Владимирский государственный университет

Р. Н. Тихомиров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Р. Н. Тихомиров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1693-4

УДК 517
ББК 22.161

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
начальник кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института Федеральной службы
исполнения наказаний (ВЮИ ФСИН России)
М. Е. Рычаго

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
О. Я. Бутковский

Тихомиров, Р. Н. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Р. Н. Тихомиров ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 106 с. – ISBN 978-5-9984-1693-4. – Электрон. дан. (692 Кб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана

Содержит разделы, изучаемые в курсе "Математический анализ": дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, интегральное исчисление функций нескольких переменных и обыкновенные дифференциальные уравнения.

Предназначено для студентов направления подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование. Может быть полезно преподавателям высшей школы.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций с соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 21. Библиогр.: 7 назв.

ISBN 978-5-9984-1693-4

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено основам математического анализа. В первых параграфах вводятся основные понятия, которые применяются при изучении данного раздела математики, такие как предел и непрерывность функции нескольких переменных. Указанные понятия занимают центральное место среди основных понятий математического анализа. Здесь читателю рекомендуется сравнить новые вводимые понятия с уже известными ему аналогичными для функции одной переменной и попытаться понять, какие изменения происходят с увеличением числа переменных.

Следующая часть пособия посвящена теории двойного интеграла. Подобно тому как задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к геометрической интерпретации определённого интеграла, так и задача о вычислении объёма цилиндрического тела приводит к геометрической формулировке двойного интеграла. Здесь важно понять сам способ вычисления двойного интеграла как в прямоугольных, так и в полярных координатах с помощью перехода к повторному интегрированию. Поэтому то, что установлено для функции двух переменных, можно без особого труда перенести и на функции любого числа переменных. Рассмотрены некоторые приложения двойного интеграла в механике и физике.

Далее рассматриваются интегралы, область интегрирования которых – некоторая кривая, расположенная в плоскости. Такие интегралы называются криволинейными. Они имеют большое значение в теории поля и теории функций комплексной переменной. В этой части разобраны и некоторые приложения криволинейных интегралов: масса материальной линии с переменной линейной плотностью и работа силового поля. Это лишь малая часть задач, которые можно решать с помощью криволинейных интегралов; приведены также примеры их применения.

Оставшуюся часть пособия занимает теория обыкновенных дифференциальных уравнений, одна из характерных особенностей которых состоит в том, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной. Основная цель этого раздела пособия – познакомить читателя с простейшими способами и приёмами исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта часть пособия включает в себя дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, линейные и однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах. Также рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка и системы дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений – довольно трудная задача: чем выше порядок уравнения, тем сложнее указать способ его решения. Аналогичные сложности характерны и для уравнений первого порядка, так как только для небольшого количества частных случаев можно указать приёмы нахождения искомой функции.

В пособии по всем рассматриваемым темам приведены разнообразные примеры и их решения, а также предлагается набор упражнений для самостоятельных занятий.

Изложение имеет целостный характер, поэтому пособие может быть использовано всеми желающими для знакомства с данными разделами математического анализа как в плане теории, так и плане вычислительных приложений. Приведённые теория, примеры и задачи позволяют успешно овладеть знаниями в этой области.

1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. Основные понятия

Рассмотрим упругую струну, натянутую вдоль оси Ox и закрепленную за два конца. Пусть в какой-либо момент времени струна выведена из состояния равновесия, затем внешнее воздействие прекращается. Струна начинает колебаться, такие колебания называются свободными.

Предполагается, что колебания струны происходят следующим образом: каждая точка струны отклоняется по перпендикуляру к оси Ox. Рассматриваются только малые колебания струны, то есть такие, при которых наклоны струны к оси Ox остаются очень малыми. В этом случае смещение струны зависит от положения точки в любой момент времени. Обозначим его через $u(x,t)$ – функция двух переменных x и t.

Определение. *Даны три переменные величины x, y и z. Если каждой паре значений независимых переменных x и y из области их изменения соответствует по некоторому закону определенное значение переменной z, то $z = f(x,y)$ называется функцией двух независимых переменных.*

Пример. *Функция*

$$z(x,y) = \sqrt{(x-1)(3-y)}$$

при $x = 0$, $y = 1$ не существует, поскольку значение подкоренного выражения функции $z(x,y)$ в этой точке равно -2.

Определение. *Множество тех пар чисел (x,y), для которых в области вещественных чисел определено соответствующее значение функции z, называется областью определения функции z.*

Пример. *Определите область определения функции*

$$z(x,y) = \sqrt{(x-1)(3-y)}.$$

Решение. *Заданная функция определена при условии*

$$(x-1)(3-y) \geq 0.$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3-y \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ 3-y < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ y > 3. \end{cases}$$

□

Областью определения функции может быть вся область или только её часть.

Если дана функция $z = f(x,y)$, то для каждой пары чисел (x_0,y_0) из области определения можно сопоставить значение $z_0 = f(x_0,y_0)$ – *аппликата* в системе $Oxyz$. Множество точек $M(x_0,y_0,z_0)$ образуют пространственный график функции двух переменных. Формула $z = f(x,y)$ – уравнение поверхности.

1.2. Построение функции нескольких переменных

Чтобы построить график какой-либо функции $z = f(x,y)$ используется пересечение графика с плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, пусть $z = C$, где C – вещественное число, $f(x,y) = C$. Тогда геометрическим образом будет совокупность точек плоскости Oxy, которая называется линией уровня.

По линиям уровня, построенным для различных $C_1, C_2, \ldots$, можно получить представление о форме поверхности, где линии расположены ближе друг к другу, функция при переходе от одного значения C к другому изменяется быстрее, чем там, где линии расположены реже.

Пример. *Рассмотрим функцию*

$$z(x,y) = x^2 + y^2.$$

Решение. Пересечём поверхность $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = C$. Пусть $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3, \ldots, C_n = n$. Получим концентрические окружности с центром в начале координат и радиусами $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}$. Если $C = 0$, то это точка $O(0,0)$. □

1.3. Предел функции двух переменных

Обозначим расстояние между двумя точками A и B через $\rho(A,B)$.

Рассмотрим на плоскости последовательность точек $M_n(x_n,y_n)$.

Определение. *Последовательность точек M_n стремится к точке M_0, если расстояние $\rho(M_0,M_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Точка M_0 называется предельной точкой последовательности M_n.*

Справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы последовательность точек $M_n(x_n,y_n)$ сходилась к $M_0(x_0,y_0)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$x_n \to x_0, \quad y_n \to y_0. \tag{$*$}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены соотношения $(*)$. В двумерном случае расстояние между точками можно задать как

$$\rho(M_n,M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}.$$

Откуда следует, что $\rho(M_0,M_n) \to 0$ при $n \to \infty$ или $M_n \to M_0$.

Необходимость. Пусть $M_n \to M_0$. Тогда

$$\rho(M_n,M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$$

при $n \to \infty$. Откуда получаем, что

$$|x_n - x_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

и

$$|y_n - y_0| \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}.$$

Следовательно $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$. □

Приведём определение предела функции двух переменных на языке "$\varepsilon - \delta$".

Определение. *Число A называется пределом функции $f(M) = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для любого сколь угодно малого ε можно подобрать число $\delta > 0$ так, что для тех пар чисел (x,y) из области определения и отличных от (x_0,y_0), которые удовлетворяют неравенствам*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

выполнено неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Пример. *Дана функция $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^4+y^4}$. Покажите, что она не имеет предела при $M(x,y)$ стремящейся к точке $O(0,0)$.*

Решение.

a) Пусть точки $M(x,y)$ пробегают последовательность $M_n\left(\frac{1}{n},0\right)$, которая сходится к $O(0,0)$. Тогда последовательность значений функции $f(x_n,y_n)$ сходится к 0 при $n \to \infty$, так как
$$f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^4} + 0} = 0.$$

b) Возьмём другую последовательность сходящуюся к точке $O(0,0)$. Пусть это будет, например $M'_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Найдем предел последовательность значений функции
$$f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2},$$
то есть $f(x_n,y_n) \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Получили, что для различных последовательностей точек сходящихся к точке $O(0,0)$ по разным путям, соответствуют две последовательности значений функции, имеющих различные пределы. Таким образом, функция предела не имеет.

$\square$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите область существания функций:

   (a) $z = \arcsin\frac{x}{3} + \arccos 2y$,

   (b) $z = \ln(2x + 5y)$,

   (c) $z = \ln(y - x^2)$,

   (d) $z = \frac{\sqrt{x+y-1}}{y}$,

   (e) $z = \sqrt{4x} + \sqrt{y} + \sqrt{4 - x - y}$.

2. Существует ли предел функции

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

3. Покажите, что функция

$$f(x,y) = \frac{3xy}{y + x^3}$$

   не имеет предела в точке $O(0,0)$.

4. Найдите $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$, $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$. Если

   (a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$.

   (b) $f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}$, $a = +\infty$, $b = +0$.

   (c) $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a = \infty$, $b = \infty$.

2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Частные производные функции нескольких переменных

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$, заданную в области D рассмотрим точку $M(x,y)$. Придадим переменной x приращение Δx, а значение y оставим без изменений. Получим переход от точки $M(x,y)$ к точке $M'(x + \Delta x,y)$ или

$$\Delta_x f(x,y) = f(x + \Delta x) - f(x,y) - \text{ частное приращение по переменной } x.$$

Аналогично можно задать частное приращение по переменной y:

$$\Delta_y f(x,y) = f(x,y + \Delta y) - f(x,y).$$

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y},$$

то он называется частной производной по переменной x или y от функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$.

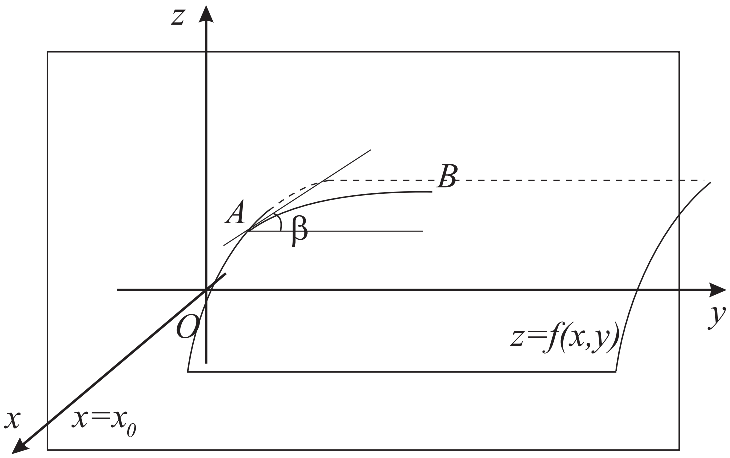
Частные производные от функции $z = f(x,y)$ обозначаются как

$$z'_x, \quad z'_y, \quad f'_x, \quad f'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Частные производные функции двух переменных имеют определённый геометрический смысл. Графиком функции $z = f(x,y)$ является поверхность. Возьмём на этой поверхности точку $A(x_0,y_0,z_0)$. Проведём через точку A сечение поверхности плоскостью Q, параллельной плоскости Oyz, $x = x_0$ – уравнение плоскости. Эта плоскость пересечёт поверхность по кривой AB: $z = f(x_0,y)$. Производная от функции $z = f(x_0,y)$ совпадает с частной производной по y от $z = f(x,y)$. С другой стороны – это производная функции одной переменной. Поэтому равна угловому коэффициенту касательной в точке $A(x_0,y_0,z_0)$ к кривой AB:

$$f'_x(x_0,y) = \operatorname{tg} \beta.$$

По аналогии пересечем поверхность $z = f(x,y)$ плоскостью $y = y_0$ параллельной Oxz, тогда $f'_x = (x,y_0) = \operatorname{tg} \alpha$.



Понятие частной производной так же можно определить и для функций большего числа переменных. Например, для функции трёх переменных $u = f(x,y,z)$ можно записать три частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются снова функциями от двух переменных, а поэтому от них снова можно брать частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad z''_{xx}.$$

Получаем частную производную второго порядка. От частной производной по переменной x можно взять производную по переменной y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{или} \quad z''_{xy},$$

которая называется *смешанной производной.*

Пример. *Найдите* z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx} *для*

$$z(x,y) = x^3y^2 + 2x\ln y + x^y.$$

Решение. Имеем

$$z''_{xx} = 6xy^2 + y(y-1) + x^{y-2}, \quad z''_{xy} = 6x^2y + \frac{2}{y} + yx^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$z''_{yy} = x^3 - \frac{2x}{y^2} + x^y\ln^2 x, \quad z''_{yx} = 6x^2y^2 + \frac{2}{y}|yx^{y-1}\ln x + \frac{x^y}{x}.$$

$\square$

Справедлива следующая

Теорема. *Если у функции $z = f(x,y)$ существуют производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} в точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой её окрестности. Если при этом f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в данной точке, то*

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Решение. Составим выражение

$$u = \frac{f(x_0+s,y_0+t) - f(x_0+s,y_0) - f(x_0,y_0+t) + f(x_0,y_0)}{st},$$

где s, t – положительные числа такие, что прямоугольник $[x_0,x_0+s;y_0,y_0+t]$ находится в окрестности точки M_0. Введем функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x,y_0+t) - f(x,y_0)}{s}.$$

С помощью этой функции перепишем выражение для u в следующем виде

$$u = \frac{\varphi(x_0+s) - \varphi(x_0)}{s}.$$

Вычислим производную от $\varphi(x)$. Имеем

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x,y_0+t) - f'_x(x,y_0)}{t}.$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ имеет производную $\varphi'(x)$ в промежутке $[x_0, x_0+s]$, то непрерывна в этом промежутке и к ней применима теорема Лагранжа

$$u = \frac{\varphi(x_0+s) - \varphi(x_0)}{s} = \varphi'(x_0+\xi s) = \frac{f'_x(x_0+\xi s,y_0+k) - f'_x(x_0\xi s,y_0)}{t},$$

где $0 < \xi < 1$. По условию существует производная $f''_{x,y} = (f'_x)'_y$, то уже к функции $f'_x(x_0\xi s,y)$ можно снова применить теорему Лагранжа в промежутке $[y_0,y_0+t]$

$$u = f''_{xy}(x_0+\xi s, y_0+\xi_1 t), \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \xi_1 < 1. \qquad (*)$$

Аналогичные рассуждения будут справедливы и для функции

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+s,y) - f(x_0,y)}{s}.$$

Тогда будет справедлива формула

$$u = f''_{yx}(x_0+\xi_3 s, y_0+\xi_2 t), \quad 0 < \xi_2 < 1, \quad 0 < \xi_3 < 1. \qquad (**)$$

Отсюда, сравнивая $(*)$ и $(**)$, получаем

$$f''_{xy}(x_0+\xi s, y_0+\xi_1 t) = f''_{yx}(x_0+\xi_3 s, y_0+\xi_2 t),$$

так как при $s \to 0$ и $t \to 0$ аргументы обеих смешанных производных стремятся к x_0 и y_0. Таким образом, после предельного перехода выводим

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

$\square$

2.2. Полное приращение функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке M_0 называется

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема. *Если у функции $z = f(x,y)$ существуют частные производные в точке $M_0(x_0,y_0)$ и в её окрестности они непрерывны, как функции двух переменных, то полное приращение равно*

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α и β – величины, зависящие от Δx и Δy, и $\alpha = \alpha(\Delta x,\Delta y) \to 0$, $\beta = \beta(\Delta x,\Delta y) \to 0$.

$\square$

Запишем полное приращение функции в виде

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0,y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)].$$

Отметим, что приращение в первых скобках является частным приращением функции $f(x,y)$ по переменной x, а во вторых скобках по переменной y. Используя формулу Лагранжа, перепишем каждое из этих приращений, как

$$\Delta z = f'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0,y_0 + \xi_1\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \xi_1 < 1.$$

Снова сделаем тождественные преобразования

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + [f'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)]\,\Delta x +$$

$$\left[f'_y(x_0, y_0 + \xi_1\Delta y) - f'_y(x_0, y_0)\right]\Delta y.$$

Введем обозначения

$$f'_x(x_0+\xi\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0,y_0) = \alpha, \quad f'_y(x_0, y_0+\xi_1\Delta y) - f'_y(x_0,y_0) = \beta.$$

Тогда будем иметь

$$\Delta z = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Отметим, что α и β зависят от Δx и Δy. Если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $x_0+\xi\Delta x \to x_0$ и $y_0+\xi_1\Delta y \to y_0$. Таким образом, α и β стремятся к нулю.

$\square$

Следствие 1. *Из существования и непрерывности в заданной точке (x_0,y_0) частных производных f'_x и f'_y функции $f(x,y)$ вытекает непрерывность самой функции $f(x,y)$ в этой точке.*

2.3. Производные сложных функций нескольких переменных

1. Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в некоторой области D и x, y являются функциями от переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, которая изменяется на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$z = f(x(t),y(t)).$$

Если существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, то существует производная по переменной t от $z = f(x(t),y(t))$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Докажем справедливость этого соотношения.

Действительно, придадим t приращение Δt. Тогда возникают приращения Δx и Δy. Откуда

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Поделив правую и левую части равенства на Δt получим,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Устремив Δt к 0 имеем, $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. а также $\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} \to 0$ и $\beta\frac{\Delta y}{\Delta t} \to 0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}$, $\frac{\Delta y}{\delta t} \to \frac{dy}{dt}$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Справедливость формулы установлена.

2. Пусть функция $z = f(t)$ задана на $[a,b]$, а t зависит от двух переменных x и y, то есть $z = f\left(t(x,y)\right)$.

Пусть существуют производные $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dt}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

3. Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в области D, а x и y являются функциями от s и t. Тогда

$$z = f(x(s,t),y(s,t)).$$

Если существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

и существуют частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial t},$$

то определяются частные производные сложной функции по переменным s и t и вычисляются как

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \end{cases}$$

Действительно, чтобы вычислить частную производную зафиксируем значение одной переменной s или t. В этом случае получаем уже рассмотренный первый случай. Отличием является лишь то, что x и y являются функциями двух переменных и поэтому будем использовать для производных знак ∂.

Приведём пример на применение всех трёх случаев.

Пример. *Вычислите производные следующих функций:*

a) $z = f(x,y)$, $x = t^3 + 2$, $y = 3t^4 - 1$;

b) $z = f(t)$, $t = \frac{x}{y}$;

c) $z = f(x,y)$, $x = t^2 + 2s$, $y = \frac{t^2}{s}$.

Решение. Имеем:

a) здесь функция z посредством переменных x и yззависит от t

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{dz}{dt} \cdot \frac{x}{y^2}; \end{cases}$$

b) функция $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ является сложной функцией от x и y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 12t^3;$$

c)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2 + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \cdot \left(-\frac{t^2}{s^2}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{2t}{s}. \end{cases}$$

2.4. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Определение. *Если полное приращение функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно записать в виде*

$$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Выражение

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

называется главной частью, которая линейна относительно Δx и Δy.

Определение. *Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то главная часть*

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

полного приращения называется полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$:

$$dz = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Таким образом, понятие полного дифференциала для функций нескольких переменных определено только для дифференцируемых функций, а не для любых функций имеющих частные производные.

2.5. Неявные функции и их дифференцирование

1. Пусть дано уравнение вида

$$F(x,y) = 0 \qquad (*).$$

В левой части которого имеем функцию двух переменных, заданную в некотором прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$. Если для каждого значения $x \in [a,b]$ существует одно значение $y \in [c,d]$, то уравнение определяет функцию $y = y(x)$. Тогда заданное соотношение определяет неявную функцию

$$F(x,y(x)) = 0.$$

Пример. *Вычислите производную функции*

$$y \ln x - x^2 e^y + 1 = 0, \quad x > 0.$$

Выразить отсюда явно y не получится, н можно поставить вопрос: существует ли такой промежуток изменения x, что для каждого x_0 из этого промежутка можно найти вполне определённое значение y_0, такое, что пара чисел (x_0,y_0) удовлетворяет заданному равенству.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть дано уравнение $F(x,y) = 0$ и функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям:*

a) $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, и $F'_y(x,y)$ определены и непрерывны в прямоугольнике $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$;

b) $F(x_0,y_0) = 0$;

c) $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) в некоторм открытом прямоугольнике $(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\delta',y_0+\delta')$ уравнение $(*)$ определяет неявную функцию $y=y(x)$;

b) $y(x_0)=y_0$;

c) в промежутке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ функция $y=y(x)$ непрерывна;

d) в промежутке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ функция $y=y(x)$ имеет непрерывнуючастную производную.

Перейдём к рассмотренному примеру

$$F(x,y)=y\ln x-x^2e^y+1,\quad x>0.$$

Решение. Видим, что функция и её частные производные непрерывны при $x>0$ и для любой переменной y. Существуют точки (x_0,y_0) такие, что

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

например, точка $A(1,0)$, в которой

$$F(1,0)=0,\quad F'_y(1,0)=(\ln x-x^2e^y)|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1\neq 0.$$

Производная неявной функции вычисляется по следующему правилу

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Тогда для $y\ln x-x^2e^y+1=0$ будем иметь

$$y'_x\ln x+y\frac{1}{x}-2xe^y-x^2e^yy'_x=0,\quad y'_x(\ln x-x^2e^y)=-\frac{y}{x}+2xe^y.$$

И окончательно

$$y'_x=\frac{-\frac{y}{x}+2xe^y}{\ln x-x^2e^y}.$$

□

2. Пусть дана система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ \Phi(x,y,z)=0.\end{cases}\qquad (*)$$

Если для каждого значения x из некоторого промежутка существуют значения y и z такие, что (x,y,z) удовлетворяют $(*)$, то система определяет две функции независимой переменной $y(x)$ и $z(x)$, то есть две неявные функции.

Если определитель
$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} \neq 0$$
не обращается в ноль в некоторой окрестности точки x_0, то система $(*)$ определяет две неявные функции $z(x)$ и $y(x)$. Данный определитель называется *якобианом.*

Вычислим производную от неявных функций $z = z(x)$ и $y = y(x)$:
$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y'_x + \Phi_z \cdot z'_x = 0. \end{cases}$$
Отсюда
$$\begin{cases} F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = -F'_x, \\ \Phi'_y \cdot y'_x + \Phi_z \cdot z'_x = -\Phi'_x. \end{cases}$$
Если определитель этой системы отличен от нуля, то система однозначно разрешима относительно неизвестных y'_x и z'_x. Определитель этой системы – якобиан.

Пример. *Вычислите производную при* $x = 1$
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 - z^3 - 10 = 0, \end{cases}$$
причём $y(1) = 1,\ z(1) = -2.$

Решение. Имеем
$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0, \\ 3x^2 + 3y^2y' - 3z^2z' = 0. \end{cases}$$
Подставив заданные значения, получим
$$\begin{cases} 1 + y' + z' = 0, \\ 3 + 3y' - 3z' = 0, \end{cases}$$
где якобиан
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$
Отсюда $y' = 1,\ z' = 0.$

□

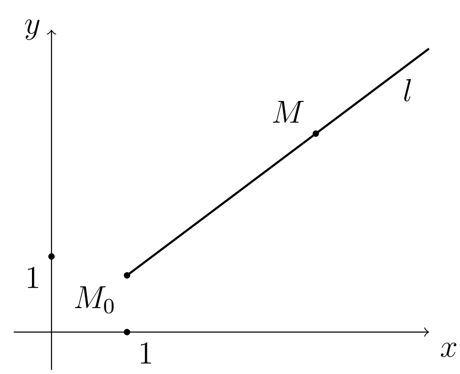
2.6. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим на плоскости точку $M_0(x_0,y_0)$ и исходящий из неё луч l. Пусть $M(x,y)$ обозначает переменную точку на луче l. Рассмотрим функцию $f(x,y)$.

Определение. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$$

при условии, что точка M стремится к точке M_0 по лучу i, то он называется производной функции $f(x,y)$ по направлению l в точке M_0.



Справедлива следующая

Теорема. *Если функция имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ непрерывные частные производные, то в точке M_0 существует производная по любому направлению, исходящему из M_0:*

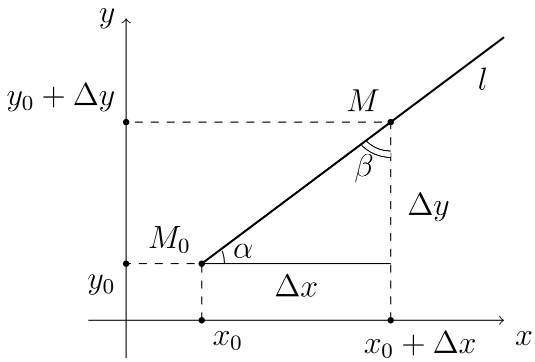
$$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ *– направляющие косинусы направления l.*

Доказательство. Возьмём на луче l точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Так как функция имеет непрерывные частные производные в точке M_0, то ее полное приращение будет

$$\Delta z=f(M)-f(M_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

□



Положим $\Delta l = M_0M$, тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta,$$

и

$$\frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta l} = f'_x(x_0,y_0)\frac{\Delta x}{\Delta l} + f'_y(x_0,y_0)\frac{\Delta y}{\Delta l} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

Устремив точку M к M_0 по линии l, получаем, что $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{f(M)-f(M_0)}{\Delta M_0M} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

Таким образом, существует предел в точке M_0 по направлению l

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

$\square$

Определение. *Градиентом скалярной функции*

$$z = f(x,y)$$

называется вектор, проекции которого на координатные оси совпадают с соответствующими частными производными функции $z = f(x,y)$

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Свойство градиента.

Возьмём единичный вектор направления l:

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j}, \quad |\vec{n}| = 1.$$

Запишем скалярное произведение

$$(\mathrm{grad} f, \vec{n}) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta.$$

Откуда

$$(\mathrm{grad} f, \vec{n}) = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

С другой стороны

$$(\mathrm{grad} f, \vec{n}) = |\mathrm{grad} f||\vec{n}| \cos\left(\widehat{\mathrm{grad} f, \vec{n}}\right) = |\mathrm{grad} f| \cos\left(\widehat{\mathrm{grad} f, \vec{n}}\right)$$

есть проекция $\mathrm{grad} f$.

Откуда видно, что производная по направлению будет наибольшей по величине в том случае, когда

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{grad} f, \vec{n}}\right) = 1,$$

то есть если $\vec{n}$ и $\mathrm{grad} f$ совпадают по направлению.

Таким образом, градиент функции $f(x,y)$ указывает направление быстрейшего увеличения функции и по величине равен производной функции по этому направлению.

2.7. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой области D.

Определение. *Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x,y)$, если существует такая δ-окрестность точки M_0, что для любой точки отличной от M_0 из окрестности выполнено неравенство*

$$f(x,y) < f(x_0,y_0).$$

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой минимума, если для любой точки из окрестности M_0 выполнено неравенство

$$f(x,y) > f(x_0,y_0).$$

Справедлива следующая

Теорема. (Необходимое условие экстремума) *Если дифференцируемая функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке M_0, то обе частные производные функции $f(x,y)$ в этой точке равны нулю.*

Доказательство. Зафиксируем одну из переменных, например $y = y_0$. Тогда $z = f(x,y_0)$ – функция одной переменной, которая имеет экстремум в точке $x = x_0$. Поэтому $f'_x(x_0,y_0) = 0$. Теперь, если зафиксировать $x = x_0$, то $z = f(x_0,y)$ и $f'_y(x_0,y_0) = 0$. □

Точка, в которой частные производные первого порядка равны нулю $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ называется стационарной.

Пример. *Дана дифференцируемая функция*

$$z = x^2 - y^2.$$

Решение. Вычислим стационарные точки функции

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = -2y.$$

Тогда

$$z'_x = z'_y = 0$$

при $x = y = 0$. То есть точка $M_0(0,0)$ – стационарная точка. Нетрудно понять, что заданная функция в окрестности точки $M_0(0,0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если $|x| < |y|$, то $z < 0$, а если $|x| > |y|$, то $z > 0$. Таким образом, в точке M_0 нет экстремума.

Будет справедлива следующая

Теорема. (Достаточное условие экстремума) *пусть в стационарной точке* (x_0,y_0) *и некоторой её окрестности функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим значения*

$$A = f''_{xx}(x_0,y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0,y_0), \quad C = f''_{y,y}(x_0,y_0).$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

a) *если* $\Delta > 0$, *то функция* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет экстремум, максимум, если* $A < 0$, *минимум, если* $A > 0$;

b) *если* $\Delta < 0$, *то* $f(x,y)$ *экстремума не имеет;*

c) *если* $\Delta = 0$, *то необходимо дополнительное исследование.*

2.8. Наибольшие и наименьшие значения функции в области

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области D задана дифференцируемая функция $z = f(x,y)$. Тогда она достигает в некоторых точках области своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются в точках, расположенных внутри области или точках, лежащих на границе.

Приведём правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в области:

a) найти все критические точки функции, принадлежащие области D и вычислить значения функции в них;

b) найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x,y)$ на границах области;

c) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Задания для самостоятельной работы

1. Везде ли непрерывны данные функции

   (a) $z = \frac{xy+1}{x^2+y^2}$;

   (b) $z = \frac{4x}{x-y}$;

   (c) $z = \frac{6x+y}{x^2+y^2}$.

2. Найдите частные производные первого порядка

   (a) $z = x\sqrt[3]{y} - \frac{3y}{\sqrt{x}}$;

   (b) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;

   (c) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$;

   (d) $z = e^{-\frac{y}{x}}$;

   (e) $z = \ln\left(x + \frac{4y}{x^2}\right)$;

   (f) $z = y \ln x$;

   (g) $u = x^{\frac{y}{z}}$;

3. Докажите, что функция $z = e^x(x\cos y - y \sin y)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

4. Докажите, что функция $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5. Найдите частные производные первого порядка

   (a) $z = f\left(\frac{x}{y^2}\right)$;

   (b) $z = f(x^3 + y^3)$;

   (c) $z = f(x^2 + y)$;

   (d) $z = f(x,y), \quad x = t^3, \quad y = t^2 + 1$;

   (e) $z = f(x,y), \quad x = \sin t, \quad y = \cos t$;

   (f) $z = f(x,y), \quad x = 3s+2t,\ y = 5s+4t$;

   (g) $z = f(x,y), \quad x = t^3 s, \quad y = t^4 - s^4$.

6. Напишите в общем виде формулу для производных первого порядка сложной функции

$$u = f(t), \quad t = \varphi(x,y,z).$$

7. Вычислите первые производные

   (a) $u = f\left(\frac{x+y}{z^2}\right)$;

   (b) $u = f(x - yz)$.

8. Докажите, что сложная функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$, где φ – любая дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению
$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

9. Докажите, что сложная функция $z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$, где φ и ψ – любые дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет соотношению
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

10. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, f – дважды дифференцируемая функция. Покажите, что $\Delta u = F(r)$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, и найдите функцию $F(r)$.

11. Докажите, что если функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
то функция
$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$
также удовлетворяет этому уравнению.

12. Найдите производную функции
$$z(x,y) = 6xy^3 + 5x^2$$
по направлению $l = i + 3j$ в точке $M_0(1,3)$.

13. Найдите производную функции
$$u(x,y,z) = x^2yz$$
по направлению $l = i + 2j + 3k$ в точке $M_0(2,4,6)$.

14. Найдите производную функции
$$z(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$
в точке $M(1,2)$ в направлении, идущем от M к $N(4,6)$.

15. Покажите, что
$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0,$$
если $z(x,y) = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

16. При помощи полного дифференциала вычислите приближённо

    (a) $\ln(\sqrt[4]{0{,}97} + \sqrt[3]{1.04} - 1)$;

    (b) $(1{,}02)^4 \cdot (0{,}98)^3 \cdot (2{,}03)^2$.

17. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^3 + 6y(y - x)$$

в замкнутой области, заданной неравенствами

$$0 \leq y \leq x \leq 2.$$

18. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области, ограниченной линиями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = -3.$$

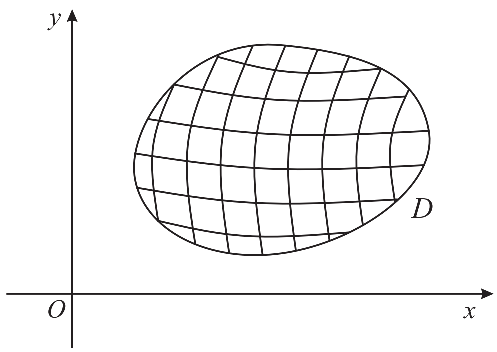
19. Определите размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объёма, полная поверхность которого имеет данную площадь S.

20. Укажите размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объёма, вписанного в прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Двойные интегралы

Пусть в замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z = f(x,y)$.



Разобьём область D на n частей D_i, площади которых обозначим через Δs_i, а диаметры — через d_i. В каждой из областей D_i возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i,\eta_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = f(\xi_1,\eta_1)\Delta s_1 + \ldots + f(\xi_n,\eta_n)\Delta s_n.$$

Полученная сумма называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$.

Определение. *Если интегральная сумма при $d_i \to 0$ имеет конечный предел I:*

$$\lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = I,$$

не зависящий от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек $M_i(\xi_i,\eta_i)$, то это предел называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области D

$$I = \iint\limits_D f(M)ds, \quad I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

В этом случае функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области D, D – область интегрирования; x, y – переменные интегрирования; $dxdy$ (ds) – элемент площади.

Теорема. *Всякая функция $f(x,y)$, непрерывная в замкнутой области D, интегрируема.*

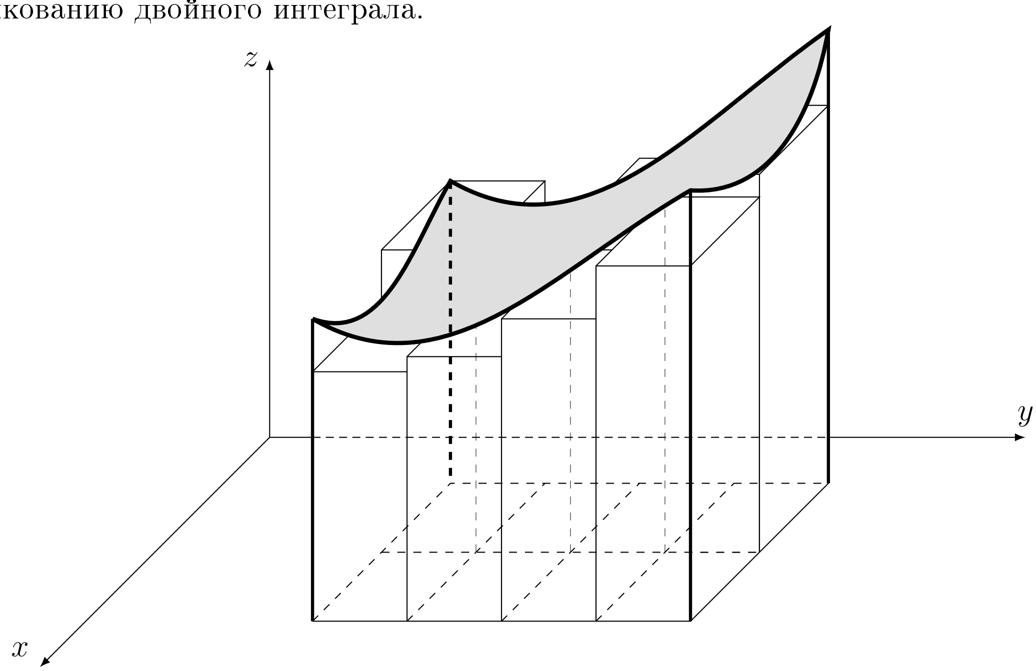
Для интегрируемой области D функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области. Таким образом, можно разбить область на площади прямыми, параллельным координатным осям. При этом $\Delta s_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

3.2. Геометрический смысл двойного интеграла

В случае одной переменной задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к геометрической интерпретации определённого интеграла.

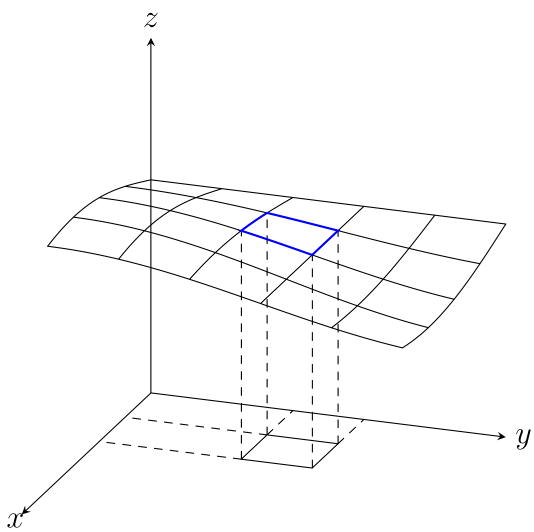
Задача о вычислении объёма цилиндрического тела приводит к геометрическому толкованию двойного интеграла.



Рассмотрим тело V, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x,y) \geq 0$, где $f(x,y)$ – неотрицательная и непрерывная в области D функция, ограниченная с боков цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz; с низу – замкнутой областью D плоскости xOy. Вычислим объём цилиндрического тела.

Разобъём область D сетью кривых на n произвольных частей D_i, площади которых равны Δs_i. Через контур каждой из частей D_i проведём цилиндрическую поверхность. Эта поверхность есть цилиндрический столбик ΔV_i с основанием D_i, ограниченный сверху куском поверхности $z = f(x,y)$. Выберем в каждой части D_i произвольную точку

(ξ_i, η_i) и вычислим в ней значение функции $f(\xi_i, \eta_i)$.Заменим каждый цилиндр V_i прямым цилиндром с тем же основанием D_i и высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$.



Тогда объём каждого столбца равен

$$\Delta V_i = f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Таким образом, объём всего цилиндра приблизительно равен

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Это приближённое равенство будет тем точнее, чем меньше дробление области D на части

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

Справа стоит предел от непрерывной функции. Этот предел существует и равен двойному интегралу от этой функции по области

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3.3. Основные свойства двойного интеграла

Перечислим основные свойства двойного интеграла.

1. $\iint\limits_D k \cdot f(x,y)dxdy = k \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

2. $\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

3. Если область D разбита на конечное число непересекающихся частей, то интеграл по всей области равен сумме интегралов по частям

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

   Область D разбита на две части D_1 и D_2.

4. Если для функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в области D выполнено неравенство $f(x,y) \leqslant g(x,t)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

   В частности, проинтегрирвыав стандартное неравенство

$$-|f(x,y)| \leqslant f(x,y) \leqslant |f(x,y)|,$$

   получаем

$$-\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

   или

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой равна S, то

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant MS,$$

   где m и M – наименьшее и наибольшее значение функции в области.

6. Если функция непрерывна в замкнутой области D, площадь которой равна S, то в этой области существует такая точка (x_0,y_0), что

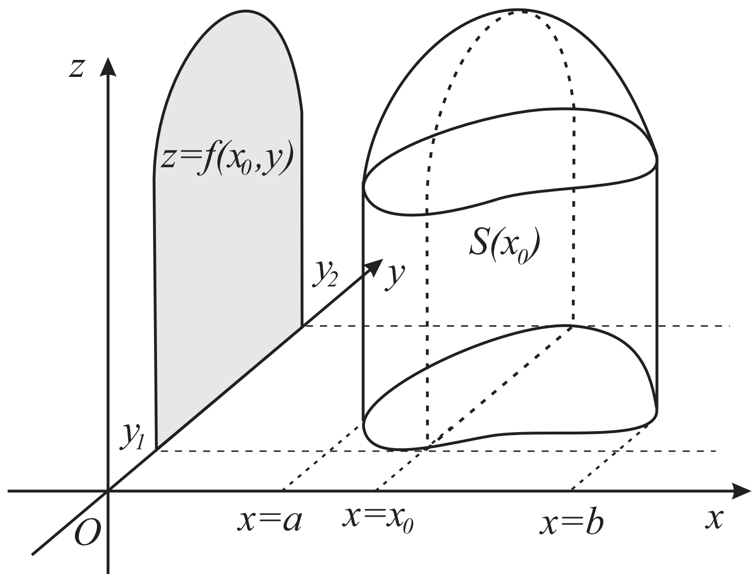
$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ - \ \text{среднее значение функции } f(x) \text{ в области } D.$$

3.4. Вычисление двойного интеграла

Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

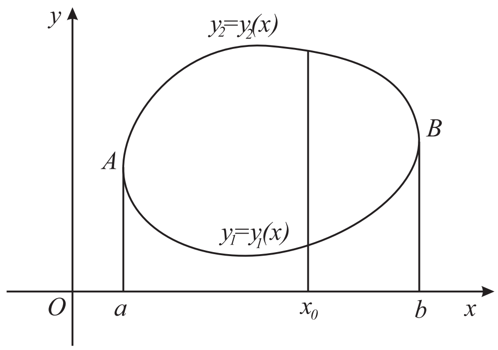
где $f(x,y)$ непрерывна в D.



По определению, двойной интеграл выражает объём цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$. Рассмотрим тело V, содержащееся между параллельными плоскостям $x = a$ и $x = b$. Пусть в сечении тела V плоскостью, проведённой через точку $x \in [a,b]$ перпендикулярно оси Ox получим фигуру, имеющую площадь $S(x)$. Объём данного тела равен

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Предположим, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$, и кривым $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны и $y_1(x) \leq y_2(x)$ на $[a,b]$.



Построим сечение цилиндрического тела плоскостью перпендикулярной оси Ox: $x = x_0$. Получим криволинейную трапецию, ограниченную линиям $z = f(x,y)$, $z = 0$, $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$. Тогда площадь $S(x)$ равна

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x_0,y)dy.$$

Так как $x = x_0$ произвольное число из $[a,b]$, то

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Подставив в формулу для вычисления объёма, будем иметь

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \ - \ \text{повторный интеграл},$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_b^a dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

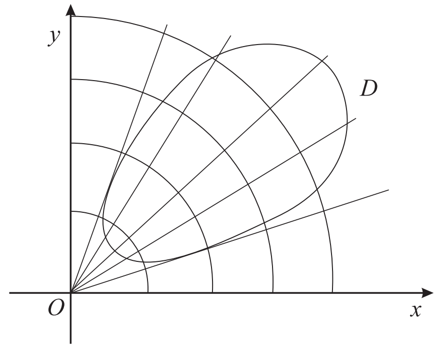
3.5. Двойной интеграл в полярных координатах

При интегрировании часто применяется метод замены переменных. Рассмотрим частный случай преобразования – переход к полярным координатам: r и φ.

Пусть мы имеем двойной интеграл

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

где функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D. Предположим, что контур области D пересекается каждой прямой, проходящей через начало координат, не более чем в двух точках. Примем ось Ox за полярную ось, а начало координат за полюс.



Тогда прямоугольные координаты связаны с полярным соотношениями

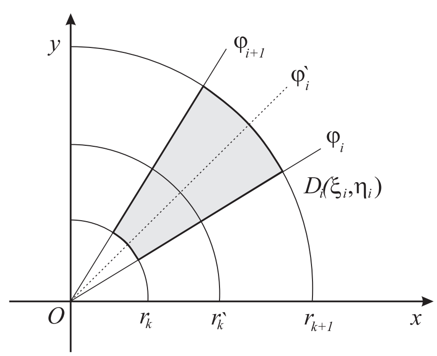
$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi, \\ y = & r\sin\varphi. \end{cases}$$

Чтобы получить все точки плоскости Oxy, ограничимся значениям $r \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Двойной интеграл определяется как предел интегральной суммы

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Этот предел не зависит от способа разбиения области D на части.

Разобьём область концентрическими окружностям с центром в полюсе: $r = const$, $\varphi = const$.



Области, полученные таким способом представляют собой криволинейную форму, ограниченную двумя дугам концентрических окружностей r_k, r_{k+1}. При достаточно мелком дроблении области на части, фигуру D_i приближённо можно считать прямоугольником со сторонами Δr_k и $r_k\Delta\varphi_k$ (длина дуги равна радиусу, умноженному на радианную меру центрального угла). Площадь D_i равна приближённо $D_i \approx r_k \Delta r_k \Delta\varphi_k$.

Для произвольной точки (ξ_i,η_i) из D_i будем иметь

$$\xi_i = r_k' \cos\varphi_k', \quad \eta_i = r_k' \sin\varphi_k'.$$

Здесь r'_k, φ'_k – полярные координаты (ξ_i,η_i).

В частности, положим, что $r'_k = r_k$, $\varphi'_k = \varphi_k$. Отсюда получаем

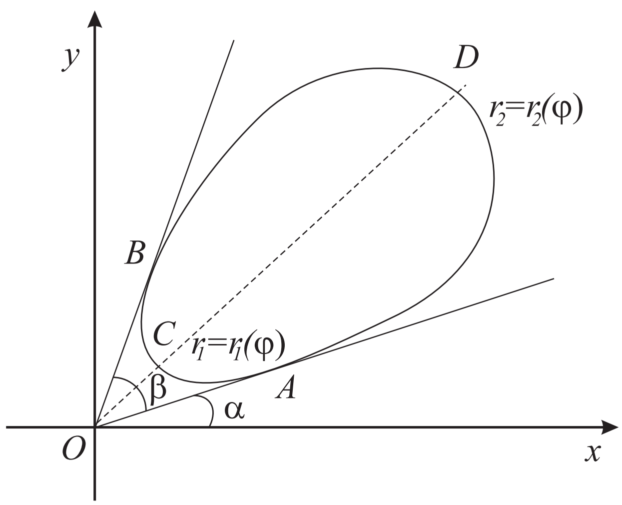
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_k\cos\varphi_k, r_k\sin\varphi_k) r_k \Delta r_k \Delta\varphi_k.$$

Это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение области D на части. Предел интегральной суммы существует и равен двойному интегралу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,drd\varphi.$$

3.6. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Вычисление двойного интеграла осуществляется путём приведения его к повторному.



Отметим крайние значения α и β полярного угла φ. Угол α соответствует точке A, β – точке B контура. Точки A и B разбивают контур D на две части: ACB и ADB, уравнения которых

$$r_1 = r_1(\varphi), \quad r_2 = r_2(\varphi),$$

где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ – однозначные непрерывные функции переменной φ, заданные на $[\alpha,\beta]$.

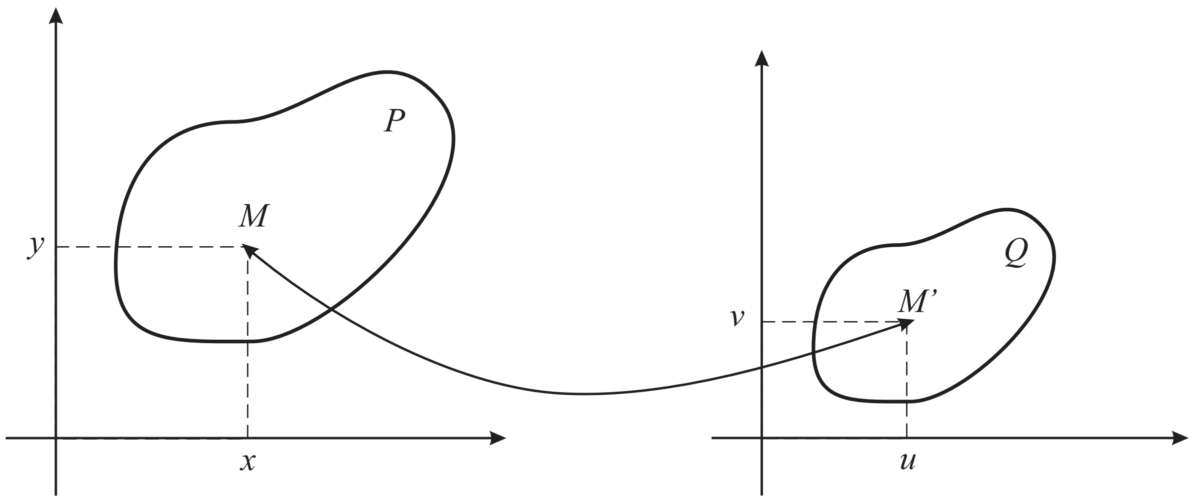
Зафиксируем произвольное значение угла φ, затем из полюса O под углом φ проведём луч OD. Точка входа – C лежит на кривой $r_1(\varphi)$, а точка выхода – D на кривой $r_2 = r_2(\varphi)$. Отсюда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr.$$

3.7. Отображение плоских областей

Пусть заданы две плоскости, на одной построена прямоугольная система координат Oxy, на другой – система координат Ouv.

Рассмотрим на плоскости Oxy область D, а на плоскости Ouv – область E.



Пусть заданы функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между точками (u,v) области E и точками (x,y) области D. Это означает, что уравнения

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{$*$}$$

однозначно разрешимы относительно u и v, то есть

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{$**$}$$

Таким образом, $(*)$ преобразует E в D, а $(**)$ – D в E.

Если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ непрерывны, то с помощью $(*)$ любая непрерывная линия L из E перейдёт в непрерывную линию L из D, справедливо и обратное.

По данной паре значений переменных u и v из области E можно однозначно определить не только положение точки $M'(u,v)$, но и положение точки $M(x,y)$ в области D. Это означает, что числа u и v можно рассматривать как некоторые координаты точки M из области D – криволинейные координаты.

Рассмотрим в плоскости Ouv прямую $u_0 = const$. С помощью формул преобразования

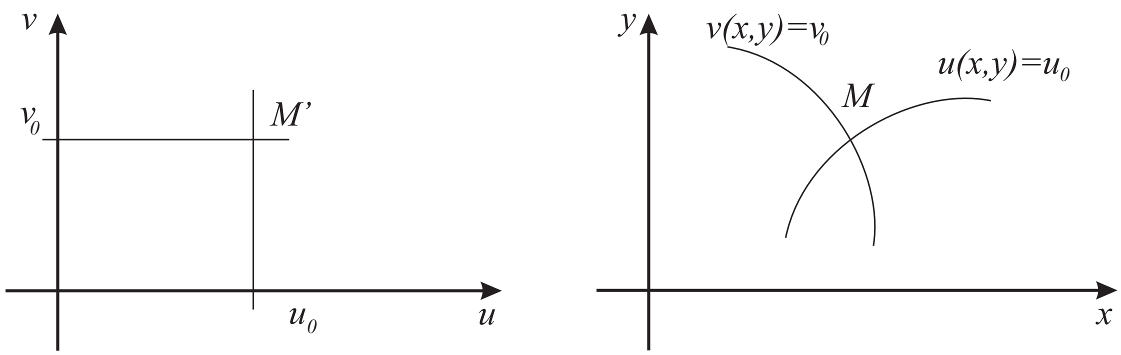
$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

она перейдёт в линию плоскости Oxy, то есть

$$x = x(u_0,v), \quad y = y(u_0,v)$$

и мы получили параметрическое уравнение. Аналогично, каждой прямой $v = v_0 = const$ из Ouv будет соответствовать линия в Oxy, параметрическое уравнение которой будет

$$x = x(u,v_0), \quad y = y(u,v_0).$$



Таким образом, придавая координатам u и v различные значения, получим сетку прямых на плоскости Ouv. На плоскости Oxy будем иметь соответствующую сетку координатных линий.

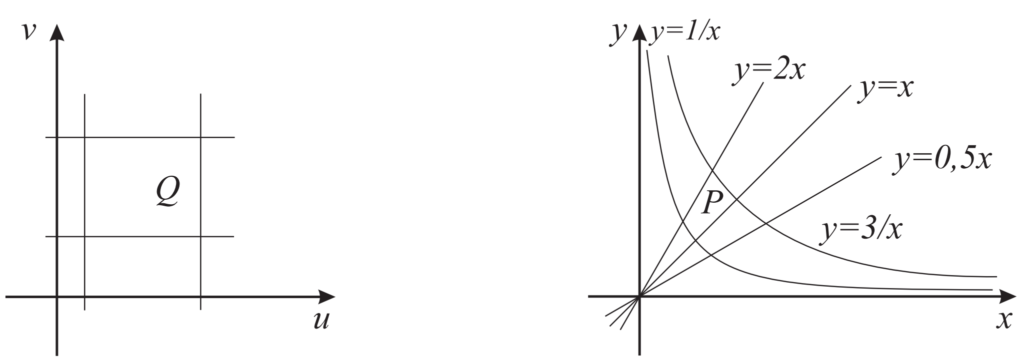
Пример. *Пусть криволинейные координаты заданы формулам*

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy.$$

Решение. Будем придавать u и v постоянные значения,

$$\frac{y}{x} = const, \quad xy = const.$$

Отсюда $\frac{y}{x} = const$ – прямые, проходящие через начало координат, $xy = const$ – гиперболы.



Рассмотрим на плоскости Ouv прямоугольник S ограниченный линиям $u = \frac{1}{2}$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 3$. Эти линии с помощью формул отображаются в прямые

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = 2x$$

и гиперболы

$$xy = 1, \quad xy = 3.$$

Полученные соотношения устанавливают взаимно однозначное соотношение между точкам прямоугольника E из Ouv и точкам криволинейного четырёхугольника D из Oxy. $\square$

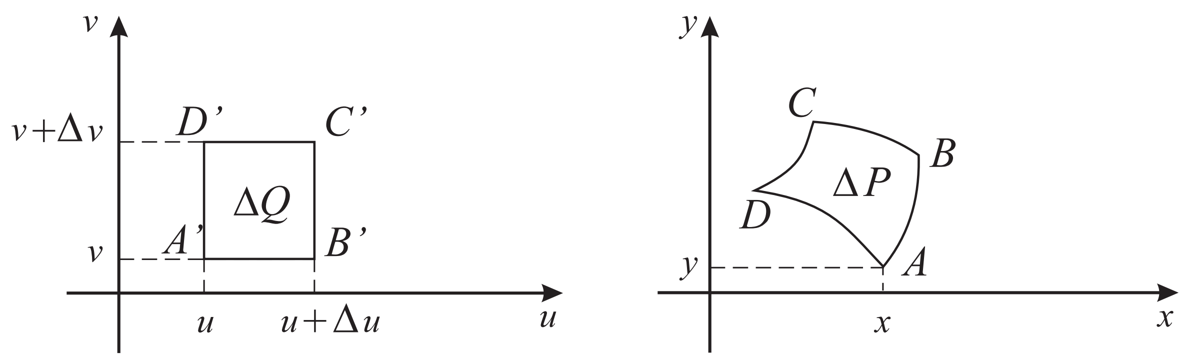
3.8. Площадь в криволинейных координатах

Найдём площадь области D с помощью криволинейных координат u и v.

Разобьём область E на частичные области прямыми параллельными осям Ou и Ov. Тогда область D в силу преобразований

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

разобьётся координатным линиям на элементарные криволинейные четырёхугольники.



Здесь $A'(u,v)$, $B'(u+\Delta u,v)$, $C'(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $D'(u,v+\Delta v)$. Отсюда по формулам преобразования

$$A\left(x(u,v),y(u,v)\right), \quad B\left(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v)\right),$$

$$C\left(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v)\right), \quad D\left(x(u,v+\Delta v), y(u,v+\Delta v)\right).$$

Найдём площадь ΔD.

Для достаточно малых Δu и Δv дуги $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$ будут также малы, а поэтому их можно считать прямолинейными.

Приращение функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ можно заменить соответствующими дифференциалами. Поэтому запишем:

$$x(u+\Delta u,v)-x(u,v)\approx x'_u(u,v)\Delta u,\quad x(u+\Delta u,v)\approx x(u,v)+x'_u(u,v)\Delta u,$$

$$x(u+\Delta u,v+\Delta v)\approx x(u,v)+x'_u(u,v)\Delta u+x'_v(u,v)\Delta v,$$

$$x(u,v+\Delta v)\approx x(u,v)+x'_v(u,v)\Delta v.$$

Тоже запишем и для функции $y=y(u,v)$:

$$y(u+\Delta u,v)\approx y(u,v)+y'_u(u,v)\Delta u,$$

$$y(u+\Delta u,v+\Delta v)\approx y(u,v)+x'_u(u,v)\Delta u+y'_v(u,v)\Delta v, y(u,v+\Delta v)\approx y(u,v)+y'_v(u,v)\Delta v.$$

Тогда вершины четырёхугольника $ABCD$ можно записать с приближёнными значениями как

$$A(x,y),\, B(x+x'_u\Delta u,y+y'_u\Delta u),\, C(x+x'_u\Delta u+x'_v\Delta v,y+y'_u\Delta u+y'_v\Delta v),\, D(x+x'_v\Delta v,\, y+y'_v\Delta v).$$

Проекции отрезков AB и CD на обе оси координат равны, то отрезки AB и CD параллельны и равны. Тоже справедливо и для отрезков AD и BC. Следовательно четырёхугольник $ABCD$ можно рассматривать как параллелограмм. Площадь параллелограмма с вершинами

$$A(x_1,y_1),\quad B(x_2,y_2),\quad C(x_3,y_3), D(x_4,y_4)$$

вычисляется следующим образом

$$S=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда площадь криволинейного четырёхугольника $ABCD$ равна

$$\begin{vmatrix} x'_u\Delta u & y'_u\Delta u \\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

Введём обозначения

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Получили, что $\Delta D\approx|I(u,v)|\Delta u\Delta v$.

Просуммировав площади всех элементарных четырёхугольников, получим приближённое выражение для площади D

$$S_D\approx\sum|I(u,v)|\Delta u\Delta v.$$

При $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ получим, что правая часть есть

$$\iint\limits_E |I(u,v)| du dv$$

или

$$S_D = \iint\limits_E |I(u,v)| du dv.$$

3.9. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть дан двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy.$$

Если функции

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

непрерывны вместе со своими частными производными в области E, то имеет место формула замены переменных (формула М.В. Остроградского)

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy = \iint\limits_E f(x(u,v),y(u,v)) |I(u,v)| du dv.$$

Для полярных координат имеем

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, x'_r = \cos\varphi, \quad y'_r = \sin\varphi, \quad x'_\varphi = -r\sin\varphi, \quad y'_\varphi = r\cos\varphi.$$

Тогда

$$I(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

И окончательно формула перехода будет иметь вид

$$\iint\limits_D f(x,y) dx dy = \iint\limits_E f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

3.10. Механические и физические приложения двойного интеграла

Вычисление массы плоской фигуры

Рассмотрим фигуру D, по которой непрерывным образом распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$.

Поверхностной плотностью массы в точке $M(x,y)$ фигуры D называется

$$\rho(M) = \lim_{P \to M} \frac{m(D)}{S},$$

где P – произвольный участок фигуры D, содержащий точку M, $m(P)$ – масса участка, S – площадь участка P. Условие $P \to M$ – участок P стягивается к точке M.

Если масса распределена равномерно, то поверхностная плотность $\rho(x,y)$ постоянна.

Пусть m – масса фигуры D. Разобьем эту фигуру сетью кривых на n произвольных частей: D_1, D_2, ..., D_n. Площади их S_1, S_2, ..., S_n, а m_1, m_2, ..., m_n массы этих частей. В каждой части D_i возьмём произвольную точку (ξ_i,η_i) и вычислим в ней плотность $\rho(\xi_i,\eta_i)$. Тогда масса m_i фигуры D_i приближённо равна $\rho(\xi_i,\eta_i)S_i$. Масса всей фигуры m:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)S_i.$$

Обозначим через λ длину наибольшего из диаметров областей D_i. Перейдём к пределу при $\lambda \to 0$

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)S_i$$

Предел непрерывной функции $\rho(x,y)$ существует и равен двойному интегралу

$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy.$$

Пример. *Найдите массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до одной из вершин квадрата и равна 1 в центре квадрата.*

Решение. Пусть плотность пластинки пропорциональна расстоянию от вершины квадрата, лежащей в начале координат. Тогда плотность $\rho(x,y)$ в произвольной точке N равна

$$\rho(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Плотность в центре равна 1, то

$$1 = k\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Откуда $\rho(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Таким образом, масса пластинки будет

$$m = 2\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \frac{1\sqrt{2}}{a}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{1\sqrt{2}}{a}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy =$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{a}\int\limits_0^a \left(\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{2}\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)\Big|_0^x dx =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)\int\limits_0^a x^2dx = \frac{a^2}{3}(2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})).$$

$\square$

Задания для самостоятельной работы

1. Запишите двойной интеграл от функции по области D в виде повторных интегралов двумя способами:

   (a) область D ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$;

   (b) область D ограничена линиями $y + x = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ и расположена в первой четверти;

   (c) область D ограничена линиями $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$;

   (d) область D ограничена линиями $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$;

   (e) область D ограничена линиями $y^2 = 4 + x$, $x = 5$.

2. Поменяйте порядок интегрирования и сделайте чертёж:

   (a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$;

   (b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$;

   (c) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$;

   (d) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x,y)dx - \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x,y)dx$.

3. Вычислите двойные интегралы:

   (a) $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$, область $D : \{y = x^2 + 3,\ y = 4x,\ x = 0\}$;

   (b) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, область $D : \{y = x^2,\ y^2 = x\}$;

   (c) $\iint\limits_D \sin(x + y)dxdy$, область $D : \{y = x,\ y + x = \frac{\pi}{2},\ y = 0\}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = 4x + 4, \quad y = 2 - x.$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0.$$

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x - x^2, \quad y = x^3.$$

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$yx = 1, \quad xy = 8, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 8x.$$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией:

   (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

   (b) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

   (c) $(x + y)^3 = axy$, $a > 0$.

9. Вычислите интегралы:

   (a)
$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dxdy,$$
   где область D определена неравенствами $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

   (b)
$$\iint\limits_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy,$$
   где D – кольцо кольцо между окружностям радиусов e и 1 с центром в начале координат;

   (c)
$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy,$$
   где D – круг радиуса a с центром в начале координат;

   (d)
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy,$$
   где D – круг радиуса a с центром в начале координат;

   (e)
$$\iint\limits_D \sin(x^2 + y^2) dxdy,$$
   где область D задана следующим соотношением $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией:

    (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

    (b) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

    (c) $(x + y)^3 = axy$, $a > 0$.

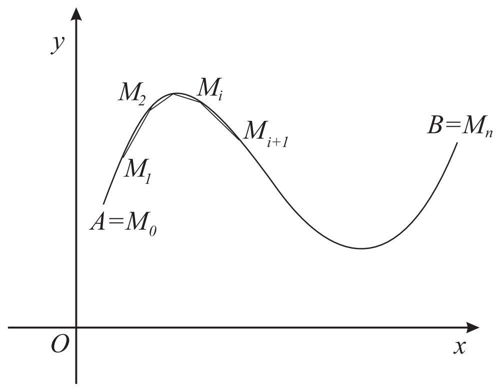
11. Вычислите объём тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$ из шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Криволинейный интеграл I рода

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB длины l. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x,y)$, определённую в точках дуги AB. Разобьем кривую AB точками $M_0 = A$, M_1, …, $M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i.



Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку (x_i,y_i) и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i$, которая называется интегральной для функции $f(x,y)$ по кривой AB. Пусть $d = \max \Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг деления. Если при $d \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм, то он называется криволинейным интегралом от функции $f(x,y)$ по длине дуги кривой AB

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl, \quad \int\limits_{L} f(x,y)dl.$$

Условие существования криволинейного интеграла I рода формулируется следующим образом.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл I рода существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.*

4.2. Основные свойства криволинейного интеграла I рода

Сформулируем основные свойства интеграла I рода.

1. Криволинейный интеграл I рода не зависит от пути интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$$

2. Постоянную можно выносить за знак интеграл

$$\int\limits_{AB} c\cdot f(x,y)dl = c\cdot\int\limits_{AB} f(x,y)dl.$$

3. $\int\limits_{AB}\left(f(x,y)\pm g(x,y)\right)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl \pm \int\limits_{AB} g(x,y)dl.$

4. Если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1\cup L_2$ и L_1, L_2 имеют одну общую точку, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl.$$

5. Если для точек кривой выполнено неравенство $f_1(x,y)\le f_2(x,y)$, то

$$\int\limits_{L} f_1(x,y)dl = \int\limits_{L} f_2(x,y)dl.$$

6. Если подынтегральная функция $f(x,y) = 1$, то криволинейный интеграл численно равен длине дуги интегрирования

$$\int\limits_{AB} dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = l.$$

4.3. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Рассмотрим несколько случаев задания кривой L.

1. *Параметрическое представление кривой интегрирования.*
   Если кривая AB задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta],$$

$x(t)$, $y(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции параметра t. Причём точка A соответствует $t=\alpha$, а B – $t=\beta$. Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt.$$

2. *Явное представление кривой интегрирования.*

   Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, где $\varphi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}dx.$$

3. *Кривая задана в полярных координатах.*

   Пусть кривая интегрирования задана уравнением

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

то $dl = \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}$,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}d\varphi.$$

4.4. Криволинейный интеграл II рода

Интегральная сумма криволинейного интеграла первого рода имеет вид

$$\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta l_i.$$

Если в этой сумме множитель Δl_i, представляющий длину частичной дуги, заменить проекцией $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, то получим

$$\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta x_i.$$

Полученная сумма называется интегральной суммой функции $f(x,y)$ по переменной x.

Если при $\delta l_i \to 0$ интегральная сумма имеет конечный предел, то его называют криволинейным интегралом по переменной x

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta x_i.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл по координате y

$$\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta y_i.$$

Криволинейные интегралы по координатам имеют общее название – криволинейные интегралы второго рода.

Справедлива следующая

Теорема. *Если кривая AB гладкая, то есть непрерывна вместе со своей производной, а функция $f(x,y)$ непрерывна на AB, то криволинейный интеграл II рода существует.*

Перечислим основные свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении пути интегрирования криволинейный интеграл меняет знак
$$\int\limits_{AB} f(M)dx = -\int\limits_{BA} f(M)dx, \quad \int\limits_{AB} f(M)dy = -\int\limits_{BA} f(M)dy,$$

2. Если кривая интегрирования AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей длине равен сумме интегралов по её частям
$$\int\limits_{AB} f(M)dx = \int\limits_{AC} f(M)dx + \int\limits_{CB} f(M)dx.$$

Криволинейный интеграл II рода общего вида имеет следующее представление
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy.$$

4.5. Вычисление криволинейного интеграла II рода

1. *Кривая задана параметрическим уравнением.*
   Пусть кривая L задана параметрическим уравнением
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha,\beta]. \end{cases}$$

   Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой AB.

   По определению
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i.$$

   Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}).$$

   Воспользуемся формулой Лагранжа
$$\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i, \quad \text{где} \quad c_i \in (t_{i-1},t_i).$$

Выберем точку $(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ так, чтобы

$$\begin{cases} \bar{x}_i = x(c_i), \\ \bar{y}_i = y(c_i). \end{cases}$$

Преобразуем интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x(c_i),y(c_i)\right) \cdot x'(c_i)\Delta t_i.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(c_i),y(c_i)\right) \cdot x'(t)dt$$

аналогично и для

$$\int\limits_{AB} g(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g\left(x(t),y(t)\right) \cdot y'(t)dt.$$

Из полученных выражений выводим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[f\left(x(t),y(t)\right) \cdot x'(t) + g\left(x(t),y(t)\right) \cdot y'(t)\right] dt.$$

2. *Явное представление кривой интегрирования.*

   Если кривая задана явным уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, то запишем её в виде параметрического уравнения

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x). \end{cases}$$

   Откуда получаем,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[f(x,\varphi(x)) + g(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right] dx.$$

Отметим, что криволинейный интеграл I-го и II-го рода можно связать соотношением

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[f(x,y)\cos\alpha + g(x,y)\cos\beta\right] dl,$$

где α и β – углы, образованные касательной к кривой AB в заданной точке с осями координат.

4.6. Формула Остроградского – Грина

Покажем, что между двойным интегралом по области D и некоторым криволинейным интегралом по контуру L, ограничивающему эту область, может существовать определённая связь.

Пусть на плоскости Oxy задана область, ограниченная кривой, пресекающейся с прямыми, параллельным координатным осям не более чем в двух точках, то есть область D – простая.

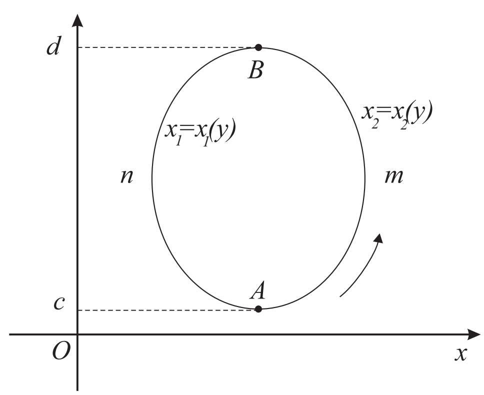
Справедлива следующая

Теорема. *Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частным производными $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ в области D, то имеет место равенство*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где L – граница области D.

Доказательство. Вычислим интегралы $\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$ и $\int\limits_L Q(x,y)dy$.



Пусть $x_1 = x_1(y)$ – уравнение дуги BnA, а $x_2 = x_2(y)$ – уравнение дуги AmB. Представим двойной интеграл через повторный

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx = \int\limits_c^d \left[Q(\varphi_2(y),y) - Q(\varphi_1(y),y)\right] dy.$$

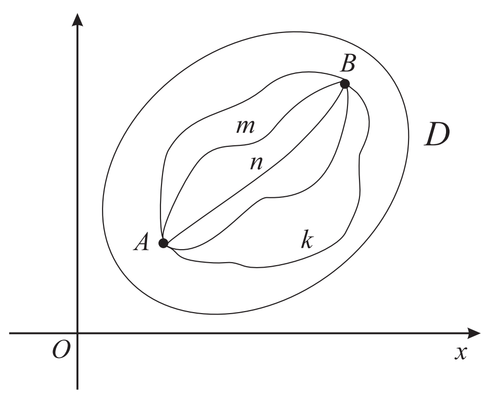
Криволинейный интеграл по всему контуру L представим в виде суммы интегралов по частям

$$\int\limits_L Q(x,y)dy = \int\limits_{AmB} Q(x,y)dy + \int\limits_{BnA} Q(x,y)dy,$$

где
$$\int\limits_{AmB} Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} Q(\varphi_2(y),y)dy,$$
$$\int\limits_{BnA} Q(x,y)dy = \int\limits_{d}^{c} Q(\varphi_1(y),y)dy = -\int\limits_{c}^{d} Q(\varphi_1(y),y)dy.$$
Отсюда видно, что
$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dy = \int\limits_{L} Q(x,y)dy.$$
Аналогично доказывается, что
$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{L} P(x,y)dx.$$
□

4.7. Независимость криволинейного интеграла II рода

Пусть в замкнутой области определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные в этой области вместе со своими производными $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.



Отметим в этой области две точки A и B, вычислим криволинейный интеграл
$$\int P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (1)$$
по различным кривым идущим из A в B, лежащим в области D. По каждой этой кривой интеграл имеет значение. Если его значения по всевозможным кривым будут одинаковы, то криволинейный интеграл на зависит от пути интегрирования
$$\int\limits_{AnB} = \int\limits_{AmB} = \ldots = \int\limits_{AkB}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Для того чтобы криволинейный интеграл (1) не зависел от пути интегрирования в области D, необходимо и достаточно, чтобы он равнялся нулю по любому замкнутому контуру, находящемуся в этой области.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть интеграл (1) не зависит от пути интегрирования. Возьмём в области D произвольный замкнутый контур $ABCDA$. Так как интеграл по контуру равен сумме интегралов по частям, то

$$\int\limits_{ABCDA} = \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CDA} = \int\limits_{ABC} - \int\limits_{ADC}.$$

Поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования, то

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{ADC} \quad \text{или} \quad \int\limits_{ABC} - \int\limits_{ADC} = 0.$$

Откуда получаем

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Достаточность. Пусть интеграл (1) по любому замкнутому контуру равен нулю. Возьмём в области D точки A и C и соединим их кривыми ABC и CDA. Эти кривые составляют замкнутый контур $ABCDA$ и по условию

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{ABC} - \int\limits_{ADC} = 0 \quad \text{или} \quad \int\limits_{ABC} = \int\limits_{ADC}.$$

□

Следствие 2. *Если выполнены условия*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

то подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$$

и справедливо тождество

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} dU(x,y) = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1).$$

Получили обобщённую формулу Ньютона – Лейбница.

4.8. Восстановление функции по её полному дифференциалу

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$ в области D.

Для отыскания функции $F(x,y)$ достаточно вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

по любой линии, соединяющей точки (x_0,y_0) и (x,y). Тогда

$$F(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C,$$

где C – произвольная постоянная. В качестве пути интегрирования (линии) можно брать ломаную, соединяющую точки (x_0,y_0), (x,y_0) и (x,y). Тогда

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Каждый интеграл, стоящий справа можно преобразовать к обыкновенному интегралу

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C,$$

во втором интеграле x хоть и постоянна, но произвольна.

4.9. Приложения криволинейных интегралов

Работа силы.

Пусть материальная точка M под действием силы $\vec{F}$ совершает движение в плоскости, описывая путь L. Сила $\vec{F}$ предполагается переменной величиной, зависящей от положения точки M на L. Требуется определить работу силы, затраченную на передвижение точки M из пункта A в пункт B.

a) Разобьём дугу AB произвольным образом на n частей точками: $A = M_0$, M_1, ..., $M_n = B$.

b) Вычислим приближённо работу на участке пути $M_k M_{k+1}$ предполагая, что:

   (a) на всём этом участке действует не пременная ,а постоянная сила $\vec{F}_k$, равная значению силы в какой-либо точке этого участка, например в M_k, то есть $\vec{F}_k = \vec{F}(M_k)$;

   (b) путь от M_k до M_{k+1} прямолинейный (то есть заменяем дугу $M_k M_{k+1}$ хордой $M_k M_{k+1}$).

Работа на участке $M_k M_{k+1} = l_k$ выражается в виде произведения силы на путь и на косинус угла между направлением пути и силы

$$A_k \approx |\vec{F}_k| l_k \cos(\widehat{\vec{F}_k, l_k}),$$

где $|\vec{F}_k|$ – длина вектора $\vec{F}_k$, а l_k – длина вектора $M_k \vec{M}_{k+1}$. Правая часть приближённого равенства представляет собой скалярное произведение, то есть

$$\vec{F}_k = P_k \vec{i} + Q_k \vec{j}, \quad \vec{l}_k = \Delta x_k \vec{j} + \Delta y_k \vec{j}.$$

Тогда

$$A_k = P_k \Delta x_k + Q_k \Delta y_k.$$

Просуммируем по всем значениям k ($k = 0, 1, \dots, n-1$), получим величину

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(P_k \Delta x_k + Q_k \Delta y_k\right),$$

которую можно рассматривать как приближённое значение работы силы на всём пути от A до B. Передел суммы при $\Delta x_k \to 0$, $\Delta y_k \to 0$ можно считать точным значением работы и он представляет собой криволинейный интеграл

$$A = \int\limits_L P dx + Q dy,$$

где P и Q – составляющие силы $\vec{F}$ по координатным осям.

Площадь плоской фигуры.

Пусть область D в плоскости Oxy ограничена контуром L. Вычислим площадь этой области.

Из теории двойного интеграла известно, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{при} \quad f(x,y) = 1$$

выражает площадь области интегрирования D. Поэтому, если в формуле Остроградского – Грина подобрать функции P и Q такими, чтобы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

то площадь области D представима в виде

$$D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_L Pdx + Qdy.$$

Например, возьмём $P = 0$ и $Q = x$, или $Q = 0$ и $P = -y$. В этом случае получаем, что

$$D = \int\limits_L xdy \quad \text{или} \quad D = -\int\limits_L ydx.$$

Складывая почленно полученные равенства будем иметь

$$2D = D = \int\limits_L xdy - ydx$$

или

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \sqrt{y}dl,$$

где L – первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

2. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L xydl,$$

где L – четверть эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

лежащая в первом квадранте.

3. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 + y^2)^n dl,$$

где L – окружность заданная уравнением

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L ydl,$$

где L – дуга параболы $y^2 = 2px$ от точки (0,0) до $(2{,}2\sqrt{p})$.

5. С помощью криволинейного интеграла найдите длину астроиды

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

6. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L xydl,$$

где L – контур треугольника с вершинам в точках (0,0), (0,1) и (1,0).

7. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl,$$

где L – первый виток конической винтовой линии

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = t, \end{cases}$$

8. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5},$$

где L – отрезок прямой $y = 2x-2$, заключённый между точками $A(0,-2)$ и $B(1,0)$.

9. Вычислите часть боковой поверхности круглого цилиндра

$$x^2+y^2 = R^2 \quad (x \le 0,\ y \le 0),$$

срезанного сверху поверхностью $2Rz = xy$.

10. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (2a-y)dx + xdy,$$

где L – дуга первой арки циклоиды, пробегаемая в отрицательном направлении от 0 до $2\pi a$

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$$

11. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx + xydy,$$

по кривой $y = e^x$ от точки $(0;1)$ о точки $(1;e)$.

12. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

вдоль астроиды $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

от точки $(a; 0)$ до $(0; a)$

13. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L 4x\sin^2 y dx + y\cos^2 2x dy,$$

где L – прямая, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(3; 6)$.

14. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2},$$

по окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

15. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L ydx + xdy,$$

по контуру треугольника, ограниченного осями координат и прямой $14x+10y = 35$.

16. Используя формулу Грина – Остроградского, вычислите криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x - 2y)dx + (3x + y)dy$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в положительном направлении.

17. Работа силы определена интегралом

$$\int\limits_{AB} \frac{xdx}{y+1} + \frac{ydy}{x+1}$$

(a) не прибегая к вычислению, выясните, зависит ли работа от пути интегрирования;

(b) вычислите работу вдоль параболы $y = x^2$ и прямой $y = x$ между точками $A(0{,}0)$ и $B(1{,}1)$.

18. Вычислите площадь, ограниченную петлёй кривой

$$x = \frac{3t}{1+t^2}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^2}.$$

19. Проекция силы $\mathbf{F}$ на координатные оси равны

$$P = (y-x)x, \quad Q = \frac{x^2-y^2}{2}.$$

Покажите, что работа по перемещению материальной точки под действием этой силы не зависит от пути перемещения.

20. Сила имеет направление отрицательной полуоси ординат и равна квадрату абсциссы точки её приложения. Найдите работу при премещении массы m по параболе $y^2 = 1 - x$ от точки $A(1{,}0)$ до точки $B(0{,}1)$.

5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

5.1. Основные понятия

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнение называется уравнение вида*

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0,$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и её производные

Дифференциальным уравнением является уравнение

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ – известная непрерывная на интервале (a,b) функция, а $y = y(x)$ – искомая функция. Всякая функция удовлетворяющая данному уравнению имеет вид

$$y = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для $f(x)$, C – произвольная постоянная

Определение. *Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение*

Пример. *Уравнения*

1. $y' = xy^{100}$ *– первый порядок;*
2. $y'' + \sin y = 0$ *– второй порядок.*

Определение. *Решением уравнения n-го порядка на интервале (a,b) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, имеющая на этом интервале производные до n-го порядка включительно. при подстановке функции $y = \varphi(x)$ и её производных в уравнение обращает его в тождество по x на (a,b).*

Пример. *Функция $y = \sin x$ – решение уравнения второго порядка*

$$y'' + y = 0$$

на всей числовой прямой. Поскольку $y' = \cos x$, а $y'' = -\sin x$.

График решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения – интегральная кривая уравнения.

Определение. *Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.*

Пример. *Найдите такую кривую, чтобы тангенс угла наклона касательной в каждой её точке численно равнялся ординате точки касания.*

Решение. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой. Из геометрического смысла производной известно, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Тогда имеем

$$y'(x) = y(x).$$

Получили известное уравнение первого порядка. Функция $y = e^x$ – решение и также решение будет $y = Ce^x$. Таким образом, получили, что уравнение имеет бесконечное множество решений. Выелим и тривиальное решение $y = 0$. $\square$

Чтобы найти определённое решение, необходимо задать начальное условие, то есть $y(x_0) = y_0$. Геометрически это означает, что задаётся точка $M_0(x_0,y_0)$, через которую должна проходить искомая интегральная кривая.

Задача нахождения решения $y(x)$, удовлетворяющего начальному условию, называется задачей Коши.

5.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Сформулируем теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка при заданных начальных условиях.

Теорема. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x,y)$$

и пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy. Пусть задана произвольная точка $M_0(x_0,y_0) \in D$. Если существует окрестность Ω этой точки, в которой функция $f(x,y)$:

a) непрерывна по x и y;

b) имеет ограниченную частную производную $f'_y(x,y)$ в области D.

Тогда найдётся интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ *оси* Ox, *на котором существует и притом единственная функция* $y = \varphi(x)$ *являющаяся решением уравнения и принимающая при* $x = x_0$ *значение* y_0.

Геометрически теорема означает, что через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит одна и только одна интегральная кривая заданного уравнения.

Стоит отметить, что теорема носит локальный характер, то есть она гарантирует существование единственного решения $y = \varphi(x)$ лишь в достаточно малой окрестности точки x_0.

Пример. *Покажите, что уравнение*

$$y' = x + y$$

при заданном начальном условии имеет единственное решение.

Решение. Действительно, функция $f(x,y) = x + y$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy и всюду $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$. Тогда из теоремы следует, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая. □

Рассмотрим ещё один показательный пример.

Пример. *Дано дифференциальное уравнение*

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

с начальными условиями

$$y = 0 \quad \textit{при} \quad x = 0.$$

Решение. Функция $f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ определена и непрерывна на плоскости Oxy. Здесь

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt[3]{y}} \to \infty.$$

Условие теоремы нарушаются в точках оси Ox. Функция $y = (x+C)^3$ – решение данного уравнения, C – любая константа. Есть и тривиальное решение $y = 0$. При заданном начальном условии решений уравнения будет бесконечно много. Действительно,

$$y = 0, \quad y = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & x > 0, \end{cases} \qquad y = x^3.$$

Отсюда видно, что через каждую точку проходят хотя бы две интегральные кривые. Ели взять $M(1,1)$, то в малой окрестности выполнены условия теоремы существования и единственности. □

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения*

$$y' = f(x,y)$$

в некоторой области D является семейство функций

$$y = \varphi(x,y),$$

зависящих от переменной x и произвольной постоянной C:

a) *при любом допустимом значении параметра C функция $y = \varphi(x,C)$ – решение*

$$\varphi'_x(x,C) = f(x,\varphi(x,C));$$

b) *каково бы ни было начальное значение*

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

всегда можно подобрать C_0 такое, что $y_0 = \varphi(x_0,C_0)$.

Определение. *Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего при каком-либо C.*

При решении дифференциального уравнения часто получают уравнения

$$\Phi(x,y,C) = 0.$$

Такое уравнение называют общим интегралом, а $\Phi(x,y,C_0)$ – частным интегралом.

Определение. *Решение $y = \Psi(x)$ называется особым, если в каждой его точке нарушается единственность.*

5.3. Особые решения дифференциальных уравнений

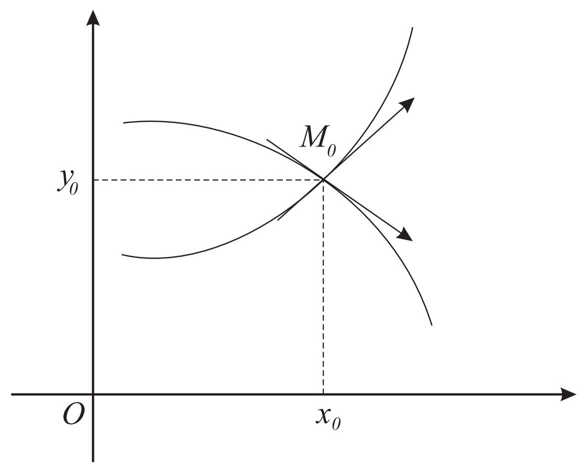
Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F(x,y,y') = 0, \quad y' = f(x,y).$$

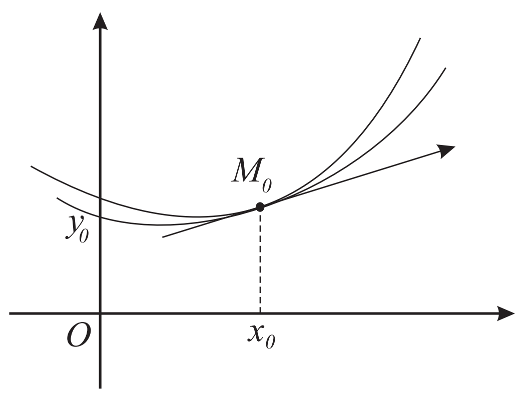
Если в точке $M_0(x_0,y_0)$ плоскости частичная производная $f'_y(x,y)$ существует и ограничена, то через неё проходит единственная интегральная кривая этого уравнения.

Через точку $M_0(x_0,y_0)$ проходит не одна интегральная кривая, то возникают различные возможности:

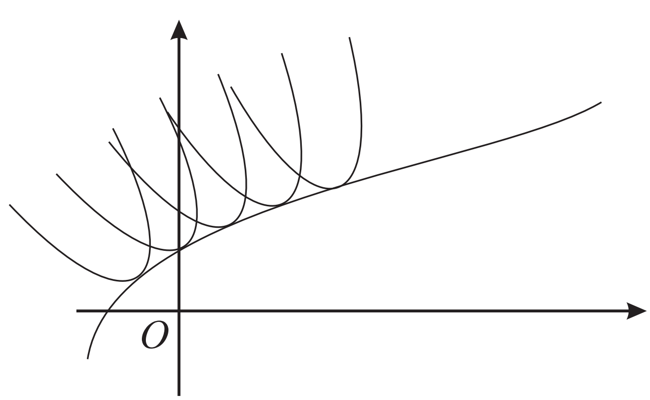
1. через точку $M_0(x_0,y_0)$ проходит несколько интегральных кривых и они пересекаются в этой точке, то есть в этой точке имеют различные касательные. Это Соответствует случаю, когда данное дифференциальное уравнение распадается на несколько уравнений;



2. через точку $M_0(x_0y_0)$ проходят по крайней мере две интегральные кривые, касающиеся друг друга в этой очке, то есть касательные в точке M_0 общая.



Пусть имеется кривая AB такая, что в каждой точке ее касается какая-нибудь интегральная кривая. Таким образом, сама кривая AB также будет интегральной кривой.



Определение. *Решение, график которого таков, что через каждую его точку проходит по крайней мере ещё одна касающаяся его интегральная кривая, называется особым решение дифференциального уравнения.*

Пример. *Дано уравнение*

$$y^2\left(1+(y')^2\right)=a^2, \quad a=const.$$

Решение. Запишем

$$1+(y')^2=\frac{a^2}{y^2}.$$

Откуда будем иметь

$$(y')^2=\frac{a^2-y^2}{y^2}, \quad y'=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{a^2-y^2}}=dx, \quad \pm\sqrt{a^2-y^2}=x+C,$$

$$a^2-y^2=(x+C)^2, \quad (x+C)^2+y^2=a^2.$$

Несложно заметить, что $y=a$ и $y=-a$ – графики особых решений, которые были потеряны в процессе преобразований. □

Приведём и другой способ нахождения особых решений, который состоит в использовании огибающей семейства кривых:

1. нужно взять уравнение семейства кривых, то есть общий интеграл

$$\Phi(x,y,C)=0;$$

2. составить систему

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0,\\ \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=0\end{cases}$$

   и исключить из неё C;

3. полученная кривая $y=\varphi(x)$ – огибающая или особое решение.

5.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$f_1(y)dy=f_2(x)dx \qquad (*)$$

называются дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными. Здесь $f_1(y)$, $f_2(x)$ – известные непрерывные функции.

Пусть $F_1(y)$ и $F_2(x)$ – первообразные. Тогда $(*)$ равносильно

$$dF_1(y) = dF_2(x)$$

и

$$F_1(y) = F_2(x) + C.$$

Решив полученное уравнение относительно y, будем иметь

$$y = \varphi(x).$$

Пример. *Решите уравнение*

$$xdx = ydy = 0.$$

Решение. Имеем

$$ydy = -xdx, \quad x^2 + y^2 = C$$

□

Определение. *Уравнение вида*

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy,$$

в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x или только от y, называются дифференциальным уравнением с разделяющимися коэффициентами.

При делении такого уравнения на $\varphi_1(y)f_2(x) \neq 0$ оно приводится к

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy$$

Пример. *Решите уравнение*

$$(1 + y^2)xdx = (1 + x^2)ydy.$$

Решение. Поделим обе части на $(1 + y^2)(1 + x^2) \neq 0$. Имеем

$$\frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{y}{1 + y^2}dy,$$

$$\ln(1+x^2) = \ln(1+y^2) + \ln C,$$
$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C.$$

□

Деление на $\varphi_1(y)f_2(x)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $\varphi_1(y)f_2(x)$.

Пример. *Решите уравнение*

$$xdx = ydy.$$

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Отсюда получаем $y = Cx$, $C \neq 0$.

При делении на $y \neq 0$ потеряно решение $y = 0$. Его можно включить в решение, если $C = 0$. □

В общем случае, считая переменные x и y равноправными, наряду с дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

можно рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x,y), \quad f_1(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}.$$

Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(ax+by+c\right),$$

где $f(z)$ – непрерывная функция своего аргумента, a, b, c – постоянные числа. Подстановка $x = ax+by+c$ преобразует его в дифференциальное уравнение с разделяющимися перменными

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z),$$
$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx,$$
$$\int \frac{dz}{a+bf(z)} = x + C.$$

5.5. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го порядка относительно x и y, если при любом t справедливо тождество

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Пример. *Функции:*

- $f(x,y) = x^2y - 4y^3 + \frac{3x^4}{y}$ – *однородная 3-й степени.*
  Действительно,

$$f(tx,ty) = (tx)^2\, ty - 4\,(ty)^3 + \frac{3\,(tx)^4}{ty} = t^3\left(x^2y - 4y^3 + \frac{3x^4}{y}\right).$$

- $f(x,y) = \ln\frac{x}{y}$ – *однородная 0-й степени.*
  Действительно,

$$f(tx,ty) = \ln\frac{tx}{ty} = t^0 \ln\frac{x}{y}.$$

Лемма. *Всякую однородную функцию нулевой степени можно представить в виде функции отношения $\frac{x}{y}$*

Доказательство. Пусть $f(x,y)$ – однородная функция нулевой степени. Возьмём $t = \frac{1}{x}$. По определению

$$f(x,y) = f(1,\frac{y}{x}).$$

Получили, что в правой части стоит функция от $\frac{y}{x}$. □

Определение. *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

называется однородным относительно переменных x и y, если функция $f(x,y)$ есть однородная нулевого пордка

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Если $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ – произвольная непрерывная функция, то переменные не разделяются.

Введём функцию $u(x) = \frac{y}{x}$, $y = xu(x)$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \quad y' = u + xu'.$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение. Имеем

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u), \quad xdu = (\varphi(u) - u)\,dx.$$

Тогда можно записать

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Сделав обратную замену, получим общий интеграл.

Пример. *Решите уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad u = \frac{y}{x}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}, \quad u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u}, \quad udu = \frac{dx}{x},$$
$$u^2 = \ln Cx^2, \quad y^2 = x^2 \ln Cx^2.$$

Если $\varphi(u) - u = 0$, то исходное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y = Cx.$$

Если $\varphi(u) - u = 0$ при $u = u_0 = const$, то существует решение $u = u_0$ или $y = u_0 x$.

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1},$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 – постоянные числа, при $c = c_1 = 0$ является однородным.

Пусть хотябы одно из c или c_1 отлично от 0. Тогда возможны два случая:

1. Определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Введём переменные ξ и η:

$$\begin{cases} x = \xi + h, \\ y = \eta + k, \end{cases}$$

где h, k – неопределены. Здесь $dx = d\xi$, $dt = d\eta$. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1 h + b_1 k + c_1}.$$

Если h, k решения системы

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \end{cases}$$

то получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}.$$

Заменяя в общем интеграле ξ на $x-h$, η на $y-k$, найдём общий интеграл исходного уравнения.

2. Определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае система

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \end{cases}$$

в общем случае не имеет решения. Тогда

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$$

Сделав замену $z = ax + by$, придём к уравнению с разделяющимися переменными.

5.6. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной

$$a(x)\frac{dx}{dx} + b(x)y = f(x), \qquad (*)$$

где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и правая часть $f(x)$ – известные функции, заданные на (α,β).

Если $f(x) = 0$ на (α,β), то уравнение называется однородным.

Предполагается, что $a(x) \neq 0$, тогда уравнение перепишем в виде

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad (**)$$

$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Если функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha_1,\beta_1] \subset (\alpha,\beta)$, то уравнение $(**)$ всегда имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где точка (x_0,y_0) принадлежит полосе $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < +\infty$.*

Доказательство. Решим уравнение относительно y'

$$y' = -p(x)y + q(x).$$

Здесь правая часть $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$, непрерывна по x и y. Вычислим её производную $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$. Поскольку $p(x)$ непрерывна на $[\alpha_1,\beta_1]$, то она ограничена на нём. Таким образом, выполнены все требования теоремы существования и единственности. $\square$

Линейное однородное уравнение, соответствующее $(**)$ имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Оно интегрируется разделением переменных

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Отсюда

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

При делении на y потеряно решение $y = 0$, но его можно включить, считая $C = 0$. Получили решение в полосе $\alpha_1 < x < \beta_1$ и $-\infty < y < +\infty$.

Для решения неоднородного линейного уравнения используют метод вариации постоянной. Этот метод основан на том, что общее решение уравнения равно сумме решений однородного уравнения и какого-либо частного решения

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}}.$$

Подставим $y_{\text{ОН}}$ в уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

получим

$$\frac{d(y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}})}{dx} + p(x)(y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}}) = \frac{d(y_{\text{ОО}})}{dx} + p(x)y_{\text{ОО}} + \frac{d(y_{\text{ЧН}})}{dx} + p(x)y_{\text{ЧН}} =$$

$$0+\frac{d(y_{\text{чн}})}{dx}+p(x)y_{\text{чн}}=q(x).$$

Разность двух частных решений $y_{\text{чн}}$ и $y'_{\text{чн}}$ уравнения $(*)$ является решением однородного уравнения

$$\frac{d(y'_{\text{чн}}-y_{\text{чн}})}{dx}+p(x)(y'_{\text{чн}}-y_{\text{чн}})=q(x)-q(x)=0.$$

Поэтому проинтегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

где $C(x)$ – новая неизвестная функция. Вычислим производную

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставим месте с y в уравнение $(*)$. Имеем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}=q(x),\quad \frac{dC}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Отсюда получаем

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1.$$

Таким образом,

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Приведём ещё один способ решения заданного уравнения $(*)$.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

Возьмём $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, где u и v – неизвестные функции. Подставим $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ в уравнение

$$u'v+v'u+p(x)uv=q(x),$$

$$u'v + (v' + p(x)v)u = q(x).$$

Выберем $v(x)$ таким образом, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Тогда

$$\frac{dv}{dx} = -p(x), \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная $u(x)$ и $v(x)$ найдём решение.

Пример. *Решите уравнение*

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\cos x.$$

Решение. Найдём сначала решение однородного уравнения. Имеем

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0, \quad y_{\text{OO}} = Ce^{-\sin x}.$$

Решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-\sin x}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x,$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = 2\cos x,$$

$$\frac{dC}{dx} = 2\cos x e^{\sin x}, \quad C(x) = 2e^{\sin x} + C.$$

Таким образом,

$$y = Ce^{-\sin x} + 2, \quad y_{\text{ЧН}} = 2.$$

□

5.7. Уравнение Бернулли

Некоторые дифференциальные уравнения путём замены переменных могут быть сведены к линейным

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m, \quad m = const.$$

Это уравнение было предложено Я. Бернулли в 1695 году, а решено И. Бернулли в 1697 году.

Если $m = 1$, то получим линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + (p(x) - q(x))\, y = 0.$$

Если $m = 0$, то неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Пусть $m \neq 0$ и $m \neq 1$. Тогда поделим всё на y^m. Имеем

$$y^{-m}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-m+1} = q(x).$$

Введём обозначения

$$z = y^{-m+1}, \quad \frac{dz}{dx} = (-m+1)y^{-m}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} = y^{-m}\frac{dy}{dx}.$$

Теперь уравнение запишем как

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

5.8. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим ещё один класс интегрируемых дифференциальных уравнений.

Определение. *Уравнение вида*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

В этом случае $F(x,y) = C$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

предполагается, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ имеют непрерывные частные производные соответственно по y и по x в некотрой области D.

Выполняется следующая

Теорема. *Для того чтобы левая часть уравнения*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

была полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$ двух переменных необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим ,что левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$M = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Продифференцируем первое выражение по y, а втрое по x. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Так как смешанные производные равны, то получаем тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Докажем достаточность. Найдём функцию $F(x,y)$ такую, что

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

где

$$M = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}. \qquad (*)$$

Найдем функцию, удовлетворяющую $(*)$. Проинтегрируем, например, первое выражение в $(*)$, считая y постоянной

$$F = \int M(x,y)dx + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ – произвольная функция от y.

Подберем $\varphi(y)$ так, чтобы частная производная по y от $F(x,y)$ была равна $N(x,y)$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \varphi'(y).$$

Откуда

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Левая часть равенства не зависит от x. Покажем, что и правая часть не зависит от x. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Проинтегрировав

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

по переменной y, получаем

$$\varphi(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) + C.$$

В итоге

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) + C.$$

□

5.9. Интегрирующий множитель

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

И пусть условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

не выполняется. Умножив заданное уравнение на функцию $\mu(x,y) \not\equiv 0$ получим,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0.$$

Выберем функцию $\mu(x,y)$ таким образом, чтобы для этого уравнения было выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right).$$

В этом случае функцию $\mu(x,y)$ называют *интегрирующим множителем.*

Выполним дифференцирование

$$\mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = \mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x},$$

$$M(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} = \mu(x,y)\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right). \qquad (*)$$

Отметим, что полученное уравнение сложнее заданного, благодаря тому, что $\mu = \mu(x,y)$ – функция двух переменных. Предположим, что $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

Пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда уравнение $(*)$ примет вид

$$-N(x,y)\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \mu(x)\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right).$$

Откуда

$$\frac{\partial \mu(x)}{\mu} = \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}dx.$$

В итоге получаем, что

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}dx}.$$

При этом выражение

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

должно зависеть только от переменной x.

Пример. *Решите уравнение*

$$(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0.$$

Решение. Проверим, является ли приведенное уравнение уравнением в полных дифференциалах

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy^2 + 1,$$

то есть $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Найдем интегрирующий множитель. Проверим, что выражение

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{-1 - 2xy^2 - 1}{xy^2 + x}$$

зависит только от переменной x. Действительно,

$$\frac{-1 - 2xy^2 - 1}{xy^2 + x} = \frac{2xy^2 + 2}{x(xy^2 + 1)} = \frac{2(xy^2 + 1)}{x(xy^2 + 1)} = -\frac{2}{x}.$$

Тогда

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2},$$

Умножив исходное уравнение на $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ получим,

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

Это уравнение уже является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. $\square$

Задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнения с разделяющимися переменными:

   (a) $(xy^2 + x)dx + (yx^2 - y^2)dy = 0$,

   (b) $(1 + x)y - (1 - y)y' = 0$,

   (c) $(\sin y + \cos y)y' + \cos x \sin y = 0$,

   (d) $2x\sqrt{1 - y^2}dx + ydy = 0$, $y(1) = 0$,

   (e) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$,

   (f) $y' = \cos(y - x - 2)$,

   (g) $(y - x - 2)^2 y' = 1$.

2. Решите однородные уравнения:

   (a) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$,

   (b) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$,

   (c) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$,

   (d) $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$,

   (e) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$,

   (f) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$,

   (g) $xdy - ydx = y \ln \frac{y}{x} dx$,

   (h) $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$,

   (i) $y' = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

3. Решите линейные уравнения:

   (a) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)$,

   (b) $y' - 3x^2y = x^5 + x^2$, $y(0) = 1$,

   (c) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

   (d) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 2$,

   (e) $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$,

   (f) $y' + 2xy = 2x^3y^3$,

   (g) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$,

   (h) $y' - \frac{1}{3}y \sin x = y^4 \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4. Решите уравнения в полных дифференциалах:

   (a) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$,

   (b) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$,

   (c) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} = 0$,

   (d) $(3x^2y - 4xy^2)dx = +(x^3 - 4x^2y + 12y^3) = 0$,

(e) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdx+ydy}{x^2} = 0$,

(f) $\frac{3x^5+2y^3}{x^3y^2}dx - \frac{2x^5+y^3}{x^2y^3}dy = 0$,

(g) $(2xy - \ln y)dx + \left(x^3 + 1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

6.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестну.ю функцию и её производные

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

Определение. *Решением дифференциального уравнения второго порядка называется всякая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.*

Рассмотрим уравнение $y''=f(x)$. Последовательно два раза возьмем неопределённый интеграл

$$y'=\int f(x)dx+C_1,\quad y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2.$$

В результате получим функцию y, которая содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Решение уравнения можно записать в виде

$$y=\varphi(x,C_1,C_2),\quad \Phi(x,y,C_1,C_2)=0.$$

При решении дифференциального уравнения, полученного для конкретной задачи, нужно получить единственный ответ, требуемое условие задачи. Для выделения его используется начальное условие задачи. Начальные условия для уравнения второго порядка имеют вид

$$y=y_0,\quad y'=y_0'\quad \text{при}\quad x=x_0.$$

Числовые значения C_1 и C_2 находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2),\\ y_0'=\varphi'(x_0,C_1,C_2)\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Phi(x_0,y_0,C_1,C_2)=0,\\ \Phi_y'(x_0,C_1,C_2)\cdot y_0'+\Phi_x(x_0,y_0,C_1,C_2)=0.\end{cases}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Дано дифференциальное уравнение второго порядка вида $y''=f(x,y,y')$ и даны начальные условия $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=x_0$. Если правая часть такова, что:*

1. *функция $f(x,y,y')$, рассматриваемая как функция трёх аргументов x, y, y', непрерывна в окрестности точки (x_0,y_0,y'_0);*

2. *функция $f(x,y,y')$ имеет ограниченные частные производные по аргументам y и y' в окрестности точки (x_0,y_0,y'_0), то существует единственное решение данного уравнения, определенное в некотором промежутке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ и удовлетворяющее начальным условиям.*

Определение. *Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется общий вид таки решений уравнения, которые соответствуют каждой допустимой совокупности начальных условий.*

6.2. Способы понижения порядка дифференциальных уравнений

Для некоторых частных типов уравнений второго порядка можно введением новой переменной понизить порядок уравнения.

1. Дифференциальное уравнение второго порядка не содержит искомой функции y

$$F(x,y',y'')=0.$$

Введём новую функцию z, положив $z=y'$. Тогда $z'=y''$ и уравнение превратится в уравнение первого порядка

$$F(x,z,z')=0.$$

Решив его получаем,

$$z=\varphi(x,C_1).$$

Сделав обратную замену z на y', имеем

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

2. Дифференциальное уравнение второго порядка на содержит независимой переменной

$$F(y,y',y'')=0.$$

Возьмём в качестве независимой переменной y. Положим, что $z=y'$. Тогда

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z.$$

В этом случае исходное уравнение теперь можно записать в виде

$$F\left(y,z,z\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Решив его получаем, что

$$z = \varphi(x,C_1) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x,C_1).$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{\varphi(x,C_1)} = dx.$$

Откуда следует, что

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнения:

   (a) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$,

   (b) $y'' = \sqrt{y}$,

   (c) $y'' = ay'$,

   (d) $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)$,

   (e) $y'' = 1 + \frac{x(y'-x)}{1-x^2}$,

   (f) $1 + y'^2 = 2yy''$,

   (g) $yy'' = y'\sqrt{1 + y'^2}$.

2. Выделите частное решение уравнения

   $$y^3 y'' + 1 = 0$$

   по начальным условиям

   $$y = 1 \quad \text{и} \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

3. Выделите частное решение уравнения

   $$yy'' + y'^2 = 1$$

   по начальным условиям

   $$y = 1 \quad \text{и} \quad y' = -1 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

4. Выделите частное решение уравнения

   $$3yy'y'' = 1 + y'^3$$

   по начальным условиям

   $$y = 1 \quad \text{и} \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения этого уравнения, то функция $ay_1 + by_2$, где a и b –любые постоянные множители, также решение уравнения. Проверим это.

Действительно, подставим $ay_1 + by_2$ в заданное уравнение. Имеем

$$[ay_1 + by_2]'' + p(x)\,[ay_1 + by_2]' + q(x)\,[ay_1 + by_2] = a(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + b(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0.$$

Определение. *Две функции называются линейно зависимыми ы промежутке* $[x_1,x_2]$, *если существуют такие постоянные* a_1 *и* a_2, *из которых хотя бы одна отлична от нуля, что для всех* $x \in [x_1,x_2]$ *имеет место тождество*

$$a_1y_1 + a_2y_2 = 0.$$

Иначе, что отношение функций $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{a_2}{a_1}$ *– постоянная величина.*

Для двух функций рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1',$$

называется определителем Вронского или вронскиан.

Справедлива теорема

Теорема. *Если функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *линейно зависимы в* $[x_1,x_2]$, *то их вронскиан тождественно равен нулю в* $[x_1,x_2]$.

Доказательство. По определению существуют постоянные a_1 и a_2, из которых одна обязательно отлична от нуля, пусть это a_1. Тогда имеет место тождество

$$a_1y_1(x) = a_2y_2(x) = 0.$$

Отсюда $y_1(x) = -\frac{a_2}{a_1}y_2(x)$, $y_1'(x) = -\frac{a_2}{a_1}y_2'$. Подставим эти выражения в определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{a_2}{a_1}y_2(x) & y_2 \\ -\frac{a_2}{a_1}y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

□

Таким образом, общее решение уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

можно представить в виде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Выполняется следующая

Теорема. *Если $y_1(x)$ и $y_1(x)$ – два линейно независимых решения линейного однородного уравнения, то выражение*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, содержит все решения уравнения.

Доказательство. Возьмём любые начальные условия: при $x = x_0$ известны значения $y = y_0$ и $y' = y_0'$. Возможно ли подобрать числовые значения C_1 и C_2 так, чтобы функция $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ задавала решение, определяемое начальными условиями

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \\ y_0' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x). \end{cases}$$

Получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Для Разрешимости такой системы достаточно, чтобы определитель из коэффициентов при неизвестных не равнялся нулю. Этот определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

есть вронскиан, вычисленный при $x = x_0$. По условию $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, то их вронскиан отличен от нуля ($\Delta \neq 0$).

Таким образом, система разрешима относительно C_1 и C_2. □

Итак, всякие два линейно независимых решения однородного уравнения образуют фундаментальную систему решений.

7.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, в котором коэффициенты p и q постоянные величины:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p = const, \quad q = const. \qquad (*)$$

Решением этого уравнения может быть только такая функция, производные которой подобны ей самой. Такой особенностью обладает только показательная функция.

Лемма. *Если число k является корнем уравнения*

$$k^2 + pk + q = 0,$$

то функция e^{kx} является решением уравнения $(*)$.

Доказательство. Положим $y = e^{kx}$ и найдём производные $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Подставляя y, y' и y'' в уравнение $(*)$, получаем

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$\square$

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

называется характеристическим уравнением линейного дифференциального уравнения $(*)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = u(x) + iv(x)$. Предположим, что $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы. Определим её производную

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Лемма. *Если комплексная функция $f(x) = u(x) + iv(x)$ является решением уравнения* $(*)$*, то каждая из вещественных функций $u(x)$ и $v(x)$ в отдельности также являются решением* $(*)$.

Доказательство. Подставим $f(x) = u(x) + iv(x)$ в $(*)$. Имеем

$$[u(x) + iv(x)]'' + p\,[u(x) + iv(x)]' + q\,[u(x) + iv(x)] =$$

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) + i\,[v''(x) + pv'(x) + qv(x)] = 0.$$

Комплексное число равно нулю только тогда, когда

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0,$$

$$v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

То есть $u(x)$ и $v(x)$ решения $(*)$.

$\square$

Справедлива следующая

Теорема. *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами может быть вида:*

a) если характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня k_1 и k_2, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

b) если характеристическое уравнение имеет два равных вещественных корня $k_1 = k_2$, то общее решение

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_1 x e^{k_1 x};$$

c) если характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\beta \neq 0$, то

$$y = e^{kx}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Доказательство.

a) Пусть характеристическое уравнение имеет два вещественных корня k_1 и k_2. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ являются решениями $(*)$. Эти два решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq 0.$$

b) Пусть характеристическое уравнение имеет два равных вещественных корня. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$ – решение уравнения $(*)$. Составим $y_2 = x e^{k_1 x}$. Вычислим её производные:

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}, \quad y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Подставим y_2, y_2' и y_2'' в левую часть уравнению $(*)$:

$$2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + p\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + q x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left[(k_1^2 + pk_1 + q)x + 2\left(k_1 + \frac{p}{2}\right)\right].$$

По условию $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. Так как k_1 – корень кратности 2, то $k_1 = -\frac{p}{2}$, то и $k_1 + \frac{p}{2} = 0$, $y_2 = x e^{k_1 x}$ – решение и

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq const.$$

c) Пусть имеем два сопряженных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. Тогда $z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $z_2 =^{(\alpha-\beta i)x}$ – решение уравнения $(*)$. Воспользуемся формулой Эйлера

$$z_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad z_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Отсюда

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

решения $(*)$. Так как $\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{ctg}\beta x \neq const$, то y_1 и y_2 линейно независимы.

Таким образом, общим решением будет

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C - 2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

□

Пример. *Найдите общее решение уравнения*

$$y'' + 8y' + 25y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 8k + 25 = 0,$$

решением которого будут

$$k_1 = -4 + 3i, \quad k_2 = -4 - 3i, \quad \alpha = -4, \quad \beta = 3.$$

Тогда общим решением будет

$$y = e^{-4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$$

□

7.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p = const, \quad q = const.$$

В качестве правой части будем рассматривать различные функции.

1. Пусть $f(x)$ – многочлен степени n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

В этом случае решение уравнения нужно искать в виде многочлена, подобрав соответствующим образом его степень и коэффициенты.

(a) Предположим, что $q \neq 0$. Тогда решение удобно искать в виде многочлена той же степени, что и $f(x)$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n.$$

Подставляя его в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях находим $g(x)$.

(b) Предположим, что $q \neq 0$, $p \neq 0$. В этом случае отсутствует в левой части член с y. Поэтому невозможно $g(x)$ искать в виде многочлена той же степени, что и $f(x)$. Будем брать $g(x)$ степени на единицу больше

$$g(x) = x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n).$$

(c) Предположим, что $p = 0$, $q = 0$. В этом случае у левой части отсутствуют члены с y и y'. В этом случае $g(x)$ будет иметь вид

$$g(x) = x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n).$$

2. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Будем искать решение исходного уравнения в виде

$$g(x) = e^{\alpha x} u,$$

где u – некоторый множитель, вид которого необходимо определить.

Вычислим производные функции $g(x)$:

$$g'(x) = \alpha e^{\alpha x} u + e^{\alpha x} u', \quad g'' = \alpha^2 e^{\alpha x} u + 2\alpha e^{\alpha x} u' + e^{\alpha x} u''.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение, получим

$$\alpha^2 e^{\alpha x} u + 2\alpha e^{\alpha x} u' + e^{\alpha x} u'' + p(\alpha e^{\alpha x} u + e^{\alpha x} u') + q e^{\alpha x} u = e^{\alpha x} P_n(x).$$

После преобразования будем иметь

$$(\alpha^2 + p\alpha + q)u + (2\alpha + p)u' + u'' = P_n(x).$$

Для равенства левой и правой части необходимо, чтобы и в левой части был многочлен.

(a) Если число α не является корнем характеристического уравнения для однородного уравнения, то $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$. В этом случае $g(x)$ будет иметь вид

$$g(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n).$$

(b) Если число α – корень кратности 1, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, а $2\alpha + p \neq 0$. Тогда

$$u = x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n),$$

а

$$g(x) = e^{\alpha x} x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n).$$

(c) Если α – корень кратности 2, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$. Тогда

$$u = x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$$

и

$$g(x) = e^{\alpha x} x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n).$$

Пусть даны два дифференциальных уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$
$$y'' + py' + qy = f_2(x).$$

Тогда сумма решений приведённых уравнений есть решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

3. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, а $Q_m(x)$ – степени m.

Заменим $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ по формулам Эйлера

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} + Q_m(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\right),$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}\left(P_n(x)+iQ_m(x)\right) + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}\left(P_n(x)+iQ_m(x)\right).$$

Тогда решение будем искать в виде

$$g(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}R_p(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}T_p(x),$$

если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения или

$$g(x) = x\left(e^{(\alpha+i\beta)x}R_p(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}T_p(x)\right),$$

если $\alpha \pm i\beta$ корень характеристического уравнения. Здесь $R_p(x)$ и $T_p(x)$ – это многочлены степени p, где $p = \max\{n,m\}$.

Осталось заменить функции $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$ по формуле Эйлера. Тогда имеем

$$g(x) = e^{\alpha x}\left(L_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x\right)$$

и

$$g(x) = xe^{\alpha x}\left(L_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x\right),$$

где $L_p(x)$ и $S_p(x)$ многочлены с вещественными коэффициентам.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите общее решение уравнений

   (a) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

   (c) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

   (d) $y'' + 9 = 0$.

   (e) $y'' + 2y' = 0$.

   (f) $y''' - 8y = 0$.

   (g) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

2. Выделите частное решение уравнений

   (a) $y'' + y = 0$, при начальных условиях $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

   (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ при начальных условиях $y = y' = 1$ при $x = 0$.

3. Найдите общее решение уравнений

   (a) $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1$.

   (b) $y'' + 2y = 24x$.

   (c) $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1$.

8. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Основные понятия

Определение. *Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.*

Общий вид системы первого порядка, содержащей n искомых функций y_1, y_2, …, y_n следующий

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n') = 0. \end{cases}$$

Если система дифференциальных уравнений разрешается относительно производной, то она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n). \end{cases}$$

Такая система называется нормальной системой дифференциальных уравнений. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Решением системы является совокупность из n функций: y_1, y_2, …, y_n, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальными условиями системы будут соотношения:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \ldots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

В этом случае задача Коши для системы дифференциальных уравнений ставится как: найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям.

Теорема. (Теорема Коши) *Если в системе дифференциальных уравнений все функции $f_i(x,y_1,\ldots,y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D $(n+1)$- мерного пространства, то в каждой точке $M_0(x_0,y_1^0,\ldots,y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, …, $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющие начальным условиям*

Изменяя в области D точку M_0, получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных

$$y_1 = \varphi_1(x,C_1,\ldots,C_n), \quad \ldots, \quad yy_n = \varphi_n(x,C_1,\ldots,C_n).$$

Такое решение является общим ,если по заданным начальным условиям можно однозначно определить постоянные C_1, C_2, …, C_n из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Определение. *Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, …, C_n называется частным решением.*

8.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений является метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Пусть задана система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n). \end{cases} \tag{$*$}$$

Продифференцируем по x, например, первое уравнение системы

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство соотношения из $(*)$, получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,y_1,\ldots,y_n).$$

Дифференцируя полученное выражение ещё раз и заменив

$$\frac{dy_1}{dx}, \ \ldots, \ \frac{dy_n}{dx_n},$$

получаем

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x,y_1,\ldots,y_n).$$

Продолжив этот процесс до порядка n, найдём

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x,y_1,\ldots,y_n).$$

Соберём полученное уравнение в систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n). \end{cases} \qquad (**)$$

Из первого $(n-1)$-го уравнения системы $(**)$ выразим функции y_2, …, y_n через x, функцию y_1 и её производную y_1', y_1'', …, $y_1^{(n-1)}$. Получим

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{n-1}), \\ y_3 = \psi_3(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \psi_n(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{n-1}). \end{cases} \qquad (***)$$

Все найденные значения подставим в последнее уравнение системы $(**)$. Таким образом, получим одно уравнение n-го порядка относительно искомой функции $y_1(x)$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n)}).$$

Пусть его общим решением будет

$$y_1 = \varphi_1(x,C_1,\ldots,C_n).$$

Продифференцировав его n раз и подставив в $(***)$, найдём функции y_2, …, y_n

$$y_2 = \varphi_2(x,C_1,\ldots,C_n),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x,C_1,\ldots,C_n).$$

Пример. *Решите систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы

$$y'' = 4y' - 3z'.$$

Подставим $z' = 2y - 3z$, $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$. Откуда

$$y'' - 4y' + 6y = 9z.$$

Составим систему

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' = 4y' - 6y + 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим z через y и y'

$$z = \frac{4y - y'}{3}.$$

Подставив во второе уравнение системы, будем иметь

$$y'' - 4y + 6y = 9\frac{4y - y'}{3}.$$

Иначе $y'' - y' - 6y = 0$. Решение полученного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Найдём z: $y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$. Тогда

$$z = 2C_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} C_2 e^{3x}.$$

□

8.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для иллюстрации метода интегрирования системы дифференциальных уравнений ограничимся тремя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_n. \end{cases} \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты a_{ij} $(i{,}j = 1,2,3)$ – постоянные. Частное решение системы $(*)$ будем искать в виде

$$y_1 = \alpha r^{kx}, \quad y_2 = \beta e^{kx}, \quad y_3 = \gamma e^{kx},$$

где α, β и γ – постоянные, которые нужно подобрать так, чтобы функции y_1, y_2, y_3 удовлетворяли системе.

Подставим эти функции в систему $(*)$ и сократив на $e^{kx} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно рассматривать как однородную систему трёх алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β и γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель её был равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Определение. *Уравнение $(**)$ называется характеристическим уравнением системы $(*)$.*

Полученное уравнение – это уравнение третьей степени. Рассмотрим возможные случаи:

1. корни характеристического уравнения действительны и различны: k_1, k_2, k_3. Для каждого корня k_i $(i = 1,2,3)$:

   (a) для корня k_1: $y_1^1 = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $y_2^1 = \beta_1 e^{k_1 x}$, $y_3^1 = \gamma_1 e^{k_1 x}$;

   (b) для корня k_2: $y_1^2 = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $y_2^2 = \beta_2 e^{k_2 x}$, $y_3^2 = \gamma_2 e^{k_2 x}$;

   (c) для корня k_3: $y_1^3 = \alpha_3 e^{k_3 x}$, $y_2^3 = \beta_3 e^{k_3 x}$, $y_3^3 = \gamma_3 e^{k_3 x}$;

   таким образом, получили функциональную систему, общее решение которой запишем в виде:

   $$y_1 = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_1 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x},$$
   $$y_2 = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_1 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x},$$
   $$y_3 = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_1 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x};$$

2. корни характеристического уравнения разные, но сре них есть комплексные

   $$k_1 = a + ib, \quad k_2 = a - ib, \quad k_3.$$

   В этом случае частное решение определяется также как и в первом случае;

3. характеристическое уравнение имеет корень k крайности m ($m = 2, 3$). Решение системы соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

   (a) $m = 2$, то

   $$y_1 = (A + Bx)e^{kx}, \quad y_2 = (C + Dx)e^{kx}, \quad y_3 = (E + Fx)e^{kx};$$

   (b) $m = 3$, то

   $$y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}, \quad y_2 = (D + Cx + Ex^2)e^{kx}, \quad y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}.$$

   Постоянные определяются методом неопределённых коэффициентов.

Задания для самостоятельной работы

Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{1}{x}. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = x. \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение курса математического анализа помимо решения "тактических" задач, связанных с непосредственным изучением понятий и методов математического анализа, играет важную роль и в решении "стратегической" задачи привития общей математической культуры, включающей умение давать чёткие определения, строго формулировать доказываемые утверждения и строить корректные доказательства.

Все темы пособия заслуживают полного и глубокого изучения. Безусловно, настоящее издание не сможет заменить учебники по полноте представленного материала. Однако студентам оно будет интересно тем, что в одном пособии изложен как теоретический материал, так и даны решения примеров и задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Георгий Николаевич Берман – [22-е изд.] – Москва : Кнорус, 2021 – 432 с. – ISBN 978-5-4365-0169-7.

[2] Бохан, К.А. Курс математического анализа. В 3-х томах. В 2-х томах. Том 1 / К.А. Бохан, И.А, Егорова, К.В. Лащенов – Москва : Просвещение, 1966. – 381 с.

[3] Геворкян, П.С. Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения. В 2-х частях. Часть 2 / Павел Самвелович Геворкян. – Москва : МАИК, 2007 – 272 с. – ISBN 978-5-9221-0710-5.

[4] Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Борис Павлович Демидович – [21-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2019 – 624 с. – ISBN 978-5-8114-3985-0.

[5] Зорич, В.А. Математический анализ. В 2-х частях. Часть 1 / Владимр Антонович Зорич. – [10-е изд., исп.] – Москва : МЦНМО, 2020 – 576 с. – ISBN 978-5-4439-4030-4.

[6] Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х частях. Часть 1 / Григорий Михайлович Фихтенгольц. – [11-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2020 – 464 с. – ISBN 978-5-8114-5339-9.

[7] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Том 1 / Григорий Михайлович Фихтенгольц. – [15-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2021. – 608 с. – ISBN 978-5-8114-7061-7.

Учебное электронное издание

ТИХОМИРОВ Роман Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных.
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Издаётся в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт, кафедра ФМОиИТ
romat81@yandex.ru