Владимирский государственный университет

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к лабораторным занятиям

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к лабораторным занятиям

Составитель
С. В. КУРОЧКИН

Электронное издание

Владимир 2022

УДК 519.6
ББК 22.193

Рецензент
Кандидат технических наук
доцент кафедры радиотехники и радиосистем
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Н. Н. Корнеева

Численные методы [Электронный ресурс] : метод. указания к лаб. занятиям / Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; сост. С. В. Курочкин. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 25 с. – Электрон. дан. (980 Кб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержат методические указания для выполнения лабораторных занятий по дисциплинам «Численные методы» и «Методы анализа данных».

Предназначены для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 09.03.04 «Программная инженерия», а также для студентов СПО, обучающихся по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО и СПО.

Табл. 2. Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.6
ББК 22.193

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал методических указаний призван дать студентам навыки использования основных численных методов решения математических задач, выбора оптимальных численных методов для решения поставленной задачи, определения математических характеристик точности исходной информации и оценки точности полученного численного решения.

Выполнение лабораторных работ позволит студентам разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата, методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины и действия над ними, оценку точности вычислений и методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Лабораторная работа 1
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ НАД ПРИБЛИЖЁННЫМИ ЧИСЛАМИ

Цели работы:

- закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий;
- закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Приближение числа. Погрешности приближенных значений чисел. Пусть X-точное значение некоторой величины, x - наилучшее приближение этой величины.

Определения*:* *<u>Абсолютной погрешностью ех</u> приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X его приближенным значением x, т.е.*

$e_x = | X - x |$.

Число x называется <u>приближенным значением</u> точного числа X с точностью до Δx, если абсолютная погрешность приближенного значения а не превышает Δx, т.е.

$$|X\text{-}x|<\Delta x$$

Число Δx называется <u>границей абсолютной погрешности</u> приближенного значения числа x.

Число Δx на практике стараются подобрать как можно меньше и простое по записи. Из правила точности Δx найдем границы, в которых заключено точное значение числа X:

$НГ_x = x - \Delta x$ - нижняя граница приближения величины X. $ВГ_x = x + \Delta x$ - верхняя граница приближения величины X.

Определение: *<u>Относительной погрешностью</u> δx приближенного числа x числа X называется отношение абсолютной погрешности Δx этого приближения к числу x, т. е.*

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности δx

меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства

$$\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n},$$

где n- количество верных цифр.

Таблица 1

Вычисление погрешностей арифметических действий

x#y	**Δ(x#y)**	**Δ(x#y)**
$x+y$	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta x+\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta y$
x-y	$\Delta x+\Delta y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta x+\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta y$
$x\cdot y$	$\lvert y\rvert\cdot\Delta x+\lvert x\rvert\cdot\Delta y$	$\delta x+\delta y$
x/y	$(\lvert y\rvert\cdot\Delta x+\lvert x\rvert\cdot\Delta y)/y^2$	

Таблица 2

Оценка погрешностей значений функций

f(x)	**Δ*f*(*x*)**	***δf(x)***
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2}\delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	δx
$\sin x$	$\lvert\cos x\rvert\cdot\Delta x$	$\lvert xctgx\rvert\cdot\delta x$
$\cos x$	$\lvert\sin x\rvert\cdot\Delta x$	$\lvert xtgx\rvert\cdot\delta x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{\Delta x}{cos^2 x}$	$\frac{2\lvert x\rvert}{\lvert\sin 2x\rvert}\delta x$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{\ln x}$
$\lg x$	$\frac{\Delta x}{x\ln 10}$	$\frac{\delta x}{\lg x}\ln 10$
e^x	$e^x\Delta x$	$\lvert x\rvert\cdot\delta x$
$\arcsin x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{2\lvert x\rvert}{\lvert\arcsin x\rvert\sqrt{1-x^2}}\delta x$
$\arccos x$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{2\lvert x\rvert}{\lvert\arccos x\rvert\sqrt{1-x^2}}\delta x$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert\mathrm{arctg}\, x\rvert\sqrt{1+x^2}}\delta x$
x^y	$x^y(\lvert y\rvert\frac{\Delta x}{x}+\lvert\ln x\rvert\cdot\Delta y)$	$\lvert y\ln x\rvert\cdot\Delta y+\lvert y\rvert\cdot\Delta x$

Способы приближенных вычислений по заданной формуле

1. Вычисление по правилам подсчета цифр

При вычислении данным методом явного учета погрешностей не ведется, правила подсчета цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными.

Правила метода:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.
2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
3. При определении количества верных цифр в значениях функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.
4. В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется. Правила подсчета цифр носят оценочный характер, но практическая надежность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчетная таблица – расписка формул.

2. Вычисление со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей - для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные а и b имеют предельные абсолютные погрешности Δa-Δb = 0,0005, т.е. у a и b все цифры верны. Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются *(с возрастанием*!) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

3. Вычисление по методу границ

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений - *метод границ.*

Пусть $f(x, y)$ - функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить ее значение $f(a, b)$, где a и b - приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$НГ_a < a < ВГ_a$; $НГ_b < b < ВГ_b$.

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения (a, b) при известных границах значений а и b.

Допустим, что функция $f(x, y)$ возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда

$$f(НГ_a,НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a,ВГ_b).$$

Пусть теперь $f(x, y)$ возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_a,ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий. Пусть $f_1(x, y) = x+y$. Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f_2(x, y) = x$-y (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$$НГ_a — ВГ_b < a\text{-}b < ВГ_a — НГ_b.$$

Аналогично для умножения

$$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b,$$

и деления

$$(НГ_a / ВГ_b) < a/b < (ВГ_a \cdot НГ_b)$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк - отдельно для вычисления *НГ* и *ВГ* результата (по этой причине метод границ называют еще методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних по - избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

Задание для выполнения работы

Вычислите значение величины Z при заданных значениях параметров a, b и c, используя «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1) по правилам подсчета цифр;
2) с систематическим учетом границ абсолютных погрешностей;
3) по способу границ.

Повторите расчет с применением специализированного программного обеспечения.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

Варианты заданий

Номер варианта	*Z*	*a*	*b*	*c*
1	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,4	6,22	0,149
2	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	4,05	6,723	0,03254
3	$\frac{\ln b - a}{a^2+12c}$	0,7219	135,347	0,013
4	$\frac{b-\sin a}{a+3c}$	3,672	4,63	0,0278
5	$\frac{10c+\sqrt{b}}{a^2-b}$	1,24734	0,346	0,051
6	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a}+3b}$	11,7	0,0937	5,081
7	$\frac{a-\sin b}{b^2+6c}$	1,75	1,21	0,041
8	$\frac{\sqrt{b-c}}{\ln a + b}$	18,0354	3,7251	0,071
9	$\frac{\ln c - 10a}{\sqrt{bc}}$	0,113	0,1056	89,4
10	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,0399	4,83	0,072
11	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	1,574	1,40	1,1236
12	$\frac{ab-4c}{\ln a + b}$	12,72	0,34	0,0290
13	$\frac{a-\cos b}{13c+b}$	3,49	0,845	0,0037
14	$\frac{ac+b}{\sqrt{b-c}}$	0,0976	2,371	1,15874
15	$\frac{a+\cos c}{2a+b}$	0,11587	4,25	3,00971

6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

Лабораторная работа 2
РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ И МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Цели работы:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления).

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Предположим, что уравнение можно записать в виде

$$x = \varphi(x). \qquad (1)$$

Возьмем произвольную точку x_0 из области определения функции $\varphi(x)$ и будем строить последовательность чисел $\{x_n\}$, определенных с помощью рекуррентной формулы

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (2)$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется итерационной последовательностью. При ее изучении встают два вопроса:

1. Можно ли процесс построения последовательности $\{x_n\}$ продолжать неограниченно, т. е. будут ли эти числа принадлежать области определения функции $\varphi(x)$.

2. Если итерационная последовательность (2) бесконечна, то как ведут себя ее члены при $n \to \infty$?

Ответ на оба вопроса дает **теорема о сходимости итерационной последовательности.**

Пусть с - корень уравнения (1) и пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$ условию Липшица с константой $L < 1$

$$|y_2 - y_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le L|x_2 - x_1|, L < 1. \qquad (3)$$

Тогда при любом выборе x_0 на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$ существует бесконечная итерационная последовательность $\{x_n\}$ (2), сходящаяся к корню уравнения (1) $x = c$. Этот корень является единственным на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$.

Напомним известный факт из математического анализа: выполнение условия Липшица (3) будет заведомо обеспечено, если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$ непрерывную производную, $\varphi'(x)$ модуль которой меньше единицы: $|\varphi'(x)| \le m < 1$. В этом случае согласно формуле конечных приращений Лагранжа будем иметь

$$|y_2 - y_1| = |\varphi'(\xi)(x_2)| \leq m|x_2 - x_1|. \qquad (4)$$

Мы получили неравенство (3) с константой Липшица $L = m$.

После этого замечания перейдем к доказательству теоремы. Число c является корнем уравнения (1), так что $c = \varphi(c)$. Возьмем произвольную точку x_0 на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$. Она отстоит от точки c не больше, чем на δ: $|x_0-c|<\delta$. Вычислим $x_1 = \varphi(x_0)$. При этом будем иметь

$$|x_1 - c| = |\varphi(x_0) - \varphi(c)| \leq L|x_0 - c| \leq \quad L\delta. \qquad (5)$$

Неравенство (5) показывает, что точка x_1 принадлежит отрезку $[c-\delta, c+\delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_0 .

Продолжим построение итерационной последовательности. Вычислим $x_2 = \varphi(x_1)$. При этом

$$|x_2 - c| = |\varphi(x_1) - \varphi(c)| \leq L|x_1 - c| \leq L^2|x_0 - c| \leq \quad L^2\delta.$$

Точка x_2 тоже принадлежит отрезку $[c-\delta, c+\delta]$ и расположена ближе к точке c чем x_1.

На второй итерации мы опять приблизились к c. По индукции легко доказать, что все последующие итерации также существуют и удовлетворяют неравенствам

$$|x_n - c| \leq L^n|x_0 - c| \leq \quad L^n\delta$$

$$\left|x_n - c\right| \leq L^n\left|x_0 - c\right| \leq L^n\delta \qquad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - c) = 0 \quad \text{т.е.} \lim_{n\to\infty}(x_n) = c. \qquad (7)$$

Нам остается доказать, что корень $x = c$ является единственным решением уравнения (1) на отрезке $[c-\delta, c+\delta]$. Действительно, предположим, что существует еще один корень $x = c_1$

$$c_1 = \varphi(c_1), c - \delta \leq c_1 \leq c + \delta. \qquad (8)$$

Примем c_1 за нулевое приближение и будем строить итерационную последовательность (2). С учетом (8) получим $x_n=c_1,\ n = 0,1,2,k$. С другой стороны, по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = c$ т.е. $c_1=c$. Никаких других решений, кроме $x=c$, уравнение (1) на рассматриваемом отрезке не имеет.

Доказанная теорема имеет простой смысл. Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ осуществляет отображение точки x отрезка $[c-\delta, c+\delta]$ на точку $y = \varphi(x)$. Рассмотрим пару точек x_1, x_2 и их образы y_1, y_2 .Условие

Липшица (3) приводит к тому, что расстояние между образами оказывается меньше расстояния между исходными точками, т. е. отображение $y = \varphi(x)$ является сжимающим. Корень c - неподвижная точка отображения: $c = \varphi(c)$. В результате каждый шаг в итерационном процессе, сжимая расстояние, приближает очередную итерацию к корню.

Центральная идея метода итераций - сжимающие отображения - является весьма общей. Например, одно из доказательств теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений основано на методе последовательных приближений в условиях, когда действует принцип сжимающих отображений. Для многих сложных нелинейных задач принцип сжимающих отображений оказывается основным методом исследования.

Задание для выполнения работы

1) Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.

Варианты заданий

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$0{,}2x^2=\cos x$	
2	$x-10\sin x = 0$	
3	$2^{-x}=\sin x$	При $x<10$
4	$2^x-2\cos x = 0$	При $x>-10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При $x<5$
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	
7	$x\sin x - 1=0$	
8	$8\cos x - x= 6$	
9	$\sin x-0{,}2x = 0$	
10	$10\cos x-0{,}1x =0$	
11	$2\lg(x+7)-5\sin x = 0$	
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	
13	$\sqrt{1-x} = 5\sin 2x$	
14	$2x^2-5 = 2^x$	
15	$10-0{,}5x^2=2^{-x}$	

2) По методу половинного деления вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.

3) Повторите расчет с применением специализированного программного обеспечения.

4) Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте общее описание метода итераций.
2. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для итерационного метода.

Лабораторная работа 3
РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Цели работы:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические и трансцендентные уравнения приближенными методами (метод хорд и касательных).

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Постановка задачи решения уравнений

Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить такое уравнение - значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Наряду с методом половинного деления существуют и другие, более сложные и более эффективные итерационные методы. Прежде всего, к ним относится группа методов, которые связаны с именем Ньютона. Рассмотрим два из них - *метод касательных и метод хорд.*

Оба метода основаны на следующем приеме.

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$. Преобразуем его к равносильному уравнению

$$x = x-\varphi(x)\cdot f(x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ - любая функция, определенная на отрезке $[a;b]$ и не обращающаяся на нем в нуль. Осуществляя различными способами выбор $\varphi(x)$, можно получить, в частности, и указанные методы.

2. Метод касательных

Пусть в (1) $\varphi(x)=1/f'(x)$. Таким образом, итерационная последовательность строится с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2)$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Является дважды дифференцируемой на отрезке $[a;b]$;

2) Обе производные - первая и вторая - не меняют знак на этом

отрезке, т.е. функция $F(x)$ монотонна и не меняет характер выпуклости.

В таком ситуации *за x_0 берется тот конец отрезка $[a;b]$, на котором функция $f(x)$ и ее вторая производная имеют одинаковые знаки, т.е. выполняется условие $f(x_0)$- $f(x_0) > 0$.*

На каждом шаге построения итерационной последовательности буде проверять точность достижения корня с помощью неравенства:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{f(x_n)}{m}, m = \min_{[a;b]}|f'(x_n)|. \qquad (3)$$

Рассмотренный метод называется *методом касательных* потому, что если обратиться к графической иллюстрации, то точка x_1, определяемая по формуле (2) при $n=0$, есть точка пересечения касательной, проведенной к графику $y=f(x)$ в точке с абсциссой, определяемой предыдущим членом последовательности с осью абсцисс.

Каждому следующему члену итерационной последовательности (2) соответствует точка пересечения касательной, проведенной к графику $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, с осью абсцисс.

3. Метод хорд

Реализуя метод касательных, при каждой итерации необходимо вычислить значение не только функции $f(x)$, но и ее производной $f\ '(x)$. Однако есть вариант метода Ньютона, в котором можно ограничиться вычислением только значений $f(x)$, что иногда упрощает вычислительный алгоритм.

Если положить в (1), а в качестве c взять тот конец промежутка

$$\varphi(x) = \frac{x - c}{f(x) - f(c)},$$

в промежутке $[a;b]$, на котором $f(c)\cdot f''(c) > 0$, то приходим к итерационному методу:

$$x_{n+1} = \frac{cf(x_n) - x_n f(c)}{f(x_n) - f(c)}, \qquad (4)$$

называемому *методом хорд* (или *методом секущих).*

В качестве x_0 в этом случае следует принять тот конец промежутка $[a;b]$, который остался после выбора c (т.е. если $c=a$, то $x_0=b$ или наоборот). Далее последовательность строится по формуле (4). Оценка степени приближения к корню возможна с помощью неравенства (3).

Задание для выполнения работы

1) Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.

2) По методу хорд вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.

3) Повторите расчет с применением специализированного программного обеспечения.

4) Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Варианты заданий

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$0{,}2x^2=\cos x$	
2	$x-10\sin x = 0$	
3	$2^{-x}=\sin x$	При x<10
4	$2^x-2\cos x = 0$	При x>-10
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При x<5
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	
7	$x\sin x - 1=0$	
8	$8\cos x - x= 6$	
9	$\sin x-0{,}2x = 0$	
10	$10\cos x-0{,}1x =0$	
11	$2\lg(x+7)-5\sin x = 0$	
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	
13	$\sqrt{1-x} = 5\sin 2x$	
14	$2x^2-5 = 2^x$	
15	$10-0{,}5x^2=2^{-x}$	

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте общее описание метода касательных.
2. Дайте общее описание метода хорд.
3. Нарисуйте геометрические схемы методов касательных и хорд.
4. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для каждого метода.
5. Как проверяется требуемая точность в методах?

Лабораторная работа №4
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Цели работы:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных уравнений приближенными методами (метод простой итерации, метод Зейделя).

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Метод простой итерации

Как отмечалось ранее, итерационные методы используются для решения уравнений и систем любой природы. Рассмотрим, как это делается применительно к системам линейных алгебраических уравнений.

Приведём систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

к равносильной ей системе вида ***x*=*Ax***:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \qquad (2)$$

В сокращенной форме:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + \beta_i, i = \overline{1,n}.$$

О системе (2) говорят, что она «приведена к нормальному виду».

Правая часть системы определяет отображение F:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + \beta_i, \qquad (3)$$

переводящее точку $x(x_1,x_2,...,x_n)$ в точку $y(y_1,y_2,...,y_n)$. Используя отображения (3) и выбрав начальную точку $\overline{x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}$ можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение F является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (2) а, следовательно, и решением исходной системы (1).

<u>**Замечание:**</u> Отображение является *сжимающим,* если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (3) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее:

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| < 1, \qquad (4),$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2), взятых по столбцам, должен быть меньше 1.

Практическая схема решения с.л.у. методом простой итерации

С.л.у. (1) необходимо привести к нормальному виду (2).

Для обеспечения сходимости итерационной последовательности необходимо, чтобы коэффициенты a_{ij} при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами).* Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (2), у которой все $\left|a_{ij}\right| < 1$.

Для проверки точности решения используем условие (4).

2. Метод Зейделя

Будем снова рассматривать систему линейных уравнений (1) и эквивалентную ей систему (2).

При решении системы (2) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а элементы очередного (вычисляемого) приближения через $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Вычислительные формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta_i \quad , i = 1,2, \ldots, n.$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения y_i учитываются уже полученные значения $y_1, y_2, \ldots, y_{i1}$. Выпишем соответствующие вычислительные формулы:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \beta_1$$

$$y_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + \beta_1$$

$$\ldots$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_i \quad + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + \beta_i$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}y_i \quad + a_{nn}x_n + \beta_n$$

Справедливо следующее **утверждение***:*

Если для матрицы коэффициентов системы (2) выполняется условие (4), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения x.

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Задание для выполнения работы

1) Решить систему линейных уравнений, коэффициенты которой приведены в таблице заданий методами прогонки, итерационным методом. Предварительно привести систему к треугольному виду.

2) Повторите расчет с применением специализированного программного обеспечения.

3) Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Варианты заданий

Вариант	Матрица системы				Правая часть
1	-1,700	0,003	0,000	0,000	0,681
	0,002	0,800	0,001	0,000	0,480
	0,000	-0,002	-0,100	0,030	-0,802
	0,000	0,000	-0,003	-1,600	-1,007
2	-3,000	0,001	0,000	0,000	1,514
	-0,011	2,100	0,520	0,000	1,478
	0,000	0,005	1,200	0,600	1,083
	0,000	0,000	-0,010	-0,300	-1,007
3	4,300	0,217	0,000	0,000	2,663
	0,100	-3,400	-0,207	0,000	2,778
	0,000	0,090	2,500	0,197	2,533
	0,000	0,000	0,080	-1,600	1,928
4	-5,600	0,268	0,000	0,000	4,032
	0,147	4,700	0,271	0,000	4,313
	0,000	-0,150	-3,800	0,274	4,235
	0,000	0,000	0,153	2,900	3,797
5	-8,200	0,370	0,000	0,000	7,559
	0,234	7,300	5,600	0,000	8,175
	0,000	0,260	-0,340	0,422	8,421
	0,000	0,000	0,268	5,500	8,322
6	9,500	0,422	0,000	0,000	9,719
	0,278	8,601	0,459	0,000	10,500
	0,000	0,315	7,700	0,496	10,915
	0,000	0,000	0,351	6,803	10,978
7	10,800	-0,576	0,000	0,000	12,143
	0,321	9,900	7,300	0,000	13,089
	0,000	0,369	9,000	-6,060	13,674
	0,000	0,000	0,416	8,100	13,897

Вариант	Матрица системы				Правая часть
8	-1,100	0,528	0,000	0,000	14,830
	0,365	0,113	0,536	0,000	15,941
	0,000	-0,423	1,031	0,534	16,969
	0,000	0,000	0,481	-0,570	17,081
9	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528
10	30,300	0,153	0,000	0,000	80,168
	0,975	-29,400	0,011	0,000	83,578
	0,000	0,117	-2,500	1,660	86,609
	0,000	0,000	10,700	27,600	89,278
11	0,161	0,332	0,000	0,000	86,814
	0,109	-0,301	-0,150	0,000	90,358
	0,000	-0,060	0,171	0,051	19,861
	0,000	0,000	0,145	-0,298	93,502
12	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528

Вопросы для самоконтроля

1. Каким образом система линейных уравнений преобразуется к итерационному виду?

2. Как сформулировать условие сходимости итерационного процесса?

3. Как привести исходную систему линейных уравнений к системе с преобладающими диагональными элементами?

4. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом простой итерации.

5. В чем состоит отличие метода Зейделя от аналогичного процесса простой итерации?

6. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом Зейделя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических указаниях рассмотрены методики реализации вычисления погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами, а также решения алгебраических и трансцендентных уравнений методами половинного деления и итераций, алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных, систем линейных уравнений приближёнными методами.

На лабораторных занятиях обучающийся формирует навыки:

– использования основных численных методов решения математических задач;

– выбора оптимального численного метода для решения поставленной задачи;

– определения математических характеристик точности исходной информации и оценки точности полученного численного решения;

– разработки алгоритма и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гателюк, О. В. Численные методы : учеб. пособие для среднего проф. образования / О. В. Гателюк, Ш. К. Исмаилов, Н. В. Манюкова. — М. : Юрайт, 2021. — 140 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07480-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471927 (дата обращения: 02.03.2022).

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие для среднего проф. образования / А. В. Зенков. — М. : Юрайт, 2021. — 122 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10895-8. - Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471647 (дата обращения: 02.03.2022).

3. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учеб. пособие / В. Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2021. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1173632 (дата обращения: 02.03.2022). – Режим доступа: по подписке.

4. Численные методы : учеб. и практикум для среднего проф. образования / У. Г. Пирумов [и др.] ; под ред. У. Г. Пирумова. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2021. — 421 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-11634-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/476341 (дата обращения: 02.03.2022).

Электронное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к лабораторным занятиям

Составитель
КУРОЧКИН Сергей Васильевич

Издаются в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Кафедра информационных систем и программной инженерии
s-2000-k@yandex.ru