

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Владимирский государственный университет

А.К. Бернюков

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
ДИСКРЕТНОЙ
МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Владимир 2008

Оглавление

Предисловие	4
ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЦЕДУР	5
1. ДИСКРЕТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	6
1.1. Описание дискретной последовательности в дискретном времени.....	6
1.2. Описание дискретной последовательности в комплексной плоскости p $[\sigma, j\omega]$	7
1.3. Частотный образ дискретной последовательности $x(n)$ – спектр $X(e^{j\omega})$	8
1.4. Описание дискретной последовательности в Z -плоскости.....	8
1.5. Типовые задачи.....	9
1.6. Самоподготовка и самоконтроль	13
1.7. Контрольные вопросы.....	15
1.8. Литература	16
2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	17
2.1. Основные свойства дискретного преобразования Фурье.....	17
2.2. Быстрое преобразование Фурье	18
2.3. Типовые задачи.....	20
2.4. Самоподготовка и самоконтроль	23
2.5. Контрольные вопросы.....	24
2.6. Литература	24
3. ПРОЦЕДУРЫ СВЁРТКИ И КОРРЕЛЯЦИИ	25
3.1. Дискретная свёртка	25
3.2. Процедуры корреляции и энергетические спектры	27
3.3. Типовые задачи.....	28
3.4. Самоподготовка и самоконтроль	31
3.5. Контрольные вопросы.....	32
3.6. Литература	32
4. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ	33
4.1. Нерекурсивные фильтры	33
4.2. Рекурсивные фильтры.....	34
4.3. Основные методы реализации цифровых фильтров.....	36
4.4. Этапы проектирования цифровых (дискретных) фильтров.....	36
4.5. Основные погрешности цифровых фильтров.....	37
4.6. Критерии качества цифровых фильтров	38
4.7. Типовые задачи.....	38
4.8. Самоподготовка и самоконтроль	41
4.9. Контрольные вопросы.....	42
4.10. Литература	42
5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ДПФ.....	43
5.1. Общие сведения.....	43

	3
5.2. Самоподготовка и самоконтроль	45
5.3. Контрольные вопросы.....	46
5.4. Литература	46
6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ	47
6.1. Общие сведения.....	47
6.2. Практические описания дискретных случайных процессов	48
6.3. Моделирование случайных процессов на ЭВМ	51
6.4. Самоподготовка и самоконтроль	52
6.5. Контрольные вопросы.....	53
6.6. Литература	53
7. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. КЕПСТРЫ	54
7.1. Общие сведения.....	54
7.2. Мультипликативные гомоморфные системы	55
7.3. Гомоморфные системы относительно свертки.....	56
7.4. Реализация характеристической системы D^*	57
7.5. Пример вычисления кепстра с отражением.....	58
7.6. Самоподготовка и самоконтроль	60
7.7. Контрольные вопросы.....	60
ТЕОРИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И АВТОМАТОВ	61
1. ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.....	62
1.1. Логические переменные и переключательные функции.....	62
1.2. Основные свойства переключательных функций	64
1.3. Способы задания переключательных функций.....	65
1.4. Функционально полные наборы (базисы) переключательных функций.....	66
1.5. Минимизация переключательных функций	67
1.6. Минимизация систем переключательных функций.....	68
1.7. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки.....	69
2. КОМБИНАЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА	70
2.1. Общие положения	70
2.2. Базовые интегральные схемы и их основные параметры.....	70
2.3. Типовые комбинационные устройства.....	72
2.4. Синтез комбинационных схем на мультилексорах и дешифраторах.....	76
2.5. Быстродействие КЦУ и эффект состязаний в них (“гонки”)	78
2.6. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки.....	78
3. ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТЫ	80
3.1. Основные понятия абстрактной теории цифровых конечных автоматов.....	80
3.2. Формы задания абстрактных конечных автоматов.....	81
3.3. Абстрактный синтез конечных автоматов	83
3.4. Структурный синтез конечных автоматов.....	87
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	90

Предисловие

Данное электронное издание является учебным пособием по дисциплине “Дискретная математика”, входящей в учебный план по специальности 210405 “Радиосвязь, радиовещание и телевидение”. Пособие содержит материал, являющийся базовым для цикла дисциплин, связанных с цифровой обработкой сигналов, являющейся приоритетной для современных систем связи.

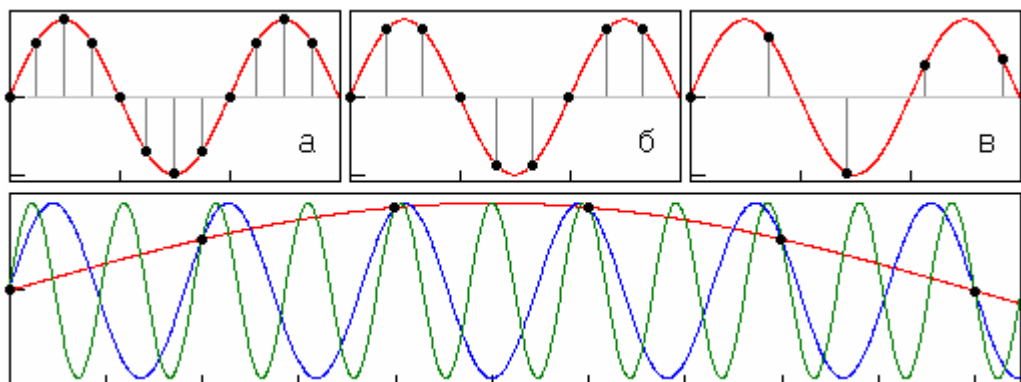
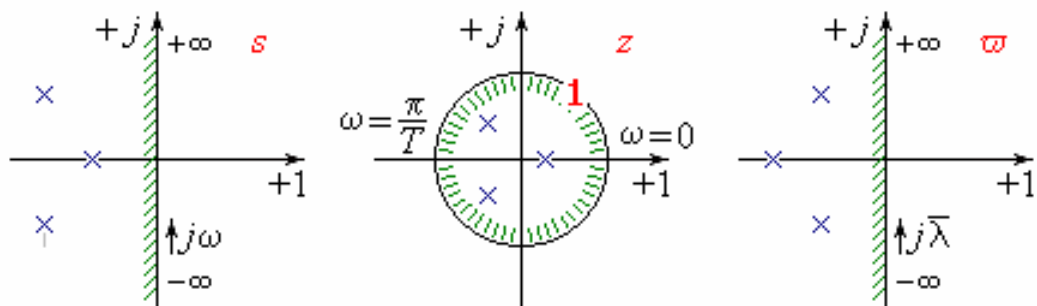
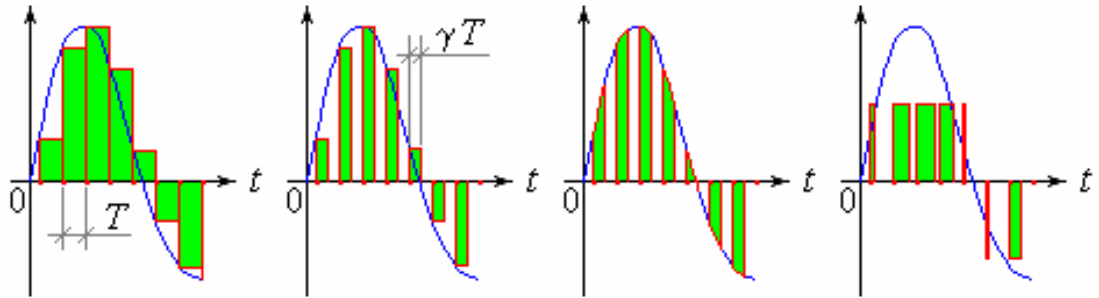
Пособие содержит две части. Первая посвящена теории дискретных сигналов и процедур. Изложены основы дискретизации сигналов, их описания во временных и частотных областях, а также и плоскостях комплексных переменных $p = \sigma + j\omega$ и $z = e^{pT}$. Представлена теория z-преобразования как основы анализа и синтеза цифровых устройств. Рассмотрены алгоритмы дискретного (а также быстрого) преобразования Фурье и спектральный анализ на их основе. Даны описания процедур дискретной свёртки и корреляции как предшествование к дискретной и цифровой фильтрации.

Вторая часть пособия отражает фрагменты теории переключательных функций и цифровых автоматов без памяти (комбинационные схемы) и с памятью (последовательные схемы).

Каждая схема теоретического курса сопровождается контрольными вопросами и заданиями, что позволяет повысить эффективность усвоения дисциплины студентами.

Пособие издано по материалам лекций, прочитанных автором в течение ряда лет на факультете радиофизики, электроники и медицинской техники Владимирского государственного университета, а также в университетском колледже Фалун/Борланге Швеции в 1994г.

ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ПРОЦЕДУР



1. ДИСКРЕТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ζ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Дискретные последовательности (ДП) – временные ряды – отображают процессы, подлежащие цифровой обработке.

1.1. Описание дискретной последовательности в дискретном времени

$$x(t) \rightarrow x_T(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \rightarrow \{x(n)\}, \quad (1.1)$$

где $x(n) = x(nT)$ – отсчет $x(t)$ в точке $t = nT$, $n = -\infty, \dots, 0, 1, 2, \dots, \infty$.

$$\text{ДП типа } x(n) = \begin{cases} x(n), n \in [0, N-1] \\ 0, n \notin [0, N-1] \end{cases} \text{ – ДП конечной длины.} \quad (1.2)$$

ДП является N -периодической, если удовлетворяет соотношению

$$\tilde{x}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n + pN), p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

В общем случае ДП является комплексной, т.е.

$$\dot{x}(n) = x_{\text{Re}}(n) + jx_{\text{Im}}(n) = |\dot{x}(n)| \exp[j \arg \dot{x}(n)], \quad (1.4)$$

$$|\dot{x}(n)| = \sqrt{x_{\text{Re}}^2(n) + x_{\text{Im}}^2(n)}, \arg \dot{x}(n) = \arctg[x_{\text{Im}}(n) / x_{\text{Re}}(n)]. \quad (1.5)$$

Энергия и мощность ДП соответственно равны:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |\dot{x}(n)|^2, P = E/N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2. \quad (1.6)$$

Две ДП ортогональны, если

$$E_{1,2} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = 0, \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2. \quad (1.7)$$

Произвольная ДП вычисляется по правилу

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k), \quad (1.8)$$

где $\delta(n - k) = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k \end{cases}$ – единичный импульс.

Как правило, ДП является результатом *дискретизации* (естественной или искусственной [7, 8, 10 – 13]) непрерывных процессов (сигналов) в радиосистемах. Так, в РЛС кругового обзора угловая информация вырабатывается с периодом сканирования пространства узким радиолучом, дальностная – с периодом излучения зондирующих импульсов. Процесс в пределах периода излучения

зондирующих импульсов подвергается искусственной дискретизации с шагом, выбираемым по определенному критерию. Искусственной дискретизации подвергаются сигналы абонентов в системах связи с временным распределением каналов.

Корректное восстановление непрерывного сигнала $x(t)$ по ДП $x(n)$ возможно, если период дискретизации $T < 1/2F_m$, где F_m – максимальная частота в спектре $x(t)$. В этом случае отсутствует эффект наложения спектров в дискретизированном сигнале. Длительность дискретизирующего импульса (сигнала импульсной несущей) $t_{ид} \ll 1/F_m$, чтобы спектр его был равномерен в полосе частот $x(t)$.

Следует заметить, что квантованный по амплитуде и кодированный дискретный сигнал называется **цифровым**.

1.2. Описание дискретной последовательности в комплексной плоскости p ($\sigma, j\omega$)

$$\text{Преобразование Лапласа ДП типа } x(n) = \begin{cases} x(n), n \geq 0, \\ 0, n < 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$L_{+1}\{x(nT)\} = X_T(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT} = \sum X(p \pm jm\Omega), m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

где $X(p) = \int_0^t x(t) \exp(-pt) dt$ – преобразование Лапласа непрерывного сигнала $x(t)$, из которого получена ДП; $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота дискретизации сигнала с периодом T .

Обратное преобразование Лапласа дискретизированного сигнала вычисляется по соотношению

$$L_{-1}\{X^*(p)\} = x(nT) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X^*(p) e^{pnT} dp. \quad (1.11)$$

Поскольку непрерывный сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^q a_k e^{p_k t} \xrightarrow{L_{+1}} X(p) = \sum_{k=1}^q a_k / (p - p_k), \quad (1.12)$$

где p_k – полюсы в плоскости p ; a_k – константы, его дискретизированный аналог $x^*(t) = T \sum x(nT) \delta(t - nT)$ в плоскости p отображается в виде

$$L_{+1}\{x(nT)\} = \sum_{k=1}^q a_k [1 - e^{(p_k - p)T}], p = p_k \pm jm\Omega, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

что представляет собой в плоскости p повторение вдоль оси $j\omega$ с периодом $\Omega = 2\pi/T$ конфигураций полюсов и нулей $X(p)$, отображающих непрерывный сигнал $x(t)$.

Таким образом, описание $p_k = \sigma_k + j(\omega_k \pm m\Omega)$ (пусть $\sigma_k = -2$, $\omega_k = \pi/4T$ p/c, $\Omega = 2\pi/T$ p/c) соответствует затухающему ($\sigma_k < 0$) гармоническому ($\omega_k = \pi/4T$ p/c) сигналу, дискретизированному с частотой $\Omega = 2\pi/T$ p/c (число отсчетов за период $N = (T_k/T) = (\Omega/\omega_k) = 8$).

1.3. Частотный образ дискретной последовательности $x(n)$ – спектр $X(e^{j\omega})$

Спектр дискретного сигнала (дискретной последовательности) вычисляется по правилу (1.8) при $\sigma=0$:

$$\dot{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{X}[j(\omega \pm m2\pi/T)], m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

и представляет собой непрерывную функцию (спектр $\dot{X}(j\omega)$ сигнала $x(t)$), повторяющуюся по оси частот с периодом $\Omega=2\pi/T$. В общем случае:

$$\dot{X}(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg \dot{X}(e^{j\omega})}, \quad (1.15)$$

$$|\dot{X}(e^{j\omega})| = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(e^{j\omega}) + X_{\text{Im}}^2(e^{j\omega})}, \quad (1.16)$$

$$\arg \dot{X}(e^{j\omega}) = \arctg[X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) / X_{\text{Re}}(e^{j\omega})], \quad (1.17)$$

$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cos(\omega n), \quad (1.18)$$

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = - \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \sin(\omega n). \quad (1.19)$$

Для исключения наложения периодических копий спектра $X(j\omega)$ при дискретизации $x(t)$ необходимо интервал дискретизации T выбрать по правилу $T \leq 1/2F_m$, где F_m – граничная частота в спектре сигнала $x(t)$.

1.4. Описание дискретной последовательности в Z-плоскости

Для дискретной последовательности $x(n)$, $n \geq 0$, справедливы преобразования:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, z = e^{pT}, p = \sigma + j\omega, \quad (1.20)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=1} X(z)z^{n-1} dz, \quad (1.21)$$

Расположение полюсов $X(z)$ несет информацию о характере ДП:

$$\dot{Z}_i = e^{p_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i T)}, |Z_i| = \exp(\sigma_i T), \arg Z_i = \varphi_i = \omega_i T + k2\pi, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Так, например, полюсы внутри круга единичного радиуса плоскости соответствуют затухающим сигналам ($e^{\sigma_i T} < 1, \sigma_i < 0$). Полюс на положительной действительной оси ($\arg z_i=0$) соответствует дискретизированной действительной экспоненте. Полюс на отрицательной действительной оси соответствует дискретизированному гармоническому сигналу с двумя отсчетами за период ($\omega_i T = +\pi, \omega_i = \pi/T = \Omega/2$). Сигнал с четырьмя отсчетами за период соответствует полюсу на мнимой положительной оси ($\omega_i T = \pi/2, \omega_i = \Omega/4$). По величине фазового

угла $\varphi_i = \omega_i T$ можно судить о числе отсчетов N за период T_i гармонического заполнения ДП:

$$N = 2\pi / \varphi_i = T_i / T. \quad (1.23)$$

Величина $Z^{-1} = e^{-pT}$ определяет задержку ДП на величину T .

1.5. Типовые задачи

Пример 1.

Определить выражение для единичной "ступеньки" через последовательность единичных импульсов.



Согласно (1.7) $1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(n-k)$, так как $x(k)=1$ при $n \in [0, \infty]$.



Пример 2.

Определить значения и построить графики $x_{\text{Re}}(n)$, $x_{\text{Im}}(n)$, $|\dot{x}(n)|$, $\arg \dot{x}(n)$ для дискретной последовательности $x(n) = \exp(p_0 n)$, заданной на интервале $[N_1, N_2]$ при $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 = 0$, $\omega_0 = \pi/4$, $N_1 = -3$, $N_2 = 2$.



См. рисунок 1. и таблицу 1.

$$\dot{x}(n) = e^{p_0 n} = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)n} = e^{\sigma_0 n} e^{j\omega_0 n} = e^{\sigma_0 n} (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n), \sigma_0 = 0, \omega_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_{\text{Re}}(n) = e^{\sigma_0 n} \cos \omega_0 n = \cos \frac{\pi}{4} n, x_{\text{Im}}(n) = e^{\sigma_0 n} \sin \omega_0 n = \sin \frac{\pi}{4} n,$$

$$|\dot{x}(n)| = \sqrt{x_{\text{Re}}^2(n) + x_{\text{Im}}^2(n)} = e^{\sigma_0 n} = 1, \arg \dot{x}(n) = \arctg \frac{x_{\text{Im}}(n)}{x_{\text{Re}}(n)} = \omega_0 n = \frac{\pi}{4} n.$$

Таблица 1.

Компоненты ДП	n					
	-3	-2	-1	0	1	2
$x_{\text{Im}}(n)$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
$x_{\text{Re}}(n)$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
$ \dot{x}(n) $	1	1	1	1	1	1
$\arg \dot{x}(n)$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$

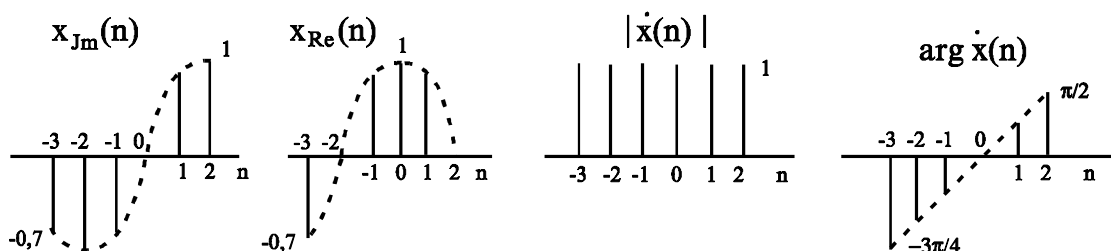


Рисунок 1.

Пример 3.

Определить характер и параметры сигнала с координатами полюсов в комплексной плоскости $p_k[-1, j(4\pi \pm m\pi/2 \cdot 10^{-3})]$, $m=0, 1, 2, \dots$

Так как $p_k = \sigma_k + j(\omega_k \pm m\Omega) = -1 + j(4\pi \pm m\pi / (2 \cdot 10^{-3}))$,
то $\sigma_k = -1/c$, $\omega_k = 2\pi/T_k = 4\pi p/c$, $\Omega = 2\pi/T = \pi / (2 \cdot 10^{-3})$, $\Omega/\omega_k = T_k/T = \pi / (2 \cdot 10^{-3}) / 4\pi = 125$.

$$x(nT) = e^{\sigma_k t} \sin \omega_k t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = e^{-1nT} \sin \frac{2\pi}{T_k} nT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad x(n) = e^{-n} \sin(2\pi n / 125).$$

Пример 4.

Определить предельное число каналов линии телефонной связи с временным разделением каналов и кодоимпульсной модуляцией при допустимой длительности тактового импульса $t_0 = 1$ мкс и погрешности квантования по уровню не хуже $\gamma_{кв} = 7\%$.

Так как полоса канала телефонной связи $\Delta F = 4$ кГц, допустимый период дискретизации $T < 1/2F_m = 1/2\Delta F_k = 125$ мкс. Погрешность $\gamma_{кв} = 0,0625$ реализуется системой КИМ с числом разрядов $n=4$, тогда предельное число каналов $N < \lceil T/nt_0 \rceil = \lceil 125/4 \rceil = 31$.

Пример 5.

Определить допустимую (для корректного восстановления непрерывного сигнала по ДП) частоту дискретизации F прямоугольного импульса длительностью $t_{и} = 10$ мс, если энергия его оценивается главным лепестком спектра и одним боковым. Определить допустимую длительность дискретизирующего импульса $t_{ид}$ и число отсчетов N .

В спектре прямоугольного импульса нули энергии приходятся на частоты $mf_0 = m/t_{и}$, $m=1, 2, 3, \dots$. Тогда граничная частота спектра, соответствующая величине $F_m = 2f_0 = 2/10^{-2} = 2 \cdot 10^2$ Гц, определяет период дискретизации $T < 1/2F_m = 1/2 \cdot 2 \cdot 10^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ с. Допустимая длительность дискретизирующего импульса $t_{ид} < 0,1/F_m = 0,1/2 \cdot 10^2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ с $= t_{и}/20$. $N = t_{и}/T = 10 \cdot 10^{-3} / 2,5 \cdot 10^{-3} = 4$.

Пример 6.

Вычислить спектр прямоугольного импульса с амплитудой $A=1$ длительностью $t_{и} = 500$ мкс, дискретизированный с частотой $F = 10$ кГц. Как изменится спектр, если изменить частоту дискретизации (длительность импульса) в два раза?

Заданный сигнал является ДП конечной длины:

$$x(n) = \begin{cases} A = 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & n < 0, n > N-1, \end{cases}$$

причем $N = t_{и}F = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 5$, $T < 1/F = 1/10^4 = 10^{-4}$ с.

Комплексный спектр дискретного прямоугольного импульса

$$\begin{aligned} \dot{X}(e^{j\omega}) &= X(p)|_{\sigma=j\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-pn}|_{p=j\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{-pn}|_{p=j\omega} = A(1-e^{pN})/(1-e^{-p})|_{p=j\omega} = \\ &= A(1-e^{-j\omega N})/(1-e^{-j\omega}) = A \frac{e^{-j\frac{1}{2}\omega N} (e^{j\frac{1}{2}\omega N} - e^{-j\frac{1}{2}\omega N})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega})} = Ae^{-j(\frac{\omega N}{2} - \frac{\omega}{2})} \frac{2j \sin \frac{\omega N}{2}}{2j \sin \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}, \end{aligned}$$

$$|\dot{X}(e^{j\omega})| = A |\sin(\omega N/2) / \sin(\omega/2)|,$$

так как $|e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}| = 1$, $\arg \dot{X}(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2}(N-1)$.

Анализ $|\dot{X}(e^{j\omega})|$ и $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$ и пример расчета при $N=5$ показывают, что спектр дискретизированного прямоугольного импульса является непрерывной функцией частоты ω с периодичностью $\Omega=2\pi/T (F=1/T)$, причем в точках $\omega_i=0, 2\pi, 4\pi, \dots$ модуль спектра $|\dot{X}(e^{j\omega})| = \lim A(\sin \omega N/2)/(\sin \omega/2) = AN = N$ в данной задаче, а в точках $\omega_i=i2\pi, i=1, 2, 3, \dots$ $|\dot{X}(e^{j\omega})|=0$. Аргумент $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$ является периодической с периодом $\Omega=2\pi/T$ дискретно-линейной функцией частоты, претерпевает скачки на величину π на частотах $\omega_i=i2\pi/N, i=1, 2, 3, \dots$ и изменяется в пределах $\pm\pi(1-1/N)$ (см. рис.1 из [5]).

При увеличении частоты дискретизации в два раза объем выборки увеличится до $2N$, нули спектра будут соответствовать частотам $\omega_i=i\pi/N$, т. е. лепестки спектра сузятся в два раза, а амплитуда и число их в два раза возрастет. Аналогично изменится спектр при увеличении t_n в два раза.

Пример 7.

Вычислить Z-преобразование ДП вида $x(n)=e^{pkn}$, $p_k=-1+j\pi, n \geq 0$. Определить координаты полюсов и нулей и период дискретизации сигнала. Записать аналитически компоненты ДП и нарисовать графики.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{pkn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{pk} z^{-1})^n = \frac{1 \cdot [(e^{pk} z^{-1})^n - 1]}{e^{pk} z^{-1} - 1} \approx \frac{1}{1 - e^{pk} z^{-1}} = \\ &= z / (z - e^{pk}) = z / (z - e^{-1+j\pi}) = z / (z - e^{-1} e^{j\pi}). \end{aligned}$$

Координата нуля: $z_{01}=0$, полюса: $z_1=e^{-1} e^{j\pi}=0.368e^{j\pi}$.

Поскольку $|z_1|=0.368 < 1$ и $\arg z_1=\varphi_1=\omega_1 T=\pi$, т.е. $\omega_1=\pi/T$, заданный сигнал содержит две квадратурные гармонические составляющие

$$x_{\text{Re}}(n)=0,368^n \cos(n\pi), \quad x_{\text{Im}}(n)=0,368^n \sin(n\pi),$$

дискретизированные двумя отсчетами за период $T_1=2\pi/\omega_1=2\pi/(\pi/T)=2T$ (рис. 2.).

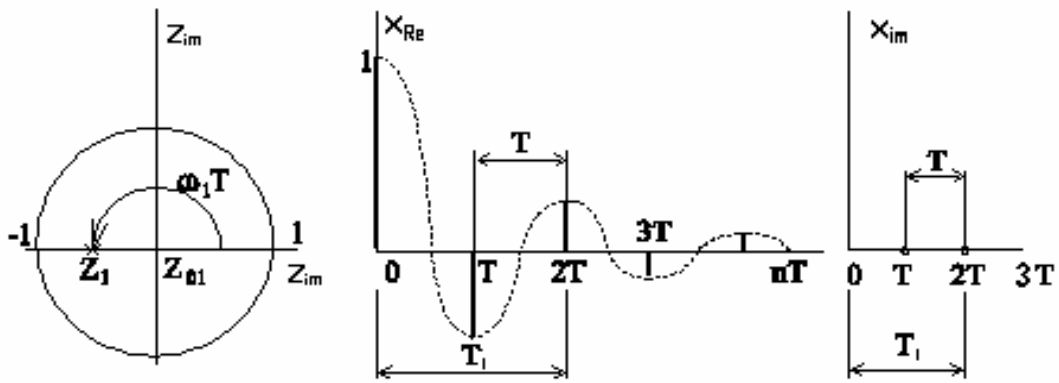


Рисунок 2.

Пример 8.

Найти Z-преобразование функции $x(t)=\cos(\omega_i t)+\sin(\omega_i t)$, дискретизированной четырьмя отсчетами за период $T_i=2\pi/\omega_i$.

После дискретизации заданный сигнал имеет вид

$x(nT)=\cos(\omega_i nT)+\sin(\omega_i nT)$, $\omega_i=2\pi/T_i=2\pi/NT$, где N - число отсчетов за период.

При $N=4$, $\omega_i=2\pi/NT=\pi/2T$. Тогда :

$$\begin{aligned} x(nT) &= \cos \omega_i nT + \sin \omega_i nT = \cos \frac{\pi}{2T} nT + \sin \frac{\pi}{2T} nT = \cos \frac{\pi}{2} n + \sin \frac{\pi}{2} n = \\ &= (e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}})/2 + (e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}})/2j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{z}{z - e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right] + \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\frac{\pi}{2}}} - \frac{z}{z - e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 + jz + z^2 - jz}{(z-j)(z+j)} + \frac{1}{2j} \frac{z^2 + jz - z^2 + jz}{(z-j)(z+j)} = \frac{z^2}{(z-j)(z+j)} + \frac{z}{(z-j)(z+j)} = \\ &= z(z+1)/(z-j)(z+j). \end{aligned}$$

Координаты нулей: $z_{01}=0$; $z_{02}=-1$, полюсов $z_i=j$, $z_2=-j$.

Пример 9.

Определить функцию ДП $x(n)$, если $X(z)=z/(z-a)$, $a=2$.

Отображению $X(z)=z/(z-a)$ соответствует

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \text{ и в заданном примере } x(n)=2^n=(e^{\ln 2})^n \approx e^{0.7n}.$$

Пример 10.

Найти обратное Z-преобразование и определить вид ДП, если $X(z)=0,25z/(z-1)(z-0,5)$.

Преобразуем $\frac{1}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z-0,5}$.

Домножив обе части на $(z-1)$ и положив $Z=1$, получим $a_1=2$.

Аналогично, домножив обе части на $(z-0,5)$, при $Z=0,5$ получим $a_2=-2$.

Тогда $X(z) = \frac{0,25z \cdot 2}{z-1} + \frac{0,25z \cdot (-2)}{z-0,5} = \frac{0,5z}{z-1} - \frac{0,5z}{z-0,5}$,

чему соответствует $x(n)=0,5-0,5 \cdot (0,5)^n = 0,5 \cdot (1-e^{-0,69n})$.



1.6. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 1.

Задание 2.

Определить значения и построить графики $x_{\text{Re}}(n)$, $x_{\text{Im}}(n)$, $|x(n)|$, $\arg x(n)$ для дискретной последовательности $x(n)$, заданной на интервале $[N_1, N_2]$, по данным таблицы

ДП	$x_i(n)$, $n \in [N_1, N_2]$	Номер варианта											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$e^{p_0 n}$	-3,2	-5,4	0,4	0,6	-5,0	-3,3	0,5	-1,4	0,4	-4,0	-2,2	-3,1
2	$a \cdot n$	0,5	-5,0	-3,3	-6,2	2,8	-2,6	-10,-5	0,7	-1,3	3,0	0,5	-5,-1
3	a^n	0,5	-2,4	0,4	4,8	3,7	-5,0	-3,5	2,6	2,6	-5,1	3,7	-2,4
	a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
	$p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$	-1+ +jπ	-0,5+ +jπ/4	2+ +jπ/2	-2- -jπ/2	-1+ +jπ/4	-1- -jπ/4	-0,5+ +jπ/8	-1- -jπ	-2+ +jπ/4	0,5+ +jπ/2	-1+ +jπ/4	1+ +jπ/8

Задание 3.

Определить вид и параметры сигнала с координатами полюсов из таблицы. Построить графики, отображающие сигнал $x_k(n)$ и $X_k(p)$.

Ном. вар.	1	2	3	4
p_k	$0, j(\pi \pm m\pi/10^{-1})$	$1, j(2\pi \pm m\pi/10^{-2})$	$-1, j(\pi/2 \pm m\pi/10^{-4})$	$0, j(2\pi \pm m\pi/10^{-3})$
Ном. вар.	5	6	7	8
p_k	$-1, j(\pi/4 \pm m\pi/2 \cdot 10^{-1})$	$-4, j(\pi \pm m\pi/10^{-2})$	$-2, j(\pi \pm m\pi/4 \cdot 10^{-3})$	$-3, j(\pi/2 \pm m\pi/2 \cdot 10^{-5})$
Ном. вар.	9	10	11	12
p_k	$0,5, j(\pi/8 \pm m\pi/10^{-4})$	$-1, j m\pi/2 \cdot 10^{-3}$	$-1, j(\pi/2 \pm m2\pi)$	$1, j(\pi/4 \pm m4\pi)$

Задание 4.

Определить предельное число каналов линии телефонной связи с временным разделением каналов, если допустимая длительность тактового импульса $t_{N\text{вар}} = 0,05_1; 0,1_2; 0,2_3; 0,5_4; 1_5; 2_6; 5_7; 10_8; 20_9; 30_{10}; 40_{11}; 50_{12}$ мкс, погрешность квантования по уровню не превышает $\gamma_{N\text{вар}}\% = 4_1; 2_2; 1_3, 0,5_4, 1_5, 2_{6-12}$. (Индекс – номер варианта).

Задание 5.

Определить допустимую (для корректного восстановления из ДП непрерывного сигнала) частоту дискретизации F прямоугольного импульса длительности $t_{\text{и}}$, если энергия его оценивается главным лепестком спектра и K боковыми. Определить допустимую длительность импульса дискретизации и число отсчетов N .

Номер варианта	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
$t_{\text{и}}, \text{мс}$	0.1	10	100	1000	0.1	10	100	1000
K	0	1	2	3	3	2	1	0

Задание 6.

Определить в общем виде и вычислить по данным таблицы спектр прямоугольного импульса с амплитудой A , длительностью $t_{\text{и}}$, дискретизированного с частотой F . Показать, как изменится спектр при изменении частоты дискретизации и длительности импульса. Построить графики $|\dot{X}(e^{j\omega})|$, $\arg \dot{X}(e^{j\omega})$.

Номер варианта	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
A, B	1	2	3	4	4	3	2	1
$t_{\text{и}}, \text{мс}$	1	1	0.5	1	2	3	2	3
$F, \text{кГц}$	10	5	10	3	5	5	2	2

Задание 7.

Вычислить Z-преобразования и отобразить в Z-плоскости и в явном виде следующие ДП: $x_1(n)=\exp(p_k n)$, $x_2(n)=a^n$, $x_3(n)=\cos(\omega n)$, $x_4(n)=\sin(\omega n)$. Значения параметров $p_k=\sigma_k+j\omega_k$, a , ω взять из таблицы.

ДП	$x_i(n)$	Номер варианта							
		1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
1	$\exp(p_k n)$, $p_k=$	$-0,5+j\pi/4$	$-1+j\pi/2$	$j\pi/4$	$-0,5+j\pi/2$	$-1+j\pi/4$	$0,5+j3\pi/2$	$1+j2\pi$	$-1+j\pi$
2	a^n , $a=$	-0,25	-0,5	-1	0	1	0,25	0,9	0,75
3	$\cos(\omega n)$, $\omega=$	$\pi/16$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\pi/32$	$\pi/16$	$\pi/4$
4	$\sin(\omega n)$, $\omega=$	$\pi/16$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\pi/32$	$\pi/4$	$\pi/8$

Задание 8.

Найти Z-преобразование гармонических дискретизированных функций $x_1(nT)=\sin(\omega_n T)$, $x_2(nT)=\cos(\omega_n T)$, если число отсчетов за период равно N (из таблицы). Нарисовать графики $x_{1,2}(nT)$ и $X_{1,2}(z)$.

Ном. вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	2	4	8	16	32	64	64	32	16	8	4	2
$x(nT)$	$\sin(\omega_n T)$						$\cos(\omega_n T)$					

Задание 9.

Определить функцию дискретной последовательности по виду Z-преобразования и построить графики $x(nT)$ и $X(z)$.

$X(z)$	Номер варианта							
	1, 9	2, 10	3, 11	4, 12	5, 13	6, 14	7, 15	8, 16
1) $z/(z-a)$, $a=$	0,5	0,7	1	1,5	-1	-2	-4	-8
2) $z/(z-e^{-j\omega_k})$, $\omega_k=$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	$\pi/8$	$\pi/16$
3) $z/(z-e^{p_k})$, $p_k=$	0,5	1	-0,5	$-1+j\pi$	$1+j\pi/2$	$-1-j\pi/2$	$0,5+j\pi$	$0,5-j2\pi$

Задание 10.

Найти обратное Z-преобразование и определить характер, если $X_{\text{вар}}(z)$ соответствует выражению в таблице.

Ном. вар.	1, 11	2, 12	3, 13	4, 14	5, 15
$X(z)$	$0,5z/(z-2)$	$0,5z/(z^2-14z+0,49)$	$z/(z-0,5)^2$	$1/(1-z^{-1})$	$(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$
Ном. вар.	6, 16	7, 17	8, 18	9, 19	10, 20
$X(z)$	$1/(1-0,3z^{-1})$	$1+z^{-1}$	$(1+z^{-1})^{-1}$	$z^2/(z-j)(z+j)$	$z/(z-j)(z+j)$

Нарисовать графики ДП $x_{\text{вар}}(n)$ и ее Z-образа $X_{\text{вар}}(z)$.

1.7. Контрольные вопросы

1. Как преобразовать совокупность случайных чисел $\{x(k)\}$ во временной ряд (дискретную последовательность)? Построить блок-схему алгоритма вычислений по выражению (1.8).

2. Дать на конкретном примере (по данным задания 2) определение комплексной ДП и ее квадратурным компонентам.

3. Что такое модуль и аргумент ДП?

4. Что такое энергия и мощность ДП?

5. Привести примеры (проиллюстрировать рисунками) искусственной и естественной дискретизации непрерывных процессов.

6. Каким образом отображаются сигналы в плоскости переменной $p=\sigma+j\omega$? Какую информацию о сигнале несет величина $p_i[\sigma_i, j(\omega_i \pm m\Omega)]$? Объяснить на примере конкретной ДП. Решить задачу из задания 3.

7. Что такое частотный образ дискретизированного сигнала? Какие компоненты содержит комплексный спектр? Решить задачу из задания 6.

8. Как отображаются дискретные сигналы в плоскости переменной $Z=e^{pT}$? Как связаны параметры полюса $z_i=e^{(\sigma_i+j\omega_i)T}$ с характером ДП? Решить задачи из заданий 7 - 10.

9. На примере типовой ДП показать связь ее временного, частотного, p - и z -образов.

1.8. Литература

[1, с.18 - 22, 36 - 44; 2, с.15 - 19, 25 - 28, 32 - 35, 39 - 50; 3, с.4-11; 4, с.7-10; 5. с.4-14; 8, с.11-18].

2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1. Основные свойства дискретного преобразования Фурье

При обработке информации на ЭВМ дискретизация процессов $x(t) \rightarrow x(n)$ проводится как по времени ($n=t/T=0, 1, 2, \dots, N-1$; N – число отсчетов сигнала с периодом T), так и по частоте ($K=\omega/\Omega_1=0, 1, 2, \dots, K-1$, K – число отсчетов по частоте с периодом Ω_1). Обычно $K=N$. В этом случае дискретный сигнал $x(n)$ и его спектр $X(k)$ описываются парой дискретного преобразования Фурье – прямого (ДПФ) и обратного (ОДПФ).

$$\text{ДПФ:} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1; \quad (2.1)$$

$$\text{ОДПФ:} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1; \quad (2.2)$$

где $W_N = \exp(-j2\pi/N)$. Величина N выбирается из условия $N=1/TF_1$, где $F_1 = \Omega_1/2\pi$ – дискретность спектра по частоте.

Вследствие периодичности оператора W_N^m с периодом N ($W_N^{m+pN} = W_N^m$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) коэффициенты ДПФ и ОДПФ также периодичны с периодом N .

Алгоритмы ДПФ и ОДПФ могут быть записаны в аналитической (2.1), (2.2), матричной (2.3), (2.4) и векторной (2.5) формах:

$$\text{ДПФ:} \quad \begin{pmatrix} W_N^{00} & W_N^{10} & \dots & W_N^{(N-1)0} \\ W_N^{01} & W_N^{11} & \dots & W_N^{(N-1)1} \\ W_N^{02} & W_N^{12} & \dots & W_N^{(N-1)2} \\ \dots & W_N^{nk} & \dots & \dots \\ W_N^{0(N-2)} & W_N^{1(N-2)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)} \\ W_N^{0(N-1)} & W_N^{1(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \dots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\text{ОДПФ:} \quad \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W_N^{-00} & W_N^{-01} & \dots & W_N^{-0(N-1)} \\ W_N^{-10} & W_N^{-11} & \dots & W_N^{-1(N-1)} \\ W_N^{-20} & W_N^{-21} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \dots & W_N^{-nk} & \dots & \dots \\ W_N^{-(N-2)0} & W_N^{-(N-2)1} & \dots & W_N^{-(N-2)(N-1)} \\ W_N^{-(N-1)0} & W_N^{-(N-1)1} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{x}_n W_{NN}^{nk}, \quad \mathbf{x}_n = \frac{1}{N} \mathbf{X}_k W_{NN}^{-nk}, \quad (2.5)$$

$$X_k = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T, \mathbf{x}(n) = [x(0), x(1), \dots, x(n-1)]^T,$$

а также отсчетами $X(z_k)$, $z_k = \exp(j2\pi/N)$, на единичной окружности Z -плоскости, равномерно расположенными с интервалом $\Omega_1 = 2\pi/N$

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(k). \quad (2.6)$$

Разновидности спектров ДПФ :

амплитудный спектр $x(n)$:

$$S_x(k) = |X(k)| = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(k) + X_{\text{Im}}^2(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$X_{\text{Re}}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N}nk, \quad X_{\text{Im}}(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N}nk,$$

фазовый спектр $x(n)$: $\psi_x(k) = \arctg[X_{\text{Im}}(k)/X_{\text{Re}}(k)]$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

Спектр мощности $x(n)$: $P_x(k) = |X(k)|^2$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

Амплитудный и спектр мощности инвариантны к сдвигу, а фазовый – к умножению на константу. В спектрах $S_x(k)$, $P_x(k)$ (четные функции) и $\psi_x(k)$ (нечетные функции) вычисляется $N/2$ независимых отсчетов для $k=0, 1, \dots, N/2$.

Процедура прямого ДПФ требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений на всем $k = [0, N-1]$ множестве частот. Поэтому реализация ДПФ на ЭВМ требует значительных вычислительных затрат, прогрессивно возрастающих с ростом N .

2.2. Быстрое преобразование Фурье

Практическое использование ДПФ стало возможным после разработки алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), являющихся эффективным способом вычисления ДПФ. Суть БПФ заключается в многократном разбиении исходной ДП $x(n)$ на четные и нечетные отсчеты и последовательном вычислении локальных БПФ (БПФ с прореживанием по времени – БПФВ) или вычислении четных и нечетных отсчетов спектра $X(k)$ (БПФ с прореживанием по частоте – БПФЧ).

Алгоритм БПФВ описан в [5] (тема 3). С процедурой БПФЧ можно ознакомиться по [1 – 4] или по конспекту лекций. Следует учесть, что для достижения естественного порядка $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$, БПФВ требует перестановки входных данных $x(n)$ по закону двоичной инверсии номеров отсчетов n (например, при $N=8$ место входного отсчета $x(3)$ занимает $x(6)$, так как $3=011$, $6=110$). Базовая операция БПФВ – двухточечное ДПФ "бабочка" – имеет вид рис. 3. и составляет основу первой ступени БПФВ.

Процедура БПФЧ сохраняет естественный порядок входных данных $x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$ при нумерации выходных отсчетов $X(k)$ по закону двоичной инверсии (например, при $N=8$ место $X(1)$ занимает $X(4)$, так как $1=001$, $4=100$). Базовая операция БПФЧ – двухточечное ДПФ – основа последней ступени БПФЧ (рис. 4.).

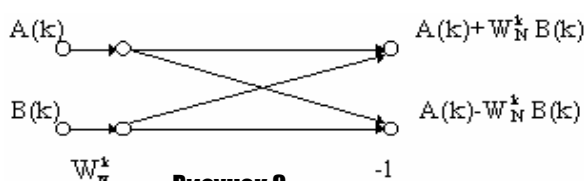


Рисунок 3.

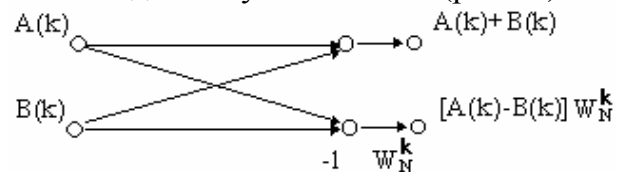
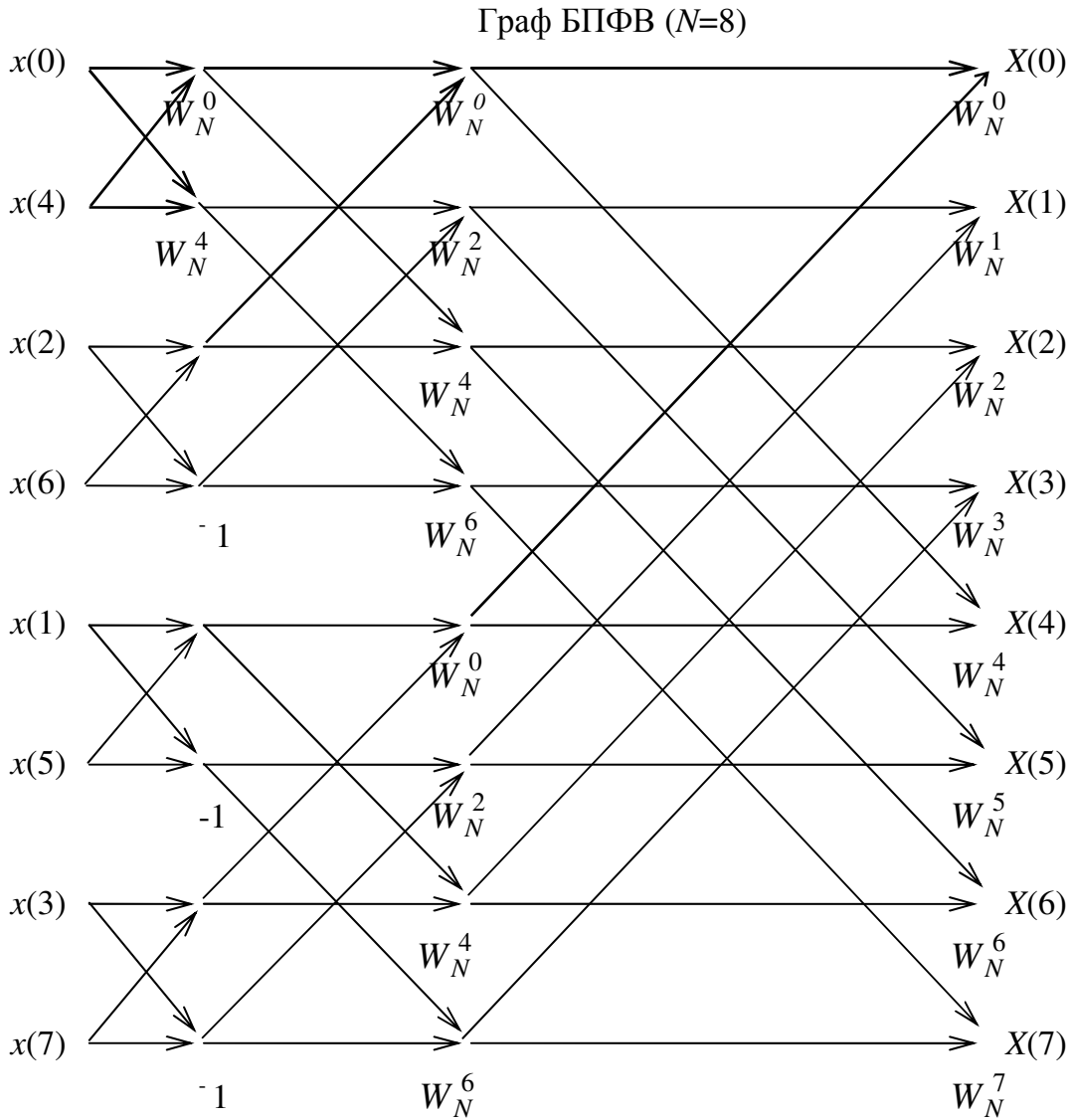


Рисунок 4.

На рисунках 5 и 6 представлены графы БПФВ и БПФЧ для $N=8$.



Алгоритм БПФ выполняется за $\log_2 N$ этапов, на каждом из которых требуется $N/2$ базовых операций. В итоге на выполнение БПФ требуется $(N/2)\log_2 N$ комплексных умножений (более трудоемких, чем комплексные сложения, и определяющих длительность БПФ в целом), что обуславливает выигрыш БПФ по сравнению с ДПФ в $\gamma = N^2 / ((N/2)\log_2 N) = 2N / \log_2 N$ раз.

Прикладные программы спектральных расчетов на ЭВМ строятся на базе алгоритмов БПФ.

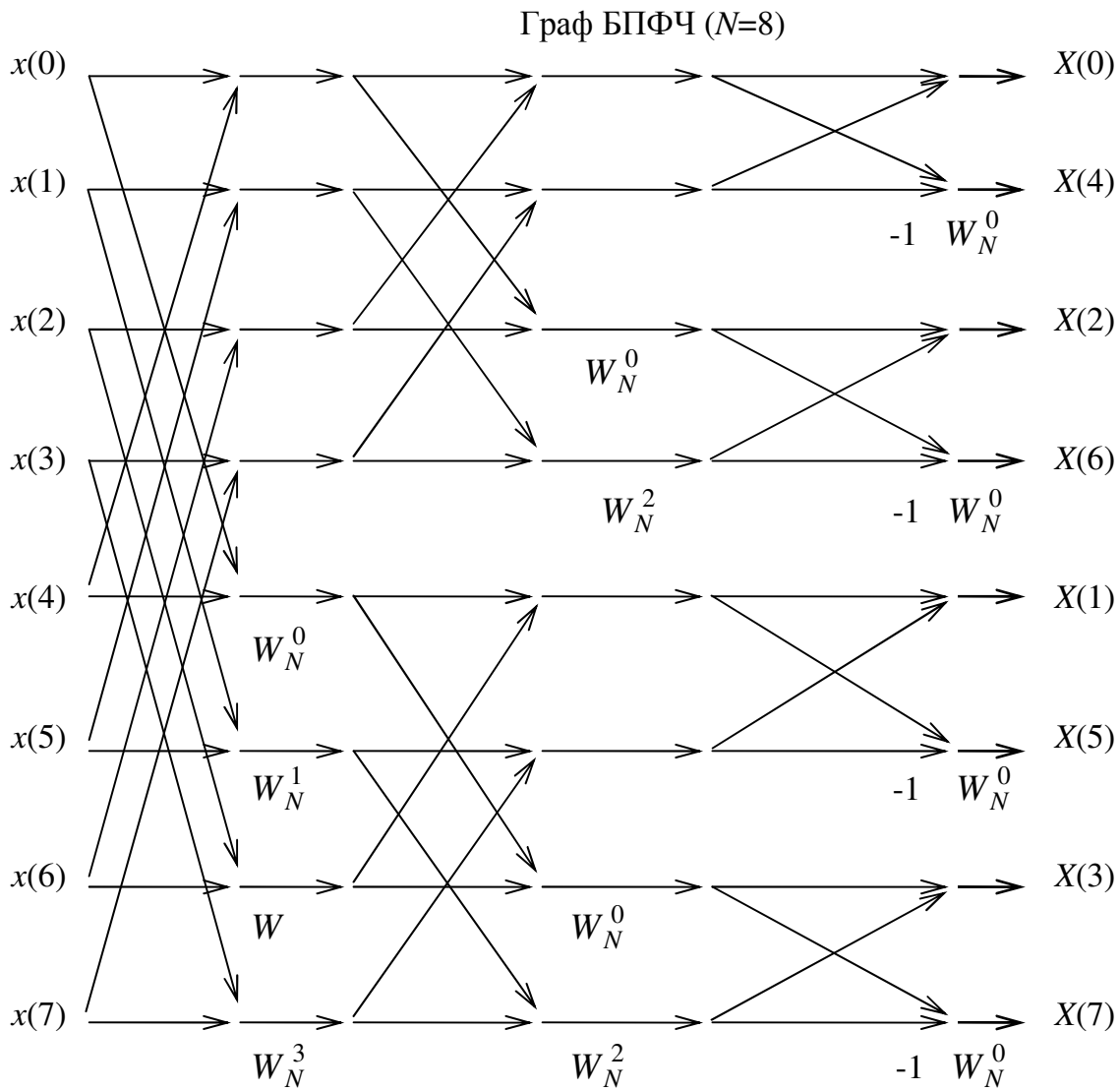


Рисунок 6.

2.3. Типовые задачи

Пример 1.

Доказать, что ОДПФ можно вычислить с помощью ДПФ.



Для произвольного k с учетом $W_N^{Nk} = 1$ ДПФ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= x(0)W_N^{0k} + x(1)W_N^{1k} + x(2)W_N^{2k} + \dots + x(N-2)W_N^{(N-2)k} + x(N-1)W_N^{(N-1)k} = \\
 &= x(N-1)W_N^{Nk} W_N^{-k} + x(N-2)W_N^{Nk} W_N^{-2k} + \dots + x(1)W_N^{1k} W_N^{-Nk} + x(0)W_N^{0k} = \\
 &= x(0)W_N^{0k} + x(N-1)W_N^{-1k} + x(N-2)W_N^{-2k} + \dots + x(1)W_N^{-(N-1)k}.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для вычисления ОДПФ с помощью оператора ДПФ $A(k) = A(k) + a(n)W_N^{nk}$ необходимо входные данные $a(n)=X(k)$ переставить местами – $X(1)$ с $X(N-1)$, $X(2)$ с $X(N-2)$, ..., т. е. $a(n)=X(N-k), k=1, 2, \dots, N-1$, и полученные результаты разделить на N , так как оператор ДПФ вычисляет

$A(k)=Nx(n)$. При вычислении ДПФ $a(n)=x(n)$, $n=0, 1, \dots, N-1$; $A(k)=X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

Пример 2.

Записать алгоритм ДПФ для ДП $x(n)$, $n[0, N-1]$, $N=4N_{\text{вар}}$ в аналитической, матричной и Z-формах.

1. Для $N_{\text{вар}}=12$ примем $N=48$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{47} x(n)W_{48}^{nk}, \quad k = [0, 47], W_{48} = \exp(-j2\pi/48).$$

$$2. \begin{array}{l} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(47) \end{array} = \begin{array}{l} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(47) \end{array} \cdot \begin{array}{l} W_{48}^{00} W_{48}^{10} \dots W_{48}^{460} W_{48}^{470} \\ W_{48}^{01} W_{48}^{11} \dots W_{48}^{461} W_{48}^{471} \\ W_{48}^{02} W_{48}^{12} \dots W_{48}^{462} W_{48}^{472} \\ \vdots \\ W_{48}^{047} W_{48}^{147} \dots W_{48}^{4647} W_{48}^{4747} \end{array}$$

или $X_k = \mathbf{x}_n \mathbf{W}_{48,48}^{nk}$, $n \in [0, 47]$, $k = [0, 47]$, $N = 48$.

$$3. X(z_k) = \sum_{n=0}^{48-1} x(n)z^{-n} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{48}k}\right) = \sum_{n=0}^{47} x(n)e^{-j\frac{\pi}{24}nk} = X(k),$$

т.е. значения Z-преобразования в $k=48$ точках, равномерно расположенных на единичной окружности с интервалами $\varphi_1=2\pi/48=\pi/24$, что соответствует отсчетам $X(k)$ с дискретностью по оси частот $\Omega_1=\varphi_1/T=2\pi/48T=\pi/24T$.

Пример 3.

Найти спектр $X(k)$ последовательности $x(n)$ в виде четырех единичных отсчетов. Вычислить ОДПФ.

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 4,$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 0,$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 0,$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 0,$$

$$x(0) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j\frac{2\pi}{4}0k} = \frac{1}{4} [X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = 1,$$

$$x(1) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j\frac{2\pi}{4}1k} = \frac{1}{4} [X(0) + jX(1) - X(2) - jX(3)] = 1,$$

$$x(2) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j\frac{2\pi}{4}2k} = \frac{1}{4} [X(0) - X(1) + X(2) - X(3)] = 1,$$

$$x(3) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j\frac{2\pi}{4}3k} = \frac{1}{4} [X(0) - jX(1) - X(2) + jX(3)] = 1.$$

Пример 4.

Определить амплитудный и фазовый спектры последовательности $x(n) = 1, 1, 1, 1$.

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 4, S_x(0) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(0) + X_{\text{Im}}^2(0)} = 4, \psi_x(0) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(0)}{X_{\text{Re}}(0)} = 0;$$

$$X(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 0, S_x(1) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(1) + X_{\text{Im}}^2(1)} = 0, \psi_x(1) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(1)}{X_{\text{Re}}(1)} = ?;$$

$$X(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 0, S_x(2) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(2) + X_{\text{Im}}^2(2)} = 0, \psi_x(2) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(2)}{X_{\text{Re}}(2)} = ?;$$

$$X(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 0, S_x(3) = \sqrt{X_{\text{Re}}^2(3) + X_{\text{Im}}^2(3)} = 0, \psi_x(3) = \arctg \frac{X_{\text{Im}}(3)}{X_{\text{Re}}(3)} = ?$$

Отсчеты $\psi_x(k)$, $k=1, 2, 3$ не определены в силу неопределенности $\arctg(0/0)$.

Пример 5.

Построить графы БПФВ и БПФЧ для $N=8$.

Консультация по составлению графов БПФ представлена в [1, 2, 4, 7].

Пример 6.

Определить длительность вычислений ДПФ и БПФ при $N=2^{N_{\text{вар}}}$, $N_{\text{вар}}=3$, если процессор ЭВМ выполняет операцию комплексного умножения за $\Delta_{\text{умн}}=10\text{мс}$, комплексного сложения за $\Delta_{\text{сл}}=10\text{ мкс}$. Определить выигрыш от использования БПФ.

Для $N_{\text{вар}}=3$ имеем $N=8$. Длительность ДПФ и БПФ определяется наиболее длительной операцией умножения. Поэтому

$$T_{\text{ДПФ}} = N^2 \Delta_{\text{умн}} = 640 \text{ мс}, T_{\text{БПФ}} = \frac{N}{2} \log_2 N \cdot \Delta_{\text{умн}} = 120 \text{ мс}, \gamma = \frac{T_{\text{БПФ}}}{T_{\text{ДПФ}}} = 5,3.$$

2.4. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 2. Построить блок-схему дуального алгоритма ДПФ – ОДПФ для $N=4N_{\text{вар}}$. Описать организацию входных и выходных данных.

Задание 2.

Записать алгоритм ДПФ в аналитической, матричной и Z-формах для последовательности $x(n)$, $n \in [0, N-1]$, $N=4N_{\text{вар}}$. ($N_{\text{вар}}$ – номер варианта).

Задание 3.

Найти в форме ДПФ спектр последовательности единичных импульсов при $N=3N_{\text{вар}}$ при $N_{\text{вар}} < 6$ и $N=N_{\text{вар}}$ при $N_{\text{вар}} \geq 6$. ($N_{\text{вар}}$ – номер варианта). Вычислить ОДПФ.

Задание 4.

Вычислить ДПФ, определить амплитудный, фазовый спектры последовательности $x(n)$ с номером своего варианта:

№	$x(n)$	№	$x(n)$	№	$x(n)$	№	$x(n)$
1	3,4,2,1	5	1,2,2,1	9	2,1,1,2	13	2,2,2,2
2	1,2,3,3	6	4,4,4,4	10	1,0,0,1	14	3,2,1,0
3	$j, -j, j, -j$	7	$-j, -j, j, j$	11	1,1,0,1	15	1,2,3,4
4	1, j, j, -1	8	j, j, j, j	12	1,1,1,0	16	4,3,2,1

Задание 5.

Построить и сравнить графы БПФВ и БПФЧ для $N=4N_{\text{вар}} \pm$ дополнение до $2^i > 4$.

Задание 6.

Определить длительность вычислений ДПФ и БПФ при $N=2^{N_{\text{вар}}}$ ($N_{\text{вар}}$ – номер варианта), если процессор ЭВМ выполняет операцию комплексного умножения за $\Delta_{\text{умн}}=10$ мс, комплексного сложения за $\Delta_{\text{сл}}=10$ мкс. Определить выигрыш от использования БПФ. Построить график выигрыша затрат при использовании БПФ различной размерности ($2 < N \leq 4096$).

Задание 7.

Определить период дискретизации по частоте для ДПФ при $N=16, 32, 64$; $T=0,5$ мс.

2.5. Контрольные вопросы

1. Дать определения процедурам ДПФ и ОДПФ.
2. Определить значения оператора W_N^{nk} при $nk=pN$, $(2p+1)N/2$, $(2p+1)N/4$, $(4p+3)N/4$, $p=0, 1, 2, \dots$.
3. Чем отличается ДПФ от спектра дискретизированного сигнала?
4. Описать разновидности спектров ДПФ и их свойства на примере спектров в задаче С.2.4.
5. В чем суть алгоритмов БПФВ и БПФЧ? Каковы базовые операции и способы организации входных и выходных данных?
6. Доказать преимущество процедур БПФ перед ДПФ.

2.6. Литература

[1, с.62 – 72; 2, с.67 – 84; 3, с.11 – 16; 4, с.26 – 42; 5, с.14 – 20].

3. ПРОЦЕДУРЫ СВЁРТКИ И КОРРЕЛЯЦИИ

Процедуры свертки лежат в основе цифровой фильтрации, а вычисления корреляций и автокорреляций используются при анализе регулярных и случайных процессов.

3.1. Дискретная свёртка

Дискретная свертка является аналогом непрерывной процедуры во временной области $g(t) = \int_0^t x(t) y(t - \tau) d\tau$ для процессов $x(t)$, $y(t)$. Различают периодическую и линейную дискретные свертки.

Периодическая свертка (ПС) двух N -периодических ДП $x(n)=x(n \bmod N)$ и $y(n)=y(n \bmod N)$ определяется соотношением

$$g(n) = x(n) \otimes y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m); \\ \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) y(m). \end{cases} \quad (3.1)$$

Компоненты свертки могут быть представлены аналитически, в виде матрицы и в векторной форме.

Аналитическая запись ПС ($N=4$):

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{m=0}^3 x(m) y(0-m) = x(0)y(0) + x(1)y(-1) + x(2)y(-2) + x(3)y(-3) = \\ &= x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1), \\ g(1) &= \sum_{m=0}^3 x(m) y(1-m) = x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(-1) + x(3)y(-2) = \\ &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2), \\ g(2) &= \sum_{m=0}^3 x(m) y(2-m) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(-1) = \\ &= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3), \\ g(3) &= \sum_{m=0}^3 x(m) y(3-m) = x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

матричная запись ПС ($N=4$):

$$\begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(0) \\ y(3) \\ y(2) \\ y(1) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

векторная форма ПС:

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{x}_m \mathbf{y}_{n-m}, \mathbf{g}(n) = [g(0), g(1), \dots, g(N-1)]^T, \mathbf{y}_{n-m} = [y(0), y(N-1), \dots, y(1)]^T. \quad (3.4)$$

ПС периодична с периодом N , т.е. $g(n + pN) = g(n)$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и имеет всегда не более N ненулевых отсчетов.

Для получения содержательных результатов при вычислении ПС размерность свертываемых ДП может быть увеличена вдвое дополнением до $2N$ нулевыми отсчетами. Так, при свертывании двух N -периодических дискретных импульсов ПС также имеет вид прямоугольного импульса. При дополнении ДП до $2N$ нулевыми отсчетами ПС прямоугольных импульсов приобретает вид треугольного импульса. ПС двух ДП $x(n)$ и $y(n)$ может быть вычислена с помощью ДПФ (ОДПФ):

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k)W_N^{-nk}, \quad (3.5)$$

$$\text{где } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk}, G(k) = X(k)Y(k).$$

При реализации ДПФ в виде БПФ процедура (3.5) носит название **быстрой свертки в частотной области**.

Линейной (апериодической) сверткой (ЛС) двух ДП произвольных длин N_1, N_2 $x(n) = x(0), x(1), \dots, x(N_1-1)$; $y(n) = y(0), y(1), \dots, y(N_2-1)$ называется ДП $g(n)$, определяемая в виде

$$g(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^n x(m)y(n-m) \\ \sum_{m=0}^n x(n-m)y(m) \end{cases} = x(n) \otimes y(n). \quad (3.6)$$

В ЛС, в отличие от ПС, верхний предел суммирования n (а не $N-1$). Кроме того, в ПС при некоторых n отсчеты $x(n)$ или $y(n)$ умножаются на "нулевые" отсчеты. ЛС имеет не более $L = N_1 + N_2 - 1$ отсчетов.

ЛС может быть вычислена дополнением свертываемых ДП "нулевыми" отсчетами до одинаковой длины L и использованием правил вычисления ПС, в том числе и алгоритма быстрой свертки. Так, две ДП: $\{x(n)\}, n \in [0, N_1 - 1]$; $y(n), n \in [0, N_2 - 1]$ разной длины N_1 и N_2 преобразуются в новые ДП длины L :

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n), 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ 0, N_1 < n \leq L - 1, \end{cases} \quad \tilde{y}(n) = \begin{cases} y(n), 0 \leq n \leq N_2 - 1, \\ 0, N_2 < n \leq L - 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Так как ДП $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n \bmod L)$ и $\tilde{y}(n) = \tilde{y}(n \bmod L)$ периодичны с периодом L , находим ПС:

$$\tilde{g}(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m) \\ \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(n-m)\tilde{y}(m) \end{cases} = g(n). \quad (3.8)$$

Используя процедуры ДПФ (БПФ), можно вычислить $g(n)$ по схеме:

$$\begin{array}{l} \{\tilde{x}(n)\}_L \xrightarrow{\text{ДПФ}} \tilde{X}(k) \\ \{\tilde{y}(n)\}_L \xrightarrow{\text{ДПФ}} \tilde{Y}(k) \end{array} \rightarrow \otimes \rightarrow \tilde{G}(k) = \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k) \xrightarrow{\text{ОДПФ}} \{\tilde{g}(n)\} = \{g(n)\}. \quad (3.9)$$

3.2. Процедуры корреляции и энергетические спектры

Автокорреляционная функция (АКФ) N -периодической ДП $x(n), n \in [0, N-1]$

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)x(n+m), n \in [0, N-1] \quad (3.10)$$

является дискретным эквивалентом АКФ непрерывных процессов и характеризует степень связи между отдельными отсчетами ДП.

АКФ может быть представлена в матричной (3.11) и векторной (3.12) формах. Так, при $N=4$:

матричная форма:

$$\begin{array}{l} R_{xx}(0) \\ R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ R_{xx}(3) \end{array} = \frac{1}{4} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(3) & x(0) & x(1) & x(2) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(0) \end{array} \right| = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{c} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{array} \right| \end{array}, \quad (3.11)$$

векторная форма:

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{N} \mathbf{x}_N \mathbf{x}_N^T, \mathbf{x}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T. \quad (3.12)$$

Из (3.10) и (3.11) видно, что при вычислении АКФ последовательность $x(n+m)$ не реверсируется, что отличает корреляцию от свертки.

Энергетический спектр (ЭС) ДП определяется как ДПФ от АКФ:

$$P_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{xx}(n) W_N^{nk} = X(k) X^*(k) = |X(k)|^2, k \in [0, N-1] \quad (3.13)$$

Следует учесть, что (3.13) является точным выражением для ЭС лишь для N -периодической ДП. При вычислении ЭС для аперидических случайных процессов по отдельным реализациям требуется усреднение промежуточных вычислений по совокупности реализаций.

ОДПФ от $P_{xx}(k)$ определяет АКФ:

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{xx}(k) W_N^{-nk}, n \in [0, N-1]. \quad (3.14)$$

Для двух N -периодических ДП $x(n)$ и $y(n)$ вычисляются **взаимный энергетический спектр (ВЭС)**:

$$P_{xy}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{xy}(n) W_N^{nk} = X(k) Y^*(k) = X^*(k) Y(k), k \in [0, N-1] \quad (3.15)$$

и **взаимная корреляционная функция (ВКФ)**:

$$R_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_{xy}(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y^*(n+m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(n+m) y(m). \quad (3.16)$$

3.3. Типовые задачи

Пример 1.

Вычислить и записать аналитически и в виде матрицы компоненты ПС для периодических ДП $x(n)=3,4,2,1$ и $y(n)=j,-j,j,j$. Проверить результат вычислением быстрой свертки.



1)

$$\begin{aligned} g(0) &= x(0)y(0) + x(1)y(3) + x(2)y(2) + x(3)y(1) = 3j + 4j + 2j - 1j = 8j; \\ g(1) &= x(0)y(1) + x(1)y(0) + x(2)y(3) + x(3)y(2) = -3j + 4j + 2j + 1j = 4j; \\ g(2) &= x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) + x(3)y(3) = 3j - 4j + 2j + 1j = 2j; \\ g(3) &= x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) = 3j + 4j - 2j + 1j = 6j. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 8j \\ 4j \\ 2j \\ 6j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j \\ j \\ j \\ -j \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 3 + 4 + 2 + 1 = 10; \\ X(1) &= x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) = 3 - 4j - 2 + j = 1 - j3; \\ X(2) &= x(0) - x(1) + x(2) - x(3) = 3 - 4 + 2 - 1 = 0; \\ X(3) &= x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) = 3 + 4j - 2 - j = 1 + j3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(0) &= y(0) + y(1) + y(2) + y(3) = j - j + j + j = 2j; \\ Y(1) &= y(0) - jy(1) - y(2) + jy(3) = j - 1 - j - 1 = -2; \\ Y(2) &= y(0) - y(1) + y(2) - y(3) = j + j + j - j = 2j; \\ Y(3) &= y(0) + jy(1) - y(2) - jy(3) = j + 1 - j + 1 = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(0) &= X(0)Y(0) = 10 \cdot 2j = 20j; \\ G(1) &= X(1)Y(1) = (1 - j3)(-2) = -2 + j6; \\ G(2) &= X(2)Y(2) = 0 \cdot 2j = 0; \\ G(3) &= X(3)Y(3) = (1 + j3) \cdot 2 = 2 + j6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(0) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-0k} = \frac{1}{4}[G(0) + G(1) + G(2) + G(3)] = \\
&= \frac{1}{4}[20j + (-2 + j6) + 0 + (2 + j6)] = 8j; \\
g(1) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-1k} = \frac{1}{4}[G(0) + jG(1) - G(2) - jG(3)] = \\
&= \frac{1}{4}[20j + (-2 + j6) - 0 - j(2 + j6)] = 4j; \\
g(2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-2k} = \frac{1}{4}[G(0) - G(1) + G(2) - G(3)] = \\
&= \frac{1}{4}[20j - (-2 + j6) + 0 - (2 + j6)] = 2j; \\
g(3) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 G(k)W_4^{-3k} = \frac{1}{4}[G(0) - jG(1) - G(2) + jG(3)] = \\
&= \frac{1}{4}[20j - j(-2 + j6) - 0 + j(2 + j6)] = 6j.
\end{aligned}$$

Пример 2.

Вычислить значения ЛС для двух ДП: $x(n)=3,4,2$; $y(n)=j,j$.

$$\begin{aligned}
g(0) &= \sum_{m=0}^0 x(m)y(0-m) = x(0)y(0) = 3j; \\
g(1) &= \sum_{m=0}^1 x(m)y(1-m) = x(0)y(1) + x(1)y(0) = -3j + 4j = j; \\
g(2) &= \sum_{m=0}^2 x(m)y(2-m) = x(0)y(2) + x(1)y(1) + x(2)y(0) = 0 - 4j + 2j = -2j; \\
g(3) &= \sum_{m=0}^3 x(m)y(3-m) = x(0)y(3) + x(1)y(2) + x(2)y(1) + x(3)y(0) = \\
&= 0 + 0 - 2j + 0 = -2j.
\end{aligned}$$

Пример 3.

Вычислить АКФ и ЭС для $x(n)=4,3,2,1$, ВКФ и ВЭС для $x(n)=3,4,2,1$ и $y(n)=j,j,j,j$. Сравнить с результатами вычисления ПС.

Автокорреляционная функция $R_{xx}(n)$, $n=0,1,2,3$:

$$\begin{aligned}
R_{xx}(0) &= \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(0+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(0) + x(1)x(1) + x(2)x(2) + x(3)x(3)] = \\
&= \frac{1}{4}[4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1] = 7,5;
\end{aligned}$$

$$R_{xx}(1) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(1+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(1) + x(1)x(2) + x(2)x(3) + x(3)x(0)] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4] = 6;$$

$$R_{xx}(2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(2+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(2) + x(1)x(3) + x(2)x(0) + x(3)x(1)] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3] = 5,5;$$

$$R_{xx}(3) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)x(3+m) = \frac{1}{4}[x(0)x(3) + x(1)x(0) + x(2)x(1) + x(3)x(2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2] = 6.$$

Энергетический спектр $P_{xx}(k)$, $k=0,1,2,3$:

$$P_{xx}(0) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = R_{xx}(0) + R_{xx}(1) + R_{xx}(2) + R_{xx}(3) = 7,5 + 6 + 5,5 + 6 = 25;$$

$$P_{xx}(1) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = R_{xx}(0) - jR_{xx}(1) - R_{xx}(2) + jR_{xx}(3) = 7,5 - j6 - 5,5 + j6 = 2;$$

$$P_{xx}(2) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = R_{xx}(0) - R_{xx}(1) + R_{xx}(2) - R_{xx}(3) = 7,5 - 6 + 5,5 - 6 = 1;$$

$$P_{xx}(3) = \sum_{n=0}^3 R_{xx}(n)e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = R_{xx}(0) + jR_{xx}(1) - R_{xx}(2) - jR_{xx}(3) = 7,5 + j6 - 5,5 - j6 = 2.$$

Взаимнокорреляционная функция $R_{xy}(n)$, $n=0,1,2,3$:

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(0+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(0) + x(1)y(1) + x(2)y(2) + x(3)y(3)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j - 4j + 2j + j] = 0,5j;$$

$$R_{xy}(1) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(1+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(1) + x(1)y(2) + x(2)y(3) + x(3)y(0)] =$$

$$= \frac{1}{4}[-3j + 4j + 2j + j] = 1j;$$

$$R_{xy}(2) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(2+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(2) + x(1)y(3) + x(2)y(0) + x(3)y(1)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j + 4j + 2j - 1j] = 2j;$$

$$R_{xy}(3) = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 x(m)y(3+m) = \frac{1}{4}[x(0)y(3) + x(1)y(0) + x(2)y(1) + x(3)y(2)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3j + 4j - 2j + j] = 1,5j.$$

Взаимный энергетический спектр $P_{xy}(k)$, $k=0,1,2,3$:

$$P_{xy}(0) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n0} = R_{xy}(0) + R_{xy}(1) + R_{xy}(2) + R_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j + 1j + 2j + 1,5j = 5j;$$

$$P_{xy}(1) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n1} = R_{xy}(0) - jR_{xy}(1) - R_{xy}(2) + jR_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j + 1 - 2j - 1,5 = -0,5 - 1,5j;$$

$$P_{xy}(2) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n2} = R_{xy}(0) - R_{xy}(1) + R_{xy}(2) - R_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j - 1j + 2j - 1,5j = 0;$$

$$P_{xy}(3) = \sum_{n=0}^3 R_{xy}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n3} = R_{xy}(0) + jR_{xy}(1) - R_{xy}(2) - jR_{xy}(3) =$$

$$= 0,5j - 1 - 2j + 1,5 = 0,5 - 1,5j.$$



3.4. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 3.

Задание 2.

Вычислить и записать аналитически и в виде матрицы компоненты ПС для периодических ДП $x(n)$ и $y(n)$. Проверить результат вычислением быстрой свертки.

Номер вар.	1	2	3	4	5
$x(n)$	3,4,2,1	1,2,3,4	1,1,1,1	0,2,2,0	2,1,1,2
$y(n)$	1,2,3,4	1,1,1,1	3,4,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1
Номер вар.	6	7	8	9	10
$x(n)$	1,2,2,1	-2,1,1,-2	0,1,1,0	1,0,0,1	-2,0,0,-2
$y(n)$	1,2,3,4	4,3,2,1	1,2,3,4	2,1,1,2	1,2,2,1

Построить графики $x(n)$, $y(n)$, $g(n)$ в едином временном масштабе.

Задание 3.

Вычислить значения ЛС для ДП $x(n)$ и $y(n)$.

Номер вар.	1	2	3	4	5
$x(n)$	3,4,2	1,2,3	$j,j,1$	1,2,2	2,1,1
$y(n)$	1,2	$j,-j$	$1,j$	2,1	1,2
Номер вар.	6	7	8	9	10
$x(n)$	j,j,j	$-j,-j,-j$	1,1,1	$1,j,j$	$-j,1,1$
$y(n)$	1,2	4,3	1,2	2,1	1,2

Задание 4.

Вычислить АКФ, ЭС для $x(n)$ и ВКФ, ВЭС для $x(n)$, $y(n)$ по данным задачи из задания 2. Сравнить с результатами вычисления ПС. Построить графики $x(n)$, АКФ и ЭС в едином временном масштабе.

3.5. Контрольные вопросы

1. Чем различаются периодическая и линейная свертки двух ДП? Пояснить на примере свертки N -периодической и M -периодической ДП ($M < N$).
2. Для чего вычисляется $2N$ -периодическая свертка? Как превратить N -периодическую ДП в $2N$ -периодическую? Показать на примере ПС двух прямоугольных импульсов при $N = N_{\text{вар}} \pm 4$ ($N_{\text{вар}}$ – номер варианта).
3. Как вычислить ПС и ЛС с помощью ДПФ (БПФ)?
4. Пояснить на примере сущность процедуры быстрой свертки в частотной области.
5. Что характеризует функция дискретной автокорреляции (взаимной)? Пояснить способы записи АКФ.
6. В чем отличие процедур корреляции и свертки?
7. Как вычисляется энергетический спектр одной (двух) ДП?

3.6. Литература

[1, с.22 - 24, 45 - 46, 72 - 81, 441 - 447; 2, с.20-22; 3, с.21 - 26, 45 - 46; 4, с.39 - 42].

4. ДИСКРЕТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Дискретные фильтры (ДФ) предназначены для преобразования дискретной последовательности $x(n)$ по определенному алгоритму $y(n)=L[x(n)]$, n - дискретное время (дифференцирование, интегрирование, частотная селекция спектра ДП и т.д.). ДФ реализует процедуру свертки ДП $x(n)$ с импульсной характеристикой $h(n)$ ДФ. В частотной области ДФ селектирует спектр входной ДП в определенном диапазоне частот. Линейные ДФ удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$y(n)=L[ax_1(n)+bx_2(n)]=aL[x_1(n)]+bL[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n).$$

Они инвариантны к сдвигу: если $y(n)=L[x_1(n)]$, то $y(n-k)=L[x_1(n-k)]$. Отличие дискретных фильтров от цифровых в том, что для первых изменения времени дискретны, а изменения уровней непрерывны, для вторых - квантованы время и уровни. Цифровые фильтры (ЦФ), в частности, являются реализацией на ЭВМ дискретных.

Основные способы описания ДФ - разностные уравнения $y(n)=L[x(n)]$; операторные коэффициенты передачи (системные функции) $H(p)=Y(p)/X(p)$, где $A_i(p)$, $i=1,2,3$ - соответствующие преобразования $h(n)$, $y(n)$ и $x(n)$ в плоскости комплексной переменной $p=\sigma+j\omega$; комплексные частотные характеристики $H(e^{j\omega})=H(p)$ при $p=j\omega$ и дискретные импульсные передаточные характеристики $H(z)=Y(z)/X(z)$, $z=e^{pT}$.

По типу разностного уравнения различают нерекурсивные (НФ), рекурсивные фильтры (РФ) и фильтры-резонаторы.

4.1. Нерекурсивные фильтры

Разностное уравнение НФ порядка $M-1$ имеет вид:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k x(n-k), \quad (4.1)$$

где весовые коэффициенты фильтра a_k являются отсчетами h_k в дискретном времени k его импульсной характеристики. Структура НФ состоит из сумматора, умножителей a_k на задержанные с помощью M -отводного устройства отсчеты входного сигнала $x(n-k)$. Число $M-1$ элементов памяти в устройстве задержки равно порядку фильтра (рис. 7.).

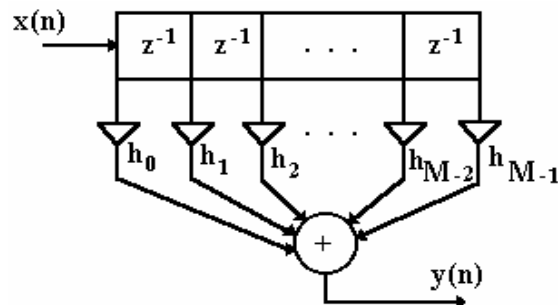


Рисунок 7.

Операторный коэффициент передачи НФ

$$\dot{H}_{нф}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-kpT} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-k(p-jm\Omega)T}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2)$$

обладает в комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$ только нулями, повторяющимися вдоль мнимой оси $j\omega$ с периодом $\Omega = 2\pi/T$, T - период дискретизации ДП.

Комплексная частотная характеристика (ЧХ) фильтра

$$\dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H_{нф}(p)|_{p=j\omega} = \sum_{k=0}^{M-1} h_k e^{-jk(\omega-m\Omega)T}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

определяет выражение для амплитудной частотной характеристики (АЧХ):

$$H_{нф}(\omega) = \left| \dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) \right| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (4.4)$$

где $A = \sum_{\kappa=0}^{M-1} h_{\kappa} \cos \kappa(\omega - m\Omega)T, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $B = -\sum_{\kappa=0}^{M-1} h_{\kappa} \sin \kappa(\omega - m\Omega)T, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

и фазовой частотной характеристики (ФЧХ):

$$\varphi_{нф}(\omega) = \arg \dot{H}_{нф}(e^{j\omega}) = \arctg(B/A). \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) видно, что АЧХ и ФЧХ периодичны вдоль оси частот с периодом $\Omega = 2\pi/T$.

Дискретная передаточная характеристика (ДПХ) НФ

$$H_{нф}(z) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} h_{\kappa} z^{-\kappa}, z = e^{pT}, p = \sigma + j\omega \quad (4.6)$$

обладает нулями и полюсами в плоскости z .

Нерекурсивный фильтр всегда физически реализуем и абсолютно устойчив, так как не включает цепи обратных связей. НФ обеспечивает линейные ФЧХ при произвольных АЧХ. Поскольку используемое число отсчетов импульсной характеристики НФ конечно, такие фильтры называются **КИХ-фильтрами**.

4.2. Рекурсивные фильтры

В РФ (рис.8.) введена запаздывающая обратная связь с помощью дополнительного (по отношению к НФ) устройства задержки, благодаря чему РФ реализует уравнение:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{L-1} b_k y(n-k), \quad (4.7)$$

где a_k, b_k - весовые коэффициенты фильтра в цепях прямой и обратной запаздывающих связей соответственно.

Операторный коэффициент передачи РФ

$$H_{рф}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-kpT}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-kpT}} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-k(p-jm\Omega)T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-k(p-jm\Omega)T}}, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

обладает в комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$ не только нулями (корни числителя), но

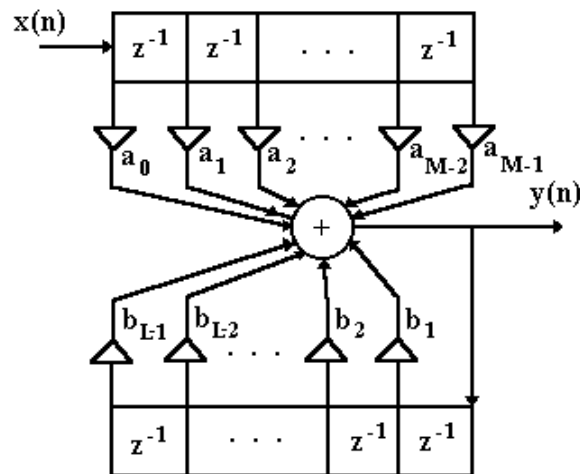


Рисунок 8.

и полюсами (корни знаменателя), конфигурации которых повторяются вдоль мнимой оси $j\omega$ с периодом $\Omega = 2\pi/T$.

Комплексная ЧХ РФ произвольного порядка $M-1$

$$H_{pф}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-jk\omega T}} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-jk(\omega - m\Omega)T}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k e^{-jk(\omega - m\Omega)T}}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.9)$$

позволяет определить АЧХ как $H_{PФ}(\omega) = \left| \dot{H}_{PФ}(e^{j\omega}) \right|$ и ФЧХ как $\arg \dot{H}(e^{j\omega})$ аналогично подобным характеристикам для НФ.

Дискретная передаточная характеристика РФ имеет вид:

$$H_{pф}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k z^{-k}}. \quad (4.10)$$

Рекурсивные фильтры могут обладать импульсными характеристиками как с конечным (КИХ), так и с бесконечным (БИХ) количеством отсчетов. Преимущество РФ перед НФ заключается в меньшем количестве элементов памяти (за счет применения обратной связи), более резкой АЧХ и равномерности ее в заданной полосе частот. Недостатками являются возможность самовозбуждения и накопление ошибок задания a_k , b_k и $x(n)$ при циркуляции сигналов по цепи запаздывающей обратной связи.

4.3. Основные методы реализации цифровых фильтров

Возможны три основных пути реализации цифровых фильтров (ЦФ) - аппаратный, программный и комбинированный [3, 19].

Аппаратная реализация ЦФ - специализированное вычислительное устройство (СЦВУ), отражающее принципы построения ЭВМ (наличие арифметико-логического устройства - процессора, постоянного (ПЗУ) и оперативного (ОЗУ) запоминающих устройств, а также внешних устройств – аналого-цифровых (АЦП) и цифроаналоговых (ЦАП) преобразователей, различных интерфейсов и т. п.). Входной непрерывный сигнал $x(t)$ после дискретизации $\{x(nt)\}$ и квантования $\{x^{KB}(nt)\}$ преобразуется с помощью АЦП в набор r - разрядных кодовых слов $\{Q_i\}_x$, $Q_i=[0,1]$, $i=0,1,2,\dots,r-1$, которые через интерфейс поступают в СЦВУ - ЦФ. Процессор СЦВУ с характеристикой передачи

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} a_k Z^{-k}}{(1 - \sum_{k=1}^{L-1} b_k Z^{-k})} \quad (4.11)$$

решает разностное уравнение

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^{L-1} b_k y(n-k), \quad (4.12)$$

вырабатывая на выходе кодовые слова $\{Q_i\}_y$, $i=0,1,2,\dots,r-1$, преобразуемые в непрерывный сигнал с помощью ЦАП.

Программный вариант ЦФ реализуется на персональной ЭВМ с учетом особенностей машины и ее программного обеспечения.

Комбинированный метод реализации ЦФ предполагает аппаратно-программное построение фильтра в виде микропроцессорного вычислительного устройства (МПВУ) на серийных микропроцессорных комплектах.

Дискретный фильтр реализуется аппаратно с использованием аналого-дискретных (АДП) и дискретно-аналоговых (ДАП) преобразователей.

4.4. Этапы проектирования цифровых (дискретных) фильтров

1. Задаются требуемые свойства фильтра (обычно частотная характеристика).

Практически распространены фильтры нижних (ФНЧ), верхних (ФВЧ) частот, полосовые (ПФ) и режекторные (РФ). Для исключения эффекта наложения копий ЧХ дискретных реализаций фильтра частоту дискретизации F_d выбирают из условия $F_d > 4F_{\max}$, где F_{\max} - максимальная частота ЧХ.

2. Аппроксимируются заданные требования на основе характеристик физически реализуемых фильтров. Наиболее часто используются аппроксимации Баттерворта (максимально гладкая) и Чебышева (с допустимыми пульсациями в полосе пропускания и задерживания).

3. Реализуются цифровые и дискретные фильтры на основе арифметики с ограниченной точностью (при программном методе) или элементов с заданными погрешностями (при аппаратном методе).

4. Проверяется соответствие характеристик ЦФ (ДФ) заданным требованиям (моделированием, экспериментом и т. п.).

4.5. Основные погрешности цифровых фильтров

Методическая (алгоритмическая) погрешность аппроксимации

$$\delta_{a_{\max}} \% = \frac{\Delta_{a_{\max}}}{y_{\text{ном}}} 100, \Delta_{a_{\max}} = |y(nT) - y_a(nT)|_{\max}, \quad (4.13)$$

где $\Delta_{a_{\max}}$ - максимальная разность между выходным сигналом $y(nT)$ идеального ДФ и сигналом $y_a(nT)$ на выходе аналогового фильтра - прототипа;

$y_{\text{ном}}$ - номинальное значение выходного сигнала. Величина $\delta_m(\Delta_{a_{\max}})$ определяется видом аппроксимации ЧХ.

Вычислительные погрешности делятся на ошибки **квантования** в регистрах сигнальных слов с числом разрядов r_x и регистрах коэффициентов фильтра a_k, b_k с разрядностью r_a, r_b соответственно

$$\delta_{\text{кв}} \% = \delta_{x,a,b} \% \approx 100/2^{r_{x,a,b}} \quad (4.14)$$

и ошибки **округления** в регистрах вычисления и хранения произведений $a_k x(n-k)$ и $b_k y(n-k)$ с разрядностью r_{np}

$$|\delta_{\text{np}}| = 1/2^{r_{\text{np}}}, r_{\text{np}} = r_x + r_{a,b}. \quad (4.15)$$

Число разрядов регистров $r_{x,a,b}$ определяется числом уровней квантования M с шагом h (динамическим диапазоном фильтра $d_{\text{об}} = 20 \lg M$)

$$r_x = \lceil \log_2 M \rceil, M = \lceil \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h} \rceil \approx x_{\max}/h \approx d. \quad (4.16)$$

Обычно $r_{x,a,b} \leq 16$, поэтому $\delta_{x,a,b} \leq 1/2^{16} = 1,5 \cdot 10^{-5}$ ($1,5 \cdot 10^{-3} \%$).

При вычислении произведений для сокращения вычислительных и аппаратных затрат числа x, a, b округляются путем отбрасывания младших разрядов.

Вычислительные погрешности являются случайными величинами (шумы квантования и округления). При аппроксимации их равномерным законом плотности вероятностей $\omega(\Delta x) = 1/h, x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ абсолютные максимальные значения и дисперсии этих погрешностей соответственно равны

$$\Delta_{\text{кв}} = h/2, D_{\text{кв}} = \sigma_{\text{кв}}^2 = h^2/12, \quad (4.17)$$

$$\Delta_{\text{окр}} = \Delta/2, D_{\text{окр}} = \sigma_{\text{окр}}^2 = \Delta^2/12, \quad (4.18)$$

где Δ - перепад уровней, соответствующий отбрасываемым разрядам чисел x, a, b и произведения.

При аппаратной реализации дискретных фильтров необходимо учитывать дополнительно **инструментальные** погрешности, вызванные несовершенством технологического исполнения электронных компонентов.

4.6. Критерии качества цифровых фильтров

Выбор варианта реализации ЦФ подчиняется требованиям к его *быстродействию* и *объему аппаратных и вычислительных затрат*. Быстродействие определяется в основном временем выполнения операций умножения двух операндов и числом самих операций умножения. Аппаратные затраты зависят, в первую очередь, от объема оперативной памяти для хранения коэффициентов фильтра и результатов выполнения логических и арифметических операций. Объем аппаратных затрат и быстродействие взаимосвязаны.

Пусть число разрядов кодовых слов r , число потребных операций умножения N , длительность такта T_0 (не менее длительности одной элементарной операции). Тогда время, необходимое для вычисления одной выборки $y(nT)$, должно быть не менее $t_{\min} \geq NrT_0$.

Быстродействие ЦФ определяется максимальной рабочей частотой

$$F_{\text{цф max}} = 1/t_{\min} \leq 1/NrT_0. \quad (4.19)$$

При работе ЦФ в реальном времени необходимо, чтобы величина t_{\min} не превышала интервала дискретизации сигналов ($t_{\min} \leq T$). Это означает, что максимальная рабочая частота фильтра должна превышать допустимую частоту дискретизации обрабатываемых сигналов

$$F_{\text{цф max}} \geq F_{\partial} = 1/T = 2F_{\text{max}}. \quad (4.20)$$

В различных цифровых системах принятые частоты дискретизации сигналов различны. В системах связи $F_{\text{д}}=8$ кГц, в звукотехнике $F_{\text{д}}=40 - 48$ кГц, в системах обработки изображений $F_{\text{д}}=14$ МГц. Эти значения определяют необходимое быстродействие фильтра и разрядность его регистров ($r=8 - 16$).

Основными путями повышения быстродействия (и соответственно качества работы) фильтров являются:

- совершенствование элементной базы (технологии ТТЛШ, ЭСЛ и т.п.);
- алгоритмические меры (ЦФ на основе ПЗУ произведений и их сумм, распараллеливание и конвейерная обработка данных, архитектура с разделением функций и т.д.);
- применение быстродействующих сигнальных процессов цифровой обработки сигналов (типа TMS-320, (5...33) млн. оп./с и т.п.).

4.7. Типовые задачи

Пример 1.

Записать разностные уравнения и выражения для системной функции ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для НФ второго порядка.



$$y(n) = \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} x(n-\kappa) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2);$$

$$\dot{H}_{\text{нф}2}(p) = \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} e^{-\kappa(p-jm\Omega)T} = h_0 + h_1 e^{-(p-jm\Omega)T} + h_2 e^{-2(p-jm\Omega)T}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\dot{H}_{\text{нф}2}(e^{j\omega}) = \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} = \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \cos \kappa(\omega-m\Omega)T - j \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \sin \kappa(\omega-m\Omega)T;$$

$$H_{\text{нф}2}(\omega) = |\dot{H}_{\text{нф}2}(e^{j\omega})| = \sqrt{\left(\sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \cos \kappa(\omega-m\Omega)T\right)^2 + \left(\sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \sin \kappa(\omega-m\Omega)T\right)^2};$$

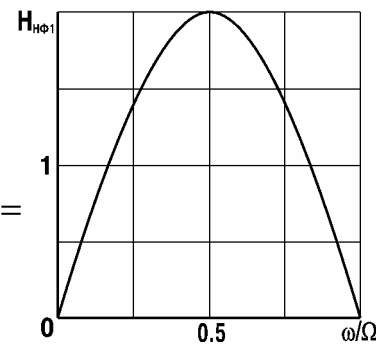
$$\varphi_{\text{нф}2}(\omega) = -\arctg\left[\frac{\sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \sin \kappa(\omega-m\Omega)T}{\sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} \cos \kappa(\omega-m\Omega)T}\right];$$

$$H_{\text{нф}2}(z) = \sum_{\kappa=0}^2 h_{\kappa} z^{-\kappa} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}.$$

Пример 2.

Рассчитать и построить график АЧХ фильтра НФ1 для $h_0=1, h_1=-1$.

$$\begin{aligned} H_{\text{нф}1}(\omega) &= |\dot{H}_{\text{нф}1}(e^{j\omega})| = |h_0 + h_1 e^{-j(\omega-m\Omega)T}| = \\ &= |h_0 + h_1 \cos(\omega-m\Omega)T - jh_1 \sin(\omega-m\Omega)T| = \\ &= \sqrt{h_0^2 + h_1^2 + 2h_0 h_1 \cos(\omega-m\Omega)T} = \sqrt{2[1 - \cos(\omega-m\Omega)T]} = \\ &= 2 \left| \sin \frac{(\omega-m\Omega)T}{2} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\omega\pi}{\Omega} - m\pi \right) \right|, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$



Задавая ω в диапазоне $\omega/\Omega = 0-1$ с шагом $\Delta\omega/\Omega = 0,2$, проводим расчет главного лепестка АЧХ ($m=0$).

Пример 3.

Записать разностное уравнение и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для РФ третьего порядка.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} x(n-\kappa) + \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} x(n-\kappa) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \\ &+ a_3 x(n-3) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + b_3 y(n-3); \end{aligned}$$

$$H_{\text{рф}3}(p) = \left(\sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} e^{-\kappa(p-jm\Omega)T} \right) / \left(1 - \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} e^{-\kappa(p-jm\Omega)T} \right), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{рф}3}(e^{j\omega}) = \left(\sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right) / \left(1 - \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{рф3}}(\omega) = \left| \left(\sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right) / \left(1 - \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right) \right|, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

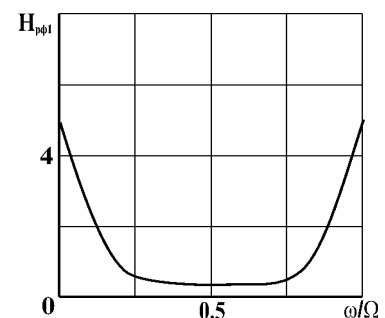
$$\Phi_{\text{рф3}}(\omega) = \arg \left[\left(\sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right) / \left(1 - \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} e^{-j\kappa(\omega-m\Omega)T} \right) \right], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$H_{\text{рф3}}(z) = \frac{\sum_{\kappa=0}^3 a_{\kappa} z^{-\kappa}}{1 - \sum_{\kappa=1}^3 b_{\kappa} z^{-\kappa}}.$$

Пример 4.

Рассчитать и построить график АЧХ фильтра РФ1 для $b=0,8$.

$$\begin{aligned} H_{\text{рф1}}(\omega) &= |H_{\text{рф1}}(e^{j\omega})| = \left| 1 / \left(1 - b e^{-j(\omega-m\Omega)T} \right) \right| = \\ &= 1 / \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos(\omega - m\Omega)T} = \\ &= 1 / \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos\left(2\pi \frac{\omega}{\Omega} - m2\pi\right)}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$



Задавая ω в диапазоне $\omega/\Omega = 0-1$ с шагом $\Delta\omega/\Omega = 0,2$, рассчитываем главный лепесток АЧХ ($m=0$).

Пример 5.

Определить динамический диапазон, предельное быстродействие и точность цифрового фильтра, реализованного на микросхемах ТТЛ, предназначенного для обработки сигнала с амплитудой $U_{\max}=1$ В, длительностью $T_c=500$ мс и максимальной частотой $F_m=1$ кГц. Дисперсия шумов ошибок квантования не превышает значения $\sigma_{\text{КВ}}^2 = 8,33 \text{ мВ}^2$. Погрешностями аппроксимации и округления пренебречь.

Шаг квантования сигнала по уровню равен $h = \sqrt{12\sigma_{\text{КВ}}^2} = \sqrt{12 \cdot 8,33} \approx 10 \text{ мВ}$.

Число уровней квантования $M = \lfloor U_{\max}/h \rfloor = \lfloor 1000/10 \rfloor = 100$.

Динамический диапазон $d_{\text{дБ}} = 20 \lg M = 20 \lg 100 = 40 \text{ дБ}$.

Число разрядов регистров сигнала и коэффициентов $r \geq \lceil \log_2 M \rceil \approx 6,66$ (принимаем $r=7$).

Относительная погрешность ЦФ $\gamma\% = (1/2^r) \cdot 100 = 0,78\%$.

Период дискретизации по времени $T \leq 1/2F_m = 1/2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^{-4} = 0,5 \text{ мс}$.

Объем выборки сигнала по времени $N = T_c/T = 500/0,5 = 1000$.

Принимаем длительность такта $T_0=20$ нс, что соответствует быстродействию цифровых схем ТТЛ.

Предельная частота работы ЦФ $F_{\text{цф.макс}}=1/NrT_0=1/(10^3 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 10^{-9})=7142,9$ Гц.



4.8. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 4.

Задание 2.

Записать разностные уравнения и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для НФ порядка $N_{\text{вар}}$ (номер варианта). Нарисовать схему фильтра.

Задание 3.

Рассчитать и построить график АЧХ фильтра НФ1 для h_0 и h_1 из таблицы:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_0	1	1	1	1	0,5	-0,5	0,5	0,5	0,5	-0,5	1	0,8
h_1	1	-1	0,5	-0,5	1	-1	-1	1	0,5	0,5	-0,5	0,8

Нарисовать схему и АЧХ НФ1.

Задание 4.

Записать разностное уравнение и выражения для системной функции, ЧХ, АЧХ, ФЧХ и ДПХ для РФ порядка $N_{\text{вар}}$ (номер варианта). Нарисовать схему фильтра.

Задание 5.

Рассчитать и построить график АЧХ фильтра РФ1 для b из таблицы:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	0,4	-0,4

Нарисовать схему и АЧХ РФ1.

Задание 6.

Определить динамический диапазон, предельное быстродействие и точность цифрового фильтра, реализованного на микросхемах ТТЛ, предназначенного для обработки сигнала с амплитудой $U_{\text{max}}=1$ В, длительностью T_c и максимальной частотой F_m . Дисперсия шумов ошибок квантования не превышает значения $\sigma_{\text{кв}}^2$. Погрешностями аппроксимации и округления пренебречь.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_c , мс	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
F_m , кГц	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0,5	0,2
$\sigma_{\text{кв}}^2$, мс ²	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

4.9. Контрольные вопросы

1. В чем сходства и различия непрерывных, дискретных и цифровых фильтров?
2. Сформулировать требования к линейным дискретным фильтрам.
3. В чем сходство и различие частотных характеристик дискретных и непрерывных фильтров?
4. Описать преимущества цифровых фильтров перед аналоговыми.
5. В чем сущность аппаратной, программной и аппаратно-программной реализаций дискретных (цифровых) фильтров?
6. Нарисовать схемы типовых структур дискретных фильтров. Привести описывающие разностные уравнения.
7. В чем сходство и различие НФ и РФ?
8. Описать основные этапы проектирования ДФ и ЦФ.
9. Дать определения и раскрыть сущность основных видов погрешностей ЦФ.

4.10. Литература

[1, с.52 - 62; 2, с.97, 108 - 112; 3, с.46 - 59; 4, с.49 - 53].

5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ ДПФ

5.1. Общие сведения

Процедура ДПФ $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N-1$

соответствует многоканальному фильтру с выходами $X(k)$. Импульсная характеристика k -го канала

$$h(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

соответствует дискретной передаточной характеристике

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) видно, что спектроанализатор на основе ДПФ является "гребенкой" из N фильтров, настроенных на частоты $\omega_k = 2\pi k/N, k=0, 1, \dots, N-1$.

Для выяснения частотных свойств "гребенки" подадим на вход сигнал в виде ДП $x(n) = \exp(j\omega n), n=0, 1, \dots, N-1$. Тогда ДПФ в точке k_1 из множества $k=0, 1, \dots, N-1$ имеет вид

$$X(k_1) = X_{K_1}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nK_1} = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}K_1\right)}}, \quad (5.3)$$

откуда находим АЧХ одного "зубца гребенки" в районе частоты $\omega_{K_1} = \frac{2\pi}{N}k_1$

$$\left|H_{K_1}(e^{j\omega})\right| = \left|X_{K_1}(e^{j\omega})\right| = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k_1}{N}\right)}. \quad (5.4)$$

Алгоритм ДПФ, позволяя вычислить сразу N спектральных составляющих, эквивалентен АЧХ многоканального фильтра, каналы которого настроены на частоты $\omega_k = (2\pi/N)k, k=0, 1, \dots, N-1$.

Боковые лепестки характеристик фильтра ДПФ и конечная ширина основных лепестков приводят к нежелательным эффектам "растекания (утечки)" спектра по соседним каналам и маскировки спектральных составляющих шумом [1,2,4]. Это связано с усечением ДП интервалом $[0, N-1]$. Уменьшение лепестковости АЧХ гребенчатого фильтра ДПФ достигается взвешиванием входной ДП временным "окном" длины N

$$\omega(n) = \begin{cases} \omega(n), & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & |n| > \frac{N}{2} \end{cases} \quad (5.5)$$

со спектром

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \omega(n) e^{-j\omega n}. \quad (5.6)$$

Известно [1 - 4], что преобразование Фурье взвешенной ДП

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(n) x(n) e^{-j\omega n} \quad (5.7)$$

эквивалентно свертке спектров ДП и "окна" в частотной области

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta. \quad (5.8)$$

По (5.8) находится оценка спектра $\hat{X}(e^{j\omega})$ взвешенной ДП $x(n)$ на всех частотах.

Для обеспечения высокого качества спектрального анализа к временному "окну" предъявляются следующие требования:

1. Частотная характеристика "окна" $W(e^{j\omega})$ должна иметь как можно более узкий главный лепесток ($\Delta\omega_r \rightarrow 0$), что достигается увеличением длины "окна" $\omega(n)$ в пределах длины ДП, т.е. $n \in [0, N-1]$.

2. Уровень боковых лепестков $\gamma_{\text{бл}} = W_{\text{бл}}/W_{\text{мак}}$ функции $W(e^{j\omega})$ должен быть минимальным, для чего функция "окна" $\omega(n)$ должна плавно нарастать в её начале и плавно спадать к концу. Указанным требованиям удовлетворяет ряд "окон" [1,2]:

- треугольное "окно" Бартлета ($\Delta\omega_{\text{гл}} = 8\pi/N$, $\gamma_{\text{бл}} = -25$ дБ)

$$\omega_1(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1; \end{cases} \quad (5.9)$$

- "окно" Хэмминга ($\Delta\omega_{\text{гл}} = 8\pi/N$, $\gamma_{\text{бл}} = -41$ дБ)

$$\omega_2(n) = 0,54 - 0,46 \cos[2\pi n/(N-1)], 0 \leq n \leq N-1; \quad (5.10)$$

- "окно" Блэкмана ($\Delta\omega_{\text{гл}} = 12\pi/N$, $\gamma_{\text{бл}} = -57$ дБ)

$$\omega_3(n) = 0,42 - 0,5 \cos[2\pi n/(N-1)] + 0,08 \cos[4\pi n/(N-1)]. \quad (5.11)$$

Из (5.9) - (5.11) видно, что глубокое подавление боковых лепестков сопровождается расширением главного лепестка ЧХ "окна", что снижает разрешающую способность спектрального анализа.

В [1, 2] описано оптимальное (в смысле обладания наибольшей энергией в главном лепестке при заданной амплитуде боковых) семейство "окон" Кайзера

$$\omega_4(n) = \frac{I_0 \left\{ \omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2} \right\}}{I_0 \left[\omega_a \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]}, \quad (5.12)$$

где $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(x/2)^k / k! \right]$ - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Параметр ω_a подбирается так, чтобы обеспечить компромисс между шириной главного лепестка и амплитудой бокового лепестка. Обычно $4 < \omega_a \frac{N-1}{2} < 9$ [2].

Спектральный анализ случайных процессов на основе ДПФ-БПФ проводится поэтапно [3]:

1. По заданной разрешающей способности по частоте Δf выбирается интервал наблюдения $\theta = k_0 / \Delta f$, k_0 - коэффициент, определяемый видом окна.

2. Находится число отсчетов реализации $x(n)$ на интервале наблюдения $N = \lceil \theta / T \rceil$ и дополняется нулями до $N = 2^i$.

3. Вычисляется спектр ДПФ взвешенной реализации $x_r(n)\omega(n)$ на r -м интервале наблюдения

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n)\omega(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1; r=1, \dots, M. \quad (5.13)$$

4. В качестве характеристики спектральной плотности реализации определяется периодограмма

$$I_r(k) = \frac{|X_r(k)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.14)$$

5. Находится спектральная плотность ДП $x(n)$ усреднением периодограмм по множеству M реализаций

$$\hat{S}_x(f_k) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M I_r(k), \quad f_k = k / N. \quad (5.15)$$

Дисперсия оценки \hat{S}_x уменьшается с ростом количества M усредняемых периодограмм.

5.2. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 5.

Задание 2.

Рассчитать и построить АЧХ "гребенки" фильтра ДПФ размерности $N = N_{\text{вар}} \pm$ дополнение до $2i$, ($N_{\text{вар}}$ - номер варианта) $N \geq 4$, задавая центральные частоты "зубцов" $\omega_k = 2\pi k / N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Показать эффекты "растекания" спектра.

Задание 3.

Рассчитать и построить импульсную характеристику k -го канала фильтра ДПФ размерности $N = N_{\text{вар}} \pm$ дополнение до $2i$ ($N_{\text{вар}}$ - номер варианта), $k = N/4$.

Задание 4.

Рассчитать и построить графики функций "окон" $\omega_{1-4}(n)$ при $N=N_{\text{вар}} \pm$ дополнение до $2i$ ($N_{\text{вар}}$ – номер варианта), $N \geq 4$.

5.3. Контрольные вопросы

1. Доказать, что процедура ДПФ эквивалентна многоканальному гребенчатому фильтру.
2. Как определить частотную характеристику фильтра на основе процедуры ДПФ?
3. Каковы избирательные свойства одного канала спектроанализатора на основе ДПФ?
4. В чем отрицательное влияние конечной ширины главного лепестка и наличия боковых лепестков в АЧХ спектроанализатора на основе ДПФ? Описать эффекты "растекания" и "маскировки" спектра.
5. Для чего производится взвешивание ДП при дискретном спектральном анализе?
6. Сформулировать требования к характеристикам "окон" спектроанализатора ДПФ и привести примеры "хороших окон".
7. Описать этапы спектрального анализа на основе ДПФ (БПФ).

5.4. Литература

[1, с.394 - 431; 3, с.219 - 227; 4, с. 46 - 48].

6. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

6.1. Общие сведения

Дискретный случайный процесс (случайный временной ряд, случайная решетчатая функция) является индексированным семейством случайных величин $\{x_n\}$. Такое семейство характеризуется совокупностью функций распределения вероятностей, которые в общем случае могут быть функцией индекса n . Величина x_n при этом может быть непрерывной или квантованной.

Функция распределения вероятности отдельной случайной величины

$$P_{x_n}(X_n, n) = \text{вероятность } [x_n \leq X_n], \quad (6.1)$$

где X_n - частное значение случайной величины x_n ; n - дискретное время.

Если x_n принимает непрерывный ряд значений, то ее плотность вероятностей

$$\omega_{x_n}(X_n, n) = [\partial P_{x_n}(X_n, n) / \partial X_n]; \quad (6.2)$$

$$P_{x_n}(X_n, n) = \int_{-\infty}^{X_n} \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.3)$$

Для квантованной по уровню с шагом h случайной величины $x_k = kh$, $k=0, 1, \dots, M-1$

$$P_{x_k}(X_k, k) = \text{вероятность } [x_k = X_k] = \sum_{x=X_k} \omega_{x_k}(x_k, k). \quad (6.4)$$

Взаимная зависимость двух случайных величин x_n и x_m описывается функцией совместного распределения вероятности

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \text{вероятность } [x_n \leq X_n, x_m \leq X_m]. \quad (6.5)$$

Для непрерывных случайных величин совместная плотность вероятности

$$\omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = [\partial^2 P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) / \partial X_n \partial X_m], \quad (6.6)$$

для квантованных случайных величин

$$\omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \text{вероятность } [x_n = X_n, x_m = X_m], \quad (6.7)$$

для статистически независимых случайных величин

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = P_{X_n}(X_n, n) \cdot P_{X_m}(X_m, m). \quad (6.8)$$

При отсутствии зависимости функции вероятности от сдвига начала отсчета по времени случайный процесс называется *стационарным*. Например, двумерное распределение стационарного случайного процесса удовлетворяет условию

$$P_{x_{n+k}, x_{m+k}}(X_{n+k}, n+k, X_{m+k}, m+k) = P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m).$$

6.2. Практические описания дискретных случайных процессов

В общем случае характеристиками случайных процессов являются *начальные* (характеризуют положение кривой распределения ω_{x_n} относительно координатной оси) и *центральные моменты* (характеризуют отклонения ω_{x_n} от центра тяжести (среднего)). На практике чаще используются для анализа случайных величин их математические ожидания, дисперсии, функции корреляции и энергетические спектры. Определим их для стационарных и эргодических процессов (для которых статистические характеристики совпадают при усреднении по времени и ансамблю).

Математическое ожидание (среднее) - первый начальный момент

$$m_{1x_n} = E[x_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT), \quad (6.9)$$

где $E[\cdot]$ - символ усреднения.

Для квантованных случайных величин

$$m_{1x_k} = \sum_{x_k} x_k \omega_{x_k}(x_k, k), \quad k=0, 1, \dots, M-1. \quad (6.10)$$

Математическому ожиданию присущи свойства:

$$m_1[x_n + y_n] = m_1[x_n] + m_1[y_n] \quad \text{и} \quad m_1[ax_n] = am_1[x_n]. \quad (6.11)$$

Среднее значение произведения двух случайных величин равно произведению их средних только для статистически независимых (некоррелированных) процессов:

$$m_1[x_n y_m] = m_1[x_n] m_1[y_m]. \quad (6.12)$$

Если известна реализация случайной последовательности в виде N отсчетов, оценкой математического ожидания является *выборочное среднее*

$$\hat{m}_{1x_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT). \quad (6.13)$$

Средний квадрат - второй начальный момент

$$m_{2x_n} = E[x_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.14)$$

Дисперсия (средний квадрат отклонений) - второй центральный момент

$$D_{x_n} = M_2(x_n) = \sigma_{x_n}^2 = E[(x_n - m_{1x_n})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - m_{1x_n})^2 \omega_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.15)$$

Величина σ_{x_n} называется стандартным отклонением.

Из (6.10) и (6.14) следует, что

$$\sigma_{x_n}^2 = E[x_n^2] - m_{1x_n}^2 = m_{2x_n} - m_{1x_n}^2. \quad (6.16)$$

В общем случае m_{1x_n} , m_{2x_n} , M_{2x_n} являются функциями времени и постоянны только для стационарных процессов.

Для реализации случайной ДП из N отсчетов оценкой дисперсии является **выборочная дисперсия**

$$\hat{D}_{x_n} = \hat{\sigma}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(nT) - \hat{m}_{1x_n}]^2. \quad (6.17)$$

Величина σ_{x_n} называется среднеквадратическим отклонением и является оценкой величины σ_{x_n} .

Среднее значение, средний квадрат и дисперсия дают небольшое количество информации о случайном процессе. Более полезной характеристикой является **автокорреляционная (взаимнокорреляционная) функция**, являющаяся мерой зависимости между значениями случайного процесса (двух различных случайных процессов) в различные моменты времени n и m .

Дискретная автокорреляционная функция (АКФ) определяется как

$$R_{xx}(n, m) = E[x_n x_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* \omega_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) dx_n dx_m. \quad (6.18)$$

В общем случае автокорреляционная последовательность является двумерной функцией.

Мера зависимости между двумя различными случайными ДП $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ описывается **взаимнокорреляционной функцией** (ВКФ):

$$R_{xy}(n, m) = E[x_n y_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y^* \omega_{x_n, y_m}(X_n, n, Y_m, m) dx dy. \quad (6.19)$$

Для N -периодической эргодической ДП АКФ вычисляется согласно (3.10) - (3.12), энергетический спектр как ДПФ от АКФ находится по (3.13). Для двух N -периодических случайных ДП пара ДПФ и ОДПФ определяет взаимный энергетический спектр (3.15) и взаимную корреляционную функцию (3.16).

Развитием корреляционной функции является **ковариация**. **Автоковариационная функция** (АКВФ) определяется как [15]

$$v_{xx}(n, m) = E[(x_n - m_{1x_n})(x_m - m_{1x_m})^*] = R_{xx}(n, m) - m_{1x_n} m_{1x_m}. \quad (6.20)$$

Если $x_n, n=1, 2, \dots, N$ - множество N случайных величин, то $\mathbf{X}=[x_1, \dots, x_N]^T$ - случайный вектор, ковариация которого

$$v_{xx} = E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T], \quad (6.21)$$

где $\bar{\mathbf{X}}$ - средний вектор $E(\mathbf{X})$. Тогда

$$\begin{aligned} v_{xx} &= E \left\{ \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1}) \\ \vdots \\ (x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1}) \cdots (x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \right\} = \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} (x_1 - m_{1x_1}) (x_1 - m_{1x_1}) \cdots (x_1 - m_{1x_1}) (x_N - m_{1x_N}) \\ \vdots \\ (x_N - m_{1x_N}) (x_1 - m_{1x_1}) \cdots (x_N - m_{1x_N}) (x_N - m_{1x_N}) \end{bmatrix} \right\} = \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} E[(x_1 - m_{1x_1})(x_1 - m_{1x_1})] \dots E[(x_1 - m_{1x_1})(x_N - m_{1x_N})] \\ \vdots \\ E[(x_N - m_{1x_N})(x_1 - m_{1x_1})] \dots E[(x_N - m_{1x_N})(x_N - m_{1x_N})] \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1N}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1}^2 & \sigma_{N2}^2 & \dots & \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix},$$

где $\sigma_{ij}^2 = E[(x_i - m_{1x_i})(x_j - m_{1x_j})]$, $(i, j = 1, 2, \dots, N)$.

Из (6.22) следует, что **диагональные элементы ковариационной матрицы** являются **дисперсиями** отдельных случайных величин, а каждый внедиагональный элемент соответствует **ковариации** двух случайных величин x_i и x_j .

В общем виде взаимноковариационная функция (ВКВФ) двух ДП $\{x(n)\}$ и $\{y(n)\}$ определяется как

$$v_{xy}(n, m) = E[(x_n - m_{1x_n})(y_n - m_{1y_n})^*] = R_{xy}(n, m) - m_{1x_n} m_{1y_n}. \quad (6.23)$$

Пример.

Определим статистические характеристики дискретного случайного процесса Бернулли, представляющего исходы при подбрасывании монеты: $x_n = +1$ (выпадение герба) и $x_n = -1$ (выпадение решетки). Пусть вероятность выпадения гербов p , тогда вероятность выпадения решеток $1-p$. Процесс Бернулли является стационарным, так как вероятности событий $+1$ и -1 независимы от времени и случайные величины $\{x_n\}$ статистически независимы. На практике мы используем отдельную ДП конечной длины N (реализацию $\{x_n\}_N$) из ансамбля выборочных последовательностей бесконечного случайного процесса $\{x(n)\}$, $-\infty < n < \infty$. Заметим, что в данном примере случайные величины квантованы (принимают конечное число значений, равное двум). Поэтому функция распределения вероятностей имеет вид

$$P_{x_n}(X_n, n) = \begin{cases} 1, & X_n \geq 1, \\ 1-p, & -1 \leq X_n \leq 1, \\ 0, & X_n < -1. \end{cases}$$

Так как производной не существует, вместо предыдущего вероятностную меру квантованной случайной величины определяем в виде $\omega_{x_n}(X_n, n)$:

$$\omega_{x_n}(X_n, n) = \text{вероятность } [x_n = X_n].$$

Среднее значение $m_{1x_n} = +1p + (-1)(1-p) = 2p - 1$.

Средний квадрат $m_{2x_n} = E[x_n^2] = (+1)^2 p + (-1)^2 (1-p) = 1$.

Дисперсия $\sigma_{x_n}^2 = M_{2x_n} - (m_{1x_n})^2 = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1-p)$.

Поскольку значения x_n статистически независимы, автокорреляционная последовательность

$$R_{xx}(m) = \begin{cases} E[x_n^2] = 1, & m = 0; \\ E[x_n]E[x_{n+m}] = m_{1x_n}^2, & m \neq 0. \end{cases}$$

В частном случае, если $p=0,5$, то $m_{1x_n} = 0$, $R_{xx}(m) = \delta(m)$, т. е. такой дискретный процесс Бернулли близок по свойствам к белому шуму (все случайные величины x_n некоррелированы).

6.3. Моделирование случайных процессов на ЭВМ

В программном обеспечении ЭВМ, как правило, есть датчик случайных чисел с **равномерным** распределением вероятностей $\omega(x)=1$ на интервале $x \in [0,1]$. Статистические характеристики этих чисел соответственно равны:

$$m_1(x) = \int_0^1 x\omega(x)dx = 0,5, \quad m_2(x) = \int_0^1 x^2\omega(x)dx = \frac{1}{3};$$

$$M_2(x) = D(x) = \sigma_x^2 = m_1\{[x - m_1(x)]^2\}dx = \frac{1}{12}.$$

Числа с равномерным распределением используются как исходные при моделировании случайных чисел с различными плотностями распределения вероятностей.

ЗАКОН 1. Случайные числа с **нормальным** распределением генерируются из последовательности, имеющей равномерное распределение $\omega(x)=1$, $x \in [0,1]$, на основе центральной предельной теоремы

$$x_{nk}(n) = \sum_{i=1}^n x_i, \quad n \rightarrow \infty.$$

Практически уже при $n \geq 8$ распределение чисел x_n не отличается от нормального [9]. При этом плотность вероятностей

$$\omega_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_n}^2}} e^{-\frac{(x_n - m_1(x_n))^2}{2\sigma_{x_n}^2}}. \quad (6.24)$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы n случайных независимых чисел с равномерным распределением равны соответственно

$$m_1(x_n) = E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = nm_1(x) = n/2, \quad (6.25)$$

$$D(x_n) = \sum_{i=1}^n D(x_i) = nD(x) = n/12.$$

С учетом (6.24) и значений из (6.25) окончательное выражение для плотности имеет вид

$$\omega_1(x_n) = \sqrt{\frac{6}{\pi n}} e^{-\frac{6(x_{nk} - 0,5n)^2}{n}}. \quad (6.26)$$

Для нормально распределенных чисел со стандартными параметрами ($m_1(x)=0$, $D(x)=1$) каждое число центрируется (уменьшается в \sqrt{D} раз). Тогда алгоритм формирования случайных чисел с нормальным распределением приводится к виду

$$x_{nk} = \sqrt{\frac{12}{n}} \left[\left\{ \sum_{i=1}^n x_i \right\}_k - \frac{n}{2} \right]. \quad (6.27)$$

ЗАКОН 2. Случайные числа с **плотностью распределения Фелля** получаются на основе преобразования случайных чисел x и y с нормальным законом распределения согласно выражениям

$$x_p = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad (6.28)$$

$$\omega_2(x_p) = \frac{x_p}{\sigma^2} e^{-\frac{x_p^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.29)$$

ЗАКОН 3. Смещение одного из исходных нормально распределенных чисел x или y на величину a позволяет реализовать алгоритм формирования случайных чисел x_{pc} с плотностью распределения по **закону Райса**:

$$x_{pc} = \sqrt{(x_n + a)^2 + y_n^2}, \quad (6.30)$$

$$\omega_3(x_{pc}) = \frac{x_{pc}}{\sigma^2} e^{-\frac{x_{pc}^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ax_{pc}}{\sigma^2}\right). \quad (6.31)$$

ЗАКОН 4. Преобразование $x_3 = x_n^2 + y_n^2$ позволяет получить случайные числа с **экспоненциальным законом** распределения

$$\omega_4(x_3) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x_3}{2\sigma^2}}. \quad (6.32)$$

ЗАКОН 5. Сумма квадратов из m случайных чисел с нормальным законом распределения определяет числа с **распределением χ^2** и с m степенями свободы $x_\chi = \sum_{i=1}^m x_{ni}^2$

$$\omega_5(x_\chi) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sigma^2} \left(\frac{x_\chi}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x_\chi}{2\sigma^2}}. \quad (6.33)$$

Случайные числа $\{x(k)\}$ с заданными законами распределения преобразуются во временную ДП согласно соотношению

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k). \quad (6.34)$$

6.4. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Изучить вопросы, касающиеся описания и моделирования случайных ДП по [2, с.265 - 273; 3, с.44 - 46].

Задание 2.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 6.

6.5. Контрольные вопросы

1. Чем отличается функция распределения вероятностей случайной величины от плотности вероятностей? Объяснить на примере нормального распределения. Дать определение характеристикам случайных процессов.
2. Что такое совместная плотность распределения вероятностей?
3. Как описывается распределение вероятностей квантованной случайной величины?
4. Дать определение стационарному случайному процессу.
5. Рассчитать и построить графики плотностей вероятностей случайных чисел $x \in [0,1]$, распределенных по законам 1-5, при $m_{1x}=N_{\text{вар}}/32$, $M_{2x}=N_{\text{вар}}/64$, $a=N_{\text{вар}}/128$, $m=256$.
6. Как определить математическое ожидание и дисперсию случайной ДП конечной длины $N=100N_{\text{вар}}$?
7. Что характеризует АКФ случайного процесса? Сравнить АКФ "белого" шума и узкополосного случайного процесса.
8. Чем отличаются АКФ и АКВФ? Что позволяет оценить АКВФ?
9. Изобразить реализацию дискретного случайного процесса Бернулли и функцию распределения вероятностей.
10. Составить блок-схему программы генерирования на ЭВМ случайных чисел с распределением по законам Гаусса, Релея, Райса и экспоненты.

6.6. Литература

[1, с.626-631; 2, с.263-283; 3, с.44-46; 6, с.5-10].

7. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

КЕПСТРЫ

7.1. Общие сведения

Гомоморфные системы составляют класс *нелинейных* систем, подчиняющихся *обобщенному принципу суперпозиции*:

$$H[x_1(n) \square x_2(n)] = H[x_1(n)] \circ H[x_2(n)], \quad (7.1)$$

$$H[C : x_1(n)] = C \cup [x_1(n)], \quad (7.2)$$

где H - оператор обработки, \circ и \square - входная и выходная операции соответственно, $:$ и \cup - правила объединения входных и выходных сигналов со скаляром C соответственно.

Линейные системы являются частным случаем гомоморфных, для которого $\square = \circ = +$, $:$ и $\cup = \times$.

Каноническое представление гомоморфных систем (фильтров)

$$x(n) \xrightarrow{\square} \left[D_{\square}[x(n)] \right]^+ = \hat{x}(n) \xrightarrow{+} L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \xrightarrow{+} D_{\circ}^{-1}[\hat{y}(n)]^{\circ} = y(n) \quad (7.3)$$

включает в себя характеристическую систему для операции \square :

$$D_{\square}[x_1(n) \square x_2(n)] = D_{\square}[x_1(n)] + D_{\square}[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n), \quad (7.4)$$

$$D_{\square}[C : x_1(n)] = C D_{\square}[x_1(n)] = C \hat{x}_1(n), \quad (7.5)$$

линейную систему, удовлетворяющую условию

$$L[\hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)] = L[\hat{x}_1(n)] + L[\hat{x}_2(n)] = \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n), \quad (7.6)$$

$$L[C \hat{x}(n)] = C L[\hat{x}(n)], \quad (7.7)$$

характеристическую систему D_{\circ}^{-1} (обратную к D) для операции \circ

$$D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n)] = D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n)] \circ D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_2(n)] = y_1(n) \circ y_2(n), \quad (7.8)$$

$$D_{\circ}^{-1}[C : \hat{y}_1(n)] = C \cup D_{\circ}^{-1}[\hat{y}_1(n)] = C \cup y_1(n). \quad (7.9)$$

Таким образом, чтобы полностью разделять сигналы $x_1(n)$ и $x_2(n)$, необходимо иметь возможность полностью разделять сигналы $\hat{x}_1(n)$ и $\hat{x}_2(n)$ с помощью линейного фильтра.

В практических приложениях наиболее распространены гомоморфные системы с операциями умножения и свертки.

7.2. Мультипликативные гомоморфные системы

Рассмотрим сигнал вида:

$$x(n) = [x_1(n)]^\alpha \cdot [x_2(n)]^\beta, \quad (7.10)$$

для которого характеристическая система должна удовлетворять условию

$$D\{[x_1(n)]^\alpha \cdot [x_2(n)]^\beta\} = \alpha D[x_1(n)] + \beta D[x_2(n)]. \quad (7.11)$$

Функция, удовлетворяющая этому условию, является логарифмической, так как $\log[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \log[x_1(n)] + \log[x_2(n)]$.

Отсюда и с учетом возможной неположительности $x_{1,2}(n)$ вытекает вид **канонической** формы **гомоморфной** системы **с умножением**

$$x(n) \rightarrow \boxed{\log[x(n)]^+ = \hat{x}(n) \rightarrow {}^+L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \rightarrow {}^+\exp[\hat{y}(n)]} = y(n), \quad (7.12)$$

где $x(n)$, $\hat{x}(n)$, $y(n)$ и $\hat{y}(n)$ - в общем случае комплексные последовательности типа $\hat{x}(n) = |\hat{x}(n)|e^{j\arg[\hat{x}(n)]}$.

Логарифматор формирует сигнал $\log[\hat{x}(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)$, аддитивные компоненты которого можно разделить линейным фильтром L . Блок вычисления экспоненты вырабатывает сигнал $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$.

Система D вычисляет комплексный логарифм

$$\hat{x}(n) = \log[\hat{x}(n)] = \log |\hat{x}(n)| + j \arg[\hat{x}(n)] \pm m2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.13)$$

Система D^{-1} вычисляет обратную к $\log[x(n)]$ функцию:

$$e^{\log[\hat{x}(n)]} = e^{\log |\hat{x}(n)|} e^{j \arg[\hat{x}(n)] \pm m2\pi}, \quad (7.14)$$

Так как комплексный логарифм является неоднозначной функцией, необходимо $\arg[x(n)]$ выбрать так, чтобы не было неоднозначности. Кроме того, $\log[\hat{x}(n)]$ надо определить так, чтобы для $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$ удовлетворялся обобщенный принцип суперпозиции: $\log[x(n)] = \log[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \log[x_1(n)] + \log[x_2(n)]$, откуда

$$\log[\hat{x}(n)] = \log|\hat{x}_1(n)| + \log|\hat{x}_2(n)|, \quad (7.15)$$

$$\arg[\hat{x}(n)] = \arg[\hat{x}_1(n)] + \arg[\hat{x}_2(n)]. \quad (7.16)$$

Чтобы устранить неоднозначность в (7.16), необходимо, чтобы $\arg[\hat{x}]$ был непрерывной функцией x .

Гомоморфная обработка мультипликативных сигналов $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$ целесообразна тогда, когда одна компонента меняется медленно, а другая быстро. Это позволяет легко разделить локализованные спектры сигналов $\hat{x}_1(n)$ и $\hat{x}_2(n)$ с

помощью линейного фильтра [18]. Поэтому целесообразно применение гомоморфных систем с умножением при обработке сигналов радиосвязи с замиранием амплитудно-модулированных сигналов. Мультипликативные гомоморфные системы полезны при сжатии динамического диапазона звуковых сигналов и при обработке сигналов изображения, когда применение линейных систем неэффективно [1-4].

7.3. Гомоморфные системы относительно свертки

Сигналы объединяются с помощью *свертки*

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n) \quad (7.17)$$

в системах радиосвязи, радионавигации, звукозаписи, где свертывается сигнал с шумом или с откликом тракта передачи. При сложении независимых случайных процессов свертываются плотности вероятностей. Свертываются также сейсмические сигналы при распространении по земле.

Каноническая форма гомоморфных фильтров для свертки

$$x(n) \rightarrow \boxed{D_* [x(n)]^+ = \hat{x}(n) \rightarrow^+ L[\hat{x}(n)]^+ = \hat{y}(n) \rightarrow^+ D_*^{-1}[\hat{y}(n)]^+} = y(n) \quad (7.18)$$

включает характеристическую систему со свойствами:

$$D_*[x_1(n) * x_2(n)] = D_*[x_1(n)] + D_*[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n), \quad (7.19)$$

$$D_*[C : x_1(n)] = CD_*[x_1(n)] = C\hat{x}_1(n), \quad (7.20)$$

линейную систему L (для временной селекции $x_1(n)$ или $x_2(n)$) и систему D_*^{-1} , обратную к системе D_* .

Если представить сигналы их Z -образами, можно преобразовать свертку в произведение $[x(n) = x_1(n) * x_2(n) \rightarrow X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)]$. Тогда каноническая система (7.18) заменяется системой:

$$\underbrace{X(z) \rightarrow^+ \log[X(z)]^+}_{D_*} = \hat{X}(z) \rightarrow^+ L[\hat{X}(z)] = \underbrace{\hat{Y}^+ \rightarrow^+ \exp[\hat{Y}(z)]^+}_{D_*^{-1}} = Y(z), \quad (7.21)$$

Так как $X(z)$ - обычно комплексная функция, необходимо использовать комплексный логарифм и решить проблему его неоднозначности: для $X(z) = X_1(z)X_2(z)$ обеспечить $\hat{X}(z) = \log[X_1(z)X_2(z)] = \log[X_1(z)] + \log[X_2(z)]$.

Если входные сигналы - дискретные последовательности, то характеристическая система D_* представляется в виде

$$x(n) \xrightarrow{Z_{+1}} X(z) \xrightarrow{\bullet} \log[\hat{X}(z)]^+ = \hat{X}(z) \xrightarrow{Z_{-1}} \hat{x}(n). \quad (7.22)$$

В плоскости Z на единичной окружности $\hat{X}(z) = \hat{X}(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$. Если $\hat{x}(n)$ - действительная ДП, то $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ - четная, а $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ - нечетная функции ω с периодом 2π . Так как $\hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| + j\arg[X(e^{j\omega})]$, то $X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})|$, $X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \arg X(e^{j\omega})$ - должны быть непрерывными функциями ω .

Обратная характеристическая система D_*^{-1} имеет вид:

$$\hat{y}(n) \xrightarrow{Z_{+1}} \hat{Y}(z)^+ \xrightarrow{+} \exp[\hat{Y}(z)] = Y(z) \xrightarrow{Z_{-1}} y(n), \quad (7.23)$$

В сверточных гомоморфных системах используются инвариантные по частоте линейные системы L , для которых

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\Theta}) L(e^{j(\omega-\Theta)}) d\Theta, \quad (7.24)$$

что соответствует во временной области преобразованию

$$\hat{y}(n) = l(n)\hat{x}(n), \quad (7.25)$$

где $l(n)$ - обратная к $L(e^{j\omega})$ процедура.

Так как $x(n)$, $\hat{x}(n)$, $\hat{y}(n)$ и $y(n)$ предполагаются действительными и устойчивыми ДП, то $l(n)$ должна быть действительной и устойчивой ДП, а область сходимости $L(z)$ - содержащей единичную окружность. Действительная и мнимая части $L(e^{j\omega})$ будут соответственно четной и нечетной функциями ω .

7.4. Реализация характеристической системы D_*

Будем рассматривать класс минимально-фазовых ДП, для которых нули и полюсы находятся внутри единичного круга плоскости Z . Для них $x(n)$ и $\hat{x}(n)$ - физически реализуемы, т.е. $x(n) = \hat{x}(n) = 0$ при $n < 0$. Тогда Z -преобразование $\hat{x}(n)$ полностью определяется вещественной частью преобразования Фурье (ПФ), и для получения $\hat{x}(n)$ нужно также вычислить $\hat{X}_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})|$. Обратное преобразование Фурье (ОПФ) от $\hat{X}_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ равно четной части $\hat{x}(n)$, которая обозначается как $C(n) = [\hat{x}(n) + \hat{x}(-n)]/2$, и называется **кестром** входного сигнала $x(n)$ [1,2]. Так как $\hat{x}(n) = 0$ при $n < 0$

$$\hat{x}(n) = C(n)U_+(n), U_+(n) = \begin{cases} 0, n < 0, \\ 1, n = 0, \\ 2, n > 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Отсюда вытекает последовательность процедур системы D_* :

$$x(n) \xrightarrow{\text{ПФ}} X(e^{j\omega}) \rightarrow \hat{X}(e^{j\omega}) = \log|X(e^{j\omega})| \xrightarrow{\text{ОПФ}} C(n) \rightarrow \otimes \rightarrow \hat{x}(n), \quad (7.27)$$

\uparrow
 $U_+(n)$

Численная реализация на ЭВМ процедуры вычисления кепстра минимально фазовых ДП $x(n)$ конечной длины N с использованием ДПФ имеет вид:

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=-\infty}^{M-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \\ \hat{X}_{\text{Re}}(k) = \log|X(k)|, \\ C_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{M-1} \hat{X}_{\text{Re}}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(n \pm mN), m=0,1,2,\dots \end{cases} \quad (7.28)$$

Для вычисления комплексного кепстра по $C_p(n)$ необходимо найти

$$\hat{x}_{cp}(n) = \begin{cases} C_p(n), n=0, \frac{N}{2}, \\ 2C_p(n), 1 \leq n < \frac{N}{2}, \\ 0, \frac{N}{2} < n \leq N-1. \end{cases} \quad (7.29)$$

При большом N $\hat{x}_{cp}(n)$ незначительно отличается от $\hat{x}(n)$.

Проблему вычисления комплексного логарифма можно исключить, определяя кепстр на основе логарифмической производной [2]. Но это достигается ценой сильного эффекта наложения.

Следует заметить, что комплексный кепстр вычисляется при выявлении формы сигналов (учитываются их фазовые характеристики). В задачах, требующих определения задержки и относительного уровня отраженного сигнала, достаточно вычислить кепстр по (7.28) или связанный с ними кепстр мощности

$$C_s(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{N-1} \ln|X(k)|^2 e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, m=0,1,\dots,2N-1. \quad (7.30)$$

7.5. Пример вычисления кепстра с отражением

В задачах радионавигации возникает проблема приема сигнала, пораженного зеркальным отражением от доминирующих (локализованных) объектов в зоне действия радиомаяков [8,10,17]. В этом случае цифровой бортовой подсистемой обрабатывается в дискретном времени $n=t/T=0,1,2,3\dots$ процесс

$$x(n) = s(n) + \sum_{i=1}^M p_i s(n-n_i) = s(n) * h(n), \quad (7.31)$$

являющийся суммой полезного сигнала радиомаяка $S(n)$ и M задержанных (отраженных с коэффициентом P_i) копий - эквивалентно сверткой сигнала $s(n)$ и импульсного отклика канала (ИОК) распространения радиосигнала

$$h(n) = \delta(n) + \sum_{i=1}^M p_i \delta(n - n_i) = \delta(n) + p_1 \delta(n - n_1) + p_2 \delta(n - n_2) \dots \quad (7.32)$$

Частотная характеристика канала в дискретных точках $k = \omega/\Delta\omega = 0, 1, 2, \dots$ находится, как ДПФ от ИОК:

$$H(k) = 1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1k} + p_2 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_2k} + \dots = \sum_{i=0}^{M-1} p_i e^{-j\frac{2\pi}{N}n_ik}, p_0 = 1. \quad (7.33)$$

Процедура разрешения (разделения) полезного сигнала со спектром $S(k)$ и отражения выполняется по схеме:

$$x(n) = s(n) * h(n) \xrightarrow{\text{ДПФ}} X(k) = S(k)H(k) \xrightarrow{\text{Log}} \ln|X(k)| = \quad (7.34)$$

$$= \ln S(k) + \ln H(k) \xrightarrow{\text{ОДПФ}} \hat{x}(m) = \hat{s}(m) + \hat{h}(m),$$

где $\hat{s}(m) = F_{-1}[\ln|S(k)|] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln S(k) e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$, $\hat{h}(m) = F_{-1}[\ln|H(k)|] =$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\ln|H(k)|] e^{j\frac{2\pi}{N}mk} - \text{соответственно кепстр сигнала и ИОК, определенные в}$$

новом дискретном времени $m = \Delta t/T = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку логарифм спектра сигнала, содержащего отраженную копию, включает аддитивную периодическую компоненту, созданную этой копией, обратное преобразование Фурье от логарифма спектра имеет пики в точках, соответствующих задержке отраженного сигнала [8]. Покажем это на примере сигнала, пораженного одним “несильным” отражением ($M=1$, $p_1 < 1$). В этом случае $x(n) = s(n) + p_1 s(n - n_1)$ и

$$\ln|H(k)| = \ln(1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1k}) \approx p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1k} - \frac{1}{2} p_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{N}2n_1k} + \frac{1}{3} p_1^3 e^{-j\frac{2\pi}{N}3n_1k} - \dots$$

Тогда кепстр $x(n) \approx s(n) * h(n)$ со спектром $X(k) = S(k)H(k) = S(k)(1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1k})$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} \hat{x}(m) &= F_{-1}[\ln|H(k)|] = F_{-1}[\ln|S(k)| + \ln|H(k)|] = \\ &= \hat{s}(m) + F_{-1}[\ln|H(k)|] = \hat{s}(m) + p_1 \delta(m - n_1) - \frac{1}{2} p_1^2 \delta(m - 2n_1) + \\ &+ \frac{1}{3} p_1^3 \delta(m - 3n_1) - \dots \end{aligned}$$

Видно, что кепстр сигнала с отражением (сигнала, свернутого с ИОК) содержит δ -образные периодические пики, определяющие задержку отражения n_1 и интенсивность амплитуды его первого пика p_1 .

Эти особенности кепстра обуславливают следующие возможности гомоморфной обработки навигационных сигналов:

- обнаружение отражения (по критерию более одного пересечения заданного порога);

- разрешение сигнала и отражения с помощью линейных фильтров по глубине “провала” в кепстре $\hat{x}(m)$;

- оценку параметров отражения (уровня и задержки относительно полезного сигнала);
- компенсацию отражения (восстановление “образа” сигнала на фоне отражения).

Достоинствами гомоморфной обработки являются инвариантность к форме сигнала и цифровая реализация на ЭВМ с использованием быстрых алгоритмов Фурье.

Недостатки связаны с широкополосностью обработки:

- сильная зависимость кепстра от шумов [13,17];
- сложность реализации в радиодиапазоне.

7.6. Самоподготовка и самоконтроль

Задание 1.

Изучить принципы и особенности гомоморфной обработки по [1, с.360-364; 2, с.340-380, 8, с.68-79].

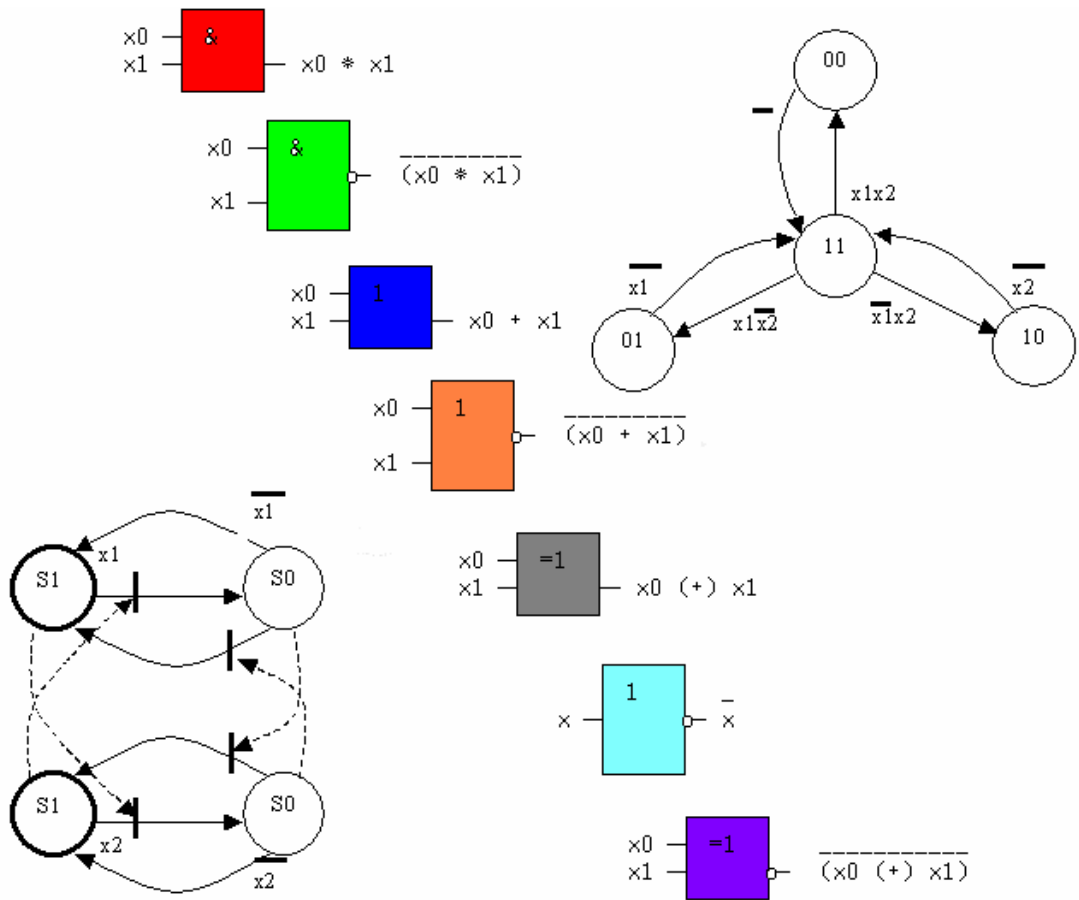
Задание 2.

Ответить письменно на контрольные вопросы по теме 7.

7.7. Контрольные вопросы

1. В чем заключается обобщенный принцип суперпозиции?
 2. Дать аналитическое определение гомоморфной системе.
 3. В каких случаях гомоморфная система превращается в линейную?
 4. Нарисовать структурную схему гомоморфной системы с указанием входных, промежуточных и выходных сигналов.
 5. Дать аналитическое определение прямой и обратной характеристических систем.
 6. Объяснить назначение линейной системы в составе гомоморфной.
 7. Какова роль Фурье- и Z-преобразования при анализе гомоморфной системы?
 8. Записать правило функционирования, нарисовать структурную схему и объяснить назначение отдельных звеньев гомоморфной системы обработки мультипликативных сигналов.
 9. Объяснить назначение комплексного логарифмирования в гомоморфных системах с умножением сигналов.
 10. Указать области применения мультипликативных гомоморфных систем.
 11. Записать аналитически правило функционирования гомоморфных систем относительно свертки, нарисовать структурную схему гомоморфной обработки и объяснить назначение отдельных звеньев.
 12. Записать алгоритм вычисления кепстра. Каковы особенности вычисления кепстра на ЭВМ?
 13. Дать определение кепстру мощности.
 14. Привести пример вычисления кепстра навигационного сигнала. Нарисовать график кепстра сигнала с отражением.
-

ТЕОРИЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И АВТОМАТОВ



1. ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Логические переменные и переключательные функции

Аппарат алгебры логики или *булевой* алгебры (Дж. Буль, 1815 – 1864 г.) используется для формального описания цифровых устройств.

Основным понятием алгебры логики является *высказывание* – некое предложение, о котором можно сказать только истинно оно ($x = 1$, true) или ложно ($x = 0$, false). В этой связи *логическими* называются *переменные*, если они принимают только два значения: 0 и 1.

Переключательной функцией (ПФ) выражается более *сложное* высказывание, зависящее от нескольких переменных.

Переключательной называется функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающая значение 0 или 1 на наборах логических переменных x_1, x_2, \dots, x_n (*набор – совокупность аргументов x_i*).

Для n переменных (аргументов) число наборов конечно и равно 2^n (от 00...0 до 11...1). Поскольку на любом наборе ПФ может принимать значение 0 или 1, то число возможных ПФ от n аргументов будет 2^N , где $N=2^n$ - число наборов, таким образом, число возможных ПФ для n аргументов равно 2^{2^n} .

Пример. Для $n=1$, $2^1 = 2$, таким образом имеется четыре ПФ $f_0 \dots f_3$ ($f_0=0, f_1=1, f_2=x, f_3=\bar{x}$). Пусть $n = 2$ (x_2, x_1), $N = 2^2 = 4$; $2^N = 16$, т.е. для двух аргументов можно построить 16 ПФ ($f_0, f_1, f_2, \dots, f_{15}$).

Переключательная функция, полностью определенная на всех наборах аргументов, *существенно зависит от x_i* , если выполняется неравенство:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots).$$

В противном случае аргумент x_i - *фиктивный*, а функция, не зависящая от всех аргументов, называется *вырожденной*. Иначе говоря, если при изменении аргумента x_i значение функции не меняется, то функция от этого аргумента не зависит и этот аргумент можно опустить. Указанное свойство переключательных функций будет использовано при минимизации их аналитического представления. Физическая реализация ПФ – цифровое устройство (комбинационная схема).

$f(x_2, x_1)$	x_2	0	0	1	1	Наименование логической функции	Обозначение
	x_1	0	1	0	1		
f_0		0	0	0	0	Константа 0	0
f_1		0	0	0	1	Конъюнкция (функция "И")	$x_2 \wedge x_1$
f_2		0	0	1	0	Запрет по x_1	$x_2 \Delta x_1$
f_3		0	0	1	1	Повторение x_2	x_2
f_4		0	1	0	0	Запрет по x_2	$x_1 \Delta x_2$
f_5		0	1	0	1	Повторение x_1	x_1
f_6		0	1	1	0	Сумма по модулю 2	$x_2 \oplus x_1$
f_7		0	1	1	1	Дизъюнкция (функция "ИЛИ")	$x_2 \vee x_1$
f_8		1	0	0	0	Стрелка Пирса ("ИЛИ-НЕ")	$x_2 \downarrow x_1$
f_9		1	0	0	1	Логическая равнозначность	$x_2 \sim x_1$
f_{10}		1	0	1	0	Инверсия x_1	\bar{x}_1
f_{11}		1	0	1	1	Импликация от x_1 к x_2	$x_2 \rightarrow x_1$
f_{12}		1	1	0	0	Инверсия x_2	\bar{x}_2
f_{13}		1	1	0	1	Импликация от x_2 к x_1	$x_1 \rightarrow x_2$
f_{14}		1	1	1	0	Штрих Шеффера ("И-НЕ")	x_2 / x_1
f_{15}		1	1	1	1	Константа 1	1

Второе название переключательной функции ИЛИ (дизъюнкция) – логическое сложение, ПФ И (конъюнкция) – логическое умножение, а ПФ f_6 (сумма по mod2) – исключающее ИЛИ. В инженерной практике нашли наибольшее применение *логические элементы (ЛЭ)*, реализующие следующие ПФ: f_1 (И, AND), f_7 (ИЛИ, OR), f_6 (Исключающее ИЛИ, XOR), функции Пирса f_8 (И-НЕ, NAND) и Шеффера f_{14} (ИЛИ-НЕ, NOR), а также вырожденные функции – инверсия f_{10} , f_{12} (НЕ, NOT) и повторение f_3 , f_5 аргументов. Остальные ПФ (в том числе и любая ПФ из указанных) могут быть получены посредством суперпозиции из нескольких (или даже одной) *базисных* ПФ, как будет показано далее.

На рис.9. показаны условные графические обозначения (УГО) основных логических элементов: повторителя, инвертора (НЕ), И, ИЛИ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, сумма по модулю 2 (Искл. ИЛИ).

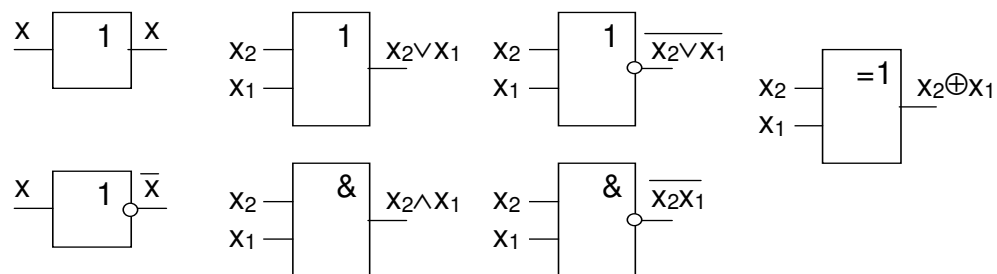


Рисунок 9.

1.2. Основные свойства переключательных функций

Функции И, ИЛИ, НЕ удовлетворяют следующим законам, которые легко доказываются путем подстановки наборов аргументов. Некоторые из этих законов тождественны операциям умножения и сложения, а некоторые – специфичны для алгебры логики и не имеют прямых аналогов в обычной алгебре.

Идемпотентный закон:

$$x_1 \vee x_1 = x_1 ,$$

$$x_1 x_1 = x_1 .$$

Коммутативный (переместительный) закон:

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 ,$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 .$$

Ассоциативный (сочетательный) закон:

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) ,$$

$$x_1 (x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 .$$

Дистрибутивный (распределительный) закон (нет аналога в алгебре):

$$x_1 (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 ,$$

$$x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2) (x_1 \vee x_3) .$$

Закон отрицания:

$$x_1 \vee \bar{x}_1 = 1 ,$$

$$x_1 \bar{x}_1 = 0 .$$

Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{x}} = x .$$

Правило (закон) де Моргана:

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n ,$$

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n .$$

Закон поглощения:

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1 ,$$

$$x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1 .$$

Закон склеивания:

$$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 ,$$

$$(x_1 \vee x_2) (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 .$$

1.3. Способы задания переключательных функций

Табличный способ

Из существующего множества способов задания ПФ наиболее употребим способ задания с помощью *таблицы истинности*, где каждому набору аргументов соответствует значение ПФ. В приведенной табл. 2 ПФ $y_1(x_2, x_1, x_0)$ полностью определена на всех наборах аргументов, а ПФ $y_2(x_2, x_1, x_0)$ не полностью определена, т.е. для некоторых наборов значение функции безразлично (отмечено звездочкой). Доопределение ПФ на этих наборах нулем или единицей может быть впоследствии использовано при минимизации.

Таблица 2

x_2	x_1	x_0	y_1	y_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	*
0	1	0	1	*
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	*

Аналитический способ

ПФ может быть представлена аналитически в виде **СКНФ** и **СДНФ** — *совершенных конъюнктивных и дизъюнктивных нормальных форм*.

Введем определения:

Конъюнкция называется *элементарной (ЭК)*, если она содержит любое количество попарно различных между собой переменных со знаками отрицания или без них, например, ЭК: x_1x_2 , $x_1\bar{x}_3x_4$.

Дизъюнкция называется *элементарной*, если она содержит любое количество попарно различных между собой переменных со знаками отрицания или без них, например, ЭД: $x_1\vee\bar{x}_2$, $x_1\vee\bar{x}_3\vee x_4$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Пример. $y = x_1x_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3$ (ДНФ);

$y = (x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee\bar{x}_2)$ (КНФ).

Преобразование ДНФ \Leftrightarrow КНФ совершается по правилам, изложенным выше (1.2.).

Пример. Преобразовать ДНФ в КНФ.

Используя дистрибутивный закон и закон отрицания, получим:

$$\begin{aligned} x_1x_2\vee\bar{x}_1x_3 &= (x_1x_2\vee\bar{x}_1)(x_1x_2\vee x_3) = \\ &= (\bar{x}_1\vee x_1)(\bar{x}_1\vee x_2)(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3) = (\bar{x}_1\vee x_2)(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3). \end{aligned}$$

Для определения *совершенных нормальных форм* (СДНФ и СКНФ) введем понятия *конституент единицы и нуля* (КЕ и КН).

Конституентой единицы (K_i) называется ЭК n аргументов, принимающая значение 1 лишь на одном наборе.

Конституентой нуля (M_i) называется ЭД n аргументов, равная 0 лишь на одном наборе.

Общее число K_i и M_i , определенных на всех наборах равно 2^n (для ПФ n аргументов).

Совершенной ДНФ называется дизъюнкция всех КЕ этой функции $\bigcup_i^m K_i$.

Совершенной КНФ называется конъюнкция всех КН этой функции $\bigcap_j^k M_j$.

Согласно этим определениям из таблицы истинности (табл. 2) для функции $y_1(x_2, x_1, x_0)$, имеем:

$$\text{СДНФ } y_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7$$

$$\text{СКНФ } y_1 = M_0 M_3 M_6.$$

Сформулируем *правило записи K_i и M_i* .

В наборе значений аргументов составляющих элементарную конъюнкцию конституенты единицы каждый аргумент x_i записывается в прямой форме, если его значение на этом наборе 1, и в инверсном виде, если его значение на данном наборе равно 0. Для записи КН правило обратное: аргумент записывается в КН в прямой форме, если на данном наборе его значение равно нулю и в инверсной форме, если его значение на наборе равно единице.

$$\text{Тогда СДНФ } y_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0,$$

$$\text{СКНФ } y_1 = (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0)$$

Переход от СДНФ к СКНФ (и обратно) может быть совершен по формальным правилам:

♦ Записать новую СДНФ (СКНФ) из КЕ (КН), не входящих в исходную, например, из табл. 2 следует $y_1^* = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0$.

♦ В новой СДНФ (СКНФ) операцию ИЛИ заменить на И, а операцию И – на ИЛИ, т.е. $y_1^{**} = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0)$.

♦ Инвертировать аргументы для завершения преобразования: $y_1^{***} = (x_2 \vee x_1 \vee x_0)(x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0) = y_1$.

В общем случае предпочтение отдается той совершенной форме (СДНФ, СКНФ), в которой меньше составляющих – произведений (сумм).

1.4. Функционально полные наборы (базисы) переключательных функций

Система ПФ $\{y_1, \dots, y_N\}$ называется *функционально полной* (или *базисом*), если любая ПФ из системы может быть определена суперпозицией функций $\{y_1, \dots, y_N\}$.

Минимальным назовем такой *базис*, для которого удаление хотя бы одной функции y_i превращает указанную систему ПФ в неполную.

Функционально полной является система функций И, ИЛИ, НЕ, но эта система не минимальна. Функция штрих Шеффера (И-НЕ) или стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ) образует минимальный базис. Возникает вопрос – что для переключательной функции считать минимальным представлением.

Примеры функционально-полных наборов.

1. Набор И, ИЛИ, НЕ:

$$\text{СДНФ } y(x_1x_2\dots x_n) = \bigcup_i^m K_i, \quad \text{СКНФ } y(x_1x_2\dots x_n) = \bigcap_j^k M_j.$$

2. Наборы И-НЕ, ИЛИ-НЕ:

$$\text{И-НЕ } y(x_1x_2\dots x_n) = \bigcup_i^m \overline{K_i} = \bigcap_i^m \overline{\overline{K_i}}, \quad \text{ИЛИ-НЕ } y(x_1x_2\dots x_n) = \bigcap_j^k \overline{M_j} = \bigcup_j^k \overline{\overline{M_j}}.$$

1.5. Минимизация переключательных функций

ДНФ (КНФ), содержащая наименьшее число логических переменных по сравнению со всеми другими представлениями данной функции, называется минимальной ДНФ (КНФ) – МДНФ (МКНФ).

Основной задачей проектирования логических схем (ЛС) и структур является реализация ПФ в заданном базисе при наименьшем числе логических элементов (ЛЭ) (корпусов ИМС и т.д.).

Известны аналитические методы: Квайна, Мак-Класки, Рота и другие. В инженерной практике более распространен формальный *метод минимизации с помощью диаграмм Вейча (карт Карно)*. Диаграмма Вейча (ДВ) представляет собой квадратную или прямоугольную таблицу с числом клеток 2^n (n - число переменных) – по числу всех конstituент функции.

Если минимизация идет в ДНФ, то диаграмма Вейча заполняется единицами (конституентами 1), если в КНФ – то ДВ заполняется нулями (конституентами 0), таким образом ДВ представляет собой иную форму записи таблицы истинности.

Диаграммы Вейча для $n = 2, 3, 4$:

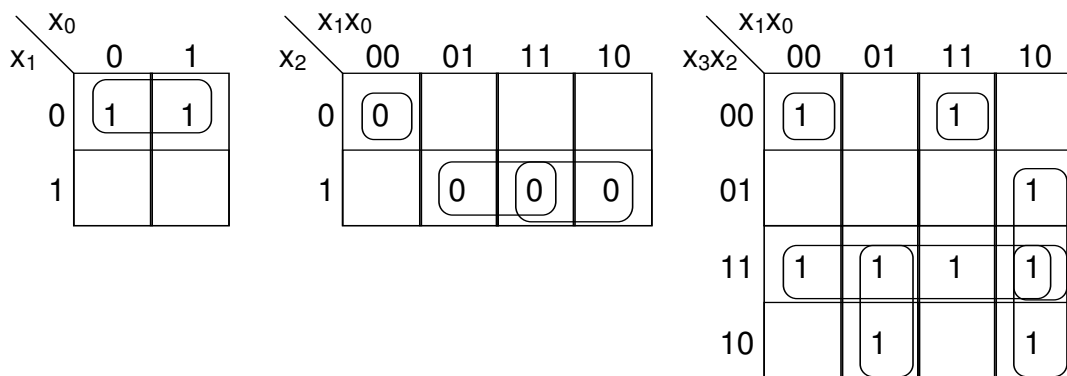


Рисунок 10.

Диаграммы построены так, что соседние клетки соответствуют наборам аргументов, различающимися значением одного аргумента. Клетки на противоположных краях диаграммы также являются соседними.

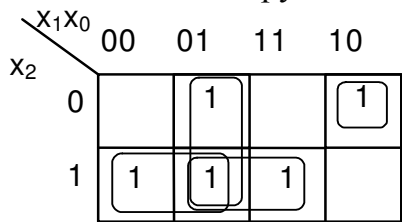
Нахождение МДНФ или МКНФ сводятся к отысканию варианта, при котором все единицы в СДНФ (нули в СКНФ) покрываются наименьшим числом

наиболее коротких произведений или сумм, для чего в ДВ обводят прямоугольными контурами клетки с единицами (нулями) по правилам:

- ◆ контур должен быть прямоугольным с числом клеток $2^i, i = 0,1,2,\dots$;
- ◆ одни и те же клетки с 1 или 0 могут входить в несколько контуров;
- ◆ число контуров должно быть как можно меньше, а размеры каждого контура – как можно больше;
- ◆ объединение начинают с клеток, которые могут войти в контур единственным образом;
- ◆ клетки с неопределенные значениями могут произвольным образом доопределяться и входить или не входить в контур.

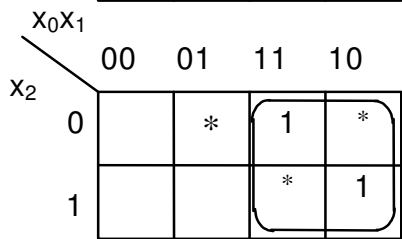
Для каждого контура в записи соответствующей ДНФ (КНФ) исключаются те аргументы, от которых функция не зависит. Иначе говоря, если для данного контура изменения значений x_i не приводят к изменению значения функции, то из записи этот аргумент опускается.

Минимизируем ПФ y_1 из табл. 2 в ДНФ:



Для y_1 диаграмма Вейча содержит 5 КЕ, которые входят в 4 контура:

$$\text{МНДФ } y_1 = x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_0 \vee \bar{x}_1x_0 \vee \bar{x}_2x_1\bar{x}_0.$$



Для y_2 диаграмма Вейча содержит 2 КЕ и три неопределенных значения; неопределенные значения (*), которые вошли в единственный контур, считаются допределенными единицами.

$$\text{МДНФ: } y_2 = x_1$$

Рисунок 11.

1.6. Минимизация систем переключательных функций

Рассмотрим цифровую схему S , имеющую N логических входов и L выходов, представляющих функции от входных аргументов (рис. 12.).

Если каждая из L функций может быть представлена как ПФ входных переменных x_1, x_2, \dots, x_N , то такая схема называется **комбинационной (КС)** и описывается системой уравнений (1.1).

Комбинационную схему часто называют логическим (N, L) – полюсником, а систему (1.1.) – системой собственных функций (N, L) – полюсника. Эквивалентными считаются КС, у которых собственные функции $y_i (i= 1..L)$ равны.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_N) \\ y_2 = y_2(x_1, \dots, x_N) \\ \dots \\ y_L = y_L(x_1, \dots, x_N) \end{cases} \quad (1.1)$$

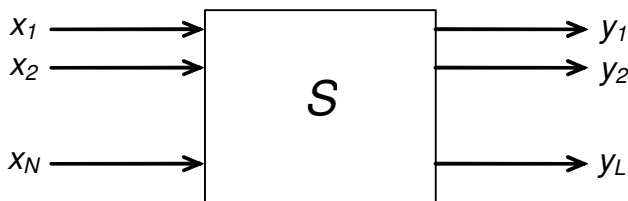


Рисунок 12.

Синтез КС состоит из двух этапов.

На первом этапе синтеза составляется система собственных функций, адекватно отражающая некоторое физическое описание работы будущего устройства.

На втором этапе система собственных функций реализуется некоторой комбинационной схемой, для построения которой используют набор логических элементов.

Для одной и той же системы собственных функций может быть построено несколько КС различной сложности. Минимизация ПФ, составляющих КС может быть отдельная, но может быть и совместная. Идея совместной минимизации состоит в покрытии диаграмм Вейча одинаковыми контурами, что дает одни и те же схемные блоки для различных ПФ.

1.7. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки

1. Привести примеры ПФ для $n=1,2,3,4,5,6,7,8$.
2. Записать ПФ ($n=2$) с номерами $i=1,14$.
3. Определить значения $K_i, i = \overline{0,15}$ для $n=2,3,4,5$.
4. Определить значения $M_i, i = \overline{0,15}$ для $n=2,3,4,5$.
5. Преобразовать ДНФ в КНФ: $x \vee \bar{x}yz, x \vee yz, xy \vee xz, \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z}$.
6. Преобразовать КНФ в ДНФ: $(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}), (x \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.
7. Преобразовать ПФ в КНФ (ДНФ): $\bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{z}, (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee z) \vee \bar{x} y, x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x} y z, \bar{x} \bar{y} \vee xz, (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x} y, x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x} y z$.
8. Преобразовать ПФ в СДНФ, построить диаграмму Вейча: $x \vee y \bar{z}, x \vee xy \vee z, xy \vee \bar{x} z \vee xyz, x \vee y \vee z, x \vee \bar{x} y \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$.
9. Преобразовать КНФ в СКНФ, построить диаграмму Вейча: $(x \vee y)(x \vee y \vee \bar{z}), (x \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee \bar{z}), (x \vee y)z, x(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.
10. Преобразовать СДНФ в СКНФ (аналитически и с помощью диаграмм Вейча): $xyz \vee xy \bar{z}, x \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} yz \vee \bar{x} \bar{y} z, xyz \vee \bar{x} \bar{y} z, xyz \vee \bar{x} yz$.
11. Преобразовать СКНФ в СДНФ (аналитически и с помощью диаграмм Вейча): $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z), (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}), (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z), (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.
12. Построить таблицы K_i и M_i для $n=2,3,4$.
13. Показать функциональную полноту базисов И, НЕ; ИЛИ, НЕ; И-НЕ; ИЛИ-НЕ.
14. Найти МДНФ и МКНФ и оценить их сложность:
 $(x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3)(x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3); (x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3)(x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3);$
 $\overline{x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3} (x_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3); (x_1 \vee x_3)(x_1 \bar{x}_2 \vee x_3); \overline{x_1 x_2 x_3} (x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3)$.

2. КОМБИНАЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА

2.1. Общие положения

Комбинационное цифровое устройство (КЦУ) — это преобразователь дискретной информации X в Y , причем входному двоичному слову X в данный момент времени однозначно и независимо от предыдущего состояния соответствует выходное слово Y в тот же момент времени. У КЦУ нет «памяти» о предистории процесса. ЦУ с «памятью» называются автоматами и будут рассмотрены далее.

Элементарными КЦУ являются логические элементы И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-ИЛИ-НЕ и т. п. Более сложными являются КЦУ, состоящие из элементарных и удовлетворяющие двум условиям:

- входы последующих ЛЭ связаны с выходами предыдущих (рис. 13,а);
- отсутствуют обратные связи с выходов последующих ЛЭ на входы предыдущих (замкнутые пути для сигналов) (рис. 13,б).

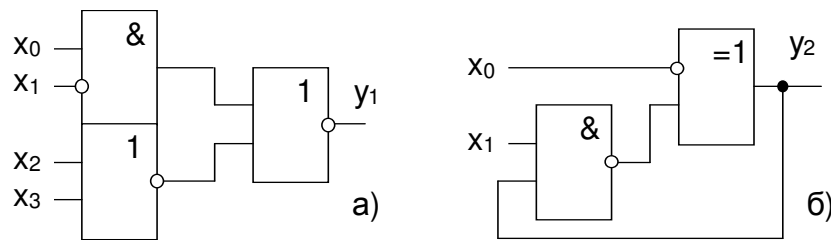


Рисунок 13.

Для КЦУ характерен **принцип дуальности** (следует из правила *де Моргана*). Если в КЦУ₁, реализующей ПФ $f(x_1x_2\dots x_n)$, заменить И на ИЛИ, ИЛИ на И, проинвертировать входы x_i , то полученная КЦУ₂ реализует $\overline{f(x_1x_2\dots x_n)}$.

2.2. Базовые интегральные схемы и их основные параметры

Логические **интегральные схемы (ИС)**, выпускаемые промышленностью, представлены широкой номенклатурой интегральных серий на основе биполярных и полевых транзисторов.

Серии ИМС отличаются по целому ряду параметров в зависимости от технологий их изготовления (ТТЛ, ТТЛШ, ЭСЛ, КМОП, n -МОП, p -МОП и другие).

К числу типовых параметров ИМС относятся:

1) **Коэффициент разветвления по выходу** $K_{разв}(N)$ — число входов одностипных ИС, которые одновременно могут быть подключены к выходу данной ИС (нагрузочная способность ИМС)

2) **Коэффициент объединения по входу** $K_{об}(N)$ — число входных сигналов данной ИС;

3) **Статические характеристики:**

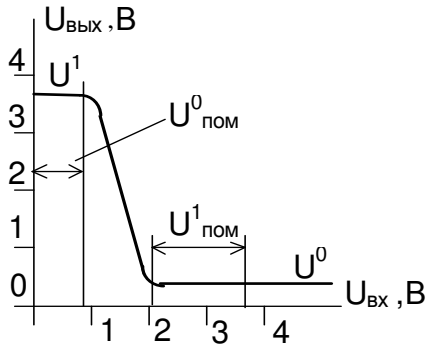
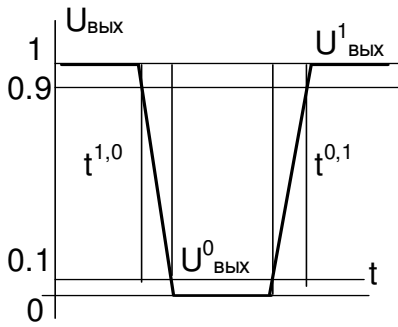


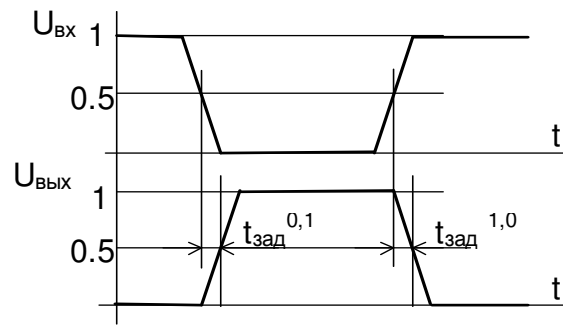
Рисунок 14.

- входная $I_{\text{вх}} = f_1(U_{\text{ВХ}})$
- выходная $U_{\text{вых}} = f_2(I_{\text{ВЫХ}})$
- передаточная $U_{\text{вых}} = f_3(U_{\text{ВХ}})$.

Типовая передаточная характеристика ТТЛ ИМС приведена на рис. 9, где показаны уровни помех на входе $U^1_{\text{ПОМ}}$ и $U^0_{\text{ПОМ}}$, вызывающие изменение сигнала на выходе (“срабатывание” элемента). Эти значения характеризуют помехоустойчивость схемы. Уровень логического нуля для ТТЛ ИМС $U^0 = 0 \dots 0.4 \text{ В}$, уровень логической единицы $U^1 = 2.4 - 4.5 \text{ В}$. Порог срабатывания по нулевому уровню составляет $\cong 0.8 \text{ В}$.



а)



б)

Рисунок 15.

4) **Временные параметры** (динамические) можно оценить из рис. 15.

Здесь $t^{0,1}$ и $t^{1,0}$ – время перехода из 1 в 0 и наоборот (рис. 15, а) и $t^{\text{зад } 0,1}$ и $t^{\text{зад } 1,0}$ – время задержки включения и выключения ЛЭ (рис. 15, б)

5) **Вид реализуемой ПФ** (И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-ИЛИ-НЕ и т.д.). В качестве примера на рис. 16, а показано УГО ЛЭ 2-2-ЗИ-ИЛИ-НЕ.

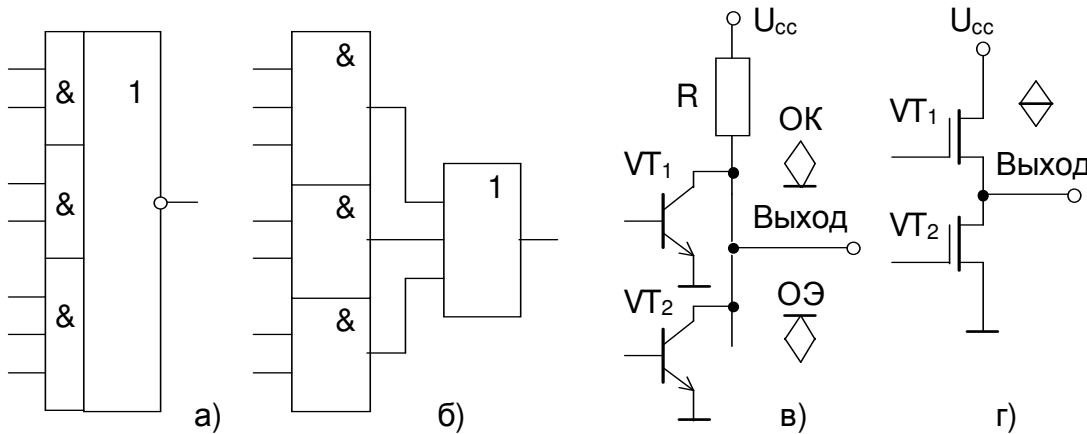


Рисунок 16.

б) **Выходы ИС.**

Обычные выходы ИМС ТТЛ(Ш) нельзя объединять (соединять). Это делается только логически (с помощью схем И-ИЛИ), как показано на рис. 16, б или используя монтажное ИЛИ для ИС с открытым коллектором или эмиттером (рис. 16, в).

ИС с тристабильным выходом позволяют отключить выход переводом его в высокоимпедансное состояние (ВИС, Z-состояние) (рис. 16, г).

- 1) Логический ноль на выходе U^0 , $VT1$ закрыт, $VT2$ - открыт;
- 2) Логическая единица на выходе U^1 , $VT1$ открыт, $VT2$ - закрыт;
- 3) ВИС состояние, $VT1$ и $VT2$ закрыты.

Выходы нескольких ИМС с тристабильным выходом могут быть объединены, при этом только одна из этих ИМС включена (“выбрана”) сигналом разрешения CS (*chip select*), а выходы остальных переведены в ВИС. На рис. 17 показан управляемый двунаправленный инвертирующий буфер, позволяющий передавать информацию в том или ином направлении в зависимости от управляющего входа Т. Если $T=0$, то разрешена передача от А к В, если $T=1$, то разрешена передача от В к А. Такая коммутация возможна, поскольку всегда выход одного из инверторов находится в высокоимпедансном состоянии.

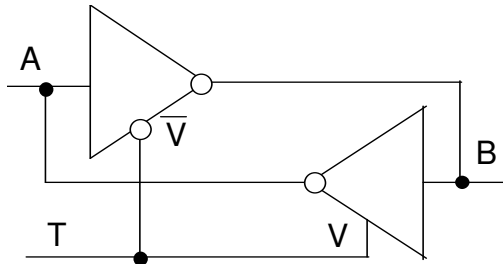


Рисунок 17.

Комбинация из нескольких подобных устройств позволяет направлять потоки информации в параллельном коде, образуя так называемую *шину передачи данных*.

Параметры интегральных микросхем серий ТТЛ, ТТЛШ, ЭСЛ, КМОП можно найти в соответствующих справочниках.

2.3. Типовые комбинационные устройства

Дешифраторы (декодеры)

Дешифратором (декодером) называется КЦУ, у которого каждой входной комбинации сигналов $\{x_i\}$ соответствует активное состояние только одного выходного сигнала. **Полный дешифратор (ДШ)** с n входами имеет 2^n выходов. Таблица истинности и условное графическое обозначение (УГО) дешифратора К155ИД3 (4x16, L-активные выходы, выбор кристалла) приведены, соответственно в табл. 3 и на рис. 18.

Таблица 3

x_3	x_2	x_1	x_0	y_0	y_1	y_2	...	y_{15}
0	0	0	0	0	1	1	...	1
0	0	0	1	1	0	1	...	1
0	0	1	0	1	1	0	...	1
0	0	1	1	1	1	1	...	1
...
1	1	1	1	1	1	1	...	0

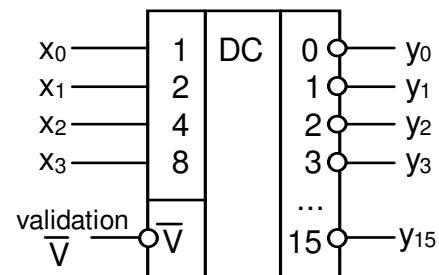


Рисунок 18.

ПФ, описывающие выходные сигналы ДШ выглядят следующим образом:
 $y_0 = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} \overline{V}$, $y_1 = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 \overline{V}$, ..., $y_{15} = x_3 x_2 x_1 x_0 \overline{V}$.

Неполный дешифратор при n входах имеет число выходов $N < 2^n$. В виде серийных ИС выпускаются только ДШ 4x10. Такие дешифраторы работают в двоично-десятичном коде 8-4-2-1 и используются для индикации результата в десятичном коде (К155ИД1, К561ИД1).

Каскадирование дешифраторов позволяет увеличить число входов и выходов. На рис. 19,а показан ДШ 4x16 на базе двух неполных ДШ 4x10, а на рис. 19,б – ДШ

5x32 на базе ДШ 4x16, в построении которого использованы управляющие входы V . Выходные сигналы $y_0 - y_{15}$ формируются с помощью первого ДШ при условии $x_4 = 0$, а сигналы $y_{16} - y_{31}$ формируются на выходах второго ДШ при $x_4 = 1$.

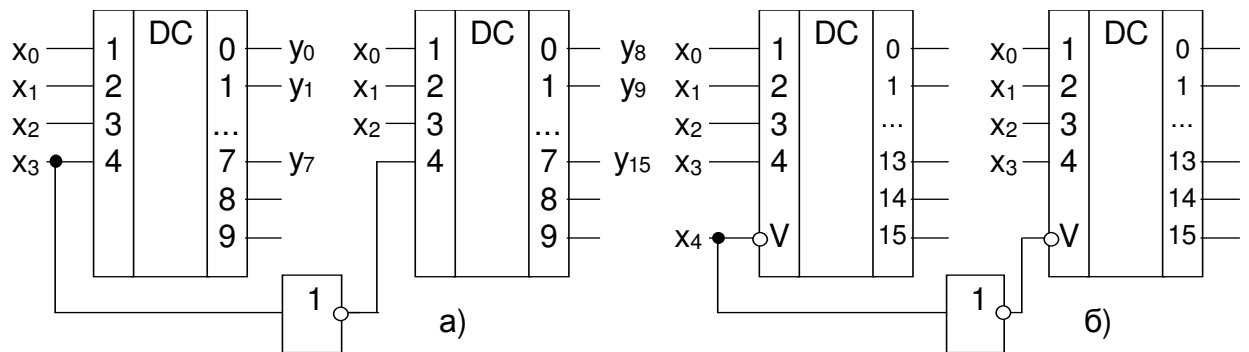


Рисунок 19.

Шифраторы (кодеры)

Шифраторы выполняют обратное по отношению к дешифраторам преобразование единичного (унитарного) кода на входе x_i , $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$ в n -разрядный позиционный двоичный код. Например, для восьмивходового шифратора активному значению одного из входных сигналов $x_i = 0$ соответствует комбинация выходных сигналов $y_2 - y_0$ (табл. 4).

Таблица 4

x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	y_2	y_1	y_0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Для шифратора должно выполняться условие $x_i \vee x_j = 1$ при $i \neq j$ (в случае L -активных входов). Если сигналы на входы x_i поступают от независимых источников, то это условие нереализуемо. В этом случае *каждому входу назначается свой приоритет*. Будем считать, что чем выше номер входа i , тем выше его приоритет. **Приоритетный шифратор** вырабатывает двоичный код числа для активного входа с наибольшим номером. Примером приоритетного ДШ 8x3 может служить К155ИВ1.

Мультиплексоры

С помощью **мультиплексоров** осуществляется коммутация на выход одного из нескольких информационных входных сигналов D_i в соответствии с заданным кодом на управляющих входах $\{x_i\}$. УГО мультиплексора “4→1” приведено на рис. 20.

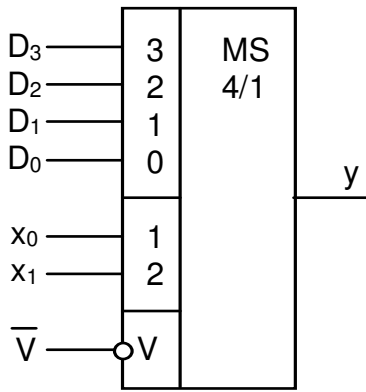


Рисунок 20.

Аналитическое выражение для выходного сигнала y в СДНФ выглядит следующим образом:

$$y = \bar{V} (\bar{x}_1 \bar{x}_0 D_0 \vee \bar{x}_1 x_0 D_1 \vee x_1 \bar{x}_0 D_2 \vee x_1 x_0 D_3)$$

Сопоставляя формулы для дешифратора и мультиплексора можно отметить, что для каждого входа D_i комбинации сигналов управления $\{x_i\}$ выглядят аналогично комбинациям входных сигналов в дешифраторе. Следовательно, **составной частью мультиплексора является дешифратор.**

Примерами серийных мультиплексоров являются микросхемы К155КП5 (8→1), К155КП2 (2х4→1).

Демультимплексоры

Демультимплексоры представляют собой КЦУ для коммутации информационного входного сигнала D на один из выходов в соответствии с заданным кодом на управляющих входах $\{x_i\}$, решая тем самым задачу, обратную мультиплексированию. УГО демультимплексора “1→4” показано на рис. 21.

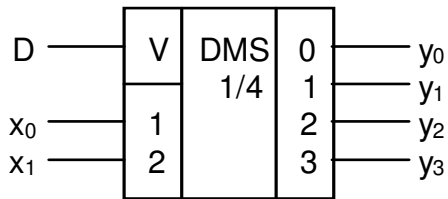


Рисунок 21.

Логические функции, описывающие выходные сигналы демультимплексора, имеют вид:

$$y_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_0 D, \quad y_1 = \bar{x}_1 x_0 D, \\ y_2 = x_1 \bar{x}_0 D, \quad y_3 = x_1 x_0 D$$

Подобными выражениями описываются выходные сигналы дешифраторов, если принять

$D = \bar{V}$. В качестве примера демультимплексора “1→8” рассмотрим сдвоенный дешифратор К155ИД4 [1-4], как показано на рис. 22.

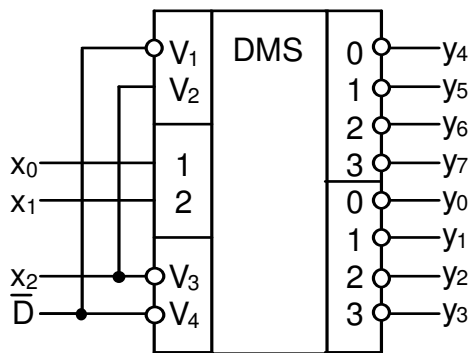


Рисунок 22.

Информационный сигнал \bar{D} проходит на выходы y_0 - y_7 демультимплексора в зависимости от значения набора $x_2 x_1 x_0$. Если *схему на рис. 22. рассматривать как дешифратор*, то вход \bar{D} может служить сигналом синхронизации или стробирования выходов. При $\bar{D} = 1$ на всех выходах схемы установится логическая единица. Каскадным включением двух ИМС К155ИД4 и ЛЭ “НЕ” можно получить дешифратор на 4 входа и 16 выходов.

Сумматоры и АЛУ

Сумматоры представляют собой КЦУ для сложения n разрядных двоичных чисел. Сумматоры (рис. 23.) являются основными вычислительными устройствами

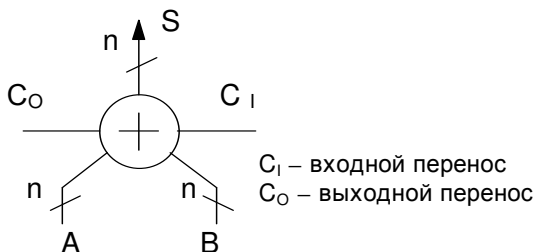


Рисунок 23.

в арифметическо-логических блоках микропроцессоров и микроЭВМ, от их быстродействия существенно зависит скорость вычислений. Для многоразрядных чисел быстродействие сумматоров определяется в значительной мере скоростью распространения переноса при сложении.

При формировании результата в i -ом разряде необходимо учесть значения чисел в этом разряде a_i и b_i , а также перенос из предыдущего разряда c_i . Каждый разряд сумматора формирует значение суммы в этом разряде s_i и перенос в следующий разряд c_{i+1} (табл. 5).

Таблица 5

a_i	b_i	c_i	s_i	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

ПФ, описывающие работу одноразрядного двоичного сумматора, могут быть представлены в базисе И-НЕ следующим образом:

$$s_i = \overline{a_i} \overline{a_i x} \overline{a_i x x} \text{ , где } x = \overline{b_i} \overline{b_i c_i} \overline{b_i c_i c_i} \text{ ;}$$

$$c_{i+1} = \overline{a_i c_i} \overline{a_i b_i} \overline{b_i c_i} \text{ .}$$

Схема двоичного 4-разрядного сумматора, составленного из одноразрядных сумматоров SM, представлена на рис. 24.

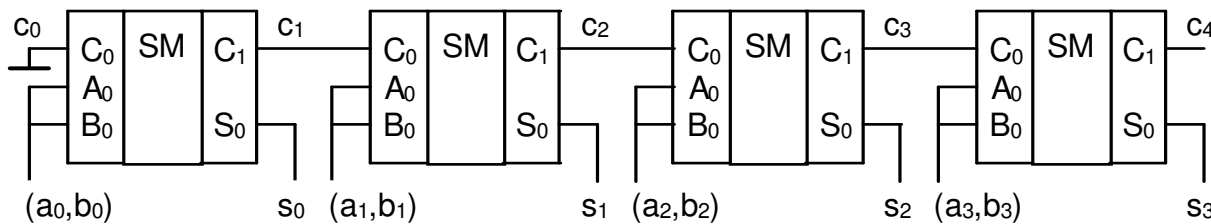


Рисунок 24.

Данный сумматор позволяет складывать два двоичных числа A_3-A_0 и B_3-B_0 , формируя результат S_3-S_0 и перенос C_4 в следующий разряд. Перенос между разрядами сумматора в схеме на рис. 24 последовательный, что замедляет получение результата при значительном числе разрядов. Увеличение быстродействия сумматоров достигается путем использования параллельного переноса с использованием специальных схем.

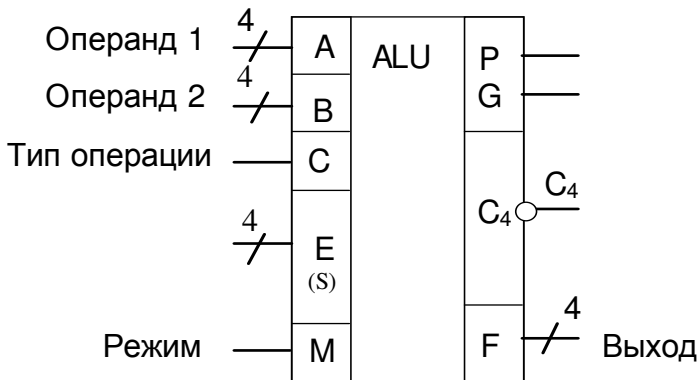


Рисунок 25.

($E_3E_2E_1E_0$). Логические операции выполняются над операндами поразрядно ($A_3-B_3, A_2-B_2, A_1-B_1, A_0-B_0$). При выполнении арифметических операций АЛУ представляет собой четырехразрядный сумматор с параллельным переносом.

На выходах P и G формируются два сигнала $g_{i+1} = a_i b_i$ и $p_{i+1} = a_i \vee b_i$, с помощью которых получается параллельный перенос c_{i+1} , зависящий от всех предыдущих переносов сумматора

$$c_{i+1} = g_{i+1} \vee p_{i+1} g_{i+1} \vee p_{i+1} p_i g_{i-1} \vee \dots \vee p_{i+1} p_1 \dots c_0 \text{ .}$$

Комбинационные сумматоры являются основной частью АЛУ – арифметическо-логического устройства — основного операционного узла любого МПУ. В качестве примера можно рассмотреть четырехразрядное АЛУ К155ИП3 (рис. 25), работающая в двух возможных режимах: арифметические операции ($M = 0$) и логические операции ($M = 1$). Выбор операции задается кодом E

Для организации параллельного переноса в 4-м-разрядных АЛУ используются ИМС ускоренного переноса (К155ИП4, К531ИП4).

2.4. Синтез комбинационных схем на мультиплексорах и дешифраторах

Любую ПФ n аргументов можно реализовать на мультиплексоре $2^n \rightarrow 1$, подав на его адресные входы сигналы $(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$, а на информационные входы D_i , $i=0 \dots (2^n-1)$ значения 0 и 1, соответствующие конstituентам 0 и 1 из таблицы истинности ПФ. Это следует из вышеприведенного аналитического описания сигнала на выходе мультиплексора.

Таким образом, для ПФ четырех аргументов потребуется мультиплексор $16 \rightarrow 1$. Однако, если подавать на информационные входы не только константы 0 и 1, но и аргументы x_i или ПФ от некоторых аргументов, то потребуется мультиплексор с меньшим числом адресных входов.

Реализуем ПФ у четырех аргументов, представленную диаграммой Вейча (рис. 26, а), с помощью мультиплексора $8 \rightarrow 1$.

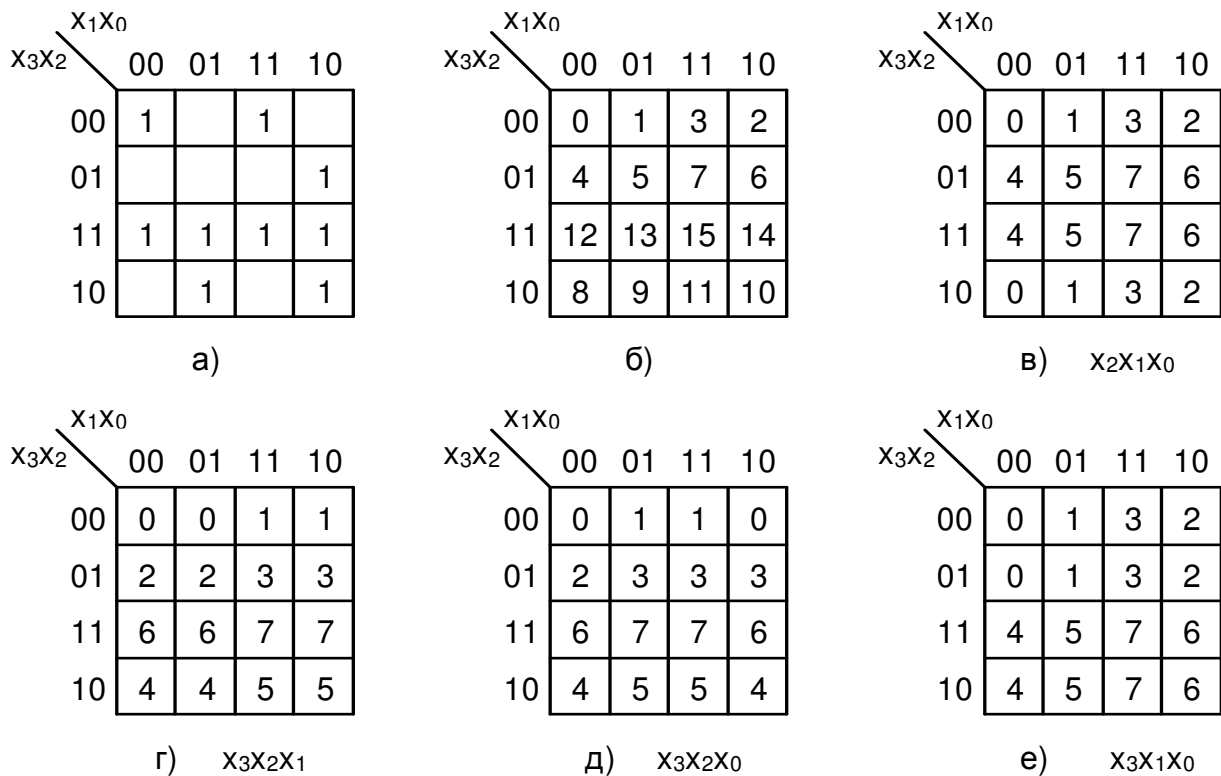


Рисунок 26.

На три адресных входа такого мультиплексора можно подать три из четырех переменных $x_3x_2x_1x_0$. Этими тремя переменными будет задаваться адрес входного канала мультиплексора D_i ($0 \dots 7$). Клетки диаграмм Вейча четырех переменных нумеруются числами от 0 до 15 (рис. 26, б). Аналогично можно пронумеровать клетки диаграмм Вейча адресами каналов i мультиплексора, не учитывая четвертый аргумент. Таких диаграмм Вейча будет 4 – по числу возможных сочетаний из 4 аргументов по 3 (рис. 26, в- е).

На рис. 26, в-е указаны тройки аргументов, взятых в качестве адресных. Числа i (номера каналов) разбили указанные диаграммы Вейча на 8 частей, каждая из которых представляет диаграмму Вейча из двух клеток для одного аргумента, не

являющегося адресным, соответственно x_3, x_0, x_1, x_2 . Эти восемь диаграмм Вейча одной переменной определяют функции $D_i = \varphi_i(x_j)$, которые надо подать на информационные входы мультиплексора. Из рис. 26, а, в следует, что $D_0 = \bar{x}_3$, $D_1 = x_3$, $D_2 = x_3$, $D_3 = \bar{x}_3$, $D_4 = x_3$, $D_5 = x_3$, $D_6 = 1$, $D_7 = x_3$.

Таблица 6

Вход	Адресные входы мультиплексора			
	$x_2x_1x_0$	$x_3x_2x_1$	$x_3x_2x_0$	$x_3x_1x_0$
D_0	\bar{x}_3	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_2
D_1	x_3	x_0	x_1	0
D_2	x_3	0	x_1	x_2
D_3	\bar{x}_3	\bar{x}_0	0	\bar{x}_2
D_4	x_3	x_0	x_1	x_2
D_5	x_3	\bar{x}_0	\bar{x}_1	1
D_6	1	1	1	x_2
D_7	x_3	1	1	1

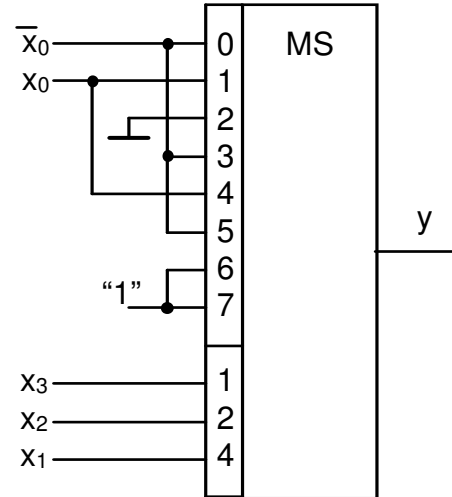


Рисунок 27.

В табл. 6 приведены значения D_i для всех возможных комбинаций адресных сигналов, полученных из рис. 26, а, в-е. Предпочтение следует отдать той схеме, на информационные входы которой подается большее число констант 0 и 1. В этом смысле варианты схемы при задании адресов аргументами $x_3x_2x_1$, $x_3x_2x_0$ и $x_3x_1x_0$ эквивалентны (рис. 27).

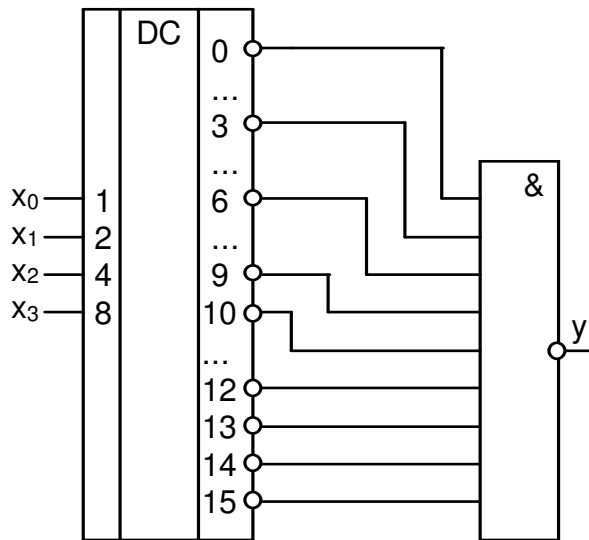


Рисунок 28.

Для построения КЦУ можно использовать и дешифраторы. Так как активное значение сигнала на каждом выходе дешифратора соответствует одному из наборов входных сигналов, то, объединяя с помощью логических элементов выходные сигналы дешифратора, соответствующие конstituентам 0 или 1 в задании ПФ, можно реализовать комбинационную схему с числом аргументов, не превышающем число входов дешифратора.

Для вышеприведенной функции четырех аргументов СДНФ, преобразованная по закону де Моргана в базис И-НЕ, выглядит следующим образом: $y = \overline{K_0 K_3 K_6 K_9 K_{10} K_{12} K_{13} K_{14} K_{15}}$, где K_i - конstituенты 1 функции y .

Комбинационная схема y показана на рис. 28. При построении использован дешифратор 4x16 с L-активными выходными сигналами и логический элемент И-НЕ.

2.5. Быстродействие КЦУ и эффект состязаний в них (“гонки”)

Логические элементы, входящие в состав КЦУ, переключаются с задержками $t_{зад}^{0,1}$, поэтому выходные сигналы КЦУ устанавливаются (изменяются) по окончании переходных процессов в последовательно соединенных элементах. Эту задержку в появлении выходных сигналов надо учитывать в работе устройства, анализируя цепочку ЛЭ, которая дает максимальную задержку. Проанализируем схему на рис. 29.

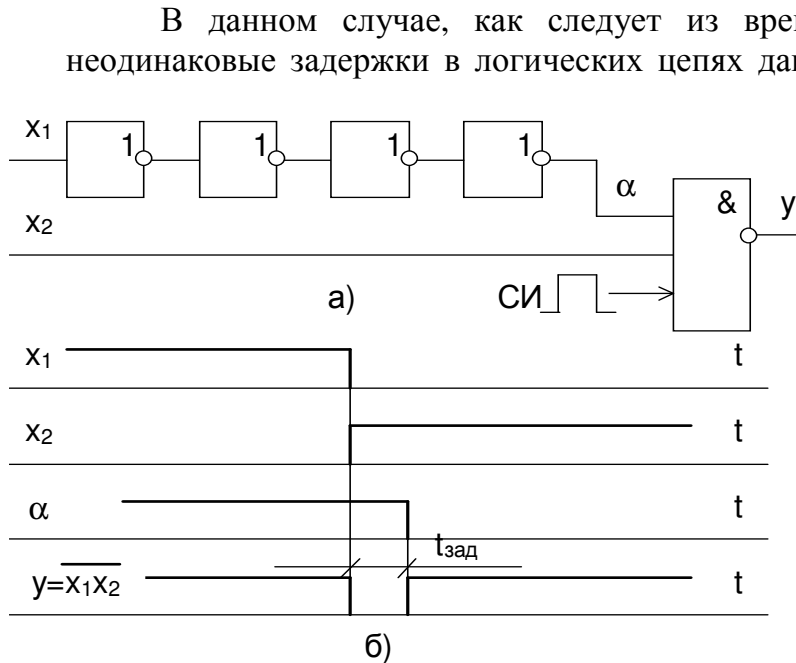


Рисунок 29.

вызвана состязаниями (“гонками”) в цепях распространения сигнала. С “гонками” можно бороться следующими способами:

- 1) задавая такой порядок смены входных сигналов, что помехи вообще не появляются;
- 2) уравнивая задержки в «опасных» участках;
- 3) вводя синхронизацию выходных сигналов, как показано на рис.29.; это наиболее эффективный способ.

В частности, в мультиплексорах, дешифраторах можно синхронизировать выход, блокируя помехи, вызванные “гонками”.

2.6. Контрольные вопросы и задания для самоподготовки

1. Построить логические схемы, реализующие следующие ПФ в базисе И-НЕ. Используя принцип дуальности построить схемы в базисе ИЛИ-НЕ:

$$f_1 = K_0VK_8, \quad f_2 = K_1VK_3, \quad f_3 = K_0VK_1VK_2, \quad f_4 = K_1VK_2, \quad f_5 = M_0M_1, \quad f_6 = M_1M_2M_3, \\ f_7 = M_0M_3, \quad f_8 = M_0M_2.$$

2. Провести структурный синтез КС в базисе ИЛИ-НЕ (И-НЕ) по заданным ПФ:

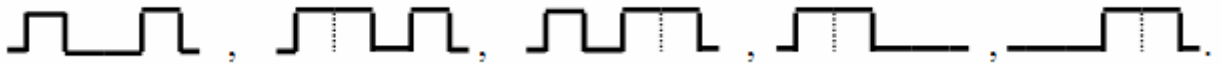
$$f_1 = x \vee x\bar{y} \vee xz, \quad f_2 = x(x \vee \bar{y})(x \vee z), \quad f_3 = x \vee z, \quad f_4 = x(y \vee z).$$

3. Пояснить принцип дуальности КС на примере структурного синтеза схемы по заданной ПФ: $f_1 = xy \vee \bar{x}z$, $f_2 = (x \vee y)(\bar{x} \vee z)$, $f_3 = x \vee \bar{y} \vee z$, $f_4 = x\bar{y}z$.

4. Провести синтез КС, реализующей ПФ в базисе И-НЕ: $x \vee yz$; $xyz \vee \bar{z}$; $x \vee xyz$; $xyz \vee \bar{y}\bar{z}$. Построить временные диаграммы сигналов при возбуждении КС сигналами 4-разрядного двоичного счетчика.

5. Провести синтез КС, реализующей ПФ в базисе ИЛИ-НЕ: $(x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)$; $(x \vee \bar{y})(y \vee z)$; $(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z})$; $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)$. Построить временные диаграммы сигналов при возбуждении КС сигналами 4-разрядного двоичного счетчика.

6. Записать систему функций выходов полного двоичного дешифратора при $n=2,3,4,5$. Перевести в базис И-НЕ (ИЛИ-НЕ). Построить схему дешифратора и привести условное обозначение. Нарисовать диаграммы сигналов на выходах двоичного дешифратора при периодической схеме кодовых слов на его входах.
7. Записать систему функций выходов неполного дешифратора в кодах 2-4-2-1, 4-2-2-1, 5-2-1-1, 5-4-2-1. Построить схему.
8. Синтезировать шифратор с числом входов 4,6,10,14 в базисах И-НЕ(ИЛИ-НЕ). Нарисовать схему и привести условное обозначение. Пояснить принцип приоритетности входов шифратора.
9. Записать выражение для функции выхода мультиплексора для $n= 2,3,4,5$. Нарисовать схему и привести условное обозначение.
10. Построить схему на основе мультиплексора для генерирования сигналов



11. Нарисовать структурную схему n - разрядного ПЗУ чисел, $n = 2,3,4,5,6,7,8$ на основе мультиплексора.
 12. Записать выражение для функций выходов демультиплексора при $n=2,3,4,5$. Нарисовать схему и привести условное обозначение.
 13. Построить дешифратор на основе демультиплексора при $n=2,3,4,5$.
 14. Пояснить принцип двоичного суммирования чисел при $n=4,5,6,7$. Построить схему двоичного сумматора и привести условное обозначение.
 15. Пояснить принцип каскадирования одноразрядных сумматоров при $n=2,3,4,5$.
 16. Пояснить организационную структуру АЛУ.
-

3. ЦИФРОВЫЕ АВТОМАТЫ

3.1. Основные понятия абстрактной теории цифровых конечных автоматов

Выходные сигналы комбинационных цифровых устройств полностью определяются в любой момент времени комбинацией сигналов на их входах. В этой связи КЦУ иногда называют автоматами без памяти, т.е. КЦУ не позволяют учитывать значения логических переменных, появившихся ранее. Многие же задачи требуют учитывать предысторию процесса.

В общей теории автоматов вводится понятие *абстрактный автомат* – это математическая идеализация реального объекта или системы, перерабатывающей некоторую входную информацию. Это понятие не связано с конкретным физическим смыслом; абстрактная теория автоматов своей *главной задачей* имеет изучение общих особенностей поведения автоматов, решая в основном *вопросы анализа их внешнего функционирования*.

Прикладные разделы теории автоматов рассматривают техническую реализацию автоматов на той или иной физической базе. В прикладном, техническом смысле *цифровым автоматом* (последовательностным устройством) называется более сложный, чем КЦУ, преобразователь дискретной информации, имеющий некоторое конечное число различных внутренних состояний (так называемый *конечный цифровой автомат – КЦА*).

Под воздействием входных сигналов X (входного слова) автомат последовательно переходит из одного состояния в другое и выдает выходной сигнал (выходное слово) Y . Выходное слово Y определяется в общем случае поступившим *входным* словом X и *внутренним* состоянием автомата S , которое в свою очередь явилось результатом воздействия на автомат предыдущего входного сигнала.

Введем понятие *автоматного (дискретного) времени*. Для КЦА автоматное время может представлять последовательность событий, например, испытаний, номер во входной последовательности, и, наконец, реальное время t . Автоматное время удобно представлять в виде последовательности $1, 2, \dots, n$. Если интервал между двумя последовательными моментами автоматного времени постоянен, строго соответствует физическому времени, то такой автомат называется синхронным. Для асинхронного автомата нет жесткого масштабного соответствия между физическим временем и последовательностью событий в нем.

КЦА рассматривается как *абстрактный конечный автомат (АКА)*, если не исследуется его внутренняя структура. Для задания АКА вводится три конечные множества:

- | | |
|------------------------|---------------------------------------|
| – входных сигналов | $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$; |
| – выходных сигналов | $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_m\}$; |
| – внутренних состояний | $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_p\}$ |

Абстрактный автомат, как преобразователь информации, функционирует в дискретном (автоматном) времени по правилам, которые задаются двумя характеристическими функциями определенными на трех алфавитах: $X \in \{x_i\}, i = \overline{1, l}; Y \in \{y_i\}, i = \overline{1, m}; S \in \{S_k\}, k = \overline{1, p}$.

Определение *автомата Мили (Mealy)*

$$\begin{cases} Y^n = F(X^n, S^n) \\ S^{n+1} = G(X^n, S^n) \end{cases} \quad \text{– функции выходов } Y^n \text{ и переходов } S^{n+1} \quad (3.1)$$

Определение *автомата Мура (Moore)*

$$\begin{cases} Y^n = \Phi(X^n) \\ S^{n+1} = G(X^n, S^n) \end{cases} \quad \text{– функции выходов } Y^n \text{ и переходов } S^{n+1} \quad (3.2)$$

Эти функции лишь *декларируют* переходы типа $X^n, S^n \rightarrow Y^n, S^{n+1}$, но не уточняют, какими конкретно средствами задается эта функциональная связь.

3.2. Формы задания абстрактных конечных автоматов

К формам и средствам представления АКА предъявляются следующие требования:

- ⇒ *полнота представления* – исчерпывающее описание всех компонентов АКА;
- ⇒ *однозначность представления* – недопущение какой-либо неоднозначности или неопределенности в описании АКА;
- ⇒ *простота получения* – детерминированный и достаточно простой переход от описания АКА в некоторой исходной форме (словесное описание) к описанию в заданной форме;
- ⇒ *наглядность представления* – интерпретация с достаточной наглядностью всех основных свойств АКА;
- ⇒ *удобство в использовании* – применимость форм для преобразования на этапах синтеза *реальных конечных автоматов (РКА)*.

Представление АКА с помощью таблиц переходов и выходов

Это представление одно из самых удобных и широкоупотребляемых. Таблицы переходов и выходов для АКА Мили имеют число строк, равное числу символов во входном алфавите (т. е. l) и число столбцов, равное числу символов в алфавите внутренних состояний (т.е. p). В клетках проставляются будущие внутренние состояния S^{n+1} и текущие выходные сигналы Y^n . Часто для компактности записи таблицы переходов и выходов представляют в виде *совмещенной* таблицы.

Пример. Для некоторого конкретного автомата Мили ($X \in \{x_1, x_2, x_3\}, Y \in \{y_1, y_2\}, S \in \{S_1, S_2, S_3\}$) таблицы переходов, выходов и *совмещенная* таблица представлены, соответственно, табл. 7, табл. 8 и табл. 9

Таблица 7

S_k	S_k		
x_i	S_1	S_2	S_3
x_1	S_1	S_3	S_2
x_2	S_3	S_1	S_2
x_3	S_1	S_2	S_1

Таблица 8

S_k	S_k		
x_i	S_1	S_2	S_3
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1
x_3	y_2	y_2	y_1

Таблица 9

S_k	S_k		
x_i	S_1	S_2	S_3
x_1	S_1/y_1	S_3/y_1	S_2/y_2
x_2	S_3/y_1	S_1/y_2	S_2/y_1
x_3	S_1/y_2	S_2/y_2	S_1/y_1

Для АКА Мура таблицы выходов и переходов отдельно не строятся ввиду простоты представления таблицы выходов.

Пример. Для некоторого конкретного автомата Мура ($X \in \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y \in \{y_1, y_2\}$, $S \in \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$) совмещенная (отмеченная) таблица представлена табл.10

Таблица 10

Вых. сигнал	y_1	y_1	y_2	y_1
S_k	S_1	S_2	S_3	S_4
X_i				
x_1	S_1	S_3	S_4	S_2
x_2	S_4	S_2	S_1	S_3
x_3	S_2	S_1	S_4	S_2

Все указанные таблицы (табл. 7 - 10) соответствует полностью определенным АКА Мили и Мура. При частично определенных АКА соответствующие клетки помечаются (*).

Основное достоинство табличного представления является его предельная простота составления и непосредственное отображение формул (3.1) и (3.2).

Представление АКА с помощью графа

Построение графов для АКА Мили и Мура сходно, за исключением отображения выходных сигналов. Внутренние состояния отображаются вершинами графа, внутренние переходы – направленными дугами. Дуги помечаются входными сигналами, которые вызывают переход. При этом для АКА Мили указывается еще выходной сигнал, сопровождающий данный переход. Выходные сигналы АКА Мура указываются у вершин графа, так как их появление не зависит от входных сигналов (в соответствии с 3.2).

Для АКА Мили граф, соответствующей табл. 9, выглядит, как показано на рис. 30., а для автомата Мура (табл. 10.) граф показан на рис. 31.

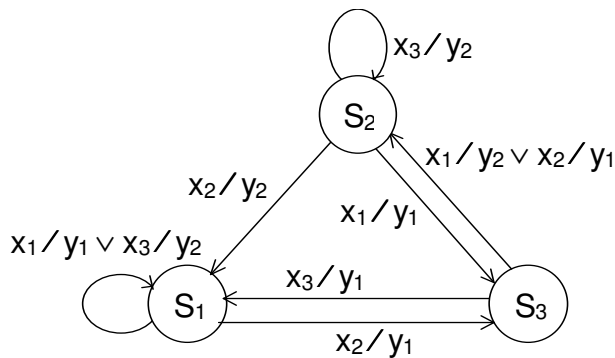


Рисунок 30.

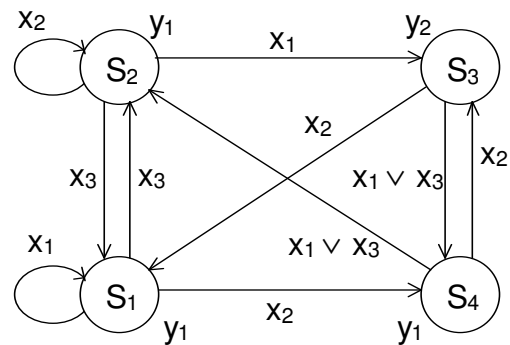


Рисунок 31.

Графическое представление удобно и позволяет сократить число ошибок. С помощью графа легко осуществить словарное преобразование, т. е. получить некоторую выходную последовательность символов при подаче входного слова из d символов.

Пример. Пусть для АКА Мура входное слово $X = \{x_2, x_2, x_1, x_1, x_2\}$. Считая исходным состояние автомата S_1 , получим последовательность состояний $S = \{S_4, S_3, S_4, S_2, S_2\}$ и слово выходных символов $Y = \{y_1, y_2, y_1, y_1, y_1\}$.

Матричное представление АКА

Матричное представление автомата соединяет черты графического и табличного представлений. Напоминая по внешнему виду таблицу, оно, тем не менее, прежде всего отражает структурные особенности графа.

Матрица АКА Мили – квадратная, строки и столбцы соответствуют текущим и последующим состояниям. В клетках матрицы помечаются условия перехода, т. е. необходимые входные сигналы и появляющиеся при этом выходные сигналы. Матрица АКА Мура имеет дополнительный столбец сигналов выходов, зависящих от внутренних текущих состояний.

Матричное представление для вышеприведенных АКА Мили и Мура показано, соответственно, в табл. 11 и 12.

Таблица 11

S_k^{n+1} S_k^n	S_1	S_2	S_3
S_1	$x_1/y_1 \vee x_3/y_2$	–	x_2/y_1
S_2	x_2/y_2	x_3/y_2	x_1/y_1
S_3	x_3/y_1	$x_1/y_2 \vee x_2/y_1$	–

Таблица 12

S_k^{n+1} S_k^n	S_1	S_2	S_3	S_4	y_j^n
S_1	x_1	x_3	–	x_2	y_1
S_2	x_3	x_2	x_1	–	y_1
S_3	x_2	–	–	$x_1 \vee x_3$	y_2
S_4	–	$x_1 \vee x_3$	x_2	–	y_1

Матрица переходов позволяет с достаточной простотой обнаруживать: 1) изолированные вершины; 2) тупиковые вершины; 3) преходящие вершины (к которым нет переходов); 4) переменные (нормальные) вершины.

Пример. Для некоторого автомата Мура матрица переходов выглядит, как показано в табл. 13, из чего следует:

- S_1 – тупиковая вершина;
- S_3 – изолированная вершина;
- S_4 – преходящая вершина;
- S_2 – переменная вершина.

Таблица 13

S_k^{n+1} S_k^n	S_1	S_2	S_3	S_4	y_j^n
S_1	$x_1 \vee x_2$	–	–	–	y_1
S_2	x_2	x_1	–	–	y_1
S_3	–	–	$x_1 \vee x_2$	–	y_2
S_4	x_2	x_1	–	–	y_1

3.3. Абстрактный синтез конечных автоматов

Основная задача любого конечного автомата – дискретное преобразование информации. Допустимо предположить наличие *эквивалентных* автоматов, которые одинаково осуществляют это преобразование.

Эквивалентность конечных автоматов

Два АКА будем считать *эквивалентными*, если выполняются следующие условия:

- ⇒ Входные и выходные алфавиты не содержат внутри себя тождественных или повторяющихся символов и могут быть взаимно однозначно отображены друг на друга.
- ⇒ Оба автомата определены на одном и том же классе допустимых входных последовательностей символов.
- ⇒ При подаче на АКА одинаковых входных последовательностей на выходах появляются одинаковые (может быть со сдвигом на конечное число тактов автоматного времени) выходные последовательности.

Если длина входных последовательностей не ограничена, то АКА обладают полной эквивалентностью. Если длина последовательности – k символов, то автоматы k -эквивалентны. Это более слабая эквивалентность, так как на $k+1$ -ом символе может наступить неэквивалентность.

Эквивалентные преобразования конечных автоматов

Рассмотрим два АКА Мили и Мура, заданные с помощью своих графов (рис. 32, а,б). Положим их начальные состояния S_1 и S_1^* . Подадим на входы АКА одно и то же входное слово $X_{7,1} = \{x_1, x_2, x_2, x_1, x_1, x_2, x_2\}$. Тогда будем иметь:

Автоматное время	1	2	3	4	5	6	7	8	
Входное слово	$X_{7,1}$	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2	
АКА Мили	S_k^n	S_1	S_3	S_2	S_3	S_1	S_3	S_2	S_3
	Y_j^n	y_1	y_1	y_2	y_2	y_1	y_1	y_2	
АКА Мура	S_k^{*n}	S_1^*	S_4^*	S_3^*	S_5^*	S_2^*	S_4^*	S_3^*	S_5^*
	Y_j^n	y_1	y_1	y_1	y_2	y_2	y_1	y_1	y_2

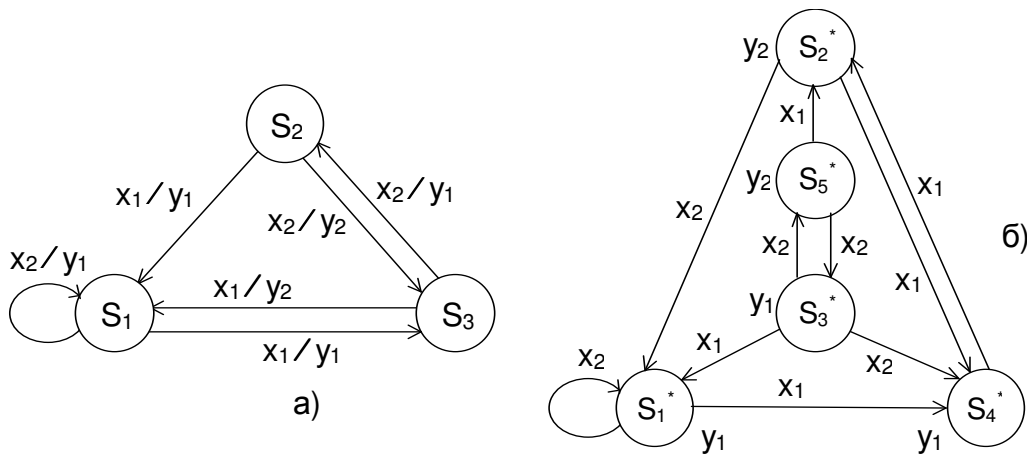


Рисунок 32.

Это эквивалентные АКА, они ведут себя одинаково, с той лишь разницей, что выходная последовательность АКА Мура запаздывает на один такт автоматного времени по отношению к выходной последовательности АКА Мили. Первый выходной символ АКА Мура в этой связи игнорируется.

Переход от автомата Мили к автомату Мура

С учетом того, что выходной сигнал эквивалентного АКА Мура отстает на один такт автоматного времени, выходной сигнал в клетке с координатами $(S_k, x_i)^n$ совмещенной таблицы АКА Мили будет определять выходной сигнал для будущего внутреннего состояния S_b^{n+1} автомата Мура.

Таким образом, структура автомата Мура будет определяться парами S_b^{n+1}/y_j^n в клетках исходной таблицы с координатами $(S_k, x_i)^n$ автомата Мили. Поскольку в этой таблице одним и тем же состоянием S_b^{n+1} могут в различных клетках соответствовать различные выходные сигналы (т. е. переход в S_b^{n+1} может быть под воздействием различных входных сигналов x_i^n и при этом могут быть различные выходные сигналы y_j^n), то одному и тому же внутреннему состоянию АКА Мили могут соответствовать несколько внутренних состояний автомата Мура, каждое из которых определяется неповторяющейся парой S_b^{n+1}/y_j^n . Эти состояния можно закодировать координатами клетки $(S_k, x_i)^n \rightarrow (k, i)$.

Алгоритм перехода от АКА Мили к АКА Мура может быть представлен в следующем виде:

1. Выписать из *совмещенной* таблицы переходов и выходов АКА Мили все неповторяющиеся пары и закодировать их соответствующими состояниями АКА Мура S_b^* .
2. Соотнести каждому состоянию S_k автомата Мили множество состояний автомата Мура S_b^* .
3. Заполнить переходы в *отмеченной* таблице переходов и выходов АКА Мура следующим образом. Если состояние автомата Мура S_b^* относится к множеству S_k состояний автомата Мили, то в столбец переходов из S_b^* под воздействием x_i необходимо проставить состояния S_{bi}^* , соответствующие столбцу переходов из S_k автомата Мили.
4. Выходные сигналы для каждого состояния S_b^* находятся в клетке с координатами (k, i) , т.е. в паре S_b^{n+1}/y_j^n .

Пример. Преобразовать АКА Мили (рис.32,а, табл. 14) в эквивалентный ему АКА Мура. Следуя изложенному алгоритму, получим:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & S_1/y_1 \rightarrow S_{21}^* = S_{12}^* \Rightarrow S_1^* \\
 & S_1/y_2 \rightarrow S_{31}^* \Rightarrow S_2^* \\
 & S_2/y_1 \rightarrow S_{32}^* \Rightarrow S_3^* \\
 & S_3/y_1 \rightarrow S_{11}^* \Rightarrow S_4^* \\
 & S_3/y_2 \rightarrow S_{22}^* \Rightarrow S_5^*
 \end{aligned}$$

3, 4. Совмещенная таблица АКА Мура.

Таблица 15

y_j	y_1	y_2	y_1	y_1	y_2
S_k	S_1^*	S_2^*	S_3^*	S_4^*	S_5^*
x_i					
x_1	S_4^*	S_4^*	S_1^*	S_2^*	S_2^*
x_2	S_1^*	S_1^*	S_5^*	S_3^*	S_3^*

Таблица 14

S_k	S_1	S_2	S_3
x_1	S_3/y_1	S_1/y_1	S_1/y_2
x_2	S_1/y_1	S_3/y_2	S_2/y_1

$$\begin{aligned}
 2. \quad & S_1 \in \{S_1^*, S_2^*\} \\
 & S_2 \in \{S_3^*\} \\
 & S_3 \in \{S_4^*, S_5^*\}
 \end{aligned}$$

Например, S_4^* относится к S_3 , тогда в столбец переходов для S_4^* подставляются состояния для переходов из S_3 , т. е. $S_1/y_2 \rightarrow S_2^*$ и $S_2/y_1 \rightarrow S_3^*$.

Таким образом, совмещенная таблица соответствует АКА Мура, граф которого представлен на рис. 32,б.

Переход от автомата Мура к автомату Мили

Для осуществления обратного перехода от автомата Мура к автомату Мили удобно воспользоваться представлением автомата Мура в виде графа. *Сущность* преобразования заключается в том, что выходные сигналы, относящиеся к вершинам автомата Мура, будут помечать все дуги, идущие в эту вершину. Тем самым одновременно производится изменение момента автоматного времени, к которому относится сам выходной сигнал, на один такт вперед.

Пример. Преобразовать АКА Мура (рис. 32,б) в АКА Мили. После указанных выше преобразований с выходными сигналами, граф автомата будет выглядеть, как показано на рис. 33.

Полученный граф автомата Мили отличается по числу состояний от рассмотренного на рис. 32,а графа автомата Мили, хотя и эквивалентен ему.

Здесь возникает вопрос о минимизации числа состояний абстрактных автоматов.

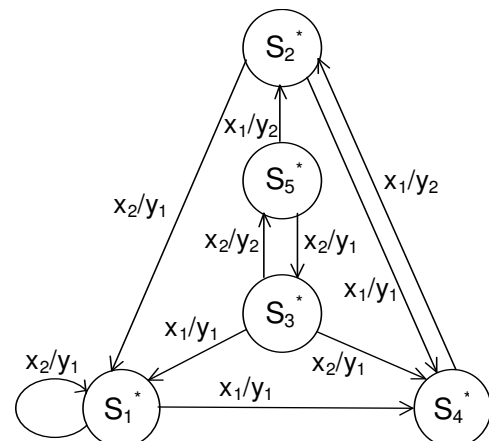


Рисунок 33.

Минимизация числа состояний абстрактных автоматов

Сущность метода минимизации заключается в разбиении всего его алфавита внутренних состояний на попарно непересекающиеся классы эквивалентных состояний с заменой далее каждого класса эквивалентности одним состоянием. Получающийся в результате минимальный автомат имеет столько же состояний, на сколько классов эквивалентности разбивается все множество внутренних состояний заданного автомата.

Эквивалентными называются такие два состояния автомата, замена которых одного на другое не изменяет результатов преобразования входной последовательности на всем множестве символов. Можно как и ранее говорить о полной эквивалентности (π), так и k -эквивалентных внутренних состояниях (π_k).

Процедура минимизации выглядит следующим образом.

1. Находятся последовательные разбиения $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ алфавита внутренних состояний на классы $1, 2, \dots, k$ -эквивалентных состояний, до тех пор, пока на каком-то шаге $\pi_k = \pi_{k+1}$. Очевидно, при этом можно утверждать, что k -эквивалентное состояние является полностью эквивалентным. Число шагов процедуры не превышает $p-1$, где p – размер алфавита внутренних состояний.
2. В каждом классе эквивалентности выбирается по одному символу, которые и составляют новый алфавит внутренних состояний минимизированного автомата.
3. Таблицы переходов и выходов минимизированного автомата получаются из таблиц исходного автомата путем вычеркивания столбцов с состояниями, не вошедшими в минимизированный алфавит, и замены в оставшихся столбцах внутренних состояний исходного автомата эквивалентными им состояниями минимизированного автомата.
4. В качестве начального выбирается начальное состояние исходного автомата или любое, ему эквивалентное.

Пример. Минимизировать автомат Мили, заданный графом на рис. 33.

Совмещенная таблица переходов и выходов автомата представлена табл. 16.

Таблица 16

x_i	S_k	S_1^*	S_2^*	S_3^*	S_4^*	S_5^*
x_1		S_4^*/y_1	S_4^*/y_1	S_1^*/y_1	S_2^*/y_2	S_2^*/y_2
x_2		S_1^*/y_1	S_1^*/y_1	S_5^*/y_2	S_3^*/y_1	S_3^*/y_1

1. Проведем разбиение на класс 1 -эквивалентности по реакции на слово длиной в один символ ($x_1 \vee x_2$). В понятие *реакции* относится только *выходной сигнал*, поскольку основным назначением автомата является осуществление словарного преобразования.

Для класса π_1 выполняется:

$$\pi_1 = \{S_1^1, S_2^1, S_3^1\}, \text{ где } S_1^1 = \{S_1^*, S_2^*\}, S_2^1 = \{S_3^*\}, S_3^1 = \{S_4^*, S_5^*\}.$$

Результаты разбиения отражены в табл.

18.

2. Дальнейшее разбиение на классы приводит к тому, что $\pi_2 = \pi_1 = \pi$. Перекодировав оставшиеся состояния

$$S_1^1 \rightarrow S_j; S_2^1 \rightarrow S_2; S_3^1 \rightarrow S_3$$

получим совмещенную таблицу автомата

(табл. 17), соответствующую АКА Мили, заданного графом на рис. 32,а.

Таблица 17

x_i	S_k				
	S_1^1	S_2^1	S_3^1	S_4^*	S_5^*
	S_1^*	S_2^*	S_3^*	S_4^*	S_5^*
x_1	S_3^1	S_3^1	S_1^1	S_1^1	S_1^1
x_2	S_1^1	S_1^1	S_3^1	S_2^1	S_2^1

3.4. Структурный синтез конечных автоматов

Под *структурным синтезом* конечных автоматов будем понимать построение реальных двоичных цифровых устройств, реализующих функции заданных АКА. При этом будем полагать, что вопрос минимизации количества внутренних состояний АКА уже решен.

Задачи структурного синтеза конечных автоматов

Как правило, для построения цифровых устройств используются двоичные триггеры, число внутренних состояний которого равно двум. Триггеры в этой связи называют *элементарными автоматами (ЭА)* или простейшими *элементами памяти (ЭП)*. Таким образом, *задача структурного синтеза на уровне логических схем сводится к построению автоматов из элементарных автоматов и комбинационных схем*. Исходная информация для структурного синтеза может быть взята из той или иной формы задания автомата.

Структурный синтез начинается с двоичного кодирования внутренних состояний автомата, что задает взаимно-однозначное соответствие между состояниями автомата и комбинациями состояний ЭА. Двоичное кодирование позволяет поведение синтезируемого автомата, первоначально заданного, к примеру, таблицей переходов и выходов, описать в терминах двужанной логики, т. е. знакомых нам выражениях булевой алгебры. В качестве таких выражений используются *функции внешних переходов ЭА*, определяющие изменение состояний каждого из ЭА (включая рассматриваемый) и приходящих на автомат входных сигналов. Слово “внешний” подчеркивает тот факт, что функционирование ЭА в синтезируемой структуре зависит не только от его собственного состояния, но и от состояний других ЭА, входящих в эту структуру.

Функции внешних переходов зависят от выбранного способа кодирования внутренних состояний синтезируемого автомата, следовательно, можно предположить наличие *оптимального кодирования*.

Для того, чтобы каждый ЭА работал в соответствии со своей функцией внешних переходов, на его входах необходимо наличие строго определенных управляющих сигналов. Эти сигналы определяются по логическим выражениям, которые называются *функциями возбуждения ЭА*.

Функции возбуждения зависят не только от функции внешних переходов, но и от его собственного, внутреннего функционирования. Естественно, что для *разных ЭА* следует формировать *разные функции возбуждения*. Отсюда следует *задача оптимального выбора типа ЭА*, приводящего к наипростейшей форме выражений для функций возбуждения, требующей минимальных затрат для их реализации.

Двоичное кодирование внутренних состояний АКА позволяет также решить *задачу формирования выходных сигналов* синтезируемого устройства. Функции выходов, заданные таблицей выходов, преобразуются к системе комбинационных логических выражений, описывающих двоичные выходные сигналы, как функции входных сигналов автомата и состояний составляющих его элементарных автоматов. Сложность этих логических выражений зависит от способа кодирования, поэтому и здесь можно говорить об оптимальном кодировании внутренних состояний автомата.

Блок-схема конечного автомата

В отличие от АКА с одним входом X и одним выходом Y реальный конечный автомат имеет l входных и m выходных сигналов, каждый из которых может принимать значения 0 и 1 . Это следует из определения входных и выходных алфавитов ($X \in x_i, i = \overline{1, l}, Y \in y_j, j = \overline{1, m}$) и кроме того, для внутренних состояний $S \in S_k, k = \overline{1, p}$.

Структура реального конечного автомата выглядит как показано на рис. 34. В структуре РКА можно выделить две части: комбинационную схему, состоящую из двух КЦУ, и запоминающее устройство (ЗУ), содержащее N простейших

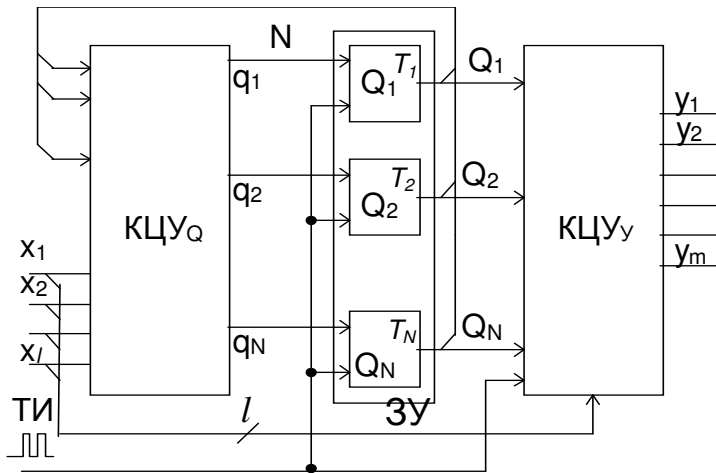


Рисунок 34.

элементов памяти - триггеров T_1, T_2, \dots, T_N , на которые действуют сигналы возбуждения $\{q_i\}$.

Под воздействием q_i в моменты времени, определенные тактовыми импульсами (ТИ), триггер T_i переходит в одно из двух состояний: 0 или 1 . Состояние T_i отражается сигналом Q_i , а совокупность состояний всех триггеров $\{Q_i\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$ отражает внутреннее состояние РКА. Если имеется N триггеров, то возможное число внутренних

состояний равно 2^N .

Комбинационные цифровые устройства $КЦУ_Y$ и $КЦУ_Q$ описываются логическими функциями: $Y^n = F_1(X^n, Q^n)$ и $\{q_i\}^n = \Phi(Q^n, X^n)$

РКА работает под воздействием входных сигналов X , поступающих в моменты автоматного времени $1, 2, \dots, n$, задаваемого ТИ. При этом автомат переходит из одного состояния в другое в соответствии с функцией переходов и вырабатывает выходные сигналы в соответствии с функцией выходов.

Таким образом РКА последовательно преобразовывает последовательность кодов X разрядностью l в последовательность кодов Y разрядностью m (последовательностное цифровое устройство).

Наибольшая трудность в синтезе РКА – получение функций возбуждения q_i^n , в зависимости от которых каждый элементарный автомат-триггер перейдет в следующее состояние Q_i^{n+1} . Трудоемкость получения функций возбуждения существенно зависит от N и l . При ручном проектировании рекомендуется $N + l \leq 8$. Увеличение разрядности m выходного кода практически автомат не усложняет, здесь ограничений нет.

Синтезируемый автомат можно проектировать как автомат Мура или как автомат Мили (с учетом связей, показанных пунктиром на рис. 34). В том и другом случае, РКА может быть построен по синхронному или асинхронному принципу. Как правило, входные сигналы задаются в логике уровней, поэтому “синхронность” или “асинхронность” автомата определяется заданием автоматного времени, т. е. характером реакции автомата на входной сигнал (рис. 35).

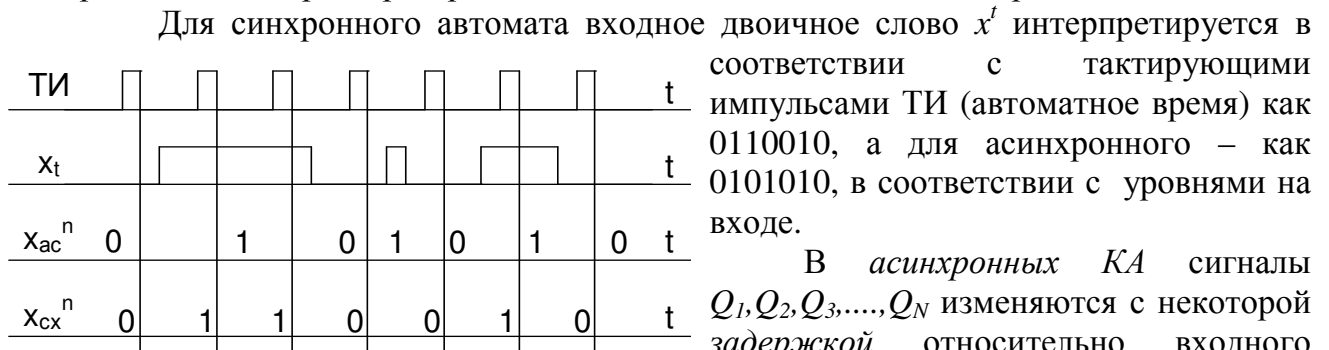


Рисунок 35.

В асинхронных КА сигналы $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$ изменяются с некоторой задержкой относительно входного сигнала, в общем случае ненормируемой. Отсюда следует, что каждому изменению сигнала на входе соответствует два, в общем случае разных сигнала обратной связи $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$, которые должны формировать одни и те же функции возбуждения элементарных автоматов. Чтобы разброс в скорости срабатывания ЭА не приводил к нарушению детерминированности переходов, два соседних состояния РКА должны различаться лишь состоянием одного ЭА. Это влечет жесткие ограничения к характеру кодирования внутренних состояний автомата и необходимости использования значительного числа ЭА, в пределе – число внутренних состояний равно числу ЭА. Такое усложнение иногда окупается максимальным быстродействием устройства.

В синхронных КА входные сигналы ЭА изменяются в промежутках между синхронизирующими импульсами и остаются неизменными в интервалах опроса входных сигналов синхросигналами. Это обстоятельство обеспечивает устойчивую работу автомата при изменении состояний *любого* числа ЭА (не нарушается детерминированность его переходов), что снимает ограничения на кодирование внутренних состояний автомата и позволяет использовать все возможные состояния элементарных автоматов.

Таким образом, необходимое для синтеза количество ЭА N определяется числом p внутренних состояний КА $N = \text{int}[\log_2 p]$, где int – ближайшее большее целое число к $\log_2 p$. Хотя синхронные автоматы имеют меньшее быстродействие, чем асинхронные, они получили большее распространение в силу их простоты, меньшей чувствительности к скорости изменения входных сигналов и не критичности к временным характеристикам составляющих их логических элементов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ./Под ред. Ю.Н.Александрова. - М: Мир, 1978. – 848с.
2. Оппенгейм А.В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов: Пер с англ./Под ред. С.Я.Шаца. -М.: Связь, 1979. – 416с.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справ.– М.: Радио и Связь, 1985. – 312 с.
4. Кузенков Б.Д. Методы и устройства цифровой обработки сигналов. - Куйбышев: КУАИ, 1988. – 96 с.
5. Цифровая обработка сигналов/ Впадим. политехн, ин-т; Сост.: А.К.Бернюков, Е.А.Архипов. Владимир, 1990. – 40 с.
6. Богуславчик Е. Н., Поспелова Н. П. Проектирование и моделирование бортовых радиолокационных систем: Метод, указания, - М.: МАИ, 1985. – 18 с.
7. Бернюков А.К. Цифровая обработка радиотехнической информации: Практикум.- Владимир: ВлГТУ, 1994. – 80 с.
8. Обоснование цифровых структур радиотехнических систем: Уч.пособие/Владим, политехи, ин-т; Сост.: А.К.Бернюков, А.П.Галкин. Владимир, 1985. – 80 с.
9. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. -М: Сов. радио, 1971. – 328с.
10. Бернюков А.К. Цифровая обработка сигнала международной системы посадки самолетов //Радиотехника. 1981. Т.36. N9. С.26 – 29.
11. Бернюков А.К. Распознавание помех при радионавигации и посадке самолетов //Радиоэлектроника, Изв.вузов, 1986. Т29. N7.С.54 – 59.
12. Бернюков А.К. Микропроцессорная функционально-адаптивная обработка сигналов систем радионавигации и посадки самолетов в бортовой подсистеме //Радиотехника. 1988. N7. С.78 – 83
13. Бернюков А.К. Функционально-адаптивная обработка информации в бортовых устройствах радиосистем навигации и посадки самолетов//Электронное моделирование. 1991. Т 13. N2. С.8 – 13.

14. Кузенков Б.Д . Дискретное преобразование Фурье: Метод, указания. - Куйбышев: КУАИ, 1986. – 36 с.
15. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер с англ. /Под ред. И.Б.Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 240 с.
16. Бобнев М.П. Генерирование случайных процессов.– М.: Энергия, 1971. – 240 с.
17. Архипов Е.А., Бернюков А.К. Гомоморфная фильтрация для разрешения радионавигационных сигналов и переотражений // Раднотехника.1986. N11. с.83 – 86.
18. Гоноровский Н.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1986 – 512с.
19. Мизин И.А., Матвеев А.А. Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). – М: связь, 1979, - 240с.
20. Пухальский Г.И., Новосельцева Т.Л. Проектирование дискретных цифровых устройств на интегральных микросхемах: Справочник М.: радио и связь, 1990. - 304с.
21. Богданович М. И., Грель И.И. и др. Цифровые интегральные микросхемы: Справочник. - Минск: «Беларусь», «Полымя», 1996.-608с.
22. Шило В.Л. Популярные цифровые микросхемы: Справочник М.: Радио и связь, 1987. - 382с.
23. Алексенко А.Г. Основы микросхемотехники. Изд. 2-е. М.: Сов. Радио, 1977. - 408с.
24. Интегральные микросхемы: Справочник / Б.В. Тарабрин, Л.Ф. Лукин, Ю.Н. Смирнов и др.; Под ред. Б.В. Тарабрина. - М.: Радио и связь, 1984. - 528с.
25. Ланцов А.М., Зворыкин Л.Н., Осипов И.Ф., Цифровые устройства на комплементарных микросхемах. - М.: Радио и связь, 1983. - 272с.
26. TTL. Advanced Low - Power Schottky, Date book, Vol. 2. Texas Instruments, 1983.
27. Проектирование импульсных и цифровых устройств радиотехнических систем: Учеб. пособие для радиотехнич. спец. вузов / Гришина Ю.П., Казаринов Ю.М., Катиков В.М. и др.: Под ред. Ю.М. Казаринова. - М.: Высш. шк., 1985 - 319с.
28. Гольденберг Л.М., Малеев В.А., Мальков Г.Б. Цифровые устройства и микропроцессорные системы: Задачи и упражнения.: Учеб. пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1992. - 256с.

29. Бернюков А.К. Цифровые и импульсные устройства: Методич. Указания к лаб. работам / Владим. политехнич. ин-т. Владимир, 1992. 24с.
30. Цифровая и вычислительная техника: Учебник для вузов / Э.В. Евреинов, Ю.Г. Бутыльский и др., Под ред. Э.В. Евреинова. М: Радио и связь, 1991. 464с.
31. Цифровая схемотехника: Метод указания к лаб. работам / Владим. гос. ун-т. Сост. А.Н. Никитин. Владимир, 1999. 48с.
32. Никитин А.И. Никитин О.Р. микропроцессоры и микроЭВМ. Учебное пособие, ВлГУ, 1999. 128с.
-