\ & + 12\left(z' - \frac{4}{12\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{233}{216} = 0. \end{aligned}$$

Вводя новые координаты

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{13}{18\sqrt{6}}, \\ y'' = y' - \frac{1}{12\sqrt{2}}, \\ z'' = z' - \frac{4}{12\sqrt{3}}, \end{cases}$$

окончательно получим

$$-18x''^2 + 12y''^2 + 12z''^2 = -\frac{233}{216},$$

$$-\frac{x''^2}{233/12} + \frac{y''^2}{233/18} + \frac{z''^2}{233/18} = 1.$$

Последнее уравнение – каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

Контрольные вопросы

1. Сколько аксиом фигурирует в определении линейного векторного пространства?
2. Является ли линейным пространством множество всех квадратных трехчленов с действительными коэффициентами?
3. В чем заключается геометрический смысл линейной зависимости для двух и трех обычных векторов (на плоскости или в пространстве)?
4. Приведите пример базиса в пространстве многочленов (степени не выше третьей), в котором все базисные векторы – это многочлены 3-й степени.

5. Какая связь между нахождением координат вектора в заданном базисе и решением системы линейных уравнений?

6. Приведите два различных примера скалярного произведения в пространстве многочленов.

7. В чем заключается геометрический смысл неравенства Коши – Буняковского?

8. Может ли процесс ортогонализации Грама – Шмидта давать различные ортогональные базисы?

9. Является ли линейным оператором отображение, которое каждому многочлену ставит в соответствие остаток от деления этого многочлена на некоторый фиксированный многочлен?

10. Может ли линейный оператор в пространстве размерности 3 вообще не иметь собственных векторов?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА 1

Вариант 1

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = -2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & -7 & 6 & -9 \\ -3 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & 9 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & 4 \\ -8 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ -7 & -3 & 7 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & -6 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & -4 \\ 8 & 7 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & -1 & 5 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & -9 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ -5 & -1 & 7 & -5 & -6 \\ 4 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -4 \\ 8 & -7 & 6 & -9 \\ -3 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 6 & 9 \\ -3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 2 & -9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 9 \\ -3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ -7 & -3 & 7 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & 4 \\ -8 & -7 & -2 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & -3 & 9 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = -2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -4 & 1 \\ -7 & 3 & 3 & -5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & 6 & -9 \\ -3 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -9 & -4 \\ -4 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ 8 & 7 & -6 & -1 \\ -3 & -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 9 & -6 \\ -4 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 4 \\ -8 & 7 & -2 & 9 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ 8 & 7 & -6 & 9 \\ -3 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ -7 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & 4 \\ -8 & -1 & -6 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & 4 \\ -8 & -7 & -2 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 7 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ 8 & 7 & -6 & -1 \\ -3 & -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & -5 & 7 & -5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = -2, \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & 4 \\ -8 & -1 & -6 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ -5 & -3 & -7 & -5 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = -2, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & -4 & -1 \\ 7 & -5 & -1 & -5 & -6 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 23

В задачах 1 и 2 решить систему линейных уравнений:

- а) методом Гаусса;
- б) по правилу Крамера;
- в) методом обратной матрицы.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

3. Вычислить определитель 5-го порядка двумя способами: сначала разложив его по любой строке, а затем по любому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Для трех заданных матриц A , B и C проверить свойство ассоциативности:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, (B \cdot C) \cdot A = B \cdot (C \cdot A), C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами: методом присоединенной матрицы и методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Найти ранги матриц A и B двумя способами: методом Гаусса и методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & -7 & 2 & -9 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & -5 & 6 \\ -4 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА 2

Вариант 1

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 3)$, $\bar{e}_3 = (-2, 1, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 1, -3, 0, 1) \quad \bar{e}_2 = (-1, 1, 0, 2, -2) \quad \bar{e}_3 = (0, -1, 2, 1, 0)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = x^2 + x - 3 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 2x - x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x + y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 - 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$5x^2 + 6xy - 3y^2 + 2x + 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$18x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy + 12xz - 6yz + 10x + 4y - 6z = 0.$$

Вариант 2

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (1, 0, -3)$, $\bar{e}_2 = (2, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (-2, 3, 2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, -2, 1, 3, 0) \quad \bar{e}_2 = (2, 1, 0, 2, -2) \quad \bar{e}_3 = (-1, 0, 1, 3, 0)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2x^2 - x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 + 1$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 2x - 2y + 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$7x^2 + 8xy + y^2 + 6x - 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 4xy + 4xz + 4yz + 6x - 2y + 10z = 0.$$

Вариант 3

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (3, 2, -1)$, $\bar{e}_2 = (0, -2, 3)$, $\bar{e}_3 = (1, -1, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, -2, 0, 1, -1) \quad \bar{e}_2 = (-3, 0, 1, 2, 0) \quad \bar{e}_3 = (1, 2, 2, 0, -2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = x^2 - 3x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 4x + y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$3x^2 - 4xy + 6y^2 - 4x + 8y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$16x^2 + 13y^2 + 13z^2 - 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 8y + 6z = 0.$$

Вариант 4

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 0, -3)$, $\bar{e}_2 = (-1, -2, 1)$, $\bar{e}_3 = (3, 1, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (0, 1, -2, 1, 3) \quad \bar{e}_2 = (2, -2, 0, 1, -1) \quad \bar{e}_3 = (3, 1, -2, 0, 1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^2 + 3x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -3x + 3y + z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$2x^2 + 12xy - 3y^2 + 4x - 2y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$14x^2 + 11y^2 + 11z^2 - 8xy + 8xz + 2yz - 6x + 4y + 8z = 0.$$

Вариант 5

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (0, 2, -1)$, $\bar{e}_2 = (3, -2, 2)$, $\bar{e}_3 = (1, 3, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, 0, -3, 2, -1) \quad \bar{e}_2 = (0, 1, -2, 3, 1) \quad \bar{e}_3 = (2, -2, 1, 0, 3)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 3 - x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x - 2y + 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 6x + 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$14x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 8xy + 8xz - 4yz - 10x + 2y + 6z = 0.$$

Вариант 6

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 3, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 3)$, $\bar{e}_3 = (0, -2, 1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 1, 3, 0, -2) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, 2, -3, 1) \quad \bar{e}_3 = (0, -2, 1, 2, 2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3x^2 + x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 2 - 2x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -4x + y + 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 4x - 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$16x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz - 32yz + 6x - 6y + 10z = 0.$$

Вариант 7

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (1, 2, -2)$, $\bar{e}_2 = (3, 0, 1)$, $\bar{e}_3 = (0, -3, 2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 3, 1, 0, -1) \quad \bar{e}_2 = (0, -1, 2, 1, 3) \quad \bar{e}_3 = (1, -2, -1, 2, 0)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3 - x - x^2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 - x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x - 3y + 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$14x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 20xy + 20xz + 2yz + 8x - 4y + 6z = 0.$$

Вариант 8

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (3, 0, -1)$, $\bar{e}_2 = (1, 2, -3)$, $\bar{e}_3 = (0, 1, 2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (3, 1, 2, -1, 0) \quad \bar{e}_2 = (0, 2, 1, 2, -2) \quad \bar{e}_3 = (1, -1, 0, 3, 2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 1 + 3x - x^2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 - 1$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 2x + y - 4z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 + 12xy + 6y^2 + 4x - 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 20xy + 20xz + 14yz + 4x - 6y + 10z = 0.$$

Вариант 9

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 2, -3)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, -2)$, $\bar{e}_3 = (-2, 3, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, -2, -3, 0, 1) \quad \bar{e}_2 = (2, 1, 0, -3, 2) \quad \bar{e}_3 = (0, -1, 2, 2, -1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2 + 2x - x^2 \quad f_2(x) = 3x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 + x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x - 2y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -5x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$-5x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x + 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$14x^2 - y^2 - z^2 - 8xy + 8xz - 22yz + 6x + 4y - 12z = 0.$$

Вариант 10

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (0, -2, 3)$, $\bar{e}_2 = (1, 3, -1)$, $\bar{e}_3 = (2, 0, 1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, -3, -2, 0, 2) \quad \bar{e}_2 = (2, 0, 1, -2, -3) \quad \bar{e}_3 = (0, 1, 2, -1, 2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3x^2 - x + 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 - 2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -3x + y + 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$5x^2 - 8xy - y^2 + 4x + 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-14x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 20xy - 20xz + 16yz - 6x + 2y + 8z = 0.$$

Вариант 11

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, -3, 1)$, $\bar{e}_2 = (0, 2, -3)$, $\bar{e}_3 = (1, -2, 0)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (3, 0, 1, -2, -2) \quad \bar{e}_2 = (1, -1, 2, 3, 0) \quad \bar{e}_3 = (-1, 2, 2, 0, -1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = x^2 - x + 3 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 + x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x + 3y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & -10 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$7x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 2y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$10x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 16xy + 16xz + 10yz + 8x - 6y - 6z = 0.$$

Вариант 12

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (3, -1, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 2, 3)$, $\bar{e}_3 = (1, -1, 2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 1, 0, -3, 1) \quad \bar{e}_2 = (-3, 2, 1, 0, 2) \quad \bar{e}_3 = (0, 2, -2, 1, 1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2x^2 + x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 - 2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -2x + y - 4z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-10x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16xy - 16xz + 8yz + 6x + 10y - 6z = 0.$$

Вариант 13

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (0, 1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, -2, 3)$, $\bar{e}_3 = (3, 0, -1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, -3, 0, 2, 1) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, 2, -2, 3) \quad \bar{e}_3 = (3, 1, -1, 0, 1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2 - x - x^2 \quad f_2(x) = 3x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 - x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: x + 3y - 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 4 & 10 & -6 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_4 - 4x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$2x^2 - 12xy - 3y^2 + 8x - 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-14x^2 + y^2 + z^2 + 20xy - 20xz + 10yz + 8x - 6y + 8z = 0.$$

Вариант 14

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 3)$, $\bar{e}_3 = (0, -3, 2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (-1, 2, 1, 0, -3) \quad \bar{e}_2 = (2, 0, 3, 1, -1) \quad \bar{e}_3 = (0, 1, 2, -2, -2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 + 1$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x - 2y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-8x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 20xy - 20xz + 10yz - 8x + 2y + 6z = 0.$$

Вариант 15

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (1, -3, 0)$, $\bar{e}_2 = (2, 1, 3)$, $\bar{e}_3 = (0, -2, 1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, 2, -2, 0, 2) \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 3, -2, -2) \quad \bar{e}_3 = (1, -2, 2, 3, 0)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = x^2 - 2x - 2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 - x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 4x + y - z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_4 - 6x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$6x^2 - 12xy + y^2 + 2x + 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-10x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16xy - 16xz + 20yz + 6x - 10y + 10z = 0.$$

Вариант 16

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (1, 3, 0)$, $\bar{e}_2 = (-2, 1, 2)$, $\bar{e}_3 = (0, 3, -1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (0, 1, 2, -3, 1) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, -3, 2, 2) \quad \bar{e}_3 = (2, -1, 3, 0, -1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3x^2 - x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 + 1$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x - 3y + z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 6 & -8 & -10 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 6x_2x_3 + 4x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 8y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-10x^2 - 7y^2 - 7z^2 + 16xy - 16xz - 10yz + 4x + 6y - 8z = 0.$$

Вариант 17

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\bar{e}_2 = (-1, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 3, -2)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (1, -2, -1, 3, 0) \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 2, -2, 1) \quad \bar{e}_3 = (1, -1, 3, 0, -2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3 + x - x^2 \quad f_2(x) = 3x^2 \quad f_3(x) = 2x^2 + x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -2x + 3y + 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & -9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 + 4x - 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-14x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 20xy - 20xz - 2yz + 8x + 6y - 4z = 0.$$

Вариант 18

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, 3)$, $\bar{e}_2 = (-1, 2, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 3, -1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (-2, 1, 2, 0, 3) \quad \bar{e}_2 = (1, 3, -1, 2, 0) \quad \bar{e}_3 = (0, -1, 1, -1, 2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 1 - 3x + x^2 \quad f_2(x) = 2x^2 \quad f_3(x) = x - 3x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 4x - y - 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1x_4 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$6x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 2y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$10x^2 + 10y^2 + 10z^2 - 16xy + 16xz + 16yz - 2x + 6y + 10z = 0.$$

Вариант 19

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (3, 2, 0)$, $\bar{e}_2 = (-2, 0, 1)$, $\bar{e}_3 = (1, 2, -3)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, -2, 1, 0, 3) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, 2, 3, -1) \quad \bar{e}_3 = (0, 1, 3, 1, -1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2 - 2x - x^2 \quad f_2(x) = 3x^2 \quad f_3(x) = 1 - 2x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 3x + y - z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -5 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 - 8xy - 5y^2 - 4x + 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$14x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 8xy + 8xz + 8yz + 6x - 10y - 6z = 0.$$

Вариант 20

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\bar{e}_2 = (-1, 0, 2)$, $\bar{e}_3 = (0, 2, 3)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 1, 0, -1, 2) \quad \bar{e}_2 = (-1, 3, 2, 0, 1) \quad \bar{e}_3 = (1, 0, -1, 2, 2)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 1 + x - 3x^2 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^2 + 2x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: 2x + y - 4z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$3x^2 + 6xy - 5y^2 + 6x - 2y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 20xy + 20xz + 20yz + 10x - 6y + 6z = 0.$$

Вариант 21

Задание 1. Ортогонализировать базис $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 3, -1)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 3)$, $\bar{e}_3 = (0, -2, 1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, 1, -3, 0, -2) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, 2, -3, 1) \quad \bar{e}_3 = (0, -2, 1, 2, 1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 3 - 2x^2$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -4x + y + 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$x^2 + 8xy - 5y^2 + 4x + 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$16x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 4xy + 4xz - 32yz + 6x + 6y - 10z = 0.$$

Вариант 22

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (0, 3, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, -2, 3)$, $\bar{e}_3 = (3, 0, -1)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (2, -3, 0, -2, 1) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, 2, -2, -3) \quad \bar{e}_3 = (3, 1, -1, 0, 1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2 - 2x - x^2 \quad f_2(x) = 3x^2 \quad f_3(x) = x^2 - 2x$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: x + 4y - 3z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -4 & -10 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_4 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$2x^2 - 12xy - 3y^2 - 8x + 4y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$-14x^2 + y^2 + z^2 + 20xy - 20xz + 10yz + 8x + 6y - 8z = 0.$$

Вариант 23

Задание 1. Ортогонализировать базис $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где $\bar{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\bar{e}_2 = (-1, 0, 2)$, $\bar{e}_3 = (0, 2, 3)$, пространства $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\bar{a} = (1, -2, 3)$ в старом и новом базисах.

Задание 2. Проверить линейную независимость системы векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства $\mathbb{R}^5$ и ортогонализировать эту систему.

$$\bar{e}_1 = (0, 1, 2, -3, 1) \quad \bar{e}_2 = (1, 0, -3, 2, 2) \quad \bar{e}_3 = (2, -1, 3, 0, -1)$$

Задание 3. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 4. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ задан базис $B = \{f_1, f_2, f_3\}$. Найти матрицу оператора дифференцирования D в этом базисе.

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = 3x^2 + 1$$

Задание 5. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на ось вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Составить матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также построить ортогональный базис пространства V_3 , в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Задание 6. В пространстве V_3 задан оператор проектирования на плоскость $\pi: -4x + y + 2z = 0$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а также собственные значения и собственные векторы этого оператора.

Задание 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задание 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9. Привести квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа и исследовать ее на знакоопределенность:

а) $\varphi(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$;

б) $\psi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Задание 10. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность с помощью критерия Сильвестра.

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_1x_4 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

Задание 11. Привести уравнение кривой 2-го порядка на плоскости к каноническому виду и построить эту кривую.

$$-5x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x + 6y = 0$$

Задание 12. Определить тип поверхности 2-го порядка, которая задана уравнением

$$16x^2 + 13y^2 + 13z^2 - 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 8y + 6z = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика занимает важное место в системе высшего образования и является основой для изучения многих специальных дисциплин. Практически во всех разделах математики используются такие понятия и инструменты, как векторы, матрицы, системы уравнений, линейные пространства и т. п.

Авторы надеются, что пособие поможет студентам успешно освоить основные разделы линейной алгебры, а также будет полезно для преподавателей при проведении занятий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Игнаточкина, Л. А.* Алгебра для геометрии : учеб. пособие / Л. А. Игнаточкина, А. В. Никифорова. – М. : Прометей, 2017. – 44 с. – ISBN 978-5-906879-92-9.
2. *Шершнев, В. Г.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие / В. Г. Шершнев. – М. : ИНФРА-М, 2018. – 168 с. – ISBN 978-5-16-005479-7.
3. *Бортаковский, А. С.* Линейная алгебра в примерах и задачах : учеб. пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – 3-е изд., стер. – М. : ИНФРА-М, 2020. – 592 с. – ISBN 978-5-16-010586-4.
4. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект : учеб. пособие / В. И. Антонов [и др.]. – М. : Проспект, 2015. – 144 с. – ISBN 978-5-392-16893-4.
5. *Рудык, Б. М.* Линейная алгебра : учеб. пособие / Б. М. Рудык. – М. : ИНФРА-М, 2019. – 318 с. – ISBN 978-5-16-004533-7.
6. *Шевцов, Г. С.* Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты : учеб. пособие / Г. С. Шевцов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Магистр : ИНФРА-М, 2019. – 544 с. – ISBN 978-5-9776-0258-7.
7. *Шафаревич, И. Р.* Линейная алгебра и геометрия / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с. – ISBN 978-5-9221-1139-3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ	4
§ 1. Системы линейных алгебраических уравнений	4
§ 2. Матрицы.....	6
§ 3. Операции над матрицами.....	9
Транспонирование матрицы.....	9
Умножение матрицы на число	10
Сложение и вычитание матриц.....	10
Умножение матриц.....	10
Обратная матрица.....	12
§ 4. Матричный метод решения системы.....	15
§ 5. Подстановки	17
§ 6. Определитель матрицы	18
§ 7. Ранг матрицы.....	24
§ 8. Правило Крамера	28
§ 9. Присоединенная матрица.....	31
§ 10. Векторная алгебра	33
§ 11. Умножение вектора на число	34
§ 12. Сложение и вычитание векторов	34
§ 13. Скалярное произведение векторов	36
§ 14. Векторное произведение векторов	37
§ 15. Смешанное произведение векторов.....	39
<i>Контрольные вопросы</i>	41
Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	43
§ 1. Линейная зависимость и линейная независимость	45
§ 2. Размерность и базис линейного пространства.....	47
§ 3. Разложение вектора по базису.....	49

§ 4. Евклидовы пространства.....	51
Неравенство Коши – Буняковского.....	52
Ортогонализация базиса.....	55
§ 5. Системы линейных уравнений.....	58
§ 6. Линейные операторы.....	64
Матрица перехода.....	66
Матрица линейного оператора в данном базисе.....	69
Связь между матрицами оператора в разных базисах.....	72
§ 7. Собственные значения и собственные векторы.....	73
§ 8. Диагонализация самосопряженного оператора.....	79
§ 9. Билинейные и квадратичные формы.....	83
Метод Лагранжа.....	84
Критерий Сильвестра.....	88
Классификация кривых 2-го порядка.....	90
Поверхности 2-го порядка.....	94
<i>Контрольные вопросы</i>	101
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА 1.....	102
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА 2.....	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	172
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	173

Учебное издание

БУРКОВ Владимир Дмитриевич
ЕГОРОВА Анастасия Владимировна
ПЕТРЕНКО Ирина Анатольевна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор Т. В. Евстюничева

Технические редакторы Ш. В. Абдуллаев, Н. В. Пустовойтова

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 09.09.22.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 10,23. Тираж 77 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.